ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Мартыненко И.М., Казакевич В.А., Куранова О.В.

The new method of problem solving of Cauchy for differential second-kind equations with variable coefficients is offered which rests on a reduction of this equation to the equation Rickati. The solution last is under construction on the basis of a method of a linearization. The estimates of approximation of the precise and approximate solution are given.

Рассмотрим задачу Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

$$y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = 0 \qquad (1)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y_1 \qquad (2)$$

Будем предполагать, что $y_0 \neq 0$ (этого всегда можно достичь с помощью замены

$y(x) = z(x) + \alpha,\ \alpha = const \neq 0)$, а коэффициенты $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы существования о единственности решения задачи (1) — (2) [1,2].

Внесем в (1) — (2) замену

$$u(x) = y'/y \qquad (3)$$

имеем

$$y' = u(x)y(x)$$

$$y'' = u'(x)\,y(x) + u(x)y'(x) =$$

$$= u'(x)\,y(x) + u^2(x)\,y(x)$$

Поэтому задача (1) — (2) преобразуется к следующему виду:

$(u'(x) + u^2(x))\,y(x) + \varphi(x)u(x)y(x) + \psi(x)y = 0$

или

$$u'(x) + u^2(x) + \varphi(x)u(x) + \psi(x) = 0 \qquad (4)$$

$$u(x_0) = u_0, \quad u_0 = \frac{y_1}{y_0} \qquad (5)$$

Таким образом, исходная задача Коши (1) — (2) приведена к задаче Коши для уравнения Риккати (4) — (5), которую будем решать с помощью следующего метода линеаризации. Для этого заменим в (4) нелинейный член u^2 на κu, где $\kappa = u_0$ и обозначим через u решение такой задачи:

$$\tilde{u}(x) + (k + \varphi(x))\tilde{u} + \psi(x) = 0 \qquad (6)$$

$$\kappa = u_0;\ u_0 = u(x_0) \qquad (7)$$

В силу известной формулы [1,2] решение уравнения (6) представимо в виде:

$$u(x) = e^{-\int_{x_0}^{x}(k+\varphi(\xi))d\xi}\Big[C - \int_{x_0}^{x}(\varphi(x)e^{\int(k+\varphi(\xi))d\xi}dx\Big] \qquad (8)$$

где С — произвольная постоянная , определяемая из условия (7):

$$C = u_0$$

Поэтому

$$u(x) = e^{\int_{x_0}^{x}\varphi(x)dx}e^{\kappa(x-x_0)}\Big[u_0 - \int_{x_0}^{x}\psi(x)e^{\kappa(x-x_0)}e^{\int\varphi(x)dx}dx\Big] \quad (9)$$

Оценим близость точного и приближенного решений задачи (4) — (5) и для этого перепишем их в интегральной форме. Обозначим

$$z(x) = u(x) - \tilde{u}(x) \qquad (10)$$

$$u(x) = u_0 - \int_{x_0}^{x}\{u^2 + \varphi(x)u(x) + \psi(x)\}dx \qquad (11)$$

Тогда

$$|z(x)| = \left|\int_{x_0}^{x}[(u^2 - \tilde{u}^2) + (\tilde{u}^2 - u_0^2) + (u_0^2 - u_0\tilde{u}) +\right.$$

$$\left. + \varphi(x)(u - \tilde{u})]dx\right| \leq C\left|\int_{x_0}^{x}|z(\xi)d\xi|\right| + F(x) \qquad (12)$$

где

$$F(x) = \left|\int_{x_0}^{x}(|\tilde{u}^2 - u_0^2| + |u_0^2 - u_0\tilde{u}|)dx\right|, \quad C = const > 0 \quad (13)$$

Пусть

$$R(x) = \int_{x_0}^{x}|z(x)|\,dx \qquad (14)$$

Тогда (12) может быть записана в таком виде:

$$\frac{dR}{dx} - CR(x) \leq F(x) \qquad (15)$$

Умножим обе части неравенства (15) на e^{-Cx} и проинтегрируем полученный результат по x:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{d}{dx}(R(x)e^{-cx})dx \leq \int_{x_0}^{x}F(x)e^{-cx}dx \qquad (16)$$

Из (13) и (14) вытекает, что $F(x_0) = 0$, $R(x_0) = 0$ и поэтому (16) принимает такой вид:

$$R(x)e^{-Cx} \leq \int_{x_0}^{x}F(\xi)e^{-C\xi}d\xi$$

или

$$R(x) \leq \int_{x_0}^{x}F(\xi)e^{c(x-\xi)}d\xi \qquad (17)$$

Формула (17) устанавливает искомую интегральную близость точного и приближенного решений уравнения (14) в зависимости от $u - u_0$.

Из (14) имеем: после интегрирования по частям:

$$R(x) \le -\frac{1}{C}F(x) + \frac{1}{C}\int_{x_0}^{x} F'(\xi)e^{c(x-\xi)}d\xi \quad (18)$$

или

$$R(x) + \frac{1}{C}F(x) \le \frac{1}{C}\int_{x_0}^{x} F'(\xi)e^{c(x-\xi)}d\xi$$

Откуда в силу неравенства (12) имеем такую оценку близости решений уравнений (4) и (6):

$$|z(x)| \le \frac{1}{C}\int_{x_0}^{x} (|\tilde{u}^2 - u_0^2| + |u_0^2|(|u_0 - \tilde{u}|)dx \quad (19)$$

Формула (19) представляет поточечную оценку близости u и u.

Приближенное решение $\tilde{y}$ исходного уравнения (1) находится по формуле (3). Для этого перепишем (3) так:

$$\frac{d}{dx}\ln\tilde{y} = \tilde{u}(x)$$

Откуда

$$\tilde{y} = y_0 e^{\int_{x_0}^{x}\tilde{u}(x)dx} \quad (20)$$

Тогда

$$y - \tilde{y} = y_0(e^{\int_{x_0}^{x}u(\xi)d\xi} - e^{\int_{x_0}^{x}\tilde{u}(\xi)d\xi}) =$$

$$= y_0 e^{\int_{x_0}^{x}\tilde{u}(\xi)d\xi}[e^{\int_{x_0}^{x}u(\xi)-\tilde{u}(\xi)d\xi} - 1] \quad (21)$$

Поэтому

$$|y - \tilde{y}| \le |y_0|e^{\int_{x_0}^{x}\tilde{u}(\xi)d\xi}|\ e^{\int_{x_0}^{x}(u-\tilde{u})d\xi} - 1\ |$$

Эта формула позволяет оценить близость точного и приближенного решений задачи (1)-(2).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Э.Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. –М. «Наука», 1965 г.
2. Я.Б.Лопатинский. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Киев. «Више школа», 1984.

ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СВОБОДНЫХ И ЛОКАЛИЗОВАННЫХ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В ОБЪЕКТАХ С ИНДУЦИРОВАННОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Гусев О.К.

In this work the procedure of measurement of charge carrier parameters in non-homogeneous object of measurement — monocrystal indium arsenide with inversion channels on the surface is proposed.

Analysis that was held shows that using of integral characteristic of formation process of complex integral galvanomagnet measurement signal in selected object allows us to determinate local parameters of free charge carriers in the volume and in surface channel of crystal, and also of localized charge carriers on the surface and in oxide film together with separation on positive and negative sign components.

Discussed methods can be interpreted as realization of the model of non-homogeneous object described as superposition of areas with homogeneous charge carrier parameters. Measurement procedure includes selection of regime of measurements, identification of charge carrier type in corresponding homogeneous area, and measurement based on homogeneous object model.

Неоднородность электрофизических параметров[1], отсутствие адекватной модели объекта [2] и соответствующих ей методов измерений [3] концентрации и подвижности носителей заряда в монокристаллическом арсениде индия, легированном акцепторной примесью, привели к тому, что до конца 80-х годов отсутствовали сколько-нибудь достоверные данные об изменении концентрации и подвижности носителей заряда в нем при различных внешних воздействиях: от технологических до эксплуатационных. ЭДС Холла, получившая в данном материале название «аномальной», обнаруживала двойную инверсию знака в процессе охлаждения и имела при низких температурах знак, противоположный классическому полупроводнику с дырочным типом проводимости. Однако природа эффекта была невыясненной, а его использование для измерений в рамках модели однородного объекта приводило к противоречивым и невоспроизводимым результатам [3].

В работах [4-6] предложена модель аномального эффекта Холла в узкозонных полупроводниковых соединениях, включающая модель качественно неоднородного объекта исследования в виде кристалла с инверсионными каналами на поверхности, обусловленными собственными поверхностными состояниями.

На рис. 1 показаны экспериментальные зависимости ЭДС Холла от тока в кристаллах *InAs*, легированных цинком, при температуре 77 К. Согласно разработанной модели, в области малых (до 10^{-4}-10^{-3} А) электрических токов проводимость осуще-