этого необходимо предложить обучаемым выбрать соответствующий раздел теории и ознакомиться с теорией, после этого перейти к соответствующему тренировочному режиму решения задач. При этом, тем обучаемым, которые допускали значительное количество ошибок, следует предложить обратится еще раз к теории, которая доступна и из тренировочного режима. Некоторые темы можно изучать, используя принцип проблемного обучения. В этом случае обучаемым предлагается выполнить контрольное задание в тренировочном режиме, при этом можно воспользоваться подсказками, исправлять ошибки в процессе решения, получить правильный ответ (решение), и после этого самостоятельно сформулировать основные теоретические положения.

Электронный учебник MathTeachTest можно использовать при дистанционном обучении, а также для самостоятельной работы обучаемых при очном или заочном обучении. Теоретическая часть учебника полностью соответствует учебному пособию [2] и дополнена справочным материалом. Тренировочный режим задачника позволяет обучаемым самостоятельно изучить и получить практические навыки решения задач. Использование контрольного режима задачника позволяет, с одной стороны, обучаемому осуществлять тематический самоконтроль, с другой стороны, педагогу контролировать процесс обучения.

ЛИТЕРАТУРА:

1) Таўгень І.А. Вучэбна-метадычны комплекс як аснова дыдактычнага забеспячэння тэхналогій дыстанцыйнага навучання // Минск, «Весці БДПУ імя М.Танка», N%3, 2003.
2) Тавгень О.И., Тавгень А.И. Методы решения задач по математике. т.1.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНИМОГО ВРЕМЕНИ В РЕАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

Немцов В.Б.

The methodical aspects of the teaching of the mechanical problems with imaginary time are discussed on the two examples (WKB approximation and sound absorption at high frequency).

Механика, преподаванию которой посвящена наша жизнь, имеет актуальную и широкую область применения. Об этом свидетельствуют и наши научные разработки, в которых используются методы механики (теоретическая механика, механика сплошных сред и другие ее разделы).

Но все ли мы знаем о возможностях механики?

Рассмотрим простую задачу одномерного движения вдоль оси x материальной точки в потенциальном поле. Движение точки подчиняется закону сохранения механической энергии

$$\frac{m\upsilon^2}{2}+U(x)=E. \qquad (1)$$

Здесь E — механическая энергия, являющаяся константой движения, $U(x)$ — потенциальная энергия, m — масса материальной точки, υ — ее скорость.

На основании (1) скорость материальной точки определяется соотношением

$$\upsilon=\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))} \qquad (2)$$

или

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}\,. \qquad (3)$$

Последующее интегрирование приводит к результату

$$t=\pm\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}\,. \qquad (4)$$

Мы убеждены в том, что под знаком корня должна быть положительная величина. Это реализуется при $E>U(x)$ и тем самым определяется область, в которой возможно движение. В точках оси x, где $E=U(x)$, скорость обращается в нуль и поэтому эти точки называются точками остановки.

В области, где $U(x)>E$ под знаками корня оказывается отрицательная величина. В этом случае скорость и время представляют собой мнимые величины. Тогда говорят, что область, в которой $U(x)>E$ является классически недоступной областью.

"Это аналогично переходу волновой оптики (или волновой акустики) в геометрическую оптику (акустику) при стремлении длины волны к нулю. Конечно же, имеется в виду асимптотический переход к малым длинам волн, так что определить конкретную длину волны, ниже которой описание затруднительно, не имеет большого смысла.

Переход волновой акустики в геометрическую акустику важен при описании поведения среды при очень высоких частотах, для которых период колебаний также стремится к нулю. Возникает задача, где компьютерный подход в молекулярно-динамическом описании наталкивается на значительные трудности, так как время вычисления стремится к бесконечности. В этих случаях эффективен аналитический подход, основанный на асимптотических методах.

Но вернемся к нашей задаче. Оказывается [1], что волновая функция ψ в классически недоступных областях пространства описывается с помощью мнимой скорости, которая вычисляется с помощью классического закона сохранения энергии (2),

$$\psi = \frac{c_1}{\sqrt{m|\upsilon|}}\exp(-\frac{1}{\hbar}\int m|\upsilon|dx) + \frac{c_2}{\sqrt{m|\upsilon|}}\exp(\frac{1}{\hbar}\int m|\upsilon|dx), \quad (5)$$

где c_1 и c_2 произвольные постоянные, и в формуле содержится модуль мнимой скорости.

Рассматриваемый пример отвечает так называемому ВКБ-приближению, представляющему собой асимптотический метод решения уравнения Шредингера. Этот метод широко используется при построении асимптотического решения дифференциальных уравнений, содержащих большой параметр (см., напр., [2]).

Таким образом, преодоление опасения рассматривать мнимые скорости привело к разработке эффективных методов асимптотического решения дифференциальных уравнений. Указанные методы успешно используются при решении задач о равновесии тонких и даже толстых оболочек, где большим параметром является отношение R/h, причем R - радиус кривизны оболочки, h — ее толщина [3].

Другая, не менее интересная задача состоит в установлении асимптотики корреляционной функции силы взаимодействия двух частиц в области высоких частот. Эта задача связана с описанием вибрационной релаксации и поглощения звука [4].

В работе Л.Д.Ландау и Э.Теллера, носящей скромное название: «К теории поглощения звука», рассматривается проблема асимптотической оценки интеграла

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{i\omega t} \qquad \text{при } \omega \to \infty .$$

Здесь F — корреляционная функция силы взаимодействия двух частиц, ω — частота. Для вычисления интеграла осуществляется аналитическое продолжение функции $F(t)$ в положительную мнимую полуплоскость. Контур интегрирования в этой комплексной плоскости сдвигается на величину, определяемую особыми точками функции $F(t)$ (см. также [5]).

В итоге асимптотическая оценка интеграла при больших ω имеет вид

$$I(\omega) \propto e^{-\omega t^*}, \quad (6)$$

где $t = it^*$ — мнимая величина (мнимое время), характеризующая положение особой точки функции $F(t)$. Указанное время находится из уравнения (4) при $U > E$, при этом под знаком корня появляется отрицательная величина.

В простейшем случае, когда сила отталкивания определяется экспоненциальным законом $U(x) \sim A\exp(-x/a)$ получается асимтотика

$$I(\omega) \sim e^{-(\omega\tau)^{2/3}}, \quad (7)$$

причем τ некоторая константа времени (3).

В настоящее время этим методом рассмотрены другие формы парного отталкивательного потенциала, в частности $U(r) = Ar^{-n}$. Тогда [6]

$$I(\omega) \sim \omega^{\sigma}\exp(-(\omega\tau)^{\nu}), \quad (8)$$

где σ и ν дробные числа.

Мнимое время $t = it^*$ определяется интегралом

$$t^* = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{Ar^{-n} + \frac{l^2 r^{-2}}{2\mu} - E}}, \quad (9)$$

причем r_0 расстояние между частицами, при котором их относительная скорость равна нулю, l — момент импульса относительного движения двух частиц с приведенной массой μ.

Получаемая асимтотика позволяет дать правильное описание поведения корреляционной функции силы взаимодействия пары частиц в высокочастотной области, что важно в теории вибрационной релаксации. Подобный подход эффективен и для других корреляционных функций, описывающих диссипативные свойства среды при $\omega \to \infty$, при этом сплошная среда проявляет чисто упругие свойства.

Интересно, что рассматриваемое описание с помощью дробных степенных показателей характерно для современной теории фракталов.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика (нерелятивистская теория), М.: Наука, 1974. — 752 с.
2. М.В.Федорюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. — 352 с.
3. В.В.Новожилов. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. — 418 с.
4. Л.Д.Ландау. Собрание трудов, Т.1, стр. 181, М.: Наука, 1969. — 512 с.
5. М.В.Федорюк. Асимтотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. — 514 с.
6. M.Teubner // Phys Rev. E, vol. 65, 031204, 2002.