

балку и раму (рис. 5.1 б, в). Реакцию R_{B_1} направляем параллельно реакции R_A . Нагруженной является балка AB_1 . Используя для нее модель M_3 , получаем: $R_A = R_{B_1} = \frac{M}{l_1}$.

Переходим к анализу рамы. Нагрузкой для нее является сила R_{B_2} , равная и параллельная реакции R_{B_1} .

Переносим силу R_{B_2} параллельно на опору C ; получаем силу $F_C = R_{B_2} = \frac{M}{l_1}$ и пару $M_C = R_{B_2} a = \frac{Ma}{l_1}$. Напомним, что сила F_C и

пара M_C представляют новую нагрузку на раму (вместо R_{B_2}). Учитывая, что сила воспринимается одной опорой C , и опять используя модель M_3 , находим реакции опор. От действия силы F_C имеем: $R'_C = -F_C$, $R'_D = 0$; от действия пары M_C получаем: $R''_C = R''_D = \frac{M_C}{l_2} = \frac{Ma}{l_1 l_2}$ (рис. 5.1 г). Записываем окончательное выражение реакций связей:

$$R_A = \frac{M}{l_1}, \quad \vec{R}_C = \vec{R}'_C + \vec{R}''_C, \quad R_D = \frac{Ma}{l_1 l_2},$$

где $R'_C = \frac{M}{l_1}$, $R''_C = \frac{Ma}{l_1 l_2}$.

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КАЧЕНИЯ КОЛЕСА

Русан С.И.

In this article we give the description of the principles of studying the distribution of acceleration of wheel points. Cases of even and non even rolling on the plane and cylindrical surfaces are also examined. It is shown that in all the cases of movement the instantaneous centers of accelerations are determined only by geometrical parameters of a wheel and of a rolling surface. A comparative analysis of accelerations is given.

1. Общие замечания. В основу методики изучения качения колеса положим, следуя Н.Е. Жуковскому, формирование у студентов геометрических образов явления. Качение — едва ли не самое распространенное в технике и в быту движение; вместе с тем оно остается самым загадочным и богатым видом движения. Отсутствие в разделе «Кинематика» отдельного вопроса, посвященного качению, следует рассматривать как существенный пробел. Изучение качения целесообразно отнести в заключение темы «Плоскопараллельное движение тела». Поэтому здесь при изложении методики изучения вопроса будем предполагать, что студентами уже усвоены теоретические положения этой темы и, в частности, сформированы понятия о мгновенном центре скоростей (МЦС) и мгновенном центре ускорений (МЦУ). Следует отметить, что интерес к изучению ускорений не праздный: их распределение во всех случаях движения напрямую связано с распределением сил и, в конечном счете, с опаснос-

тью разрушения движущегося объекта. Особенности распределения кинематических характеристик качения колеса удобно изучать в сравнении с их распределением при вращательном движении вокруг неподвижной оси. Напомним, что центрами скоростей и ускорений называют точки тела, в которых их величины равны нулю. В случае вращательного движения тела эти центры совмещены в *одной неподвижной точке* — в геометрическом центре колеса, т.е. на его оси вращения. При переходе к качению единый центр раздваивается на центр скоростей P и центр ускорений Q , которые непрерывно изменяют свое положение и поэтому называются *мгновенными*. Можно представить и обратный процесс — сближение до совмещения двух мгновенных центров P и Q в единый неподвижный центр C . Это показано на рис. 1.1, где представлены различные стадии пробуксовки колеса — от качения без скольжения (рис. 1.1,а), до полной пробуксовки (рис. 1.1,г), равнозначной вращательному движению.

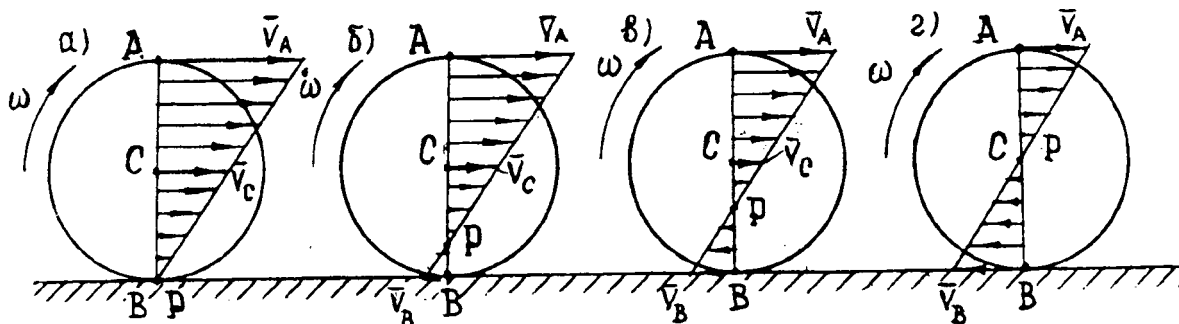


Рис. 1.1.

Рассмотрим более обстоятельно равномерное качение колеса без скольжения. Использование МЦС позволяет легко получить наглядную картину распределения скоростей (рис. 1.1,а). Простота решения задачи объясняется тем, что положение МЦС не зависит от кинематических параметров ω и ϵ . В дальнейшем будем уделять внимание преимущественно анализу ускорений, используя МЦУ.

2. Равномерное качение по плоскости. В этом случае скорости ω и ϵ постоянны, а ускорение ϵ равно нулю. Так как ускорение $a_C = 0$, то МЦУ находится в центре колеса. Распределение ускорений показано на рис. 2.1. Оно такое же, как и при равномерном вращательном движении вокруг оси, проходящей через точку С.

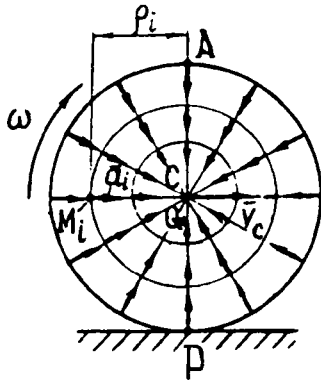


Рис. 2.1.

Равноудаленные от центра точки M_i имеют одинаковые по величине ускорения $a_i = \omega^2 r_i$ (2.1),

где r_i — расстояние точки M_i от центра С. Поскольку ускорения точек колеса, принадлежащих каждой окружности L_i равны между собой, то будем называть их *окружностями равных ускорений* (или *эквиускоренными окружностями*).

В случае вращательного движения колеса концентрические с ободом колеса окружности L_i являются абсолютными, а в случае качения — относительными траекториями точек M_i .

Абсолютные траектории этих точек при качении представляют собой выпуклые вверх кривые, называемые *циклоидами*. Из кинематики точки известно, что ускорение точки может быть направлено по касательной или в сторону вогнутости ее траектории. Между тем у пытливых студентов при мысленном наложении выпуклой вверх траектории точки на поле центростремительных ускорений (рис. 2.1) возникают сомнения, что ускорения точек нижней части колеса направлены именно так. Чтобы их рассеять, на рис. 2.2 показано ускорение произвольной точки M в нескольких положениях колеса и ее траектория. Как видно, ускорения в крайних положениях M_1, M_5 направлены по касательным к циклоиде, а в промежуточных — в сторону вогнутости. Скорость точки M во всех положениях направлена по касательной к кривой. Точки P_1, P_5 являются мгновенными центрами скоростей. Поэтому скорости точки M в положениях M_1, M_5 равны нулю.

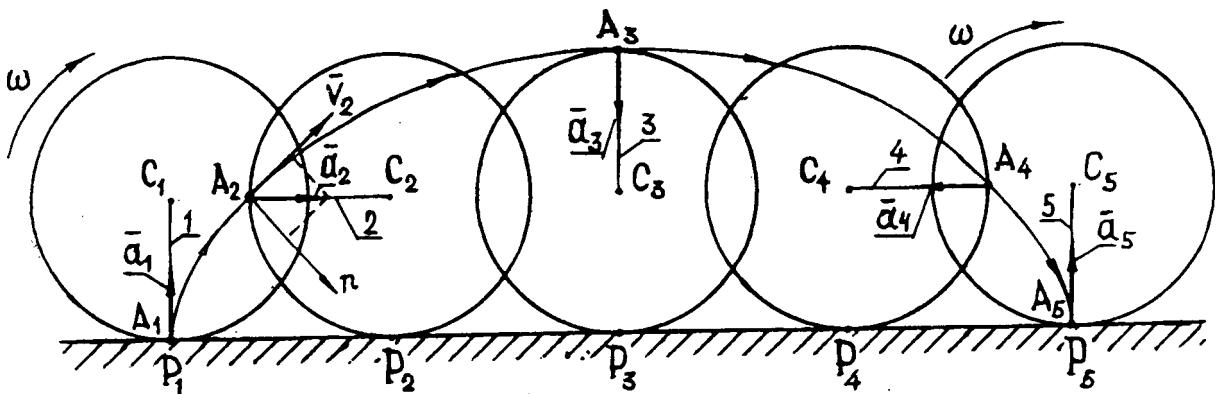


Рис. 2.2.

Установим характер движения точки по ее траектории. Разложив ускорение точки M на нормальную a_n и касательную a_t составляющие, например в положениях M_2 и M_4 (рис. 2.1), убеждаемся, что на участке $M_1 M_2 M_3$ направления a_t совпадают с направлениями скорости, а на участке $M_3 M_4 M_5$ — противоположны им. Это означает, что в первом случае точка M движется ускоренно, во втором — замедленно (иначе: точка из низшего положения M_1 «спешит» занять господствующее положение M_3 , а потом весьма неохотно опять опускается в низшее положение M_5). Обратим внимание, что при качении колеса вправо точка M при дви-

жении из положения M_1 в положение M_3 остается слева от вертикального диаметра. Отмеченные выше наблюдения справедливы как для точек отрезка $C_1 M_1$ при его движении в положение $C_3 M_3$, так и для всех других, которые поднимаются по восходящим ветвям своих траекторий. Отсюда замечательный вывод: *все точки, находясь в левой половине колеса при его качении вправо движутся ускоренно, а перейдя в правую — замедленно*. Как видим, даже при равномерном прямолинейном качении нет стабильности в стенках колеса. И только его центр движется спокойно. В этом и состоит одно из проявлений трудноописуемого богатства

движения. А вот еще одна «тайна». Любопытный студент попытается проверить ускорение a_1 (рис. 2.1) другим способом. Здесь мы определили его как центростремительное относительно МЦУ по формуле (2.1). По отношению к абсолютной траектории движения — циклоиде — ускорение a_1 является касательным и должно вычисляться по

формуле $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ (2.2). Но точка M_1 является мгновенным центром скоростей и, следовательно, $v = v_{M_1} = 0$; в этом случае по формуле (2.2) $a_\tau = a_1 = 0$. Где истина?

3. Равномерное качение по выпуклой цилиндрической поверхности. Обозначения геометрических параметров показаны на рис. 3.1.

Будем предполагать, что $r_1 = const$. В этом случае ускорение точки C не равно нулю. Так как $\omega \neq 0$, $\epsilon = 0$, то МЦУ находится на линии вектора a_c , т.е. на внутренней нормали траектории точки C . Как видим, изгиб поверхности качения S стал причиной смещения МЦУ из центра колеса. Установим, как далеко может смещаться точка Q . Величину ускорения центра C можно найти двумя способами: по формуле кинематики точки и по формуле плоского движения тела (когда известна точка Q_0). В первом случае $a_c = v_c^2 / R = (\omega \cdot r)^2 / R$ (3.1), во втором — $a_c = CQ_0 \omega^2$ (3.2). Из формул (3.1), (3.2) находим:

$$CQ_0 = \alpha \cdot r \quad (3.3)$$

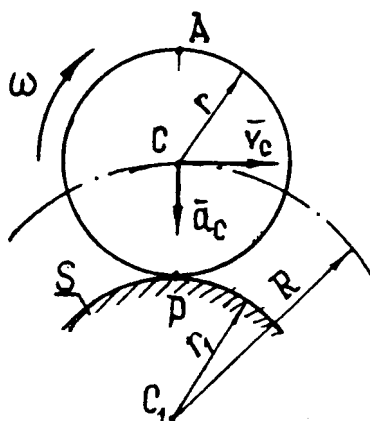


Рис. 3.1.

Коэффициент $\alpha = r/R$ показывает, какую часть радиуса колеса составляет расстояние CQ_0 от центра до МЦУ. Формула (3.3) приятно удивляет: положение МЦУ не зависит от угловой скорости колеса ω ! И поэтому МЦУ обладает теми же преимуществами, что и МЦС. При $r = const$ коэффициент α изменяется от нуля (при $r \rightarrow \infty$) до единицы (при $r \rightarrow 0$). Для этих предельных значений α по формуле (3.3) находим: $CQ_0 = 0$ и $CQ_0 = r$. Отсюда сделаем важный вывод: при качении колеса по выпуклой поверхности его МЦУ остается в пределах радиуса CP . Остановимся на предельном случае, когда $CQ_0 = r$ (рис. 3.2).

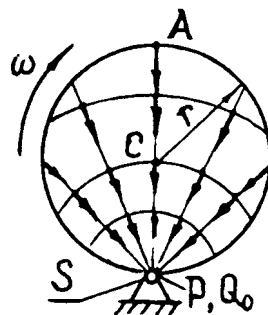


Рис. 3.2.

Цилиндрическая поверхность качения S вырождается в образующую, которая теперь служит осью вращения для колеса, т.е. плоское движение переходит во вращательное. Совпадающие при этом точки P и Q_0 представляют уже не мгновенные, а постоянные центры скоростей и ускорений. Пусть $r_1 = r$; тогда $\alpha = 1/2$ и согласно формуле (3.3) $CQ_0 = r/2$. На рис. 3.3 для этого случая построены эквивалентные концентрические окружности L_1, L_2, L_3 с центром в точке Q_0 .

Как и ранее, ускорения точек a_i вычисляются по формуле (2.1). Из рисунков 3.2, 3.3 видно, что радиус окружности L_i не может превышать значения $2r$.

Следовательно, наибольшее ускорение точки колеса равно $2\omega^2 r$; его может иметь точка A при $CQ_0 = r$. Как видим, наибольшее ускорение точки колеса при качении по выпуклой поверхности может вдвое превышать аналогичную величину при вращательном движении вокруг центральной оси или при качении по плоской поверхности.

4. Равномерное качение по вогнутой поверхности (рис. 4.1). Ускорение a_c и расстояние CQ_0 определяются приведенными выше формулами (3.1), (3.3), в которых $R = r_1 - r$.

При этом, как видно из рис. 4.1, радиус поверхности качения S ограничен: $r_1 > r$. МЦУ смещается, как и ранее, по направлению вектора a_c — вверх. Коэффициент α в формуле (3.3) изменяется от значений близких к нулю (при весьма больших радиусах r_1), до бесконечности (при $r_1 \rightarrow r$). Это означает, что при приближении центра C_1 кривизны поверхности S из бесконечности к центру колеса C точка Q_0 удаляется от этого центра в бесконечность и при этом неограниченно возрастают нормальные ускорения (в отличие от предыдущего случая).

Рассмотрим качение, когда $r_1 = 2r$, т.е. точка C_1 находится на ободу колеса; тогда $R = r$, $\alpha = 1$ и $CQ_0 = r$. Значит МЦУ совпадает с центром C_1 (рис. 4.2). Таким образом, при непрерывном уменьшении радиуса r_1 движущиеся навстречу друг другу центры C_1 и Q_0 встречаются в четко обозначенном месте — на ободу колеса. Иначе: когда центр кривизны поверхности S входит в пределы колеса, МЦУ оставляет их. На рис. 4.2 эквивалентные линии L_i концентричны с поверхностью качения S .

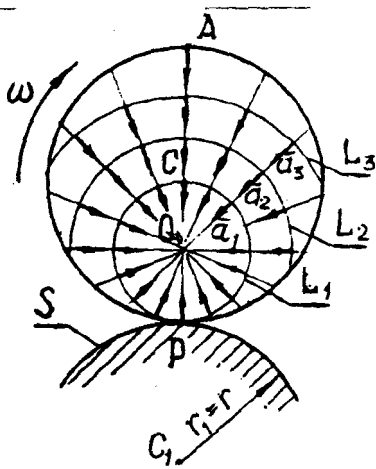


Рис. 3.3.

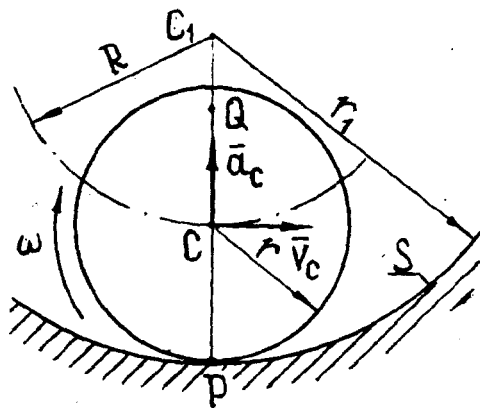


Рис. 4.1.

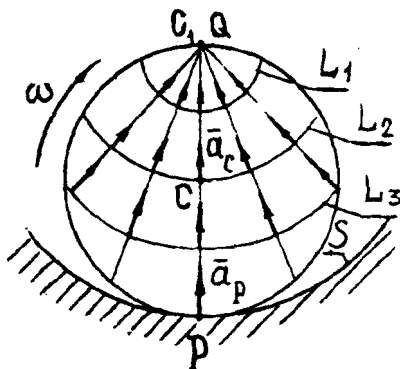


Рис. 4.2.

Пока МЦУ находится в пределах колеса наибольшее ускорение точки не превышает, как и в п.3, значения $2\omega^2 r$; такое ускорение имеет точка P. Отметим, что в последнем случае любая точка обода колеса имеет прямолинейную траекторию, совпадающую с диаметром поверхности качения S.

5. Неравномерное качение. Оно имеет место при $\epsilon \neq 0$. При неравномерном качении, как известно, положение МЦУ зависит от переменных кинематических характеристик, что затрудняет его практическое использование. Исследования показывают, что и в этом случае МЦУ не может зани-

мать произвольные положения в плоскости движения. Например, при качении по выпуклой поверхности геометрическим местом МЦУ являются окружности диаметра PQ_0 (рис. 5.1), где Q_0 — положение МЦУ при $\epsilon = 0$. На рис. 4.2 таким геометрическим местом является контур самого колеса. И все же для анализа ускорений предпочитают использовать теорему Ривальса. Соответствующая ей формула состоит из четырех слагаемых, что делает картину распределения ускорений необозримой. Более привлекательной является малоизвестная идея, принадлежащая Джилавдари И.З., об использовании двух МЦУ, определяемых только геометрическими параметрами системы. Такими центрами являются уже известные точки P и Q_0 , называемые в этом случае соответственно мгновенным центром вращательного и осестремительного ускорений.

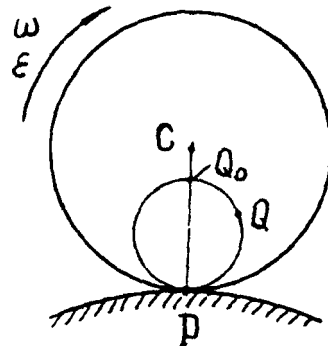


Рис. 5.1.

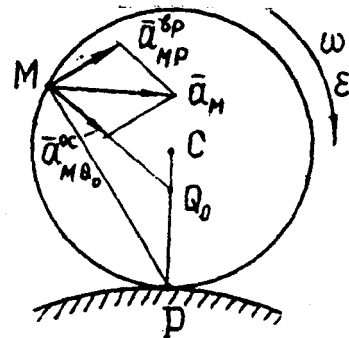


Рис. 5.2.

Распределение осестремительных ускорений относительно точки Q_0 рассмотрено в п.п. 2-4. Распределение же вращательных ускорений относительно центра P такое же, как и распределение скоростей. Полное ускорение произвольной точки M определяется по формуле (рис. 5.2):

$$\vec{a}_M = \vec{a}_M^{oc} + \vec{a}_M^{ep}, \quad (5.1)$$

где $a_M^{oc} = \omega^2 MQ_0$, $a_M^{ep} = \epsilon MP$. Подчеркнем, что направления составляющих векторов формулы (5.1) для любой точки определяются лишь положением центров P и Q_0 и не зависят от значений ω и ϵ .

6. Заключение. Приведем основные результаты анализа распределения ускорений.

1. При равномерном качении по плоскости ускорения точек колеса распределяются как и

при вращательном движении вокруг центральной оси.

2. При равномерном качении по выпуклой поверхности ускорения могут в два раза превышать их (при одинаковых ω).

3. При равномерном качении по вогнутой поверхности ускорения точек колеса могут возрастать неограниченно, а траектории точек могут быть прямолинейными.

4. Если движущееся колесо разделить нормально к поверхности качения на левую и правую половины, то во всех случаях качения точки левой половины движутся ускоренно, а правой (передней) — замедленно.

5. При неравномерном качении для определения ускорений точек целесообразно использовать два МЦУ. Одним из них является МЦС.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Белов В.В.

The description of the computer tests and examination questionnaires programs and electronic guide for theoretical mechanics are proposed.

Современные компьютерные технологии обладают исключительно богатыми возможностями для работы с графическими объектами. Это позволяет создавать различного рода программы, отображающие на экране монитора не только текстовую, но и графическую информацию — рисунки и формулы в естественной форме, что особенно важно при использовании таких программ в учебном процессе, связанном с изучением насыщенных математической символикой дисциплин. Теоретическая механика — одна из них. Многочисленные определения, формулировки, правила, теоремы, выводы, доказательства, следствия, формулы являются своеобразным языком, который не содержит полутонов и не допускает двойственного толкования. Поэтому некоторые функции человека, контроля, в частности, можно передать компьютеру.

На кафедре теоретической механики БГТУ созданы две программы такого рода, которые могут выполняться под управлением 32-битной операционной системы Windows. Одна из них предназначена для текущего опроса студентов и используется после завершения соответствующего раздела на лекционных занятиях. Ее база данных содержит порядка трехсот вопросов по всем разделам стандартного двухсеместрового курса: статика, кинематика точки, кинематика твердого тела, динамика точки, динамика системы (общие теоремы динамики), принцип Даламбера и аналитическая механика. Предусмотрена обязательная регистрация пользователей, в результате чего на диске сохраняется идентифицирующая и вся иная информация, относящаяся к действиям тестируемого.

Тестирование производится по одному из указанных выше разделов и состоит из двух частей. Одна из них представляет собой опрос в текстовой форме, то есть и вопрос, и ответы являются текстами, во второй — вопрос отображается в виде текста, а ответ — в виде формулы. При этом принцип работы программы вполне традиционен: на

каждый вопрос предлагается пять ответов, из которых только один — правильный. В каждом виде тестирования задается десять вопросов, выбираемых из всей совокупности случайным образом. Расположение ответов на экране тоже случайно. Время для выбора подходящего ответа ограничено одной минутой, практика показала, что этого вполне достаточно. По завершении каждого из опросов выставляется оценка. В процессе тестирования ведутся протоколы, которые можно просмотреть и выяснить, какие из выбранных ответов были правильными, а какие — нет.

Интерфейс программы сделан максимально дружелюбным и простым: все предполагаемые действия сопровождаются подсказками и предупреждениями, управлять программой можно не только мышью, но и клавиатурой.

Вторая программа предназначена для приема экзамена и содержит около трехсот семидесяти вопросов. Она имеет такой же интерфейс, как и предыдущая программа, что позволяет студентам воспринимать ее как уже нечто знакомое и не отвлекаться на изучение неизвестных особенностей. Разумеется, работает эта программа по тому же принципу: вопрос — варианты ответа, но организована процедура опроса иначе.

После регистрации на экране появляется список всех разделов, изучаемых в данном курсе, из которого необходимо выбрать те, по которым сдается экзамен. Все остальное выбирает компьютер случайным образом. При этом опрос состоит из трех частей. Сначала выбирается какой-то раздел, по которому осуществляется тестирование в текстовой форме, так, как об этом было сказано выше, при тех же ограничениях на время для выбора ответа. Задается десять вопросов. После получения ответа на последний (или по истечении заданного времени) компьютер выбирает какой-то другой раздел и вопрос из него. В рамках этого второго этапа необходимо осуществить либо вывод формулы, либо доказательство теоремы.