3. *Корбут Б.А, Нагорный Ю.Н.* Об одной модели заполнителя в задачах устойчивости цилиндрических оболочек // Изв. вузов. «Машиностроение». — 1971, №6. — С.16–21.
4. *Крылов А.Н.* О расчете балок, лежащих на упругом основании. — М.: Изд-во АН СССР, 1930. 154 с.
5. *Уманский А.А.* О расчете балок на упругом основании. — М.: Стройиздат, 1933. 48 с.
6. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. Ленинград: Гос. союзное изд-во судостроительной промышленности, 1962, 431с.
7. *Дьяконов В.П.* Математическая среда Maple V R3/R4/R5. — М.: «Солон», 1998.
8. *Манзон Б.М.* Maple V Power Edition. — Москва, 1998.

МЕТОД МАКСИМУМА ИНФОРМАЦИОННОЙ ЭНТРОПИИ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ В ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В.Б. Немцов

The theory of the nonlinear elastic deformation by means of principle of information entropy maximum is described. The Murnaghan formula in material coordinates with help of the statistical theory is obtained.

В настоящее время в рамках феноменологического подхода интенсивно исследуется нелинейная упругость деформируемых тел [1-4]. Теория нелинейного поведения важна для биомолекул типа ДНК. Однако общая форма нелинейности остается нераскрытой, так как проблема полного описания нелинейной упругости чрезвычайно сложна. Поэтому оправданно рассматривать более простую задачу о наиболее вероятной форме исследуемой нелинейности. Для решения подобной задачи естественно использовать принцип максимума информационной энтропии, широко применяемый в статистической теории сложных систем [5].

В данной работе используется информационная энтропия Больцмана-Гиббса-Шеннона. Работа является развитием предыдущих работ [6,7], в которых разрабатывалась статистическая теория нелинейной упругости в эйлеровых переменных.

Напомним некоторые положения лагранжевого описания деформации твердых тел. Пусть $\mathbf{a}$ — радиус-вектор, определяющий положение частицы среды до деформации. В используемой здесь и далее декартовой системе координат его компоненты a_i являются логранжевыми переменными. Положение частицы среды после деформации характеризуется радиусом-вектором $\mathbf{x}$. Зависимость этого радиуса-вектора от вектора $\mathbf{a}$ определяет закон деформирования среды

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(a)\,,\; x_i = x_i(a_1, a_2, a_3)\ (i = 1,2,3) \tag{1}$$

Компоненты x_i определены в той же исходной декартовой системе, что и a_i. Уравнения (1) в общем случае содержат время t. В качестве меры деформации используется лагранжева мера деформации в форме тензора Грина

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_e}{\partial a_i}\frac{\partial x_e}{\partial a_j} - \delta_{ij}\right). \tag{2}$$

Если использовать компоненты u_i вектора смещений $\mathbf{u}$, вводимые соотношениями

$$x_i = a_i + u_i\,, \tag{3}$$

тензор Грина представляется в виде

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_e}{\partial a_i}\frac{\partial u_e}{\partial a_j}\right). \tag{4}$$

Для статистического описания деформирования среды введем динамическую величину локализации частицы среды

$$\hat{x}(\mathbf{a}) = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{x}^{\nu}\delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}^{\nu})\,,\; \hat{x}_i(\mathbf{a}) = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{x}_i^{\nu}\delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}^{\nu}) \tag{5}$$

Здесь N — число частиц (атомов или молекул) в системе, ν — номер частицы, $\mathbf{a}^{\nu}$ — радиус-вектор частицы до деформации, а $\mathbf{x}^{\nu}$ — после деформации, $\mathbf{a}$ — по-прежнему радиус-вектор частицы среды в исходном состоянии. Введем еще динамическую величину плотности числа частиц в лагранжевых переменных

$$\hat{n}(\mathbf{a}) = \sum_{\nu=1}^{N} \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}^{\nu})\,\cdot \tag{6}$$

Среднее значение динамической величины (5) и позволяет описать макроскопический закон деформирования среды

$$x_i(a_1, a_2, a_3) = \frac{<\hat{x}_i>}{n(a)}\,\cdot \tag{7}$$

Здесь угловые скобки означают усреднение с помощью квазиравновесной функции распределения ρ_q, вид которой будет установлен позже,

$$< \hat{x}_i >= S_p \rho_q \hat{x}_i ,\ n(a) =< \hat{n}(\mathbf{a}) >= S_p \rho_q \hat{n}(a) \cdot \quad (8)$$

Здесь и ниже с помощью символа S_p описывается интегрирование по фазовому пространству системы.

Запишем тензор деформации Грина через введенные средние значения

$$L_{ij} = \frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial a_i} \frac{S_p \rho_q \hat{x}_e}{S_p \rho_q \hat{n}} \frac{\partial}{\partial a_j} (\frac{S_p \rho_q \hat{x}_e}{S_p \rho_q \hat{n}}) - \delta_{ij}] \cdot \quad (9)$$

Для определения вида динамической величины тензора деформации $\hat{l}_{ij}$ рассмотрим величину

$$nL_{ij} = S_p \rho_q \hat{n} L_{ij} , \quad (10)$$

где в качестве тензора L_{ij} в правой части (10) используется выражение (9).

Найдем вариацию величины $\delta(nL_{ij})$ линейную по вариации $\delta\rho_q$ (см. аналогичные вычисления для жидких кристаллов [8]). В результате несложных преобразований установим соотношение

$$\delta(nL_{ij}) = S_p \delta\rho_q \hat{L}_{ij} , \quad (11)$$

в котором $\hat{L}_{ij}$ определяется как

$$\hat{L}_{ij} = \frac{1}{2}\hat{n}[\frac{\partial x_l}{\partial a_i}\frac{\partial x_l}{\partial aj} - \delta_{ij}] +$$
$$+\frac{1}{2}\Pi[\frac{\partial x_l}{\partial a_i}\frac{\partial}{\partial a_i}(\frac{\hat{x}_l}{n} - \frac{\hat{x}_l n}{n})] +$$
$$+\frac{1}{2}n[\frac{\partial x_l}{\partial a_i}\frac{\partial}{\partial a_j}(\frac{\hat{x}_l}{n} - \frac{x_l \hat{n}}{n})] . \quad (12)$$

Величина $\hat{L}_{ij}$ и представляет собой динамическую величину тензора деформации Грина. Ее среднее значение определяет введенный выше макроскопический тензор деформации Грина (2)

$$< \hat{L}_{ij} >= nL_{ij} \cdot \quad (13)$$

Используя принцип максимума информационной энтропии при условии, что заданы средние значения плотности энергии и тензора Грина, установим следующее выражение для квазиравновесного распределения:

$$\delta q = Q^{-1} \exp\{-d\mathbf{a}[\beta(\mathbf{a})\hat{H}(\mathbf{a}) - mB_{ij}(\mathbf{a})\hat{L}_{ij}(\mathbf{a})]\} . \quad (14)$$

Здесь $\hat{H}(\mathbf{a})$ — плотность энергии в лагранжевых переменных, $B_{ij}(\mathbf{a})$ — термодинамический параметр, сопряженный тензору $\hat{L}_{ij}$, $\beta(\mathbf{a})$ — обратная локальная температура, m — масса частицы, Q — статистический интеграл,

$$Q = S_p \exp\{-\int d\mathbf{a}[\beta\hat{H}(\mathbf{a}) - mB_{ij}\hat{L}_{ij}(\mathbf{a})]\} \cdot \quad (15)$$

Определяя энтропию системы (с точностью до умножения на постоянную Больцмана) как

$$S = -S_p(\rho_q \ln \rho_q) \quad (16)$$

получим для нее выражение вида

$$S = \ln Q + \int \rho_0 d\mathbf{a}[\beta u(\mathbf{a}) - B_{ij} L_{ij}(\mathbf{a})] , \quad (17)$$

причем $\rho_0 = mn$ — плотность среды в недеформированном состоянии, $u =< \hat{H} > / \rho_0$ — массовая плотность внутренней энергии.

Вычисляя вариацию энтропии с учетом закона сохранения массы $\delta(\rho_0 d\mathbf{a}) = 0$, установим соотношение для массовой плотности энтропии:

$$\delta S(a) = \beta \delta u - B_{ij} \delta L_{ij} \cdot \quad (18)$$

Так как плотности в лагранжевых и эйлеровых переменных отнесены к одной и той же системе координат, справедливо соотношение (см. независимые вычисления в эйлеровых координатах [7]

$$\delta S(x) = \beta \delta u(\mathbf{x}) - B_{ij} \delta L_{ij} \cdot \quad (19)$$

На основании (19) можно записать уравнение баланса энтропии

$$\rho \frac{dS}{dt} = \beta\delta \frac{du}{dt} - \rho B_{ij} \frac{dL_{ij}}{dt} , \quad (20)$$

где ρ — плотность среды в деформированном состоянии.

Используем теперь закон сохранения энергии

$$\rho \frac{du}{dt} = \tau_{ij} e_{ij} - \partial q_i / \partial x_i \quad (21)$$

и уравнение движения для тензора Грина

$$\frac{dL_{ij}}{dt} = e_{l\rho} \frac{\partial x_l}{\partial a_i} \frac{\partial x_\rho}{\partial a_j} \cdot \quad (22)$$

Здесь q_i — поток теплоты,

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i}) \quad (23)$$

— тензор скоростей деформаций, $\upsilon_i(x)$ — поле скоростей течения среды, τ_{ij} — эйлеров тензор напряжений. В результате уравнение баланса энтропии вида

$$\rho \frac{dS}{dt} = [\beta \tau_{l\rho} - \rho B_{ij} \frac{\partial x_l}{\partial a_i} \frac{\partial x_\rho}{\partial a_j}] e_{l\rho} - \beta \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (24)$$

позволяет установить следующее выражение для квазиравновесного эйлерова тензора напряжений:

$$\beta\tau^0_{l\rho} = \rho B_{ij}\frac{\partial x_l}{\partial a_i}\frac{\partial x_\rho}{\partial a_j} \tag{25}$$

и выяснить смысл тензорного термодинамического параметра B_{ij}.

Уравнение (18) для вариации энтропии приводит к следующей формуле для дифференциала плотности внутренней энергии (постоянная Больцмана теперь включена в выражение для энтропии):

$$du = \beta^{-1}B_{ij}dL_{ij} + TdS\cdot \tag{26}$$

Обычно это соотношение записывается в виде [9]

$$du = \rho_0^{-1}K_{ij}dL_{ij} + TdS, \tag{27}$$

где K_{ij} — тензор напряжений Кирхгоффа.

Сравнивая (26) и (27), установим связь тензора B_{ij} и тензора напряжений Кирхгоффа

$$B_{ij} = \beta\rho_0^{-1}K_{ij}. \tag{28}$$

Учитывая выражение для квазиравновесного тензора напряжений Эйлера (25), получим формулу, связывающую тензор напряжений Эйлера и Кирхгоффа

$$\tau^0_{l\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}K_{ij}\frac{\partial x_l}{\partial a_i}\frac{\partial x_\rho}{\partial a_j} \tag{29}$$

Но согласно (27)

$$\rho_0^{-1}K_{ij} = (\partial u/\partial L_{ij})_s,$$

поэтому уравнение (29) представляет собой фактически формулу Мурнагана в лагранжевых переменных для адиабатических процессов деформирования среды

$$\tau^0_{l\rho} = \rho(\frac{\partial u}{\partial L_{ij}})_s\frac{\partial x_l}{\partial a_i}\frac{\partial x_\rho}{\partial a_j}\cdot \tag{30}$$

Если использовать свободную энергию F, отнесенную к единице массы, с учетом ее определения как $F = U - TS$, нетрудно установить, что

$$dF = \rho_0^{-1}K_{ij}dL_{ij} - SdT \tag{31}$$

Тогда для изотермических процессов справедливо соотношение

$$\rho_0^{-1}K_{ij} = (\frac{\partial F}{\partial L_{ij}})_T, \tag{32}$$

а формула Мурнагана приобретает вид

$$\tau^0_{l\rho} = \rho(\frac{\partial F}{\partial L_{ij}})_T\frac{\partial x_l}{\partial a_i}\frac{\partial x_\rho}{\partial a_j}. \tag{33}$$

Если переопределить свободную энергию, введя величину [4] $f = F/\rho_0$, приходим к традиционной форме записи формулы Мурнагана в лагранжевых переменных

$$\tau^0_{l\rho} = \rho/\rho_0(\frac{\partial f}{\partial L_{ij}})_T\frac{\partial x_l}{\partial a_i}\frac{\partial x_\rho}{\partial a_j}\cdot \tag{34}$$

Так как свободная энергия выражается через энтропию и внутреннюю энергию, а эти величины определены в рамках статистической теории с помощью квазиравновесного усреднения, то тем самым представляется возможным описать упругие свойства твердых тел наиболее вероятным образом на основе принципа максимума информационной энтропии. Однако конкретизация нелинейности упругого поведения по-прежнему представляет собой трудную задачу. Но уже сейчас представляется возможным определить вид геометрической нелинейности, описываемой сомножителем

$$\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial x_l}{\partial a_i}\frac{\partial x_\rho}{\partial a_j}. \tag{35}$$

Чтобы дать явное выражение для указанной геометрической нелинейности, запишем формулу Мурнагана в терминах поля смещений,

$$\tau^0_{lp} = \frac{\rho}{\rho_0}(\frac{\partial f}{\partial L_{lp}} + \frac{\partial f}{\partial L_{lj}}\frac{\partial u_p}{\partial a_j} + \frac{\partial f}{\partial L_{ip}}\frac{\partial u_l}{\partial a_i} + \frac{\partial f}{\partial L_{ij}}\frac{\partial u_l}{\partial a_i}\frac{\partial u_p}{\partial a_j}). \tag{36}$$

Рассмотрим одномерный случай (растяжение — сжатие материального отрезка), полагая $l=1$, $p=1$, $i=1$, $j=1$. Тогда

$$\tau^0_{11} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial f}{\partial L_{11}}[1 + 2\frac{\partial u_1}{\partial a_1} + (\frac{\partial u_1}{\partial a_1})^2]\cdot \tag{37}$$

Учитывая, что $L_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial a_1} + \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial a_1})^2$, установим, что

$$\tau^0_{11} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial f}{\partial L_{11}}(1 + 2L_{11})\cdot \tag{38}$$

Перейдем к описанию деформации с помощью других мер деформации. Так, с помощью кратности удлинения $\lambda = l/l_0$ L_{11} записывается как $L_{11} = 2^{-1}(\lambda^2 - 1)$, причем l — длина материального отрезка в деформированном состоянии, а l_0 — его исходная длина. Если использовать меру деформации Коши $\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$, то $\lambda = 1 + \varepsilon$ и $L_{11} = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}$.

Пусть в простейшем случае (E — модуль Юнга)

$f = \frac{EL_{11}^2}{2}$, тогда $\frac{\partial f}{\partial L_{11}} = EL_{11}$ и

$$\tau_{11}^0 = \frac{\rho}{\rho_0} E(\varepsilon + \frac{5}{2}\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 + \frac{\varepsilon^4}{2}) = E\varepsilon M(\varepsilon).$$

Множитель $M = \frac{\rho}{\rho_0}(1 + \frac{5}{2}\varepsilon + 2\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^3}{2})$ в явном виде учитывает вклад геометрической нелинейности в напряжение деформированного отрезка.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости.— М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
2. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980, 512 с.
3. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. — М.: Мир, 1965, 456с.
4. Гольденблат И.И. Нелинейные проблемы теории упругости. — М.: Наука, 1969, 336 с.
5. Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика.— М.: Наука, 1971, 415 с.
6. Немцов В.Б. К статистической теории нелинейной упругости. ДАН БССР, 1975, Т. 19, С.883-886.
7. Немцов В.Б. Статистическая теория упругости деформируемых тел. В сб. «Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механики». Минск.: «Технопринт», 2001, С. 372-375.
8. Немцов В.Б. Неравновесная статистическая механика систем с ориентационным порядком.— Минск.: «Тэхналогія», 1997, 280 с.
9. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972, 184 с.

СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В МОНОКРИСТАЛЛАХ КУБИЧЕСКОЙ СИНГОНИИ

Колешко В.М., Баркалин В.В., Полынкова Е.В.

The transition to micro— and nano-sized structures results in broading the list of materials used in MEMS developing. In the presented work on the unified basis the properties of surface acoustic waves in more than 60 isotropic cubic materials with different functional properties (metals, dielectrics, semiconductors, piezoelectrics, magnetostrictive stuffs, superconductors) are studied. Semiconducting materials GaAs, Si, InSb are interesting from the point of view of developing integral sensory microsystems including sensing, executive and processor units. The single-crystal strontium titanate SrTiO3 is characterized by high acoustic nonlinearity and is perspective for low-noise devices with superconducting metallization of SAW structures. Iron ittrium granatum Y3Fe5O15 (IIG) has a low elastic anisotropy. The strong magnetostriction, appropriute IIG, allows to use it in devices, based on interaction of SAW with spin waves.

On the basis of research of algebraic properties of a SAW phase velocity as function of effective material constants the new approach to definition of sensitivity coefficients of SAW phase velocity to quasistatic volumetric effects on waveguide was developed, founded on the introducing of a tensor W of partial derivatives of a SAW phase velocity on elastic modules of in crystallophysical coordinate system. Generally W has no more than 15 independent components, which can be defined experimentally or theoretically from partial sensitivity coefficients of SAW phase velocity to components of deformations, mechanical stresses, temperature and orientation dependencies of SAW phase velocity. This approach allows to compare properties of a number of materials and to state the task of designing of a material with the preset properties under its atomic or molecular characteristics. This approach is suitable for study of SAW in microscopic objects such as grain borders, doubles and microcracks.

In case of a bicomponent SAW mode the analytical expressions for a non-zero components of W are established and the coefficients of deformation and temperature sensitivity for a number of cubic crystals are determined. Is snown, that the values a component W are determined by a factor of an anisotropy of