Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский национальный технический университет

Кафедра высшей математики № 1

МАТЕМАТИКА

Контрольная работа № 3 для студентов инженерно-технических
специальностей заочной формы обучения.
Методические указания и индивидуальные задания

Учебное электронное издание

Минск БНТУ
2011

УДК 512.64 (075.8)
ББК 22.1я7
М 93

С о с т а в и т е л и :
А.Н. Андриянчик, В.А. Казакевич, Н.А. Микулик,
Л.А. Раевская, В.И. Юринок, Т.С. Яцкевич

Р е ц е н з е н т ы :
А.Н. Исаченко, М.Н. Покатилова

Настоящие методические указания и контрольные задания предназначены для студентов-заочников второго курса инженерно-технических специальностей БНТУ.

Издание содержит программу по высшей математике, перечень рекомендуемой литературы, основные понятия по теории курса высшей математики, типовые примеры и контрольные задания.

Студент должен изучить теоретический материал по учебнику, разобрать приведенные образцы решения типовых примеров и задач, а затем выполнить контрольные задания, соответствующие номеру его варианта. Номер варианта определяется двумя последними цифрами шифра зачетной книжки, если это число не больше 30. Если номер шифра больше 30, следует от него отнять число, кратное 30. В каждом из семи заданий нужно выполнить номер, соответствующий номеру варианта.

Например, если шифр содержит две последние цифры 62, номерами этого варианта будут 1.2; 2.2; 3.2; 4.2; 5.2; 6.2; 7.2.

Белорусский национальный технический университет
пр.Независимости, 65, г. Минск, Беларусь
тел. (017) 292-77-52 факс (017) 292-91-37

Регистрационный № БНТУ/ФИТР48-4.2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРОГРАММА

Ряды

Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Действия над рядами. Необходимое условие сходимости.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.

Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса.

Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.

Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды.

Применение рядов к приближенным вычислениям.

Ряды Фурье по тригонометрическим системам. Разложение функций в ряды Фурье. Условия поточечной сходимости и сходимости в среднем. Применение рядов Фурье.

Интегральное исчисление функций нескольких переменных

Определенный интеграл по фигуре, его механический смысл. Свойства интегралов по фигуре.

Вычисление кратных интегралов повторным интегрированием.

Замена переменных в кратных интегралах.

Вычисление криволинейных и поверхностных интегралов I и II рода, их приложения. Формулы Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса.

Элементы операционного исчисления

Преобразование Лапласа. Теорема существования и единственности. Класс оригиналов и класс изображений.

Основные теоремы операционного исчисления.

Определение оригинала по изображению с помощью таблиц и второй теоремы разложения.

Решение линейных дифференциальных уравнений и систем операционным методом.

1. РЯДЫ

1.1. Числовые ряды. Основные определения. Признаки сравнения

Выражение

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \,, \qquad (1.1)$$

где (u_n) – последовательность чисел, называется *числовым рядом*, числа $u_1, u_2, ..., u_n, \ldots$ – членами ряда, u_n – общим членом ряда.

Суммы

$$S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ \ldots,\ S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,\ \ldots \qquad (1.2)$$

называются *частичными суммами* ряда (1.1).

Если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \,,$$

то ряд (1.1) называется *сходящимся*, а число S – его суммой. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд называется *расходящимся*.

Если в ряде отбросить первые k членов, то получится ряд

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots \,,$$

называемый k-*м остатком* ряда (1.1).

Необходимый признак сходимости. Если ряд (1.1) сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \,. \qquad (1.3)$$

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд (1.1) расходится.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ называется *гармоническим рядом*. Для него $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, но ряд расходится.

Признаки сравнения. Рассмотрим числовые ряды с неотрицательными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \,; \qquad (1.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \,. \qquad (1.5)$$

Теорема 1. Признак сравнения. Если, начиная с некоторого номера, выполняются неравенства $0 \le u_n \le v_n$, то из сходимости ряда (1.5) следует сходимость ряда (1.4), а из расходимости ряда (1.4) следует расходимость ряда (1.5).

Теорема 2. Предельный признак сравнения. Если $u_n \ge 0, v_n > 0$ для всех $n \ge n_0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l \ne 0$, то ряды (1.4) и (1.5) сходятся или расходятся одновременно.

Замечание. При использовании признаков сравнения часто применяется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, сходящийся при $p > 1$ и расходящийся при $p \le 1$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, сходящийся при $|q| < 1$ и расходящийся при $|q| \ge 1$.

Примеры. Исследовать на сходимость ряды и в случае сходимости найти сумму ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

Решение. Данный ряд – геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \dfrac{1}{3}$. Следовательно, $S_n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{3}{2}$, ряд сходится.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n(n+1)}$.

Решение. Так как дробь $\dfrac{1}{4n(n+1)}$ представима в виде $\dfrac{1}{4n(n+1)} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1}\right)$, то частичная сумма ряда имеет вид:

$$S_n = \frac{1}{4\cdot 2} + \frac{1}{8\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{4n(n-1)} + \frac{1}{4n(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right).$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{4}$, ряд сходится и его сумма равна 1/4.

3. 2 + 5 + 8 + 11 + ...

Решение. Данный ряд – сумма членов арифметической прогрессии с разностью $d = 3$, поэтому

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n = \frac{4+3(n-1)}{2}\cdot n = \frac{(1+3n)n}{2},$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{(1+3n)n}{2} = \infty$, ряд расходится.

Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости ряда. В случае выполнения установить, сходится ли ряд с помощью признака сравнения.

4. $2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$, т.е. необходимый признак не выполняется, ряд расходится.

5. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)} = 0$, т.е. необходимый признак выполняется. Исследуем сходимость данного ряда с помощью признака сравнения (теорема 1). Рассмотрим расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$. Так как $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ $(\ln n < n)$, то исходный ряд расходится.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} = 0$. Рассмотрим сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-1}}$ – сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{4} < 1$. Так как $\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} < \frac{1}{2^{2n-1}}$, то по теореме 1 исходный ряд сходится.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^4+1} = 0$. Рассмотрим сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ $(p = 3 > 1)$ и применим предельный признак сравнения (теорема 2): $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^4+1} : \frac{1}{n^3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4+1} = 1 \neq 0$. Следовательно, данный ряд сходится.

1.2. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Для знакоположительных числовых рядов имеют место следующие достаточные признаки, по которым можно установить их сходимость или расходимость.

1. Признак Даламбера. Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ (u_n > 0,\ n = 1,2,3,\dots) \tag{1.6}$$

существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то при $l < 1$ ряд (1.6) сходится, при $l > 1$ – расходится. При $l = 1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

***Пример* 1.** Исследовать на сходимость ряды с помощью признака Даламбера:

а) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{n}{3^n} + \ldots$;

б) $\frac{1}{10} + \frac{1\cdot 2}{10^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3} + \ldots + \frac{n!}{10^n} + \ldots$.

Решение.

а) $u_n = \frac{n}{3^n}$; $u_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$. Так как

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)3^n}{3^{n+1}\cdot n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1$, то ряд сходится.

б) $u_n = \frac{n!}{10^n}$; $u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!10^n}{n!10^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{10}=\infty$. Так как $l=\infty$, то данный ряд расходится.

2. Радикальный признак Коши. Если для знакоположительного ряда (1.6) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ – расходится. При $q=1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

Пример 2. Исследовать сходимость рядов с помощью радикального признака Коши:

а) $\dfrac{1}{5}+\left(\dfrac{2}{9}\right)^2+\left(\dfrac{3}{13}\right)^3+\ldots+\left(\dfrac{n}{4n+1}\right)^n+\ldots$;

б) $\dfrac{1}{2}\cdot 2+\dfrac{1}{2^2}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^4+\dfrac{1}{2^3}\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^9+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\cdot\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}+\ldots$.

Решение.

а) Так как $q=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{4n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{4n+1}\right)=\dfrac{1}{4}<1$, то ряд сходится.

б) в этом случае

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2}>1.$$

Следовательно, ряд расходится.

3. Интегральный признак Коши. Пусть $f(x)$ – непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция, определенная при $x\ge 1$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно, где $f(n)=u_n$.

Пример 3. Исследовать сходимость рядов с помощью интегрального признака Коши:

а) $1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\ldots+\dfrac{1}{n^p}+\ldots$;

б) $\dfrac{1}{2\ln^2 2}+\dfrac{1}{3\ln^2 3}+\dfrac{1}{4\ln^2 4}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}+\ldots$.

Решение.

а) Исследуемый ряд – $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$. Здесь $f(n)=\dfrac{1}{n^p}$. Если $p\ne 1$, то

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{-p+1}(b^{-p+1}-1)=$$

$$=\frac{1}{-p+1}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & \text{если} \quad p>1,\\ \infty, & \text{если} \quad p<1,\end{cases}$$

т.е. интеграл сходится при $p > 1$ и расходится при $p < 1$. Соответственно и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ сходится, если $p > 1$ и расходится, если $p < 1$. При $p=1$ имеем $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\dfrac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\infty$,

т.е. интеграл расходится. Следовательно, расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

б) Исследуемый ряд – $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$. Здесь

$f(n)=\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$. Рассмотрим

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\int_1^{+\infty}\frac{d(\ln(x+1))}{\ln^2(x+1)}=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln(x+1)}\right]_1^b=$$

$$=-\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{\ln(b+1)}-\frac{1}{\ln 2}\right]=\frac{1}{\ln 2}.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

1.3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \tag{1.7}$$
называется *знакопеременным*, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Теорема 3. Достаточный признак сходимости ряда (1.7).

Если ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|, \tag{1.8}$$
составленный из модулей членов ряда (1.7), сходится, то ряд (1.7) также сходится.

Ряд (1.7) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд (1.8).

Сходящийся знакопеременный ряд (1.7) называется *условно сходящимся*, если ряд (1.8) расходится.

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots, \qquad (1.9)$$

где $u_n > 0,\ n = 1,2,\ldots$, называется *знакочередующимся*.

Признак Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда (1.9) удовлетворяют условиям:

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > u_{n+1} > \ldots$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,то ряд (1.9) сходится. Сумма его положительна и не превосходит первого члена u_1 .Остаток r_k такого ряда имеет знак своего первого члена и не превосходит его по модулю: $|r_k| \le u_{k+1}$.

Примеры. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

а) $\dfrac{\sin 1}{1^2} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + \dfrac{\sin 3}{3^2} + \ldots + \dfrac{\sin n}{n^2} + \ldots$;

б) $1 - \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{4^3} - \dfrac{1}{6^3} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{(2n)^3}$;

в) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n} + \ldots$.

Решения.

а) Ряд из модулей $\dfrac{|\sin 1|}{1^2} + \dfrac{|\sin 2|}{2^2} + \dfrac{|\sin 3|}{3^2} + \ldots + \dfrac{|\sin n|}{n^2} + \ldots$ сходится по признаку сравнения, так как его члены не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

б) Условия признака Лейбница здесь выполнены: ряд – знакочередующийся, $\dfrac{1}{(2n)^3} > \dfrac{1}{(2(n+1))^3}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(2n)^3} = 0,\ n = 1,2,\ldots$. Следовательно, этот ряд сходится. Ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^3} = \dfrac{1}{8}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ также сходится, то есть исходный ряд сходится абсолютно. Найдем сумму данного ряда с точностью 0,01. Для этого возьмем столько его членов, чтобы следующий член ряда был по модулю меньше 0,01. Тогда остаток ряда, начинающийся с этого члена, будет по модулю также меньше 0,01.Модуль четвертого члена $\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}<0{,}01$, поэтому с точностью 0,01 имеем: $S\approx 1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}=1-\frac{1}{8}+\frac{1}{64}=\frac{57}{64}\approx 0{,}89$.

в) Данный знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, так как $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$, $n=1,2,3,\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Этот ряд сходится условно, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, составленный из модулей членов данного ряда, расходится (гармонический ряд).

1.4. Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда. Степенные ряды

Ряд вида $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, членами которого являются функции $u_n(x)$, называется *функциональным*.

Множество всех действительных значений аргумента *x*, для которых функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \qquad (1.10)$$

становится сходящимся числовым рядом, называется *областью сходимости* этого ряда. Функция $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$, где $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$, а *x* принадлежит области сходимости, называется *суммой* ряда, функция $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ – *остатком* функционального ряда.

Для определения области сходимости ряда (1.10) можно использовать известные признаки сходимости числовых рядов, считая *x* фиксированным.

Функциональный ряд (1.10) называется *равномерно сходящимся* на промежутке $p\subset R$, если для любого $\varepsilon>0$ существует номер n_0, не зависящий от *x*, что для всех $n>n_0$ и для всех $x\in p$ выполняется неравенство $|R_n(x)|<\varepsilon$, то есть $|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$, где $R_n(x)$ – остаток ряда.

Признак Вейерштрасса. Если $|u_n(x)|\le C_n$, (n=1,2,...) при $x\in[a;b]$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n$ сходится, то функциональный ряд (1.10) сходится на отрезке $[a, b]$ абсолютно и равномерно.

Теорема 4. Если члены сходящегося ряда (1.10) имеют непрерывные производные при $x \in [a;b]$ и ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$, то ряд (1.10) можно дифференцировать почленно:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), x \in [a,b].$$

Теорема 5. Если члены ряда (1.10) непрерывны на $[a, b]$ и этот ряд сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, то ряд (1.10) можно
интегрировать почленно:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx.$$

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \ldots + C_n(x-a)^n + \ldots, \quad (1.11)$$

где C_n и a – действительные числа. Область сходимости степенного ряда (1.11) имеет один из следующих видов:

$(a - R, a + R)$, $[a - R, a + R)$, $(a - R, a + R]$, $[a - R, a + R]$.

Число R называется *радиусом сходимости*, а интервал $(a - R, a + R)$ – *интервалом сходимости* степенного ряда (1.11). Радиус сходимости можно находить по формулам:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}, \quad R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|,$$

если эти пределы существуют. В частных случаях R может быть равен 0 или ∞.

Вопрос о сходимости степенного ряда (1.11) в концевых точках области сходимости, то есть при $x = a - R$, $x = a + R$, исследуется особо (с применением известных признаков сходимости числовых рядов).

Ряды, полученные почленным дифференцированием и интегрированием степенного ряда, имеют тот же радиус и интервал сходимости, и их сумма внутри интервала сходимости равна соответственно производной и интегралу от суммы первоначального ряда.

Пример 1. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 2^{nx}$.

Решение. При фиксированном x этот ряд – знакоположительный. Применим к нему признак Коши. Найдем предел $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n(x)}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 2^x=2^x$; $l<1$ – при $2^x<1$, т.е. при $x<0$. При $l=1$, т.е. при $x=0$ данный функциональный ряд станет рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Общий член ряда $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$ стремится к числу e, и поэтому ряд расходится (не выполнен необходимый признак сходимости). Итак, область сходимости данного ряда $(-\infty, 0)$.

Пример 2. Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{n^4}$ в области его сходимости?

Решение. Областью сходимости данного ряда является вся числовая ось $R=(-\infty, +\infty)$, так как для любого $x\in R$ верно неравенство $\left|\frac{\sin nx}{n^4}\right|<\frac{1}{n^4}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ сходится. Члены исходного ряда имеют непрерывные производные $\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)'=\frac{n\cos nx}{n^4}=\frac{\cos nx}{n^3}$, ряд из производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$ сходится равномерно на R по признаку Вейерштрасса. Действительно, верны неравенства $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right|\le\frac{1}{n^3}$, $n=1,2,\ldots$, $x\in R$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится. По теореме 4 исходный ряд можно почленно дифференцировать в области R его сходимости, т.е.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)',\ x\in R.$$

Пример 3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

Решение. Находим радиус сходимости ряда. $C_n=\frac{1}{n}, C_{n+1}=\frac{1}{n+1}$,

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}:\frac{1}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$. Это означает, что исходный ряд сходится абсолютно при $-1<x<1$. Далее, исследуем сходимость ряда при $x = \pm 1$. Если $x = 1$, то данный ряд становится гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится. Если $x = -1$, то получаем знакочередующийся ряд $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^n \frac{1}{n}+\ldots$, который сходится по признаку Лейбница. Следовательно, областью сходимости ряда является полуинтервал $[-1, 1)$. При $-1 < x < 1$ ряд сходится абсолютно, при $x = -1$ – условно.

Пример 4. Найти сумму ряда

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}+\ldots\ (|\,x\,|<1)\,.$$

Решение. Обозначим искомую сумму ряда через $S(x)$, т.е.

$$S(x) = \frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}+\ldots. \tag{1.12}$$

Можно проверить, что исходный ряд при $|x| < 1$ сходится абсолютно. Дифференцируем почленно равенство (1.12):

$$S'(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots = \frac{x^2}{1-x},\ \ |x|<1$$

(применена формула суммы членов убывающей геометрической прогрессии). Отсюда, интегрируя и учитывая, что $S(0)=0$, находим

$$S(x) = \int_0^x S'(t)dt = \int_0^x \frac{t^2}{1-t}dt = \int_0^x \left(-t-1-\frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= -\frac{x^2}{2} - x - \ln|1-x|,\ |\,x\,|<1.$$

Пример 5. Найти сумму ряда

$$2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 5x^5 + \ldots,|\,x\,|<1\,.$$

Решение. Обозначим эту сумму ряда через $S(x)$, т.е. $S(x) = 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 5x^5 + \ldots$. Данное равенство перепишем так: $S(x)=x{\cdot}Q(x)$, где $Q(x) = 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + \ldots$. Почленное интегрирование последнего равенства приводит к сумме членов убывающей геометрической прогрессии:

$$\int_0^x Q(t)dt = \int_0^x 2tdt - \int_0^x 3t^2dt + \int_0^x 4t^3dt - \int_0^x 5t^4dt + \ldots =$$

$$= x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots = \frac{x^2}{1+x},|\,x\,|<1.$$

Отсюда найдем $Q(x)$: $Q(x)=\left(\dfrac{x^2}{1+x}\right)'=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}$, поэтому искомая сумма $S(x)$ такова: $S(x)=x\cdot Q(x)=x-\dfrac{x}{(x+1)^2}$.

1.5. Разложение функции в ряд Тейлора

Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков в окрестности точки $x=a$, то для нее можно написать ряд по степеням $(x–a)$:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Этот ряд называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке $x=a$.

Теорема 6. Если функция $f(x)$ и все ее производные ограничены на интервале $(a–R,\ a+R)$ одним и тем же числом, т.е. существует постоянная $M>0$ такая, что выполняется неравенство $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M,\ x\in(a-R,a+R),\ n=0,1,2,...$, то функция $f(x)$ представляется сходящимся к ней рядом Тейлора:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,\ x\in(a-R,a+R). \qquad (1.13)$$

Равенство (1.13) верно и в случае, когда остаточный член ряда Тейлора $R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ стремится к нулю при $n\to\infty$. Остаточный член $R_n(x)$ можно вычислить по формуле:

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)],\ 0<\theta<1 . \qquad (1.14)$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)\ne 0$, то ряд не сходится к данной функции.

Если в ряде Тейлора положим $a=0$, получим частный случай ряда Тейлора, который называют *рядом Маклорена*: $f(x)=f(0)+f'(0)\dfrac{x}{1!}+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$.

Приведем разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \ (x \in R);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ... \ (x \in R);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... \ (x \in R);$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ... +$$
$$+ \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + ... \ (|\,x\,| < 1);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + \ldots \ (|x| < 1)\ .$$

Пример 1. Разложить функцию $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x=0.

Решение. Имеем $f(0) = \sin\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Вычисляем $f'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, т.е. $f'(0) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{x=0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Далее последовательно получаем:

$$f''(0) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{x=0} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f'''(0) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{x=0} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f^{IV}(0) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{x=0} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отметим, что $f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}$. Записываем ряд Тейлора:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \frac{x^n}{n!} + ...\right).$$

Пример 2. Разложить функцию $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ в ряд по степеням x, используя разложения основных элементарных функций.

Воспользуемся приведенным выше биномиальным разложением

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots \quad (1.15)$$

Преобразуем исходную функцию: $\sqrt{9-x^2} = 3\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Подставим в формулу (1.15) $m=\frac{1}{2}$, а вместо x выражение $\left(-\frac{x^2}{9}\right)$. Получим следующее разложение:

$$\sqrt{9-x^2} = 3\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{9}\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(-\frac{x^2}{9}\right)^2+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\cdot\left(-\frac{x^2}{9}\right)^n+\ldots\right) = 3\left(1-\frac{x^2}{2\cdot 9}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2^2 2! 9^2}x^4-\frac{1\cdot 3}{2^3 3! 9^3}x^6-\ldots-\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-3)}{2^n n! 9^n}x^{2n}-\ldots\right).$$

Разложение имеет место при $\left|\frac{x^2}{9}\right|<1$, т.е. при $|x|<3$.

1.6. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях

1. Приближенное вычисление значений функций

Пусть функция $f(x)$ в окрестности точки a разлагается в ряд Тейлора. Тогда приближенное значение функции $f(x)$ в любой точке этой окрестности может быть вычислено как частичная сумма этого ряда.

Пример 1. Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до 0,001.

Решение. $\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = \sqrt[3]{125\left(1+\frac{1}{25}\right)} = 5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}$. Воспользуемся биномиальным рядом (1.15) при $m=\frac{1}{3}, x=\frac{1}{25}\in(-1,1)$. Получаем:

$$\sqrt[3]{130}=5\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{25}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{25}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(\frac{1}{25}\right)^3+\ldots\right)=$$

$$=5\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{25}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{25^2}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{25^3}+\ldots\right)=$$

$$=5{,}0000+0{,}0667-0{,}0009+\ldots .$$

Полученный ряд является знакочередующимся рядом. Третий член по модулю меньше 0,001, поэтому его и следующие за ним члены можно отбросить. С указанной точностью получим $\sqrt[3]{130}\approx 5{,}0000+0{,}0667=5{,}067$.

Пример 2. Вычислить $e^{0,1}$ с точностью до 0,001.

Решение. Воспользуемся разложением

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n,$$

где $R_n=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$, $0<\theta<1$, $\forall x\in R$. При x=0,1 получаем: $e^{0,1}=1+0{,}1+\dfrac{(0{,}1)^2}{2!}+\dfrac{(0{,}1)^3}{3!}+\ldots+\dfrac{(0{,}1)^n}{n!}+\ldots$. Определим, сколько надо слагаемых для достижения требуемой точности. Так как 0,1∈[0,0,5], то $0<\theta x<0{,}5$. Тогда $e^{\theta x}<e^{0,5}<2$; $R_n=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}<\dfrac{2x^{n+1}}{(n+1)!}$. При x=0,1 имеем неравенство: $\dfrac{2\cdot(0{,}1)^{n+1}}{(n+1)!}<0{,}001$. Полагая n=2, получим $\dfrac{2\cdot 0{,}001}{6}=0{,}0003<0{,}001$. Значит, достаточно взять три слагаемых: $e^{0,1}\approx 1+0{,}1+\dfrac{(0{,}1)^2}{2!}=1{,}105$.

Пример 3. Вычислить ln2 с точностью до 10^{-5}.

Решение. Применим разложение $\ln\dfrac{1+x}{1-x}=2\left(x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^7}{7}+\ldots\right)$. Этот ряд сходится при $x\in(-1,1)$. Если $\dfrac{1+x}{1-x}=2$, то x=1/3. Возьмем n-ю частичную сумму $\ln 2\approx 2\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{3^3}+\ldots+\dfrac{1}{2n+1}\cdot\dfrac{1}{3^{2n+1}}\right)$. Погрешность этого равенства выражается остатком ряда $R_n = 2\left(\frac{1}{2n+3}\cdot\frac{1}{3^{2n+3}} + \frac{1}{2n+5}\cdot\frac{1}{3^{2n+5}} + \ldots\right)$. Для его оценки все множители в знаменателях, стоящие перед степенью 3, заменим на $2n+3$. Получим

$$R_n < \frac{2}{(2n+3)3^{2n+3}}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right) = \frac{2}{(2n+3)3^{2n+3}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}} =$$

$= \frac{1}{4(2n+3)3^{2n+1}}$. Решая неравенство $\frac{1}{4(2n+3)3^{2n+1}} < 10^{-5}$, находим, что $n=4$: $\frac{1}{4\cdot 11\cdot 3^9} = \frac{1}{866052} = 0{,}000001 < 10^{-5}$. Итак,

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}\right) =$$

$$= 0{,}666667 + 0{,}024691 + 0{,}001646 + 0{,}000131 + 0{,}000011 = 0{,}69315.$$

2. Приближенное вычисление определенных интегралов

Если подынтегральная функция разлагается в степенной ряд, а пределы интегрирования принадлежат области сходимости этого ряда, то соответствующий определенный интеграл можно вычислить с заданной точностью.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^{1/4}\frac{\sin x}{x}dx$ с точностью до 0,00001.

Решение. Разделив почленно ряд для $\sin x$ на x, получим $\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$ Этот ряд сходится при $\forall x \in R$. Интегрируем его почленно.

$$\int_0^{1/4}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{1/4}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots\right)\Bigg|_0^{1/4} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{4^3} + \frac{1}{5\cdot 5!}\cdot\frac{1}{4^5} - \frac{1}{7\cdot 7!}\cdot\frac{1}{4^7} + \ldots =$$

$$= 0{,}25000 - 0{,}00087 + 0{,}0000016 - \ldots.$$

Получили знакочередующийся ряд. Третий член по модулю меньше заданной точности. Значит, достаточно взять два слагаемых: $\int_0^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx \approx 0{,}25000 - 0{,}00087 = 0{,}24913$.

3. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

Многие дифференциальные уравнения не приводятся к квадратурам, а их решения не выражаются в элементарных функциях. Решения некоторых из этих уравнений могут быть представлены в виде степенных рядов, сходящихся в определенных интервалах. В таких случаях ряд, являющийся решением дифференциального уравнения, можно найти или способом неопределенных коэффициентов, или способом, основанным на применении ряда Тейлора.

Пример 5. Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'' - xy = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Первый способ. Применим метод неопределенных коэффициентов. Записываем искомое решение в виде ряда $y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + C_5 x^5 + \ldots$. Находим производные:

$$y' = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + 4C_4 x^3 + 5C_5 x^4 + \ldots,$$

$$y'' = 2C_2 + 2 \cdot 3C_3 x + 3 \cdot 4C_4 x^2 + 4 \cdot 5C_5 x^3 + 5 \cdot 6C_6 x^4 + \ldots.$$

Подставляя y и y'' в данное уравнение, получаем:

$$2C_2 + 2 \cdot 3C_3 x + 3 \cdot 4C_4 x^2 + 4 \cdot 5C_5 x^3 + 5 \cdot 6C_6 x^4 + \ldots =$$
$$= C_0 x + C_1 x^2 + C_2 x^3 + C_3 x^4 + C_4 x^5 + C_5 x^6 + C_6 x^7 + \ldots.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего уравнения, получим систему:

$$\left.\begin{array}{l} 2C_2 = 0, \\ 2 \cdot 3C_3 = C_0, \\ 3 \cdot 4C_4 = C_1, \\ 4 \cdot 5C_5 = C_2, \\ 5 \cdot 6C_6 = C_3, \\ 6 \cdot 7C_7 = C_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

Используя начальные условия, из выражений для y и y' находим: $y(0) = 1 = C_0$, $C_0 = 1$, $y'(0) = 0 = C_1$, $C_1 = 0$. Решая систему, получаем $C_2 = 0,\ C_3 = \dfrac{1}{2\cdot 3},\ C_4 = 0,\ C_5 = 0,\ C_6 = \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6},\ C_7 = 0,\ldots$.

Таким образом, искомое решение представляется следующим рядом: $y = 1 + \dfrac{1}{2\cdot 3}x^3 + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}x^6 + \ldots$. Этот ряд сходится при всех значениях *x*.

Второй способ. Применим для исходного уравнения метод последовательных дифференцирований. Решение $y(x)$ ищем в виде $y(x) = y(0) + \dfrac{y'(0)}{1!}x + \dfrac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$

В соответствии с начальными условиями $y(0) = 1, y'(0) = 0$. Подставляя в уравнение $x = 0, y = 1$, получим $y''(0) - 0\cdot 1 = 0$; $y''(0) = 0$. Для получения значений остальных производных будем последовательно дифференцировать исходное уравнение:

$$y''' = y + xy',\ y^{(4)} = y' + y' + xy'' = 2y' + xy'',$$

$$y^{(5)} = 3y'' + xy''',\ldots,\ y^{(n)} = (n-2).y^{(n-3)} + xy^{(n-2)},\ldots$$

Отсюда получим $y^{(n)}(0) = n - 2y^{(n-3)}(0)$. Тогда при $n = 3,4,5,\ldots$ имеем:

$$y'''(0) = 1,\ y^{(4)}(0) = 0,\ y^{(5)}(0) = 0,\ y^{(6)}(0) = 4,\ y^{(7)}(0) = 0,$$

$$y^{(8)}(0) = 0,\ y^{(9)}(0) = 4\cdot 7\,.$$

Подставляя найденные значения в степенной ряд для $y(x)$, получим

$$y = 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{4}{6!}x^6 + \frac{4\cdot 7}{9!}x^9 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \frac{x^9}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \ldots .$$

1.7. Ряд Фурье функции, заданной на отрезке длиной 2

1. Пусть функция *f*(*x*) определена и интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$. *Рядом Фурье* функции *f*(*x*) называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,, \qquad (1.16)$$

где

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx,\ n = 1,2,3,... \end{array}\right\} \quad (1.17)$$

Числа a_0, a_n, b_n называются *коэффициентами* Фурье функции $f(x)$.

Теорема 7. Если функция $f(\boldsymbol{x})$ кусочно-гладкая на отрезке $[-\pi,\pi]$, т.е. $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ – непрерывны на отрезке $[-\pi,\pi]$ или имеют на нем конечное число точек разрыва первого рода, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в каждой точке отрезка $[-\pi,\pi]$. При этом сумма $S(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$, ряда Фурье (1.16) равна

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x - \text{точка непрерывности;} \\ \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)), & \text{если } x = x_0 - \text{точка разрыва } f(x); \\ \frac{1}{2}(f(x - 0) + f(x + 0)), & \text{если } x = -\pi \text{ или } x = \pi. \end{cases}$$

Здесь $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_o - 0} f(x),\ f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\to x_o + 0} f(x)$.

Сумма $S(x)$ ряда Фурье (1.16) определена для $x\in(-\infty,+\infty)$ и является 2π – периодической функцией.

Пример 1. Разложить функцию $f(x)=e^x$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi,\pi)$. Построить график суммы ряда.

Решение. Вычислим коэффициенты Фурье функции по формулам (1.17), учитывая, что

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx = \frac{\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x}{\alpha^2 + \beta^2}e^{\alpha x} + C,$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x}{\alpha^2 + \beta^2}e^{\alpha x} + C.$$

Имеем:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} = \frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^x\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\cos nx + n\sin nx}{n^2 + 1}e^x\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2 + 1}\cdot(e^{\pi}\cos\pi n - e^{-\pi}\cos\pi n) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{n^2 + 1}(e^{\pi} - e^{-\pi}) =$$

$$= \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n^2+1};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin nx - n\cos nx}{n^2+1} e^x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(-n)}{n^2+1} \times$$

$$\times (e^{\pi}\cos \pi n - e^{-\pi}\cos \pi n) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1}(e^{\pi} - e^{-\pi}) =$$

$$= \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1}.$$

Поскольку функция e^x и ее производная непрерывны на отрезке $[-\pi,\pi]$, то по теореме 7 ряд Фурье этой функции сходится к самой функции e^x на интервале $(-\pi,\pi)$:

$$e^x = \frac{1}{\pi}\operatorname{sh}\pi + \frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}(\cos nx - n\sin x), \quad -\pi < x < \pi,$$

а в точках $x=\pm\pi$ сумма ряда равна $\frac{1}{2}(e^{-\pi} + e^{\pi}) = \operatorname{ch}\pi$. График суммы ряда изображен на рис. 1.1 (пунктиром – график самой функции e^x вне отрезка $[-\pi,\pi]$).

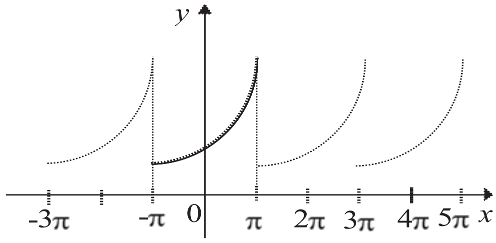

Рис. 1.1

2. Если f(x) – четная функция на отрезке $[-\pi,\pi]$, то ее коэффициенты Фурье находятся по формулам

$$b_n = 0, a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx, n = 1,2,..., \quad (1.18)$$

а ряд Фурье имеет вид: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. Если $f(x)$ – нечетная функция на отрезке $[-\pi,\pi]$, то

$$a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx, n = 1,2,..., \quad (1.19)$$

а ряд Фурье имеет вид: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x^2$ на отрезке $[-\pi,\pi]$. Построить график суммы ряда.

Решение. Поскольку функция четная, то $b_n=0; a_0, a_n$ находим по формулам (1.18), применяя интегрирование по частям:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2dx=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx\right)=$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx\Bigg|_0^{\pi}\right)=\frac{4}{n^2}\cos n\pi=(-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

Согласно теореме 7, ряд Фурье данной функции $f(x)=x^2$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ сходится к самой функции x^2:

$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$, $-\pi\le x\le\pi$ (в точках $x=\pm\pi$ сумма ряда совпадает со значением функции $f(x)=x^2$, так как $\frac{1}{2}(f(-\pi)+f(\pi))=\frac{1}{2}(\pi^2+\pi^2)=\pi^2=f(\pm\pi)$. На рис. 1.2 изображен график суммы данного ряда (пунктиром – график самой функции x^2 вне отрезка $[-\pi,\pi]$.

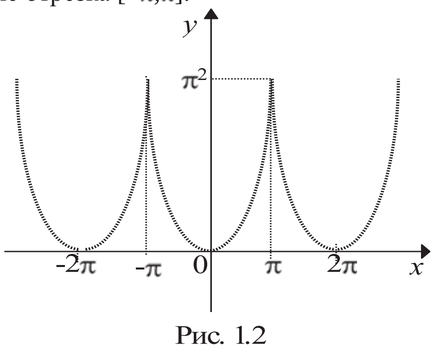

Рис. 1.2

3. Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[0,\pi]$ и удовлетворяет на нем условиям теоремы 7, то ее можно разложить в ряды Фурье различным образом, например, как по косинусам, так и по синусам.

В первом случае продолжают $f(x)$ с интервала $(0,\pi)$ на интервал $(-\pi,0)$ четным образом: $f(x)=f(-x)$, $x\in(-\pi,0)$ (рис. 1.3), а коэффициенты Фурье вычисляют по формулам (1.18);

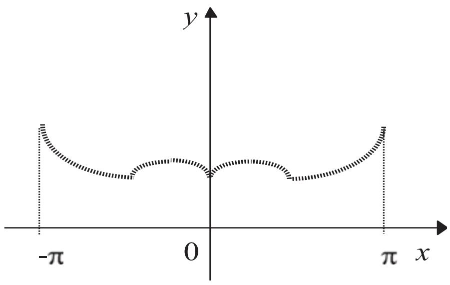

Рис. 1.3

во втором – продолжают $f(x)$ с интервала $(0,\pi)$ на $(-\pi,0)$ нечетным образом: $f(x)=-f(x)$, $x\in(-\pi,0)$ (рис. 1.4), а коэффициенты находят по формулам (1.19).

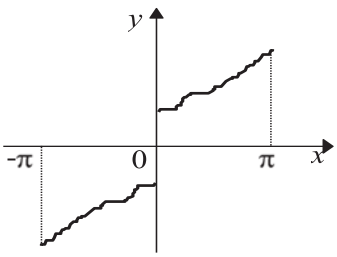

Рис. 1.4

Пример3. Разложить функцию $f(x)=x^2$ на интервале $(0,\pi)$ в ряд Фурье по синусам.

Решение. Продолжим функцию x^2 с интервала $(0,\pi)$ на интервал $(-\pi,0)$ нечетным образом и вычисляем коэффициенты по формулам (1.19):

$a_0=a_n=0,\ (n=1,2,...)$,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx dx=\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}+\frac{4}{\pi n^3}((-1)^n-1)\ .$$

Тогда

$$x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}+\frac{4}{\pi n^3}((-1)^n-1)\right)\sin nx=$$

$$=2\pi\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-...\right)-\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\frac{\sin 5x}{5^3}+...\right),$$

$0<x<\pi$.

(Сравните разложение этой же функции x^2 в ряд по косинусам, полученное в примере 2).

4. Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[a,a+2\pi]$, то ее коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx dx,\ n = 1,2,\dots .$$

1.8. Ряд Фурье функции, заданной на отрезке длиной 2l

Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[-l,l]$. *Рядом Фурье* функции $f(x)$ называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx,\ n = 1,2,\dots .$$

Если $f(x)$ – кусочно-гладкая функция на отрезке $[-l,l]$, то ее ряд Фурье сходится в каждой точке отрезка $[-l,l]$. При этом сумма $S(x)$, $x\in[-l,l]$, ряда Фурье равна

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \text{ – точка непрерывности } f(x); \\ \frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0)), & \text{если } x = x_0 \text{ – точка разрыва } f(x); \\ \frac{1}{2}(f(-l+0)+f(l-0)), & \text{если } x=-l \text{ или } x = l. \end{cases}$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1, \\ 2-x, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Решение. Продолжим $f(x)$ на интервале $(-2,0)$ нечетным образом. Тогда $a_0 = 0$, $a_n = 0$; при l=2 получаем:

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \int_0^l x\sin\frac{\pi n x}{2}dx + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx =$$

$$= \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} \dfrac{8(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}, & \text{если} \quad n = 2k+1, \\ 0, & \text{если} \quad n = 2k. \end{cases}$$

Следовательно, разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}, \ 0 < x < 2.$$

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕНЫХ

2.1. Определенный интеграл по фигуре. Основные понятия и свойства

Пусть функция $f(x,y,z)$ задана в точках тела W, на поверхности тела T или кривой Γ в декартовой системе координат $Oxyz$. Разобьем указанные фигуры на n частей ΔW_i, ΔT_i, $\Delta \Gamma_i$ соответственно и на каждой из частей выберем по одной точке (x_i, y_i, z_i). Меры полученных частей разбиения обозначим через ΔV_i (обьем части), ΔS_i (площадь части) и ΔL_i (длина части) соответственно. Через λ_i обозначим наибольшее из расстояний между любыми двумя точками, взятыми на i-ой части разбиения, $i = \overline{1,n}$. Число $\lambda = \max \lambda_i, 1 \le i \le n$, показывает, насколько мелко разбиты фигуры, и называется *диаметром разбиения*.

Составим теперь интегральные суммы:

$$\sigma_n^W = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i;$$

$$\sigma_n^T = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i;$$

$$\sigma_n^\Gamma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i)\Delta L_i.$$

Если существуют конечные пределы этих интегральных сумм при $\lambda \to 0$, причем эти пределы не зависят от способа разбиения фигур и от выбора точек на частях разбиения, то они называются *определенными интегралами функции* $f(x,y,z)$ *по* названным *фигурам*:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma_n^w = \iiint_w f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$ – тройной интеграл;

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma_n^s = \iint_s f(x,y,z)\,ds$$ – поверхностный интеграл I рода;

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma_n^\Gamma = \int_\Gamma f(x,y,z)\,dl$$ – криволинейный интеграл I рода.

Физический смысл интеграла по фигуре.

Если $f(x,y,z)$ – плотность распределения вещества по фигуре, то интеграл по этой фигуре выражает ее массу в соответствующих единицах измерения.

Замечание. Аналогично названным вводятся интегралы:

$\iint_D f(x,y,z)\,dx\,dy$ – двойной интеграл по области $D \in Oxy$;

$\int_\Gamma f(x,y)\,dl$ – криволинейный интеграл I рода по кривой $\Gamma \in Oxy$.

Свойства интегралов по фигуре

(на примере тройного интеграла $\iiint_v f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$).

1. Свойство линейности.

$$\iiint_w (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))\,dxdydz =$$
$$= \alpha \iiint_w f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \beta \iiint_w g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz;$$ α и β – числа.

2. Если область W есть объединение двух областей W_1 и W_2, не имеющих общих внутренних точек, то

$$\iiint_w f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{w_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_{w_2} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

3. Если в области W: $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$, то

$$\iiint_w f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \le \iiint_w g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

4. Теорема о среднем. Если $f(x,y,z)$ непрерывна в замкнутой связной области W, то найдется точка $(x^*,y^*,z^*) \in W$ такая, что $\iiint_w f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = f(x^*,y^*,z^*) \cdot V$, где V – объем тела W.

5. Если $f(x,y,z) \equiv 1$, то $\iiint_w 1\,dx\,dy\,dz = V$.

Предполагается, что все указанные интегралы существуют.

2.2. Вычисление двойных и тройных интегралов в декартовых координатах

а) ***Двойной интеграл.*** Пусть область D плоскости $Oxyz$ ограничена линиями $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$, $x=a$, $x=b$, где $a<b$, $\varphi(x)\leq\psi(x)$ и функции φ, ψ непрерывны на отрезке $[a; b]$ (рис.2.1). Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x,y)$ вычисляется путем сведения к двукратному интегралу по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy. \qquad (2.1)$$

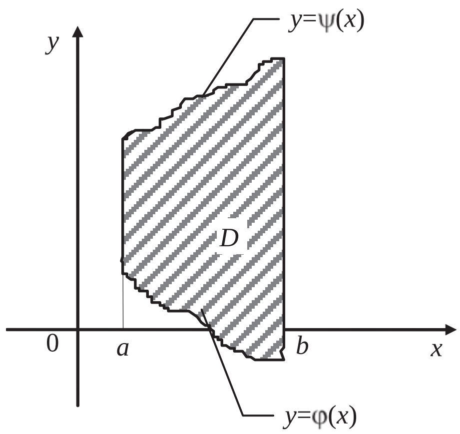

Рис. 2.1

В выражении (2.1) сначала вычисляется $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ при постоянном x. Полученный результат интегрируется по x.

Аналогично, если область D ограничена линиями $x=\alpha(y)$, $x=\beta(y)$, $y=c$, $y=d$, где $c<d$, $\alpha(y)\leq\beta(y)$ и функции α и β непрерывны на отрезке $[c; d]$ (рис.2.2), то

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx. \qquad (2.2)$$

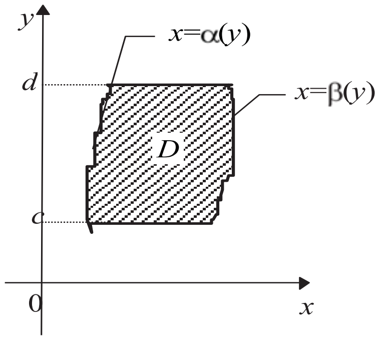

Рис. 2.2

Замечание. В более общем случае область интегрирования разбивают на части, каждая из которых имеет один из рассмотренных видов.

Пример 1. Вычислить $\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy$, где область ограничена линиями $y=-x^2$, $y=-\sqrt{x}$.

Решение. Указанные линии пересекаются в точках $O(0,0)$ и $A(1,-1)$ (рис. 2.3).

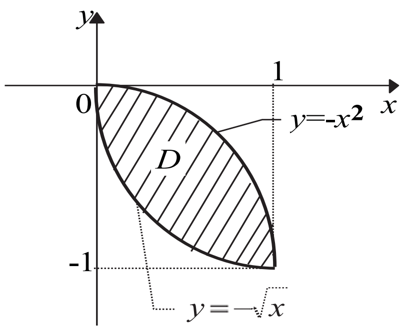

Рис. 2.3

Применяя формулу (2.1) при $\varphi(x)=-\sqrt{x}$, $\psi(x)=-x^2$, a=0, b=1, получим:

$$\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{-x^2}(x+2y)\,dy=\int\limits_0^1 (xy+y^2)\Big|_{-\sqrt{x}}^{-x^2}dx=$$

$$=\int\limits_0^1((-x^3+x^4)-(-x\sqrt{x}+x))\,dx=-\frac{3}{20}.$$

Пример 2. Изменить порядок интегрирования в двукратном интеграле $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy$.

Решение. Область интегрирования, ограниченную линиями $y=\sqrt{2x-x^2}$, $y=\sqrt{2x}$, x=2 (рис. 2.4), разобьем с помощью прямой y=1 на три области. Получим сумму интегралов:

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)dx +$$

$$+ \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y^2/2}^{2} f(x,y)dx.$$

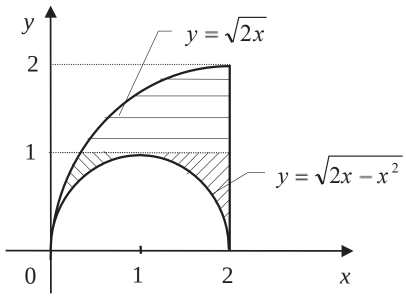

Рис. 2.4

Здесь для определения пределов изменения переменной x уравнения $y=\sqrt{2x-x^2}$, $y=\sqrt{2x}$ разрешены относительно x: $x=1\pm\sqrt{1-y^2}$, $x=y^2/2$.

Из свойств интеграла по фигуре следует, что площадь S плоской области D в декартовых прямоугольных координатах равна

$$S=\iint\limits_D dx\,dy \,. \qquad (2.3)$$

Пример 3. Вычислить площадь области, ограниченной линиями $y=2-x^2$, $y^3=x^2$.

Решение. Имеем (рис. 2.5)

$$S=\iint\limits_D dx\,dy=\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^{2/3}}^{2-x^2} dy = \int\limits_{-1}^{1} (2-x^2-x^{2/3})dx = \frac{32}{15}.$$

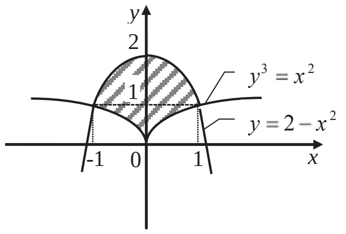

Рис. 2.5

Геометрический смысл двойного интеграла: объем V цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z=f(x,y)$, $(f>0)$, снизу плоскостью $z=0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости Oxy область D, вычисляется по формуле

$$V = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy\,. \qquad (2.4)$$

Площадь S гладкой поверхности $z=z(x,y)$, проектирующейся в область D плоскости Oxy, выражается формулой

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy\,. \qquad (2.5)$$

б) ***Тройной интеграл.*** Пусть пространственная область V в декартовой системе координат $Oxyz$ ограничена снизу и сверху поверхностями $z=F(x,y)$, $z=\Phi(x,y)$ $(F(x,y)\le\Phi(x,y))$, с боков прямой цилиндрической поверхностью и проектируется на плоскость Oxy в область D, ограниченную линиями $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$, $x=a$, $x=b$, $(a<b$, $\varphi(x)\le\psi(x))$, а функции F, Φ, φ, ψ – непрерывны (рис.2.6).

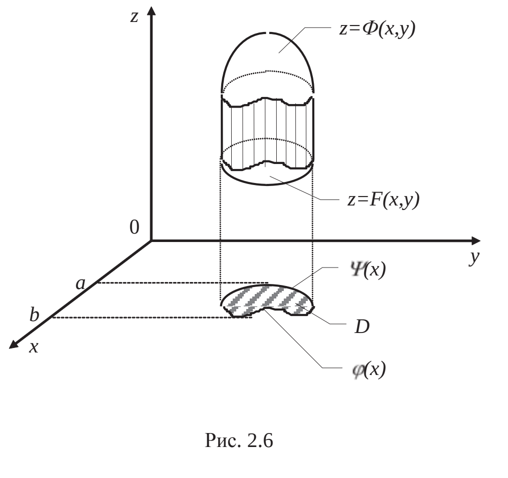

Рис. 2.6

Тройной интеграл от непрерывной функции $f(x,y,z)$ вычисляется по формулам:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iint\limits_D dx\,dy \int\limits_{F(x,y)}^{\Phi(x,y)} f(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int\limits_{F(x,y)}^{\Phi(x,y)} f(x,y,z)dz\ .$$

Замечание. Порядок интегрирования в последней формуле может быть изменен.

Пример 4. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3}dx\,dy\,dz$,

где область V ограничена поверхностями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Решение. Область V есть пирамида, ограниченная снизу плоскостью $z=0$, сверху плоскостью $x+y+z=1$ и с боков плоскостями $x=0$, $y=0$ (рис.2.7). Проекцией пирамиды на плоскость Oxy является треугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.

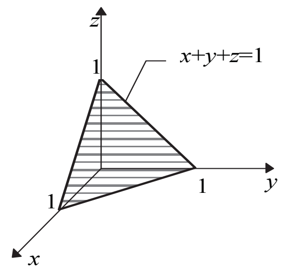

Рис. 2.7

Для переменной z нижним пределом будет $z=0$ (плоскость Oxy), а верхним – значение z, полученное из уравнения плоскости $x+y+z=1$, то есть $z=1-x-y$. Поэтому получим:

$$\iiint\limits_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\,dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left[\frac{1}{(1+x+y+z)^2} \right]\Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2} \right) dy = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{y}{4} + \frac{1}{1+x+y} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} \right) dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x - \frac{x^2}{8} - \ln|1+x| \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right).$$

Из свойств интеграла по фигуре следует, что объем V пространственной области V равен

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz\,. \qquad (2.6)$$

Пример 5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x^2$, $y = x$.

Решение. Тело V ограничено снизу и сверху параболоидами вращения $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, с боков – цилиндрической поверхностью $y = x^2$, и плоскостью $y = x$ (рис.2.8). Проекция этого тела на плоскость Oxy есть область, ограниченная линиями $y = x^2$, $y = x$, $(0 \le x \le 1)$.

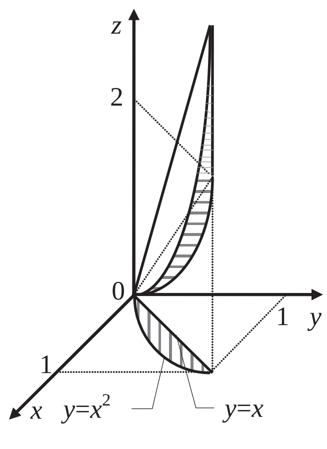

Рис. 2.8

Имеем

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} (x^2+y^2)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{3}{35} .$$

2.3. Замена переменных в кратном интеграле

а) Замена переменных в двойном интеграле. Если в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy$ осуществляется замена переменных с помощью функций

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v), \tag{2.7}$$

которые отображают взаимно-однозначно область G плоскости Ouv на область D плоскости Oxy, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = \iint\limits_G f(x(u,v);y(u,v))\left|J(u,v)\right|du dv , \tag{2.8}$$

где

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \text{ – якобиан.} \tag{2.9}$$

При этом предполагается, что функции (2.7) имеют непрерывные частные производные по аргументам u, v и якобиан (2.9) отличен от нуля. В частности, при переходе к полярным координатам ρ, φ, где $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, якобиан $|J(\rho,\varphi)|=\rho$ и формула (2.8) имеет вид:

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = \iint\limits_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi . \tag{2.10}$$

Если область D ограничена лучами, образующими с полярной осью углы φ_1, φ_2, и кривыми $\rho=\rho_1(\varphi)$ и $\rho=\rho_2(\varphi)$, где $\varphi_1<\varphi_2$, $\rho_1<\rho_2$ (рис. 2.9), то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi .$$

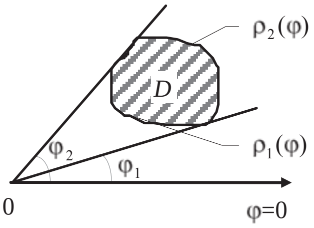

Рис. 2.9

Если область D ограничена линией $\rho=\rho(\varphi)$ и начало координат лежит внутри области (рис. 2.10), то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\rho(\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi .$$

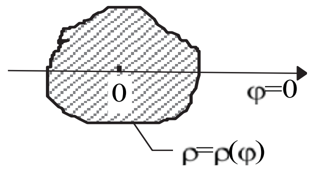

Рис. 2.10

Если область интегрирования не удовлетворяет указанным условиям, то для вычисления двойного интеграла надо предварительно разбить область на части, обладающие отмеченными выше свойствами.

Пример 1. Вычислить $\iint\limits_D dx\,dy$, если область D ограничена кривыми $y=0$, $x^2+y^2=2ax$, $y=x$, $x^2+y^2=2bx$ $(a<b)$.

Решение. Область D изображена на рис. 2.11. Уравнения прямых $y=0$ и $y=x$ в полярной системе координат имеют вид $\varphi=0$ и $\varphi=\pi/4$. Уравнения окружностей соответственно $\rho=2a\cos\varphi$ и $\rho=2b\cos\varphi$. Итак, область D заключена между лучами $\varphi=0$ и $\varphi=\pi/4$ и кривыми $\rho=2a\cos\varphi$ и $\rho=2b\cos\varphi$. Тогда

$$\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_{D_1}\rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^{\pi/4}d\varphi\int\limits_{2a\cos\varphi}^{2b\cos\varphi}\rho d\rho=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{1}{2}\rho^2\Big|_{2a\cos\varphi}^{2b\cos\varphi}=$$

$$=2(b^2-a^2)\cdot\int\limits_0^{\pi/4}\cos^2\varphi d\varphi=$$

$$=(b^2-a^2)\int\limits_0^{\pi/4}(1+\cos2\varphi)d\varphi=(b^2-a^2)\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right).$$

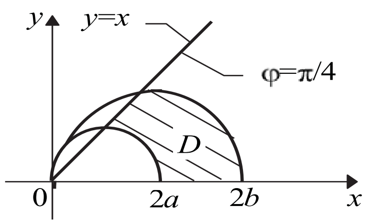

Рис. 2.11

Пример 2. Вычислить площадь плоской области *D*, ограниченной окружностью $x^2+y^2=2x$ и прямыми $y=0$ и $y=x\sqrt{3}$ (рис. 2.12).

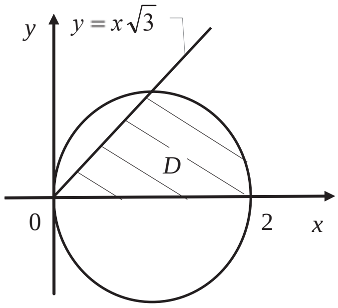

Рис. 2.12

Решение. Площадь плоской области *D* в полярной системе координат вычисляется по следующей формуле:

$$S=\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi .$$

Уравнение окружности в полярной системе координат запишется в виде $\rho=2\cos\varphi(0\le\varphi\le\pi/3)$. Тогда:

$$S=\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^{\pi/3} d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho d\rho=\int\limits_0^{\pi/3} d\varphi\,\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=2\int\limits_0^{\pi/3}\cos^2\varphi d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/3}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=\left[\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/3}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

б) Замена переменных в тройном интеграле.

Если

$$x=x(u,v,w),\ y=y(u,v,w),\ z=z(u,v,w), \tag{2.11}$$

то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_\Omega f(x(u,v,w);y(u,v,w);z(u,v,w))\left|J(u,v,w)\right| dudvdw,$$

где
$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \text{ – якобиан.} \tag{2.12}$$

При этом предполагается, что функции (2.11) имеют непрерывные частные производные по своим аргументам и якобиан $J(u,v,w)$ отличен от нуля.

Формула преобразования тройного интеграла от декартовых координат x,y,z к цилиндрическим координатам ρ, φ, z (рис.2.13), связанных с декартовыми соотношениями:

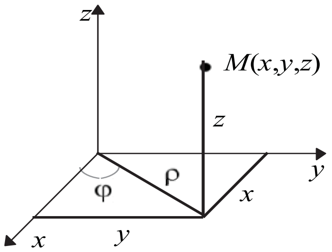

Рис. 2.13

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, & 0\le\rho<+\infty \\ y=\rho\sin\varphi, & 0\le\varphi\le 2\pi \\ z=z, & -\infty<z<+\infty \end{cases},$$

имеет вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_\Omega f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz\ . \tag{2.13}$$

Пример 3. Вычислить массу тела, если его плотность в каждой точке вычисляется по формуле $\gamma(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$ и тело V ограничено параболоидом $z=x^2+y^2$ и плоскостью z=4 (рис. 2.14).

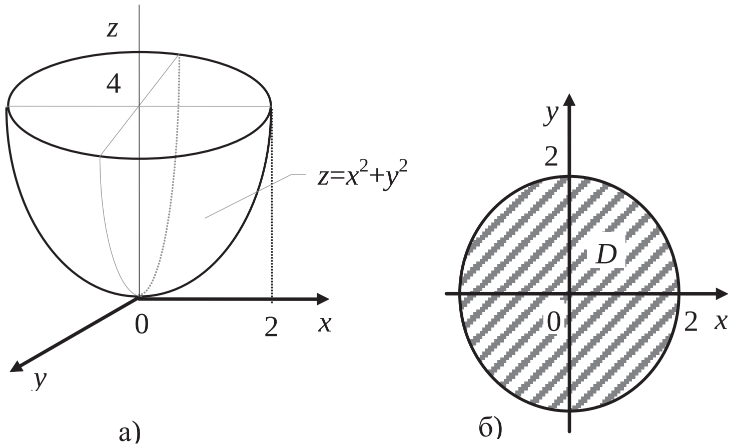

Рис. 2.14

Решение. Данная пространственная область V проектируется в область D плоскости Oxy, ограниченной окружностью $x^2+y^2=4$. Вычислим тройной интеграл в цилиндрических координатах. Уравнение параболоида будет $z=\rho^2$. Координаты ρ, φ, z изменяются так: $0\le\rho\le2$, $0\le\varphi\le2\pi$, $\rho^2\le z\le4$; плотность $\gamma=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2}=\rho$. Тогда масса M равна:

$$M=\iiint_V\gamma(x,y,z)dxdydz=\iiint_V\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=$$

$$=\iiint_\Omega\rho\cdot\rho d\rho d\varphi dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho^2d\rho\int_{\rho^2}^4dz=2\pi\int_0^2(4\rho^2-\rho^4)d\rho=$$

$$=2\pi\left(\frac{4}{3}\rho^3-\frac{\rho^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=2\pi\left(\frac{32}{3}-\frac{32}{5}\right)=\frac{128}{15}\pi.$$

Формула преобразования тройного интеграла от декартовых координат x, y, z к сферическим r, φ, θ (рис.2.15), связанным с декартовыми соотношениями

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, & 0 \le r < +\infty \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = r\cos\theta, & 0 \le \theta \le \pi \end{cases} \qquad (2.14)$$

имеет вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_\Omega f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta\,.$$

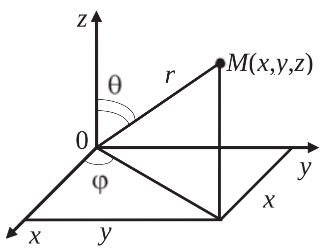

Рис. 2.15

Пример 4. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz$, где V ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и является внутренней по отношению к конусу (рис.2.16).

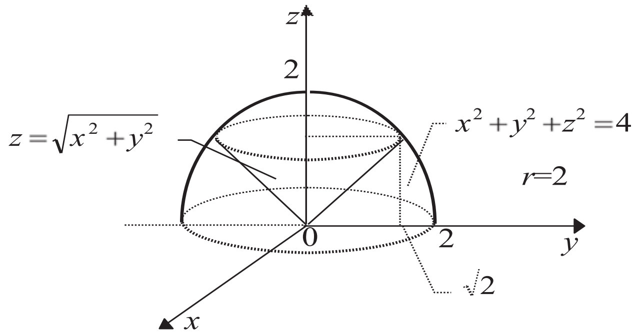

Рис. 2.16

Решение. Перейдем в данном интеграле к сферическим координатам. Уравнение сферы запишется в виде r=2, а уравнение конуса $\theta=\pi/4$. В области Ω координаты r, φ, θ изменяются следующим образом: $0\le r\le 2$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\theta\le\pi/4$. Тогда

$$\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_\Omega \cos\theta r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} \sin\theta\cos\theta d\theta \cdot \int\limits_0^2 r^3 dr =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\sin 2\theta d\theta \frac{r^4}{4}\Big|_0^2 = 2\pi\cdot 4\cdot\frac{1}{4}(-\cos 2\theta)\Big|_0^{\pi/4} = 2\pi .$$

2.4. Криволинейные интегралы I и II рода

а) Криволинейный интеграл по длине дуги (криволинейный интеграл I рода). Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в точках дуги *AB* гладкой кривой *Г*.

Разобьем дугу *AB* произвольным образом на *n* элементарных дуг точками $A=A_o$, A_1, A_2, ..., $A_n=B$; пусть Δs_k – длина дуги $A_{k-1}A_k$. На каждой элементарной дуге выберем произвольную точку $M_k(\xi_k; \eta_k)$ и умножим значение функции $f(\xi_k; \eta_k)$ в этой точке на длину Δs_k соответствующей дуги.

Интегральной суммой для функции $f(x,y)$ по длине дуги *AB* называется сумма вида $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k$.

Криволинейным интегралом по длине дуги AB от функции $f(x,y)$ (или *криволинейным интегралом I рода*) называется предел интегральной суммы при условии, что max $\Delta s_k \to 0$:

$$\int\limits_{\smile AB} f(x,y)ds = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k$$

(ds – дифференциал дуги).

Криволинейный интеграл I рода в случае, когда кривая задана уравнением $y=\varphi(x)$ ($a \le x \le b$), вычисляется по формуле

$$\int\limits_{\smile AB} f(x,y)ds = \int\limits_a^b f[x,\varphi(x)]\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}\,dx .$$

Если $f(x,y)>0$, то криволинейный интеграл I рода $\int\limits_Г f(x,y)ds$ представляет собой *массу кривой Г*, имеющей переменную линейную плотность $\mu= f(x,y)$ (физическое истолкование).

Если $f(x,y)\ge 0$, то криволинейный интеграл I рода $\int\limits_Г f(x,y)ds$ численно равен *площади части цилиндрической по-*

верхности, у которой направляющая $Г$ лежит в плоскости xOy, а образующие перпендикулярны ей; эта цилиндрическая поверхность ограничена сверху поверхностью $z= f(x,y)$, а снизу плоскостью xOy (геометрическое истолкование).

б) Криволинейный интеграл по координатам (криволинейный интеграл II рода). Пусть в декартовой системе координат $Oxyz$ задана линия $Г$, в точках которой определена векторная функция $\vec{F}(x,y,z)$ с координатами $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$.

Разобьем кривую $Г$ на n частей $\Delta Г_i$ точками M_i, $i=\overline{0,n}$. На каждой части разбиения $\Delta Г_i$ выберем по одной точке $K_i(x_i,y_i,z_i)$.

Составим так называемую *интегральную сумму*

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}(x_i,y_i,z_i),\overrightarrow{M_{i-1}M_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}P(k_i)\Delta x_i+Q(k_i)\Delta y_i+R(k_i)\Delta z_i,$$

где $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i,\ \Delta y_i=y_{i+1}-y_i,\ \Delta z_i=z_{i+1}-z_i$, слагаемыми которой являются скалярные произведения; вектор $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ соединяет начало и конец части разбиения $\Delta Г_i$.

Криволинейным интегралом II рода от вектор-функции $\vec{F}(x,y,z)$ по кривой $Г$ называется предел интегральной суммы σ_n при условии, что диаметр разбиения $\lambda\to 0$ (если этот предел конечен, не зависит от способа разбиения и от выбора точек K_i). Обозначение криволинейного интеграла II рода:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma_n=\int_Г(\vec{F}(x,y,z),d\vec{l})=\int_Г P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz.$$

Физический смысл: криволинейный интеграл $\int_Г(\vec{F},d\vec{l})$ выражает работу силы $\vec{F}(x,y,z)$ при перемещении точки ее приложения вдоль кривой $Г$.

Если направление обхода кривой $Г$ изменить на противоположное, то указанный интеграл изменит свой знак.

2.5. Поверхностные интегралы I и II рода

а) Поверхностный интеграл I рода. Пусть $F(x,y,z)$ – непрерывная функция и $z=f(x,y)$ – гладкая поверхность S, где $f(x,y)$ задана в некоторой области D плоскости xOy. Поверхностным интегралом I рода называется предел интегральной суммы при условии, что $\max d_k\to 0$:

$$\lim_{\max d_k \to 0} \sum F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k = \iint_S F(x, y, z) dS ,$$

где ΔS_k – площадь k-го элемента поверхности S, точка $(\xi_k ; \eta_k ; \zeta_k)$ принадлежит этому элементу, d_k – диаметр этого элемента, $F(x,y,z)$ определена в каждой точке поверхности S.

Значение этого интеграла не зависит от выбора стороны поверхности S, по которой производится интегрирование.

Если проекция D поверхности S на плоскость xOy однозначна, то соответствующий поверхностный интеграл I рода вычисляется по формуле

$$\iint_S F(x, y, z) dS = \iint_D F[x, y, f(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx\, dy .$$

б) Поверхностный интеграл II рода. Пусть в декартовой системе координат $Oxyz$ задана двусторонняя поверхность S. Выберем определенную сторону поверхности S, задав определенное направление единичного вектора нормали $\vec{n}(x, y, z)$, точка $(x,y,z) \in S$. И пусть в точках поверхности S определена вектор-функция $\vec{F}(x, y, z)$ с координатами $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$. Сделав разбиение S на n частей T_i с площадямит S_i, составим интегральную сумму вида

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} (\vec{F}(x_i, y_i, z_i), \vec{n}(x_i, y_i, z_i)) \Delta S_i ,$$

где $(x_i,y_i,z_i) \in T_i$; $(\vec{F}, \vec{n})$ означает скалярное произведение векторов $\vec{F}$ и $\vec{n}$.

Поверхностным интегралом II рода от вектор-функции $\vec{F}(x, y, z)$ по выбранной стороне поверхности S называется предел интегральной суммы σ_n при $\lambda \to 0$ (λ – диаметр разбиения), если этот предел существует; конечен, не зависит от способа разбиения и от выбора точек (x_i,y_i,z_i). Обозначение:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma_n = \iint_S (\vec{F}(x, y, z), \vec{n}(x, y, z)) dS =$$
$$= \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy.$$

Физический смысл. Указанный интеграл выражает массу жидкости единичной плотности, протекающей через поверхность S в направлении вектора нормали $\vec{n}$ со скоростью $\vec{F}$ за единицу времени, то есть так называемый *поток* вектор-функции (или векторного поля) $\vec{F}$ через S в направлении $\vec{n}$.

2.6. Вычисление криволинейных интегралов I и II рода

Пусть функция $f(x,y,z)$ определена и непрерывна в точках дуги AB кусочно-гладкой пространственной кривой. Если уравнение дуги AB задано параметрическими уравнениями

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ (t_0\le t\le t_1),$$

то

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y,z)dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt \qquad (2.15)$$

В случае плоской кривой AB

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt. \qquad (2.16)$$

Механический смысл криволинейного интеграла I рода: если $f(x,y,z)>0$, то $\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y,z)dl$ представляет собой массу кривой, имеющей переменную линейную плотность $\mu=f(x,y,z)$.

Пример 1. Вычислить массу отрезка прямой, заключенного между точками $A(0;–2)$, $B(4;0)$, если $\mu=\dfrac{1}{x-y}$.

Решение. Найдем уравнение прямой AB: $y=0{,}5x–2$; тогда $dl=\dfrac{\sqrt{5}}{2}dx$.

Отсюда $M=\int\limits_0^4 \dfrac{\sqrt{5}}{2}\dfrac{dx}{x-y}=\sqrt{5}\int\limits_0^4\dfrac{dx}{x+4}=\sqrt{5}\ln 2$.

Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны в точках дуги AB кусочно-гладкой пространственной кривой. Если уравнение дуги AB задано параметрически $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $(t_0\le t\le t_1)$, то

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\,y'(t) + \qquad (2.17)$$

$$+ R(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt.$$

В случае плоской кривой AB

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t))dt. \qquad (2.18)$$

Пример 2. Найти работу силы $\vec{F} = 2x\vec{i} + y\vec{j} + xyz\vec{k}$ вдоль части кривой $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ (линия пересечения поверхностей $4x^2 - y^2 = 1$ и $z = 0$) от точки $A\left(\frac{1}{2}, 0, 4\right)$ до точки $B(1, \sqrt{3}, 4)$.

Решение. $x = \frac{1}{2}\operatorname{ch} t,\ y = \operatorname{sh} t,\ z = 4$. $(0 \le t \le \operatorname{arcch} 2)$ – параметрическое задание пути $\overset{\smile}{AB}$. По формуле (2.17)

$$A = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (\vec{F}, d\vec{l}) = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} 2xdx + ydy + zyxdz =$$

$$= \int\limits_{0}^{\operatorname{arcch} 2} \left(2\operatorname{ch} t \cdot \frac{1}{2}\operatorname{sh} t + \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + 2 \cdot \frac{1}{2}\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t \cdot 4 \cdot 0\right) dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\operatorname{arcch} 2} \operatorname{sh} 2t dt = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(2\operatorname{arcch} 2) - 1) = \frac{1}{2}(2\operatorname{ch}^2 \operatorname{arcch} 2 - 2) = \frac{1}{2}(29 - 2) = 3.$$

Пример 3. Вычислить работу силы $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$ вдоль части кривой $\rho = 2$, $A\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$, $B(0,2)$. Движение от точки A к точке B – по ходу часовой стрелки.

Решение. $x = \rho\cos\varphi = 2\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi = 2\sin\varphi$ – параметрическое задание части кривой (φ в роли параметра t). По формуле (2.18)

$$A = \int\limits_{\breve{AB}} ydx + xdy = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0} (2\sin\varphi(-2\sin\varphi) + 2\cos\varphi 2\cos\varphi)d\varphi =$$

$$= 4\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0} \cos 2\varphi d\varphi = -2\sin 2\varphi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0} = 2.$$

2.7. Вычисление поверхностных интегралов I и II рода. Связь между ними

а) Поверхностный интеграл I рода (ПОВИ-1). Если поверхность T задана уравнением $z=z(x,y)$, $(x,y)\in D\subset Oxy$, причем $z(x,y)$ имеет непрерывные частные производные, а проекция D поверхности T на плоскость Oxy имеет кусочно-гладкую границу, и если в точках поверхности T задана непрерывная функция $f(x,y,z)$, то интеграл от $f(x,y,z)$ по площади поверхности T (I рода) существует и вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_T f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy\,. \qquad (2.19)$$

(Справа в этой формуле стоит двойной интеграл).

Аналогичные формулы можно получить, проектируя поверхность T на другие координатные плоскости.

б) Поверхностный интеграл II рода (ПОВИ-2). Если поверхность T задана так же, как в предыдущем пункте а), то поверхностный интеграл II рода $\iint\limits_T f(x,y,z)dx\,dy$ существует и сводится к двойному интегралу по проекции D поверхности T на плоскость Oxy следующим образом:

$$\iint\limits_T f(x,y,z)dx\,dy = \pm\iint\limits_D f(x,y,z(x,y))dx\,dy\,. \qquad (2.20)$$

Знак “+” в формуле (2.20) берется, если нормаль к выбранной стороне поверхности T образует острый угол с осью Oz; знак “–” – в случае тупого угла.

Формулы, аналогичные (2.20), имеют место и для поверхностных интегралов II рода таких, как:
$\iint\limits_T f(x,y,z)dydz$, $\iint\limits_T f(x,y,z)dzdx$. При этом нужно спроектировать поверхность Т на плоскости Oyz и Ozx соответственно.

в) Связь между ПОВИ-1 и ПОВИ-2). Имеет место формула

$$\iint\limits_T P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint\limits_T (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)dS, \qquad (2.21)$$

связывающая поверхностные интегралы II рода (слева) и I рода (справа). Здесь α, β, γ есть углы, образованные с осями *Ox, Oy, Oz* нормалью $\vec{n}(x,y,z)$ к выбранной стороне поверхности *T* в точке (*x*,*y*,*z*).

Пример1. Вычислить массу плоской пластины *T*: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$, расположенной в I октанте (рис. 2.17) и имеющей поверхностную плотность $\mu(x,y,z)=2x+\frac{4}{3}y+z$.

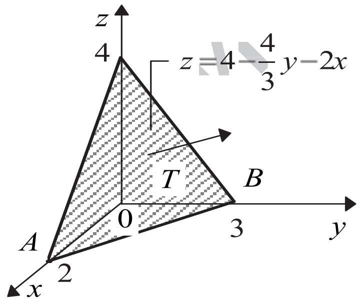

Рис. 2.17

Решение. Уравнение поверхности *T*: $z(x,y)=4\left(1-\frac{y}{3}-\frac{x}{2}\right)$, $(x,y)\in D$ есть проекция *T* на плоскость *Oxy*. По формуле (2.19):

$$m_{\text{T}} = \iint\limits_{\text{T}} f(x,y,z)dS = \iint\limits_D \mu(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D \left(2x+\frac{4}{3}y+4\left(1-\frac{y}{3}-\frac{x}{2}\right)\right)\sqrt{1+(2)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{\sqrt{61}}{3} \cdot 4 \cdot \iint_D dx\,dy = \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot S_D \ ,$$

где S_D – площадь фигуры D. А так как D – это ΔOAB, то – $S_D = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$. Итак, $m_T = \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot 3 = 4\sqrt{61}$ (кг).

Пример 2. Вычислить поток Π векторного поля $\vec{F} = z \cdot \vec{k}$ ($\vec{k}$ – единичный направляющий вектор оси Oz) через верхнюю сторону нижней половины сферы T: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Решение. Уравнение нижней полусферы: $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Нормаль $\vec{n}$ к выбранной стороне образует острый угол с Oz, поэтому по формуле (2.20) имеем:

$$\Pi = \iint_T (\vec{F}, \vec{n})dS = \iint_T z\,dx\,dy = +\iint_D \left(-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right)dx\,dy .$$

Здесь D – проекция T на плоскость Oxy есть круг $x^2 + y^2 \le R^2$. Перейдем в последнем двойном интеграле к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le r\le R$. В итоге:

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left(-\sqrt{R^2 - r^2}\right) r\,dr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R^2 - r^2)^{1/2}\, d(R^2 - r^2) = -\frac{2\pi}{3} R^3.$$

2.8. Формулы Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса

Эти формулы связывают интеграл по фигуре с некоторым интегралом по границе данной фигуры.

Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в области $D\subset Oxy$ и на ее границе Γ; область D – связная; Γ – кусочно-гладкая кривая. Тогда верна *формула Грина*:

$$\int_\Gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx\,dy \ ; \quad (2.22)$$

здесь слева стоит криволинейный интеграл I рода, справа – двойной интеграл; контур Γ обходится против часовой стрелки.

Пусть T – кусочно-гладкая ограниченная двусторонняя поверхность с кусочно-гладкой границей Γ. Если функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ и их частные производные I порядка непрерывны в точках поверхности T и границы Γ, то имеет место *формула Стокса*:

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \iint\limits_{T} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz\,dx \;; \tag{2.23}$$

слева стоит криволинейный интеграл II рода; справа – поверхностный интеграл II рода, взятый по той стороне поверхности T, которая остается слева при обходе кривой Γ.

Если связная область $W \subset Oxyz$ ограничена кусочно-гладкой, замкнутой поверхностью T, а функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в точках из W и T, то имеет место *формула Остроградского-Гаусса*:

$$\iint\limits_{T} P(x,y,z)dy\,dz + Q(x,y,z)dz\,dx + R(x,y,z)dx\,dy =$$
$$= \iiint\limits_{W} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz \;; \tag{2.24}$$

слева – поверхностный интеграл II рода по внешней стороне поверхности T; справа – тройной интеграл по области W.

Пример 1. Вычислить работу силы $\vec{F} = (x-y)\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ при обходе точки ее приложения окружности Γ: $x^2 + y^2 = R^2$, начиная от оси Ox, по часовой стрелке (рис. 2.18).

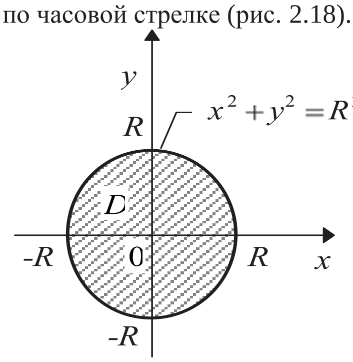

Рис. 2.18

Решение. Работа равна $A = \int\limits_{\Gamma} (x-y)dx + (x+y)dy$. Применим формулу Грина (2.22), ставя знак “–” справа перед интегралом (так как обход контура – по часовой стрелке) и учитывая, что $P(x,y)=x-y$, $Q(x,y)=x+y$. Имеем:

$$A = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial(x+y)}{\partial x} - \frac{\partial(x-y)}{\partial y} \right) dx\,dy = -\iint\limits_{D} 2dx\,dy = -2S_D \,,$$

где S_D – площадь круга D: $x^2+y^2\le R^2$, равная πR^2. В итоге: $A=-2\pi R^2$ – искомая работа силы.

Пример 2. Вычислить интеграл $J=\int\limits_{\Gamma} x^2y^3dx+dy+zdz$, если Γ есть окружность $x^2+y^2=1$ в плоскости z=2, обходимая против часовой стрелки.

Решение. По формуле Стокса (2.23) исходный интеграл сведем к поверхностному интегралу по кругу T:

$$T:\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ z=2\end{cases}$$

Итак, учитывая, что $P(x,y,z)=x^2y^3,\ Q(x,y,z)=1,\ R(x,y,z)=2$, имеем:

$$J=\iint\limits_T\left(\frac{\partial(1)}{\partial x}-\frac{\partial(x^2y^3)}{\partial y}\right)dx\,dy+\left(\frac{\partial(2)}{\partial y}-\frac{\partial(1)}{\partial z}\right)dydz+$$

$$+\left(\frac{\partial(x^2y^3)}{\partial z}-\frac{\partial(2)}{\partial x}\right)dzdx=-3\iint\limits_D x^2y^2dx\,dy\,.$$

Последний интеграл есть двойной интеграл по кругу $D\subset Oxy$, на который проектировался круг T; D: $x^2+y^2\le 1$. Перейдем к полярным координатам: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $r\in[0;1]$. В итоге:

$$J=-3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r^2\cos^2\varphi r^2\sin^2\varphi rdr=-3\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\int\limits_0^1 r^5dr=-\frac{\pi}{8}\,.$$

Пример 3. Найти поток Π векторного поля $\vec{F}=(x^2;y^2;z^2)$ через полную поверхность T пирамиды W: $\begin{cases}x+2y+3z\le 6,\\ x>0,\ y>0,\ z>0\end{cases}$ (рис. 2.19) в направлении внешней нормали к поверхности.

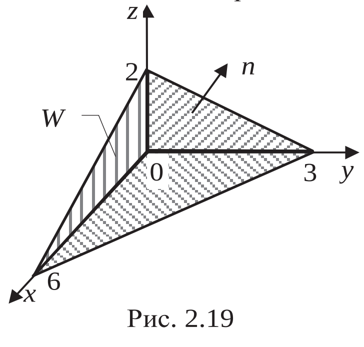

Рис. 2.19

Решение. Поток равен $\quad \Pi = \iint\limits_T x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$.

Применяя формулу Остроградского-Гаусса (2.24), сводим задачу к вычислению тройного интеграла по фигуре W -пирамиде:

$$\Pi = \iiint\limits_W \left(\frac{\partial(x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(z^2)}{\partial z} \right) dxdydz =$$

$$= 2\iiint\limits_W (x + y + z) dxdydz = 2\int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{3-\frac{x}{2}} dy \int\limits_0^{2-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}} (x + y + z) dz =$$

$$= \int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{3-\frac{x}{2}} \left(4 + \frac{8}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{5}{9}x^2 - \frac{14}{9}xy - \frac{8}{9}y^2 \right) dy =$$

$$= \int\limits_0^6 \left(10 + x - \frac{7}{6}x^2 + \frac{13}{108}x^3 \right) dx = 20.$$

Пример 4. Найти поток Π векторного поля $\vec{F} = (x + 3z)\vec{k}$ через полную поверхность T пирамиды W: $x + 2y + 3z \le 6;\ x \ge 0;\ y \ge 0$; $z \ge 0$ (рис. 2.20), в направлении внешней нормали к поверхности.

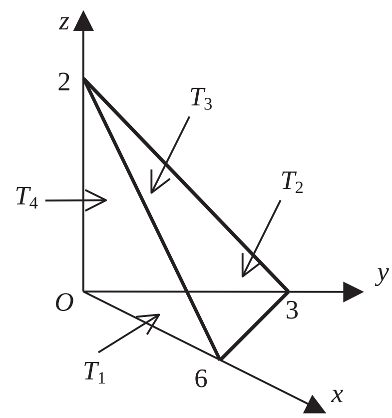

Рис. 2.20

Решение. Применим формулу Остроградского-Гаусса (2.24) $\Pi = \iiint\limits_W \frac{\partial(x + 3z)}{\partial z} dxdydz = \iiint\limits_W 3dxdydz = 3V = 18$, где V – объем пирамиды. Сравним с решением непосредственного вычисления потока (T_1, T_2, T_3, T_4 – грани пирамиды).

$$\Pi = \iint_T (x+3z)dxdydz = \iint_{T_1} + \iint_{T_2} + \iint_{T_3} + \iint_{T_4};$$

$$\iint_{T_3} (x+3z)dxdy = \iint_{T_4} (x+3z)dxdy = 0; \quad ,$$

так как проекция граней T_3, T_4 на плоскость Oxy имеет нулевую площадь (рис. 2.21),

$$\iint_{T_1} (x+3z)dxdy = -\iint_G xdxdy;$$

$$\iint_{T_2} (x+3z)dxdy = \iint_G (x+6-x-2y)dxdy;$$

$$\Pi = \iint_G (6-x-2y)dxdy = \int_0^3 dy \int_0^{6-2y} (6-x-2y)dx =$$

$$= \int_0^3 \left((6-2y)^2 - \frac{(6-2y)^2}{2} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^3 (6-2y)^2 dy = 18.$$

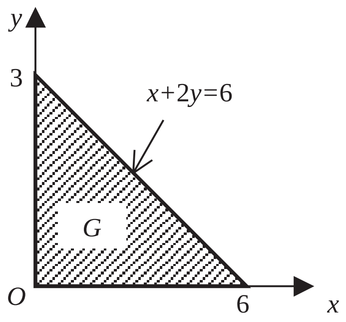

Рис. 2.21

3. ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

3.1. Оригинал и его изображения

Функция $f(t)$ действительного переменного t называется оригиналом, если она удовлетворяет условиям:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;
2) существуют такие постоянные $M > 0$ и $S_0 \geq 0$, что $|f(t)| < Me^{S_0 t}$ для всех t;

3) при $t \geq 0$ функция $f(t)$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода на каждом конечном интервале оси Ot.

Изображением функции $f(t)$ по Лапласу называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = \alpha + i\beta$, определяемая равенством $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$. Если $f(t)$ – оригинал, интеграл в правой части последнего равенства сходится при $\operatorname{Re} p = \alpha > S_0$. Тот факт, что $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, будем обозначать так: $F(p) = L(f(t))$ или $F(p) \doteq f(t)$, $F(p) \to f(t)$.

Таблица 3.1

Изображение основных элементарных функций

$f(t)$ при $t > 0$	$L(f(t))$
1	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$
$\operatorname{sh}\beta t$	$\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$
$\operatorname{ch}\beta t$	$\frac{p}{p^2-\beta^2}$
$t\sin\beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$
$t\cos\beta t$	$\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$

3.2. Основные теоремы операционного исчисления

1. Теорема линейного изображения.

Для любых оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ и любых чисел a, b

$L(af(t)+bg(t)) = aL(f(t))+bL(g(t))$.

Пусть всюду в дальнейшем $L(f(t)) = F(p)$.

2. Теорема подобия (изменения масштаба). Для любого постоянного $C>0$ $\quad L(f(Ct)) = \dfrac{1}{C}F\left(\dfrac{p}{C}\right)$.

3. Теорема смещения. Для любого числа α: $\quad L(e^{-\alpha t}f(t)) = F(p+\alpha)$.

4. Теорема о дифференцировании оригинала. Если функции $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$L(f'(t)) = pF(p) - f(0);$$

$$L(f''(t)) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$L(f^{(n)}(t)) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

5. Теорема о дифференцировании изображения.

$L(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(p), \quad n = 1, 2, \ldots$.

6. Теорема об интегрировании оригинала.

$$L\left(\int_0^t f(s)ds\right) = \frac{F(p)}{P}.$$

7. Теорема об интегрировании изображения.

$L\left(\dfrac{f(t)}{t}\right) = \displaystyle\int_p^\infty F(y)dy$ (если интеграл сходится).

8. Теорема запаздывания. $L(f(t-t_0)) = e^{-pt_0F(p)}, \quad t_0 > 0$.

9. Теорема об изображении свертки двух функций.

$L(f_1 * f_2) = F_1(p)F_2(p)$, где $f_1 * f_2 = \displaystyle\int_0^t f_1(s)f_2(t-s)ds$ – свертка функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$, $F_1(p) = L(f_1(t)), \quad F_2(p) = L(f_2(t))$.

Пример 1. Найти изображения функции $\mathrm{sh}\,at\sin bt$.

Решение. Известно, что

$L(\sin bt) = \dfrac{b}{p^2+b^2} = F(p); \quad \mathrm{sh}\,at = \dfrac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})$. Тогда

$\mathrm{sh}\, at \sin bt = \frac{1}{2} e^{at} \sin bt - \frac{1}{2} e^{-at} \sin bt$. По теореме линейности имеем $L(\mathrm{sh}\, at \sin bt) = \frac{1}{2} L(e^{at} \sin bt - \frac{1}{2} L(e^{-at} \sin bt)$. В каждом из полученных слагаемых применим теорему смещения и получаем $\frac{1}{2} F(p-a) - \frac{1}{2} F(p+a) = \frac{1}{2} \frac{b}{(p-a)^2 + b^2} - \frac{1}{2} \frac{b}{(p+a)^2 + b^2}$.Это и есть искомое изображение.

Пример 2. Найти свертку функций t и e^t и ее изображение.

Решение. $t * e^t = \int_0^t s e^{t-s} ds = \int_0^t s e^t e^{-s} ds = e^t \int_0^t s e^{-s} ds$. Вычисляя интеграл, имеем $te^t = e^t(1 - te^{-t} - e^{-t})$. По теореме об изображении свертки $L(t * e^t) = L(t) L(e^t) = \frac{1}{p^2(p-1)}$.

Пример 3. Найти $L(te^{-2t} \sin t)$.

Решение. Найдем $F(p) = L(\sin t) = \frac{1}{p^2+1}$. По теореме о дифференцировании изображения

$L(\sin t \cdot t) = -F'(p) = -\left(\frac{1}{p^2+1}\right)' = \frac{2p}{(p^2+1)^2} = G(p)$. Наконец, по теореме смещения $L(e^{-2t} t \sin t) = G(p+2) = \frac{2(p+2)}{((p^2+1)^2+1)^2}$.

3.3. Отыскание оригинала по изображению

При отыскании оригинала по изображению в простейших случаях используют таблицу изображений основных элементарных функций и теоремы разложения.

Вторая теорема разложения позволяет найти оригинал по известному изображению, являющемуся дробно-рациональной функцией p: $F(p) = u(p)/v(p)$, где $u(p)$ и $v(p)$ – многочлены от p соответственно степени m и n, причем $m < n$. Если разложение $v(p)$ на простейшие множители имеет вид $v(p) = (p-p_1)^{k_1} (p-p_2)^{k_2} \ldots (p-p_r)^{k_r}, k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$, то, как известно, $F(p)$ может быть разложена на сумму элементарных дробей вида $\dfrac{A_{js}}{(p-p_j)^{k_j-s+1}}$; $j=\overline{1,r}$; $s=\overline{1,k_j}$. Итак,

$$F(p)=\sum_{j=1}^{r}\sum_{s=1}^{k_j}\frac{A_{js}}{(p-p_j)^{k_j-s+1}} \qquad (3.1)$$

Все коэффициенты могут быть найдены по формуле

$$A_{js}=\frac{1}{(s-1)!}\lim_{p\to p_j}\left(\frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}}[(p-p_j)^{k_j}F(p)]\right). \qquad (3.2)$$

Вместо этой формулы для определения коэффициентов A_{js} можно использовать элементарные приемы, применяемые в математическом анализе при интегрировании рациональных дробей. Если все корни многочлена $v(p)$ простые, разложение упрощается: $v(p)=(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)$; $(p_j\neq p_k$ при $j\neq k)$;

$$F(p)=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{p-p_j}\text{, где } A_j=\frac{u(p_j)}{v'(p_j)}. \qquad (3.3)$$

После отыскания тем или иным способом разложения $F(p)$ на простейшие дроби оригинал $f(t)$ находится так:

а) в случае кратных корней знаменателя

$$f(t)=\sum_{j=1}^{r}\sum_{s=1}^{k_j}A_{js}\frac{t^{k_j-s}}{(k_j-s)!}e^{p_jt}; \qquad (3.4)$$

б) в случае простых корней знаменателя $v(p)$

$$f(t)=\sum_{j=1}^{r}\frac{u(p_j)}{v'(p_j)}e^{p_jt}. \qquad (3.5)$$

Пример 1. Найти оригинал $f(t)$, если известно, что $F(p)=L(f(t))=\dfrac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$.

Решение. У изображения $F(p)$ в данном случае все корни знаменателя – действительные и простые. Поэтому лучше всего воспользоваться формулой (3.5). Имеем

$$u(p)=p+1;\quad v(p)=p(p-1)(p-2)(p-3)=$$
$$=p^4-6p^3+11p^2-6p;\quad v'(p)=4p^3-18p^2+22p-6.$$

Корни $v(p)$: $p_1 = 0$; $p_2 = 1$; $p_3 = 2$; $p_4 = 3$; $\dfrac{u(p_1)}{v'(p_1)} = -\dfrac{1}{6}$;

$\dfrac{u(p_2)}{v'(p_2)} = 1$; $\dfrac{u(p_3)}{v'(p_3)} = -\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{u(p_4)}{v'(p_4)} = \dfrac{2}{3}$.

Отсюда по формуле (3.5) находим $f(t)$: $f(t) = -\dfrac{1}{6} + e^t - \dfrac{3}{2}e^{2t} + \dfrac{2}{3}e^{3t}$.

Пример 2. Найти оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p) = \dfrac{p}{(p-1)^3(p+2)^2}$.

Решение. Разложение $F(p)$ на простейшие дроби имеет вид

$$F(p) = \frac{A_{11}}{(p-1)^3} + \frac{A_{12}}{(p-1)^2} + \frac{A_{13}}{p-1} + \frac{A_{21}}{(p+2)^2} + \frac{A_{22}}{p+2}. \quad (3.6)$$

Находим коэффициенты A_{ij} по формуле (3.2)

$$A_{11} = \frac{1}{0!}\lim_{p\to 1}((p-1)^3F(p)) = \lim_{p\to 1}\frac{p}{(p+2)^2} = \frac{1}{9};$$

$$A_{12} = \frac{1}{1!}\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}((p-1)^3F(p)) = \lim_{p\to 1}\left(\frac{p}{(p+2)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{p\to 1}\left(\frac{p}{(p+2)^2} - \frac{2p}{(p+2)^3}\right) = \frac{1}{27};$$

$$A_{13} = \frac{1}{2!}\lim_{p\to 1}\frac{d^2}{dp^2}((p-1)^3F(p)) = \frac{1}{2}\lim_{p\to 1}\left(\frac{p}{(p+2)^2}\right)'' =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{p\to 1}\left(-\frac{4}{(p+2)^3} + \frac{6p}{(p+2)^4}\right) = -\frac{1}{27}.$$

Аналогично получим $A_{21} = \dfrac{2}{27}$; $A_{22} = \dfrac{1}{27}$. Следовательно, $F(p) = \dfrac{1}{27}\left[\dfrac{3}{(p-1)^3} + \dfrac{1}{(p-1)^2} - \dfrac{1}{p-1} + \dfrac{2}{(p+2)^2} + \dfrac{1}{p+2}\right]$. Отсюда по таблице изображений и теоремам смещения и линейности изображения имеем

$$f(t)=\frac{1}{27}\left[\frac{3}{2}t^2e^t+te^t-e^t+2te^{-2t}+2^0e^{-2t}\right]=$$

$$=\frac{1}{54}(3t^2+2t-2)e^t+\frac{1}{27}(2t+1)e^{-2t}.$$

Заметим, что коэффициенты разложения (3.6) можно найти и таким способом, который применялся в математическом анализе при интегрировании рациональных дробей.

3.4. Решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений операционным методом

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение (ЛДУ) n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_ny(t)=f(t),$$

правая часть которого $f(t)$ является оригиналом. Тогда и решение $y(t)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_0$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(0)=y_0{}^{(n-1)}$ (то есть решение задачи Коши для данного ЛДУ), тоже будет оригиналом.

Обозначим изображение искомого решения $y(t)$ через $S(p)$, то есть $S(p)=L(y(t))$. Используя теорему о дифференцировании оригинала и свойство линейности, находим изображение левой части исходного ЛДУ и приравниваем его к $L(f(t))$. В итоге вместо ЛДУ с начальными условиями получается так называемое изображающее уравнение, которое является линейным алгебраическим уравнением относительно новой неизвестной функции $S(p)=L(y(t))$. Решая изображающее уравнение, находим $S(p)$. Определяя затем по $S(p)$ оригинал $y(t)$, мы тем самым найдем искомое решение $y(t)$ задачи Коши. Аналогично решаются и системы ЛДУ.

Пример 1. Решить ЛДУ $y''(t)-2y'(t)-3y(t)=e^{3t}$, если $y(0)=y'(0)=0$.

Решение. Обозначим $L(y(t))=S(p)$. По теореме о дифференцировании оригинала имеем $L(y'(t))=pS(p)-y_0$; $L(y''(t))=p^2S(p)-py_0-y'_0=p^2S(p)$. Тогда изображающее уравнение таково: $p^2S(p)-2pS(p)-3S(p)=\dfrac{1}{p-3}$. Отсюда $S(p)=\dfrac{1}{(p-3)(p^2-2p-3)}=\dfrac{1}{(p+1)(p-3)^2}$. Восстановим теперь оригинал $y(t)\underset{\cdot}{\longleftarrow}S(p)$. Разложим вначале дробь $S(p)$ на простейшие дроби: $\dfrac{1}{(p+1)(p-3)^2}=\dfrac{A}{(p-3)^2}+\dfrac{B}{(p-3)}+\dfrac{C}{p+1}$. Ищем A, B, C: $1=A(p+1)+B(p-3)(p+1)+C(p-3)^2$. Полагая $p=-1$, получаем $1=16C$, то есть $C=1/16$; полагая $p=3, p=0$, получаем $1=A-3B+9C$, откуда $B=\dfrac{1}{3}(A+9C-1)=-\dfrac{1}{16}$, $A=\dfrac{1}{4}$.

Следовательно,

$$S(p)=\frac{1}{4}\frac{1}{(p-3)^2}-\frac{1}{16}\frac{1}{(p-3)}+\frac{1}{16}\frac{1}{(p+1)}\underset{\cdot}{\longrightarrow}y(t)=$$

$$=\frac{1}{4}te^{3t}-\frac{1}{16}e^{3t}+\frac{1}{16}e^{-t}.$$

Решение поставленной задачи Коши найдено.

Пример 2. Решить систему ЛДУ $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+2y;\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y+1,\end{cases}$ если $x(0)=-1,\quad y(0)=5$.

Решение. Обозначим $L(x(0))=T(p),\quad L(y(t))=S(p)$ и найдем изображения левой и правой частей каждого из уравнений системы.

$$\begin{cases}pT(p)-(-1)=T(p)+2S(p)\\ pS(p)-5=2T(p)+S(p)+\dfrac{1}{p}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(p-1)T(p)-2S(p)=-1;\\ -2T(p)+(p-1)S(p)=S+\dfrac{1}{p}.\end{cases}$$

Из последней линейной алгебраической системы уравнений находим неизвестную $T(p)$ (например, по формулам Крамера)

$$T(p)=\frac{-p^2+11p+2}{p((p-1)^2-4)}=\frac{-p^2+11p+2}{p(p+1)(p-3)}.$$

Разложим $T(p)$ на простейшие рациональные дроби: $T(p)=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p+1}+\dfrac{C}{p-3}=\dfrac{-p^2+11p+2}{p(p+1)(p-3)}$.

Для определения чисел A, B, C получаем равенство $A(p+1)(p-3)+Bp(p-3)+Cp(p+1)=-p^2+11p+2$.

Подставляя в обе части равенства вместо p поочередно числа –1; 3 и 0, имеем $4B=-10$, $12C=26$, $-3A=2$. Отсюда $B=-\frac{5}{2}$; $C=\frac{13}{6}$; $A=-\frac{2}{3}$; $T(p)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{13}{6}\frac{1}{p-3}$. Пользуясь таблицей изображений и свойством линейности изображения, найдем оригинал $x(t)\xleftarrow{\cdot} T(p)$. Итак, $x(t)=-\frac{2}{3}-$ $-\frac{5}{2}e^{-t}+\frac{13}{6}e^{3t}$, одна из искомых функций найдена. Функцию $y(t)$ можно найти аналогично $x(t)$, предварительно определив ее изображение $S(p)$. Но в данном случае $y(t)$ можно найти проще, выражая из первого уравнения исходной системы ЛДУ

$$y(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}-x(t)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}e^{-t}+\frac{13}{2}e^{3t}+\frac{2}{3}+\frac{5}{2}e^{-t}-\frac{13}{6}e^{3t}\right)=$$

$$=\frac{5}{2}e^{-t}+\frac{13}{2}e^{3t}+\frac{1}{3}.$$ Задача решена.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

Задание 1. Исследовать на сходимость числовые ряды, пользуясь известными признаками сходимости.

1.1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2+5n)\ln^3(2+5n)}$

1.2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{4n+2}}$

1.3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{4n+5}\right)^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n}$

1.4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+5)\ln(n^2+5)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+n}$

1.5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+6}{7n^2+8n+1}$

1.6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n/2}}{n!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2^n} \right)^n$

1.7. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)!}$

1.8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+5)^{10}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^n}$

1.9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} \left(\frac{3n+1}{3n} \right)^{n^2}$

1.10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n\sqrt{3n^2+2n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)!}$

1.11. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{(3n)!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{2+n} \right)^{n^2}$

1.12. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n \frac{1}{n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+4}{7n+3}$

1.13. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7+n}{49+3n^2} \right)^2$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n} \right)^{n^2}$

1.14. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+4} \right)^{n^2}$

1.15. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n/2}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n \left(\frac{n+3}{n} \right)^{n^2}$

1.16. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{n^3+2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

1.17. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(2n+3)\cdot 3^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n+1} \right)^n$

1.18. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2-1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+6}{3n+4} \right)^n$

1.19. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+1} \right)^n$

1.20. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)\ln(\ln(n+1))}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\sin\frac{2\pi}{5^n}$

1.21. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n-1}{3n}\right)^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+3}{n^2-4n+13}$

1.22. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt[4]{n^3+3}}$

1.23. а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \operatorname{tg}\frac{\pi}{3^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+7}{3n^4+5n-2}$

1.24. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+3}{2n+1}}$

1.25. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(n-1)!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\ln^2(n+5)}$

1.26. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$

1.27. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

1.28. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^n \cdot n^6$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(3n+4)^3+5}$

1.29. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4+3n}{7+8n}\right)^n$

1.30. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$

Задание 2. Найти область сходимости степенного ряда.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+x)^n}{2^n(n+3)}$ **2.2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2n+5}$

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$ **2.4.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln^3(n+1)}}{(n+1)}(x+1)^n$

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n(x+2)^n}{\sqrt{n}}$ **2.6.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{2n\cdot\sqrt[3]{n}}$

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}+2^n}$

2.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n+5^{2n}}$

2.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x-2)^n}{n(n+1)}$

2.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-4)^n}{((2n-1)!}$

2.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

2.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$

2.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{n^n}$

2.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!\,(x+3)^n}{2n}$

2.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$

2.16. $\sum_{n=1}^{\infty} n\,5^n(x-3)^n$

2.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n\ln(n+1)}$

2.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n!}(x+2)^n$

2.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt[3]{n}\,3^n}$

2.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+x)^n 3^{n+1}}{\sqrt{n+3}}$

2.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n(2^n+1)}$

2.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n\sqrt{n+1}}$

2.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1}\right)^{n^2} \frac{x^n}{5^n}$

2.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n+2^{2n}}$

2.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x-1)^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$

2.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n(x+2)^n}{n!}$

2.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n+4^n}$

2.28. $\sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{x}+1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{2^n}$

2.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\ln(n+1)}$

2.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{5^n\cdot n^2}$

Задание 3.

3.1–3.15. С помощью разложения подынтегральной функции в ряд вычислить определенный интеграл с точностью до ε=0,001.

3.1. $\int_0^{0,1} \frac{e^x-1}{x}dx$

3.2. $\int_0^{0,5} \ln(1+x^3)dx$

3.3. $\int\limits_0^{0,2} e^{-x^2}dx$

3.4. $\int\limits_0^{0,5} x^5 \sin x dx$

3.5. $\int\limits_0^{0,5} \cos\frac{x^4}{4}dx$

3.6. $\int\limits_{0,1}^{0,5} \frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}}dx$

3.7. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$

3.8. $\int\limits_0^{1/3} \sqrt{1+x^4}dx$

3.9. $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}dx$

3.10. $\int\limits_0^1 \sin x^4 dx$

3.11. $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{1+\frac{x^2}{4}}dx$

3.12. $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\cos x^2 dx$

3.13. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^2}}$

3.14. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$

3.15. $\int\limits_{0,3}^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$

3.16–3.30. Найти первые четыре (отличные от нуля) члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям.

3.16. $y' = 2\cos x - xy^2,\ y(0) = 1$

3.17. $y' = e^{3x} + 2xy^2;\ y(0) = 1$

3.18. $y' = e^{\sin x} + x;\ y(0) = 0$

3.19. $y' = xy - y^2,\ y(0) = 0,2$

3.20. $y' = 2x + y^2 + e^x;\ y(0) = 1$

3.21. $y' - 2xy = 0;\ y(0) = 1$

3.22. $y' = xy + e^y;\ y(0) = 0$

3.23. $y' = x\sin x - y^2,\ y(0) = 1$

3.24. $y' + 3xy = 0;\ y(0) = 1$

3.25. $y' - 2y = 0;\ y(0) = 1$

3.26. $y' = xy + x^2 + y^2,\ y(0) = 1$

3.27. $y' + y = x + 1;\ y(0) = 1$

3.28. $y' = 1 - xy;\ y(0) = 0$

3.29. $y' = x^2 + e^y,\ y(0) = 0$

3.30. $y' = x^2y^2 + y\sin x,\ y(0) = \frac{1}{2}$

Задание 4. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь плоской области *D*, ограниченной заданными линиями.

4.1. D: $y^2 = 4x, \quad x = \frac{8}{y^2+4}$

4.2. D: $y=\frac{4}{x}$, $y=6-x$

4.3. D: $y=2-2x^2$, $y\geq -6$

4.4. D: $x=y^2+1$, $x+y=3$

4.5. D: $4y=x^2-4$, $2y=4-x^2$

4.6. D: $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$

4.7. D: $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=x$, $y=0$

4.8. D: $x^2+y^2=4$, $y=2x-x^2$, $x=0$ $(x\geq 0,\ y\geq 0)$

4.9. D: $x^2=3y$, $y^2=3x$

4.10. D: $x=y^2$, $x=\sqrt{2-y^2}$

4.11. D: $y=x^2+1$, $x-y+3=0$

4.12. D: $x=4-y^2$, $x-y+2=0$

4.13. D: $y^2=4-x$, $y=x+2$

4.14. D: $xy=6$, $x+y=4$

4.15. D: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$, $y\leq\frac{1}{2}x$, $y\geq 0$

4.16. D: $y=6x^2$, $x+y=2$, $x\geq 0$

4.17. D: $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x=4$

4.18. D: $x^2+y^2=2y$, $x=\sqrt{3}y$

4.19. D: $x=-2y^2$, $x=1-3y^2$, $x\leq 0$, $y\geq 0$

4.20. D: $y^2=4x$, $x+y=3$, $y\geq 0$

4.21. D: $y^2=x+2$, $x=2$

4.22. D: $y=\frac{1}{1+x^2}$, $y=\frac{1}{2}x^2$

4.23. D: $x^2+y^2=4$, $y^2=4(1-x)$ (вне параболы)

4.24. D: $x^2+y^2=25$, $y\geq x$, $y\leq\sqrt{3}x$

4.25. D: $x=\sqrt{4-y^2}$, $y=\sqrt{3x}$, $x\geq 0$

4.26. $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $y=2$

4.27. D: $y=x^2+1$, $x+y=3$

4.28. D: $x^2+y^2-2y=0$, $x^2+y^2-y=0$, $y=x$, $y=-x$

4.29. $y = e^x, \quad y = e^{2x}, \quad x = 1$

4.30. D: $xy = 1, \quad x^2 = y, \quad y = 2, \quad x = 0$

Задание 5.

5.1–5.15. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями.

5.1. $z = y^2, \quad x + y = 1, \quad x \ge 0, \quad z \ge 0$

5.2. $x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 2$

5.3. $y^2 = x, \quad x = 3, \quad z = x, \quad z \ge 0$

5.4. $z^2 = 4 - x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad z \ge 0$

5.5. $x^2 + y^2 = z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

5.6. $z = x^2 + 2y^2, \quad y = x, \quad x \ge 0, \quad y = 1, \quad z \ge 0$

5.7. $x^2 + y^2 = 1, \quad z = 2 - x^2 - y^2, \quad z \ge 0$

5.8. $z = x^2 + y^2, \quad z = 2x^2 + 2y^2, \quad y = x^2, \quad y = x$

5.9. $y = x^2, \quad z = 0, \quad y + z = 2$

5.10. $y = 1 - z^2, \quad y = x, \quad y = -x, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0$

5.11. $x^2 + y^2 = 6 - 2x, \quad z = x^2 + y^2$

5.12. $x^2 + y^2 = 4y, \quad z^2 = 4 - y, \quad z \ge 0$

5.13. $z = 2x^2 + y^2, \quad x + y = 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0$

5.14. $x^2 + y^2 = 1, \quad y + z = 1, \quad z = 0$

5.15. $y = 2x, \quad x + y + z = 2, \quad x \ge 0, \quad z \ge 0$

5.16–5.30. Вычислить массу тела *V*, ограниченного заданными поверхностями ($\gamma = \gamma(x, y, z)$ – плотность в точке *M* (*x*, *y*, *z*)).

5.16. $V: z = 0, \quad z = 9 - y^2, \quad x^2 + y^2 = 9; \quad \gamma = x^2 + y^2$

5.17. $V: x^2 + y^2 + z^2 = 9; \quad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

5.18. $V: z = 0, \quad z = x, \quad y = 0, \quad y = 4, \quad z = \sqrt{25 - y^2}; \quad \gamma = 2y$

5.19. $V: y = x^2 + z^2 + 1, \quad y = 5; \quad \gamma = \sqrt{x^2 + z^2}$

5.20. $V: z = \dfrac{x^2 + y^2}{2}, \quad z = 2; \quad \gamma = x^2 + y^2$

5.21. $V: z = x^2 + y^2,\ \ x + y = 2,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ \ z = 0;\ \ \ \gamma = x + 1$

5.22. $V: x = 1,\ \ \ y = x,\ \ \ z = 0,\ \ \ z = y^2;\ \ \ \gamma = xy$

5.23. $V: z = 2 - x^2 - y^2,\ \ \ z^2 = x^2 + y^2,\ \ \ z \geq 0;\ \ \ \gamma = 1$

5.24. $V: z = \sqrt{1 - y},\ \ \ y = x,\ \ \ y = -x,\ \ \ z = 0;\ \ \ \gamma = 3z$

5.25. $V: 2z = x^2 + y^2,\ \ \ z = 2;\ \ \ \gamma = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

5.26. $V: x^2 + y^2 = 2x,\ \ \ z = x^2 + y^2,\ \ \ z = 0;\ \ \ \gamma = 1$

5.27. $V: z = 0,\ \ y = 0,\ \ \ x = 0,\ \ \ x + y = 2,\ \ \ 2z = x^2 + y^2;\ \ \ \gamma = 3$

5.28. $V: x^2 + y^2 = 4,\ \ \ x^2 + y^2 - z^2 = -4;\ \ \ \gamma = 1$

5.29. $V: x = 0,\ \ \ y = 0,\ \ \ z = 0,\ \ \ x + y + z = 2;\ \ \ \gamma = x^2 yz$

5.30. $V: z = \sqrt{x^2 + y^2},\ \ \ z = 2;\ \ \ \gamma = z$

Задание 6.
6.1–6.15. Найти массу, где $\mu = \mu(x, y, z)$ – плотность.

6.1. верхней половины кардиоиды $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$, если $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$;

6.2. отрезка AB, где $A(0;0)$; $B(1;2)$, если $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$;

6.3. отрезка AB, где $A(1,2)$; $B(2,4)$, если плотность в каждой его точке равна произведению квадратов координат этой точки;

6.4. дуги лемнискаты $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$, $\left(0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{3}\right)$, если $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$;

6.5. первой арки циклоиды $x = 2(t - \sin t)$; $y = 2(1 - \cos t)$, если $\mu = y^2$;

6.6. дуги кривой $y = x^2 + 4$ от точки $A(0,4)$ до $B(2,8)$, если плотность в каждой точке ее равна абсциссе точки;

6.7. дуги окружности $x^2 + y^2 = 9$, лежащей в первой четверти, если плотность в каждой ее точке равна абсциссе точки;

6.8. дуги кривой $x = t$; $y = \dfrac{3t^2}{\sqrt{2}}$; $z = t^3$; $0 \leq t \leq 1$, если $\mu = x + z$;

6.9. дуги синусоиды $y = \sin x$, $\left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$, если $\mu = \dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$;

6.10. дуги окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, лежащей в первой четверти, если плотность ее в каждой точке равна произведению абсциссы на квадрат ординаты этой точки;

6.11. отрезка *AB*, где $A(0;0;0)$; $B(1;1;1)$, если $\mu = 2x + y + z$;

6.12. дуги кривой $y = x^3$ от точки $A(1;1)$ до точки $B(2;8)$, если плотность в каждой точке кривой равна ординате этой точки;

6.13. дуги тангенсоиды $y = \operatorname{tg} 3x$, $\left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{12}\right)$, если $\mu = \sqrt{9 + \cos^4 3x}$;

6.14. правого лепестка лемнискаты $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, если $\mu = x + y$;

6.15. одной арки циклоиды $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$, если плотность ее в каждой точке равна ординате точки.

6.16–6.30. Вычислить работу силового поля $\vec{F}$ при перемещении материальной точки вдоль пути $\overset{\smile}{AB}$.

6.16. $\vec{F} = 2x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} - z \cdot \vec{k}$; $\overset{\smile}{AB}$: $x = t - 1$; $y = \sin 2t$, $z = \cos 2t$, $A\left(\dfrac{\pi}{2} - 1; 0; -1\right)$; $B\ (-1;0;1)$.

6.17. $\vec{F} = xy^2 \cdot \vec{i} + yz^2 \cdot \vec{j} - x^2 z \cdot \vec{k}$, $\overset{\smile}{AB}$: отрезок прямой, $A\ (0;0;0)$; $B\ (-2;4;5)$.

6.18. $\vec{F} = \cos^2 x \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$; $\overset{\smile}{AB}$: $x = t$; $y = \cos t$, $z = t^2$, $A\ (0;1;0)$; $B\left(\dfrac{\pi}{2}; 0; \dfrac{\pi^2}{4}\right)$.

6.19. $\vec{F} = \sin y \cdot \vec{i} + \cos x \cdot \vec{j} + xy \cdot \vec{k}$; $\overset{\smile}{AB}$: $x = 2t$; $y = 3t$, $z = t + 2$, $A(0;0;2)$; $B\ (2\pi; 3\pi; \pi + 2)$.

6.20. $\vec{F} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + (x + y - 1)\vec{k}$, $\overset{\smile}{AB}$: отрезок прямой, $A\ (1;1;1)$; $B\ (2;3;4)$.

6.21. $\vec{F} = y\cos z \cdot \vec{i} - x \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$; $\overset{\cup}{AB}$: отрезок прямой,

$A(0;1;0)$; $B\ (2;7;0)$.

6.22. $\vec{F} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$; $\overset{\cup}{AB}$: $x = t$; $y = 2t$, $z = 3t$,

$A(1;2;3)$; $B\ (2;4;6)$.

6.23. $\vec{F} = 2xy \cdot \vec{i} + y^2 \cdot \vec{j} + z^2 \cdot \vec{k}$, $\overset{\cup}{AB}$: $k = \cos t$; $y = \sin t$, $z = 2t$,

$A\ (1;0;0)$; $B\ (1;0;4\pi)$.

6.24. $\vec{F} = 3(x+y)\vec{i} + yz \cdot \vec{j} + xy \cdot \vec{k}$; $\overset{\cup}{AB}$: отрезок прямой,

$A(-1;3;2)$; $B\ (1;1;2)$.

6.25. $\vec{F} = xz \cdot \vec{i} + (y+1)\vec{j} - z^2 \cdot \vec{k}$; $\overset{\cup}{AB}$: $x = 3t$; $y = 2t$, $z = t$,

$A(3;2;1)$; $B\ (9;6;3)$.

6.26. $\vec{F} = -y \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + \vec{k}$; $\overset{\cup}{AB}$: $x = \cos 2t$; $y = \sin 2t$, $z = 0$

$A\ (1;0;0)$; $B\ (0;1;0)$.

6.27. $\vec{F} = \dfrac{y}{x^2} \cdot \vec{i} + \dfrac{x}{y} \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$; $\overset{\cup}{AB}$: отрезок прямой,

$A(1;2;-1)$; $B\ (1;3;2)$.

6.28. $\vec{F} = x^2 y \cdot \vec{i} - y^2 \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$; $\overset{\cup}{AB}$: $x = t$; $y = t - 1$, $z = t^2$,

$A(0;-1;0)$; $B\ (1;0;1)$.

6.29. $\vec{F} = yz \cdot \vec{i} + xz \cdot \vec{j} + xy \cdot \vec{k}$; $\overset{\cup}{AB}$: отрезок прямой,

$A\ (2;1;2)$; $B\ (3;3;3)$.

6.30. $\vec{F} = y \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$; $\overset{\cup}{AB}$: $x = \sin t$; $y = \cos t$, $z = t$,

$A(0;1;0)$; $B\left(1;0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Задание 7. Решить уравнение или систему дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями операционным методом.

7.1. $y'' - y' - 6y = 6$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$.

7.2. $y'' - 2y' + y = e^t$; $y(0) = y'(0) = 0$.

7.3. $y'' - 9y = 2 - t$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

7.4. $y'' + y' - 4y = (10 + 4t)e^{2t}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$.

7.5. $y'' + y = 3; \quad y(0) = y'(0) = 1$.

7.6. $\begin{cases} x' = 2x - 3y, \\ y' = 3x + 2y; \end{cases} \quad x(0) = 2; \quad y(0) = 0.$

7.7. $y'' + 3y = 8sh3t; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$

7.8. $y'' - y' - 6y = 2; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$.

7.9. $\begin{cases} x'' + y = 1, \\ y'' + x = 0; \end{cases} \quad x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0.$

7.10. $y'' + y' - y = 6e^t \cos t; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 2.$

7.11. $y'' + y = e^t; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$.

7.12. $\begin{cases} x'' + y'' = 0, \\ x' + y = 1 + e^t; \end{cases} \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = -1.$

7.13. $y'' - 9y = 6\, e^{3t}; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1$.

7.14. $y''' + y'' = \cos t; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

7.15. $\begin{cases} x' + 4x + 4y = 0, \\ y' + 2x + 6y = 0; \end{cases} \quad x(0) = 3; \quad y(0) = 15$.

7.16. $\begin{cases} x'' - y' = 1, \\ y'' - x' = 0; \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad x'(0) = 0; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$

7.17. $y'' + 2y' + 5y = 5; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$

7.18. $y'' + 9y = 8\sin t; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = -2.$

7.19. $y''' - y' = 10\, e^{2t}; \quad y(0) = y'(0) = 0; \quad y''(0) = -1.$

7.20. $y'' + y = t^2; \quad y(0) = y'(0) = 1$.

7.21. $y'' + 3y' + 2y = 2t^2 + 6t + 2; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = 2.$

7.22. $y'' - y = 4sht; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = -1.$

7.23. $y'' - y = 8te^t; \quad y(0) = y'(0) = 0$.

7.24. $\begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0; \end{cases} \quad x(0) = 2; \quad y(0) = 3.$

7.25. $\begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0; \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$

7.26. $y'' - 2y' = t^2; \quad y(0) = y'(0) = 0$.

7.27. $y'' + y = te^t; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = -2.$

7.28. $y'' + 2y' + 5y = 5; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$

7.29. $y'' - 2y' + 3y = 1; \quad y(0) = y'(0) = -1$.

7.30. $y'' + 2y' + y = 2\sin t; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = 0$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Минюк, С.А. Математика для инженеров: учебник: в 2 т. / С.А. Минюк, Н.С. Березкина, А.В. Метельский; под науч. ред. Н.А. Микулика. Т. 2. – Минск: Элайда, 2006.
2. Гусак, А.А. Высшая математика. Т. 2. – Минск: ТетраСистемс, 2009.
3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление (для втузов) / Н.С. Пискунов. Т. 2. – Москва: Наука, 1985.
4. Жевняк, Р.И. Высшая математика: в 5 ч. / Р.И. Жевняк, А.А. Карпук. Ч. 3, 4. – Минск: Высш. шк., 1984–1988.
5. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – Москва: Оникс, 2005.
6. Гусак, А.А. Справочное пособие к решению задач: теория функций комплексной переменной и операционное исчисление / А.А. Гусак, Г.М.Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск: ТетраСистемс, 2002.
7. Рябушко, А.П. и др. Индивидуальные задания по высшей математике: учебное пособие в 4 ч. Ч. 3. / Рябушко А.П., Бархатов В.В. и др. Под ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 2009.
8. Рябушко, А.П. Индивидуальные задания по высшей математике: ч. 4. / А.П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 2009.
9. Лебедева, Г.И. Интеграл по фигуре: методическое пособие по высшей математике / Г.И. Лебедева и др. – Минск: БНТУ, 2009.
10. Микулик, Н.А. Элементы теории функций комплексного переменного. Конспект лекций и практические занятия / Н.А. Микулик и др. – Минск: БНТУ, 2009.
11. Сухая, Т.А. Сборник задач по высшей математике / Т.А. Сухая, В.Ф. Бубнов. Ч. 2. – Минск: Выш. шк., 1993.
12. Воронович, Г.К. Элементы операционного исчисления. Методические указания и контрольные задания для студентов всех форм обучения / Г.К. Воронович и др. – Минск: БНТУ, 2009.