

## ОБОБЩЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПРОВОДОВ ПРИ КОРОТКОМ ЗАМЫКАНИИ С ПОМОЩЬЮ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ

Докт. техн. наук СЕРГЕЙ И. И., инж. ПОНОМАРЕНКО Е. Г.

*Белорусский национальный технический университет*

Уравнения движения проводов, представленных гибкой упругой нитью, в математическом отношении являются нелинейными гиперболическими дифференциальными уравнениями второго порядка в частных производных и относятся к уравнениям математической физики. Единственное решение гиперболических уравнений выделяется при помощи дополнительных условий: начальных и краевых. Указанная задача называется нестационарной краевой задачей Коши и требует двух начальных условий: начальных координат и скоростей провода, а также граничных векторов, определяющих положение концов провода в пролете. Решить нелинейные уравнения движения провода классическими методами не удастся. Для этого чаще всего используются разностные методы [1]. Однако численные методы позволяют найти только частное решение задачи динамики провода при КЗ, соответствующее конкретным граничным условиям. Обобщение частных решений движения провода, являющегося гибкой механической системой с распределенной массой, – сложная задача.

В статье предложен способ приближенного обобщения частных численных решений задачи динамики провода при КЗ путем решения его уравнения движения в безразмерной форме. В процессе преобразования уравнения к безразмерному виду выявляются сочетания и комбинации параметров провода, одинаковые для подобных решений задачи. В теории подобия их называют критериями подобия. Согласно третьей теореме подобия для сходства решений уравнений движения проводов при КЗ должны быть соответственно одинаковы определяющие критерии подобия и подобны условия однозначности, т. е. начальные и краевые условия [2]. Подобие механических систем включает в себя геометрическое, кинематическое и динамическое подобия, требующие параллельности и пропорциональности скоростей и сил в любых сходственных точках системы [2].

Воспользуемся способом определения критериев подобия для уравнений движения проводов приведением их к безразмерному виду. В качестве базисных величин примем длину пролета  $l$ , максимальную стрелу провеса  $f_0$ , начальное тяжение провода до КЗ  $T_0$  и угловую частоту собственных колебаний провода  $\omega$ . Запишем уравнения движения провода при коротком замыкании в следующем виде [1]:

$$T(t) \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial x^2} + \bar{p} + \bar{f}(t) = \rho \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $\bar{R}[y, z]$  – радиус-вектор мгновенного положения элемента провода, м;  
 $T(t)$  – динамическое тяжение провода, Н;  $\bar{f}(t)$  – электродинамическое

усилие (ЭДУ) на единицу длины провода, Н/м;  $\bar{p}$  – вес единицы длины провода, Н/м;  $\rho$  – масса единицы длины провода, кг/м.

Выразим входящие в (1) параметры в безразмерной форме относительно принятых базисных величин:  $x_* = \frac{x}{l}$ ;  $y_* = \frac{y}{f_0}$ ;  $z_* = \frac{z}{f_0}$  – относительные декартовы координаты мгновенного положения провода. Координата  $x_*$  является независимым аргументом уравнений и изменяется в диапазоне от 0 до 1;  $t_* = \omega_c t$  – текущее время в относительных единицах;  $T_* = \frac{T(t)}{T_0}$  – кратность динамического тяжения относительно начального тяжения.

Определение величины  $T(t)$  производится по закону Гука

$$T(t) = \frac{EA(L_t - L)}{L}, \quad (2)$$

где  $L_t = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx$  – динамическая длина провода;  $L$  – начальная длина провода до КЗ.

Выполним преобразование уравнения (1) к безразмерной форме

$$\frac{T(t)T_0}{T_0} \frac{\partial^2 \left(\frac{\bar{R}}{f_0} f_0\right)}{\partial \left(\frac{x}{l}\right)^2} + \bar{p} + \bar{f}(t) = \rho \frac{\partial^2 \left(\frac{\bar{R}}{f_0} f_0\right)}{\partial \left(\frac{\omega_c t}{\omega_c}\right)^2}. \quad (3)$$

Используя принятые ранее обозначения, запишем (3) в виде

$$\frac{T_* T_0 f_0}{l^2} \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial x_*^2} + \bar{p} + \bar{f}(t) = \rho \omega_c^2 f_0 \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial t_*^2}. \quad (4)$$

Угловая частота собственных колебаний провода

$$\omega_c = 2\pi f_c = 2\pi \frac{1}{2\pi l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{T_0}{\rho l^2}}. \quad (5)$$

С учетом (5) уравнение (4) преобразуется следующим образом

$$T_* \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial x_*^2} + \frac{\bar{p}}{\pi'_r} + \frac{\bar{f}(t)}{\pi'_r} = \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial t_*^2}, \quad (6)$$

где  $\pi'_r = \frac{T_0 f_0}{l^2}$  – комплекс начальных параметров провода, который является составной частью критерия их геометрического подобия.

Комбинация параметров  $\pi_r'$  входит в уравнение начального провисания провода, полученное из динамического уравнения при  $t_k = 0$ :

$$\frac{\partial^2 z_*}{\partial x_*^2} + \frac{pl^2}{T_0 f_0} = 0. \quad (7)$$

Таким образом, одинаковые динамические решения могут иметь провода с одинаковыми геометрическими критериями подобия

$$\pi_r = \frac{pl^2}{T_0 f_0} = \text{idem}. \quad (8)$$

Провода с одинаковыми критериями  $\pi_r$  имеют идентичные кривые провисания, выраженные в безразмерной форме. На первом этапе считаем, что концы проводов жестко закреплены на опорах и неподвижны при КЗ, т. е. для всех частных решений краевые условия одинаковы.

Векторные уравнения (6) записываются в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} T_* \frac{\partial^2 y_*}{\partial x_*^2} + \frac{f(t)}{\pi_r'} &= \frac{\partial^2 y_*}{\partial t_*^2}; \\ T_* \frac{\partial^2 z_*}{\partial x_*^2} + \pi_r &= \frac{\partial^2 z_*}{\partial t_*^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Согласно теории динамическое подобие механических систем обеспечивается при параллельности и пропорциональности сил в сходственных точках. Для решения уравнений (9) необходимо обеспечить совпадение мгновенных величин распределенных ЭДУ, имеющих четыре составляющие, в том числе пульсирующие с частотами 50 и 100 Гц. Следовательно, для получения одинаковых решений уравнений (5) необходимо иметь одинаковые критерии динамического подобия

$$\pi_n = \frac{f(t)^2}{T_0 f_0} = \text{idem}. \quad (10)$$

Для получения подобных решений, как видно из (9), должны быть также одинаковы кратности динамических тяжений

$$T_* = \frac{T(t)}{T_0} = \frac{e(t)}{\alpha_y} \frac{1}{T_0} = \frac{EAe(t)}{T_0} = \text{idem}, \quad (11)$$

где  $e(t) = \frac{L_t - L_0}{L_0}$  – динамическое удлинение провода, о. е.

Параметры  $E$  и  $A$  зависят от конструкции, материала и сечения составного провода. Для принятой в расчете марки провода они имеют одно

и то же значение для разных начальных тяжений. Следовательно, в этом случае  $T_*$  есть функция комбинации  $\frac{e(t)}{T_0}$ , которая является вторичной по отношению к  $\pi_d$ .

Для приближенного определения критерия  $\pi_d$  применяется замена действительных осциллограмм ЭДУ их эквивалентными значениями на промежутке времени, равно продолжительности КЗ,  $t_k$ . Принимаем, что эти силы равномерно распределены по пролету и действуют в горизонтальной плоскости. Эквивалентирование ЭДУ производится с помощью интегрального критерия КЗ – импульса ЭДУ. Указанная задача эквивалентирования ЭДУ решается следующим образом.

1. На каждом шаге численного решения уравнений движения проводов по времени определяются суммарные ЭДУ, действующие на  $k$ -й проводник [1]:

$$\bar{F}_{kt} = \frac{\mu_0 i_k i_j}{4\pi} \int_0^{l_k} \left[ d\bar{s}_k \int_0^{l_j} \frac{d\bar{s}_j \bar{R}_{jk}}{|\bar{R}_{jk}|} \right], \quad (12)$$

где  $i_k, i_j$  – мгновенные значения токов во взаимодействующих проводах;  $d\bar{s}_j, d\bar{s}_k$  – векторы элементов длины  $j$ -го и  $k$ -го проводов, направления которых совпадают с направлением токов;  $\bar{R}_{jk}$  – вектор между элементами длин  $j$ -го и  $k$ -го проводов.

2. Для стадии вынужденного движения проводов продолжительностью  $t_k$  находится численное значение импульса ЭДУ для  $k$ -го провода

$$\bar{S}_k = \int_0^{t_k} \bar{F}_k(t) dt. \quad (13)$$

Практическая реализация указанного алгоритма вычисления импульса ЭДУ таким способом затруднительна, так как он базируется на численном решении дифференциальных уравнений движения проводов. Поэтому используем приближенную методику вычисления импульсов ЭДУ по явным формулам [3]. В соответствии с [3] импульс ЭДУ при двухфазном КЗ составляет

$$S^{(2)} = 0,2 \frac{I_{п0}^2 l k_1}{a_{cp}} (t_k + T_a k_a), \quad (14)$$

где  $I_{п0}$  – действующее значение начального периодического тока КЗ, кА;  $k_1, k_a$  – поправочные коэффициенты на длину пролета и величину  $T_a$ .

Среднее расстояние между соседними фазами  $a_{cp}$  на стадии их отталкивания ЭДУ двухфазного КЗ определяется приближенно [4]

$$a_{cp} = a + \frac{1}{2} y_k, \quad (15)$$

где  $y_k$  – горизонтальное отклонение фазного провода в момент времени  $t_k$  [4].

По величине импульса ЭДУ определяется эквивалентное ЭДУ за промежуток времени  $t_k$

$$f_3 = \frac{S^{(2)}}{lt_k}. \quad (16)$$

Эквивалентные ЭДУ подставляются в (9) и (10), что облегчает вычисление критерия динамического подобия решений

$$\pi_a = \frac{f_3 l^2}{T_0 f_0} = \text{idem}. \quad (17)$$

Достоверность приближенного алгоритма определения импульсов ЭДУ подтверждается сопоставлением результатов численного вычисления импульса по компьютерной программе (КП) и расчетов по упрощенной методике, приведенных в табл. 1.

Методика вычисления импульса по выражению (13) приведена в [3, 4]. Для вычисления импульса, возможно, потребуется несколько итераций. Первое приближение определяется по простому выражению

$$S_{\text{упр}} = 0,2 \frac{I_{\text{по}}^2 l}{a} (t_k + T_a). \quad (18)$$

Таблица 1

Сопоставление импульсов ЭДУ, найденных по КП и явным формулам ( $t_k = 0,1$  с)

№	$l$ , м	$a$ , м	$I_{\text{по}}$ , кА	$S_{\text{упр}}$ , Н·с	$S_{\text{црбл}}$ , Н·с	$S_{\text{кп}}$ , Н·с	$\Delta S$ , %
1	15	2,5	20,0	96	71,9	71,9	0
2	20	2,5	30,8	303	222,7	225,7	1,33
3	27,5	2,5	25,0	275	216	215,6	-0,2
4	40	4,0	25,3	255	208	204	-1,96
5	60	4,0	20,0	240	204,8	200,5	-2,14

Для оценки погрешности расчета параметров динамики провода при КЗ, возникающей от замены динамических ЭДУ эквивалентными, выполнено их сравнение для различных токов и длин пролетов (табл. 2). Как видно из таблицы, хорошее совпадение имеет место для максимальных относительных отклонений проводов  $y_{1*_{\text{max}}}$  на стадии их отталкивания ЭДУ. После отключения КЗ наступает стадия свободного движения проводов. На этой стадии динамика провода характеризуется относительным отклонением провода при сближении  $y_{2*_{\text{max}}}$  и характерными пиками тяжений  $T_{2*_{\text{max}}}$  и  $T_{3*_{\text{max}}}$  [1]. Погрешность вычисления параметров динамики провода на этой стадии может увеличиваться, что объясняется крайней чувствительностью решений уравнений динамики проводов к ЭДУ. В момент, предшествующий отключению КЗ, на провод действуют мгновенные величины ЭДУ, тяжений, силы инерции и вес провода. В приближенном расчете вме-

сто мгновенных ЭДУ в этот момент времени действуют эквивалентные ЭДУ, что вносит погрешность в траекторию свободного движения провода после отключения КЗ.

Таблица 2

Сравнение параметров динамики провода АС-500/27, полученных при использовании (в 9) динамических (в числителе) и эквивалентных (в знаменателе) ЭДУ ( $t_k = 0,1$  с)

$l$ , м	20		27,5	30	40		60	
$a$ , м	2,5		2,5	2,5	4,0		4,0	
$T_0$ , Н	622	769	1165	1100	2450	1540	5550	2310
$I_{по}$ , кА	30,8	20	30,2	20	37,6	35	37	30
$S_{кит}$ , Н·с	229,2	105,7	313,5	155,2	440	379	660	395
$f_0$ , Н/м	114,6	53,89	114,0	52,74	110	95,0	110	67,11
$y_{1*max}$	$\frac{1,136}{1,124}$	$\frac{1,051}{1,053}$	$\frac{1,113}{1,116}$	$\frac{0,955}{0,955}$	$\frac{1,161}{1,181}$	$\frac{1,10}{1,084}$	$\frac{1,331}{1,335}$	$\frac{0,911}{0,904}$
$\Delta y_{1*max}$ , %	1,1	0,2	-0,27	0	-1,7	1,45	-0,3	0,77
$T_{2*max}$ , кН	$\frac{5,67}{6,42}$	$\frac{2,31}{2,25}$	$\frac{8,77}{9,65}$	$\frac{2,58}{2,53}$	$\frac{18,18}{15,81}$	$\frac{6,91}{6,95}$	$\frac{29,92}{27,64}$	$\frac{6,34}{6,52}$
$\Delta T_{2*max}$ , %	-13,2	2,6	-10	-0,39	-13,0	-0,5	7,6	-2,8
$y_{2*max}$	$\frac{0,933}{1,029}$	$\frac{0,920}{0,918}$	$\frac{0,978}{1,005}$	$\frac{0,898}{0,889}$	$\frac{1,012}{1,057}$	$\frac{0,936}{0,905}$	$\frac{1,152}{1,157}$	$\frac{0,854}{0,855}$
$\Delta y_{2*max}$ , %	-9,6	0,22	-2,7	1,53	4,4	3,3	0,4	-0,11
$T_{3*max}$ , кН	$\frac{17,65}{16,00}$	$\frac{6,88}{6,78}$	$\frac{16,09}{16,65}$	$\frac{4,21}{4,12}$	$\frac{4,21}{4,12}$	$\frac{3,18}{2,94}$	$\frac{31,61}{29,85}$	$\frac{6,42}{6,31}$
$\Delta T_{3*max}$ , %	9,3	1,45	-3,5	2,1	7,3	4,94	5,5	1,7

С использованием критериев геометрического и динамического подобию выполнено обобщение результатов частных численных решений по компьютерной программе, представленное в графической форме. На рис. 1 приведена зависимость  $y_{1*max}$  от критерия  $\pi_n = \frac{f_3 l^2}{T_0 f_0}$  для различных продолжительностей КЗ в относительных единицах  $t_k$ .

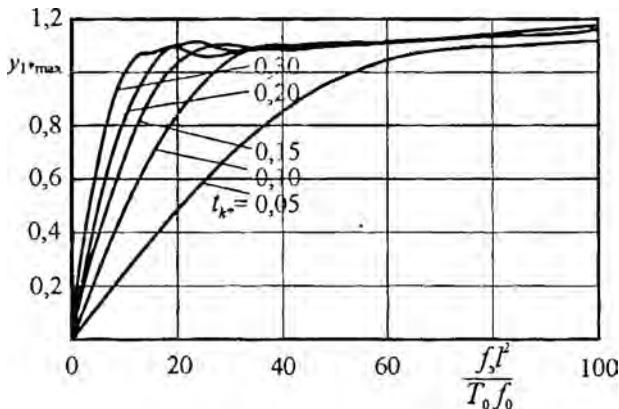


Рис. 1. Максимальные горизонтальные относительные отклонения средней точки провода для различных относительных продолжительностей КЗ в функции динамического критерия подобия

Для проверки достоверности и общности полученных зависимостей проведено сопоставление результатов компьютерных расчетов и параметров, определенных по обобщенным кривым (рис. 1), для различных комбинаций и характеристик КЗ и геометрических размеров пролетов. Сопоставление результатов приводится в табл. 3.

Таблица 3

Сопоставление  $U_{1*max}$  определенных по рис. 1 и КП

№	$l, м$	$a, м$	$f_0, м$	Марка провода	$I_{по}, кА$	$t_{д*}$	$U_{1*max},$ (рис. 1)	$U_{1*max},$ КП	$\Delta U_{1*max},$ %
1	20	2,5	1,0	АС-185/24	10,0	0,15	0,900	0,900	0,00
2	27,5	2,5	1,38	АС-500/27	20,0	0,1	0,990	0,999	0,90
3	30	4,0	1,5	АС-500/27	25,0	0,11	1,109	1,102	0,63
4	50	4,0	2,0	АС-600/72	20,0	0,1	0,525	0,524	0,19
5	60	4,0	2,4	АС-300/39	25,0	0,2	1,060	1,069	0,84

## ВЫВОДЫ

1. Получены выражения для критериев геометрического и динамического подобия решений уравнений движения проводов при КЗ.

2. Разработан приближенный алгоритм обобщения частных численных решений уравнений и построены обобщенные зависимости параметров от критерия динамического подобия, пригодные для проектной практики.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сергей И. И., Стрелюк М. И. Динамика проводов электроустановок энергосистем при коротких замыканиях: Теория и вычислительный эксперимент. – Мн.: ВУЗ-ЮНИТИ, 1999. – 252 с.

2. Веников В. А. Теория подобия и моделирования (применительно к задачам электроэнергетики). – М.: Высш. шк., 1976. – 479 с.

3. Сергей И. И., Пономаренко Е. Г., Саммур Ваиль Махмуд. Оценка сближения проводов распределительных устройств электростанций по допустимому импульсу электродинамических усилий // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2004. – № 4. – С. 5–9.

4. Сергей И. И., Пономаренко Е. Г., Саммур Ваиль Махмуд. Упрощенный метод расчета сближения проводов с учетом конструктивных элементов распределительных устройств при двухфазном коротком замыкании // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2004. – № 2. – С. 5–11.

5. К л а й н С. Д ж. Подобие и приближенные методы. – М.: Мир, 1968. – 302 с.

6. Г у х м а н А. А. Введение в теорию подобия. – М.: Высш. шк., 1973. – 296 с.

Представлена кафедрой  
электрических станций

Поступила 13.02.2006