

2. Зоммерфельд А. Электродинамика. – М., 1958. – 501 с.
3. Рыков А. В. Структура вакуума и единство взаимодействий // Фундаментальные проблемы естествознания и техники: Материалы Междунар. конгресса. – СПб.: СПбГУ, 2000. – Т. 1, № 1. – С. 214–224.
4. Дирак П. Принципы квантовой механики: Пер. с англ. / Под ред. В. А. Фока. – М.: Физматгиз, 1979.
5. Ацюковский В. А. Общая эфиродинамика. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 280 с.
6. Воронков С. С. Электродинамика Максвелла как единая теория поля. – Псков: Псковский политехн. ин-т, 1999. – 100 с.
7. Леонов В. С. Четыре доклада по теории упругой квантованной среды // Современные проблемы естествознания: Материалы 6-й Междунар. науч. конф. – СПб., 2000. – 65 с.
8. Козырев Н. А. Избр. труды. – Л.: ЛГУ, 1991. – Ч. 3.
9. ДАН СССР / М. М. Лаврентьев, И. А. Еганова, М. Л. Луцет и др. – 1990. – Т. 314, № 2. – С. 352–355.
10. ДАН СССР / М. М. Лаврентьев, В. А. Гусев, И. А. Еганова и др. – 1990. – Т. 315, № 2. – С. 368–370.
11. Аверьянов В. Я. Электродипольная теория гравитации. – Мн.: Бестпринт, 2004. – 68 с.
12. Билан В. Н. Взгляд в беспредельность. – Мн.: Изд-во «ПолиБиг», 1999. – 84 с.
13. Дроздов В. В. Приложение к новому закону галактического тяготения: Новый закон. – Подольск: Изд-во «Сатурн-С», 2000. – 16 с.
14. Ваярхо В. Г. Структура электрического тока как сверхчувствительный детектор гравитационных волн и параметров структуры пространственно-временного континуума единого поля // Фундаментальные проблемы естествознания и техники: Материалы Междунар. конгресса. – СПб.: СПбГУ, 2000. – Т. 1, № 1. – С. 46–57.

Поступила 15.04.2005

УДК 621.311

## **О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ МИНИМИЗАЦИИ К РЕШЕНИЮ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ ЗАДАЧ РАСЧЕТА УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**Инж. ЗОЛОТОЙ А. А.**

*Белорусский национальный технический университет*

Режимным службам электросетевых предприятий энергосистем часто приходится выполнять расчеты и анализ послеаварийных установившихся режимов основных (сложнозамкнутых) электрических сетей. Для этого требуется решать систему нелинейных уравнений установившегося режима [1]

$$\mathbf{W}(\mathbf{X}) = 0 \quad (1)$$

одним из итерационных методов, наиболее распространенным из которых является метод Ньютона, реализующий вычислительный процесс по схеме

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \Delta \mathbf{X}_j^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где  $\mathbf{X}^{(k+1)}$ ,  $\mathbf{X}^{(k)}$  – векторы переменных на  $(k+1)$ -м и  $k$ -м шагах итерационного процесса (2);  $\Delta\mathbf{X}_j^{(k)}$  – вектор поправок к  $\mathbf{X}^{(k)}$ , вычисленный из системы линейных уравнений

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)})\Delta\mathbf{X}_j^{(k)} = -\mathbf{W}(\mathbf{X}^{(k)}), \quad (3)$$

$\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)})$  – якобиан уравнений (1) в точке  $\mathbf{X}^{(k)}$ .

Якобиан системы (1) в послеаварийных режимах нередко бывает плохо обусловлен. Отыскать решение плохо обусловленной системы обычным методом Ньютона в большинстве случаев затруднительно из-за утраты практической сходимости. Для решения таких задач в практике электрических расчетов широкое применение получили методы минимизации функции [1–3]

$$\varphi(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n w_i^2(\mathbf{X}) = \|\mathbf{W}(\mathbf{X})\|^2 \quad (4)$$

по ньютоновскому направлению или методы Ньютона по параметру, реализующие вычислительный процесс по следующей схеме:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \lambda_{(k)}\Delta\mathbf{X}_j^{(k)}, \quad (5)$$

где  $\lambda_{(k)}$  – коэффициент релаксации или параметр, определяющий величину шага вдоль направления спуска к нулевому минимуму (4), задаваемому вектором  $\Delta\mathbf{X}_j^{(k)}$ , который определяется на каждом шаге из (3).

В зависимости от способа определения коэффициента  $\lambda$  методы Ньютона по параметру достаточно эффективны. При решении плохо обусловленных задач (1) они обеспечивают вполне надежную монотонную сходимость итерационного процесса и часто позволяют получать решение даже в случаях расхождения итерационного процесса классического метода Ньютона.

Очень эффективным оказался способ определения  $\lambda$  на интервале  $0 < \lambda \leq 1$ , предложенный В. А. Матвеевым в 1964 г. [4] и получивший широкое распространение на практике [1, 2]. Согласно [4] величина  $\lambda$  на  $k$ -й итерации определяется по выражению

$$\lambda^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{K^{(k)}}, & \forall K^{(k)} > 1; \\ 1, & \forall K^{(k)} \leq 1. \end{cases} \quad (6)$$

Значение  $K^{(k)}$  в (6) на  $k$ -й итерации выбирается из условий  $K^{(k)} \geq B_1^{(k)}$  и  $K^{(k)} \geq 1$ , где

$$B_1^{(k)} = \frac{1}{2\|\mathbf{F}_{нб}(\mathbf{X}^{(k)})\|_m} \left\| \sum_j \sum_l \frac{\partial^2 F_{нб}(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial X_j \partial X_l} \Delta X_j^{(k)} \Delta X_l^{(k)} \right\|_m \leq B; \quad (7)$$

$$B = \frac{n}{2} \|\mathbf{F}_{нб}(\mathbf{X}^{(0)})\|_m \eta^2 C; \quad (8)$$

$n$  – порядок системы (1);  $j, l = 1 \dots n$ ;  $\Delta X_j^{(k)}, \Delta X_l^{(k)}$  – компоненты вектора

$\Delta \mathbf{X}^{(k)}$ ;  $\|\mathbf{F}_{\text{нб}}(\mathbf{X}^{(k)})\|_m$  –  $m$ -норма вектора узловых небалансов;  $\eta$  –  $m$ -норма обратной матрицы Якоби;  $C$  –  $m$ -норма матрицы вторых производных (матрицы Гессе).

В [4] приведены доказательства сходимости итерационного процесса (5) при определении параметра  $\lambda$  из (6). Там же показано, что при вычислении  $\lambda$  из (6) с помощью итерационного процесса (5) иногда удается получить решение (1), даже если оно находится на «дне ямы» (4).

Наряду с предложенным в [4] методом (6) широкое распространение получил также метод определения  $\lambda$  из условия достижения функцией (4) глобального минимума в направлении  $\Delta \mathbf{X}_j$  на каждом шаге (5) [1].

Сходимость итерационного процесса (5) обеспечивается при ограниченности коэффициентов  $B_i^{(k)}$  на каждом шаге. При практических расчетах утяжеленных режимов схем реальных энергосистем это условие выполняется не всегда. Итерационный процесс (5) в таких случаях при любом алгоритме выбора  $\lambda$  по ньютоновскому направлению  $\Delta \mathbf{X}_j^{(k)}$  минимизации (4) «скатывается» к нестационарным точкам на поверхности  $\{ \det \mathbf{J}(\mathbf{X}) = 0 \}$  [3].

На основе [5, 6] российским ученым В. И. Тарасовым в 1997 г. разработан и адаптирован к решению задач расчета установившихся режимов электрических сетей двухпараметрический метод минимизации, сочетающий основные достоинства методов Ньютона, минимизации ньютоновского типа и наискорейшего спуска [3]. Итерационный процесс предложенного метода минимизации строится в плоскости, порожденной векторами  $\Delta \mathbf{X}_j$  и  $\Delta \mathbf{X}_H$ , по следующей вычислительной схеме [3]:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \lambda_{(k)} \Delta \mathbf{X}_j^{(k)} + \gamma_{(k)} \Delta \mathbf{X}_H^{(k)}. \quad (9)$$

Вектор  $\Delta \mathbf{X}_H^{(k)}$  на каждом шаге (9) определяется из системы линейных уравнений

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)}) \Delta \mathbf{X}_H^{(k)} = -\frac{1}{2} (\mathbf{H}(\mathbf{X}^{(k)}) \Delta \mathbf{X}_j^{(k)}, \Delta \mathbf{X}_j^{(k)}). \quad (10)$$

Коэффициенты релаксации  $\lambda_{(k)}$ ,  $\gamma_{(k)}$ , определяющие длины шагов по принятым направлениям минимизации  $\Delta \mathbf{X}_j$  и  $\Delta \mathbf{X}_H$ , вычисляются из условия достижения глобального минимума функции (4) на каждом шаге (9). Для вычисления  $\lambda_{(k)}$ ,  $\gamma_{(k)}$  в [3] предложен алгоритм с очень высокими вычислительными характеристиками, основанный на решении задачи «точного двумерного поиска» минимума функции (4) на шаге (9). Там же исследована сходимость двухпараметрического метода минимизации при решении квадратичных уравнений установившегося режима, записанных в форме баланса узловых мощностей в декартовой системе координат переменных, и показано, что метод нечувствителен к виду овражности линий уровня функции (4) и обладает «иммунитетом» против «скатывания» итерационного процесса (9) к нестационарным точкам на поверхности  $\{ \det \mathbf{J}(\mathbf{X}) = 0 \}$ .

Практическое применение двухпараметрического метода минимизации с итерационным процессом (9) и алгоритмом определения параметров  $\lambda$ ,  $\gamma$ ,

предложенным [7], к расчетам установившихся режимов электрических сетей Белорусской энергосистемы показало, что учет статических характеристик нагрузки и потерь на корону в линиях 330–750 кВ полиномами четвертой степени при фиксации фаз напряжений отдельных узлов схем приводили к расхождению расчетов некоторых послеаварийных режимов. Использование метода Ньютона по параметру с итерационным процессом (5) и определением коэффициента  $\lambda$  одним из названных выше способов для расчета указанных режимов с теми же исходными условиями приводило к технически приемлемым решениям.

Эффективность способа (6) определения параметра  $\lambda$  при минимизации функции (4) по ньютоновскому направлению  $\Delta \mathbf{X}_j^{(k)}$  итерационным процессом (5) продемонстрирована на примере решения системы двух нелинейных уравнений [4]:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0; \\ f_2(\mathbf{X}) = 0,75x_1^3 - x_2 + 0,9 = 0, \end{cases} \quad (11)$$

которая имеет два вещественных решения  $\mathbf{X}_1 = (-0,9817; 0,1904)$ ,  $\mathbf{X}_2 = (0,3570; 0,9341)$  и характерна тем (рис. 1), что поверхность линий уровня функции (4)  $\varphi(x_1, x_2) = f_1^2 + f_2^2$  представляет собой вид длинного «оврага» с пологим «дном», которое в точке  $\mathbf{X} = (-0,5369; 0,8278)$  имеет

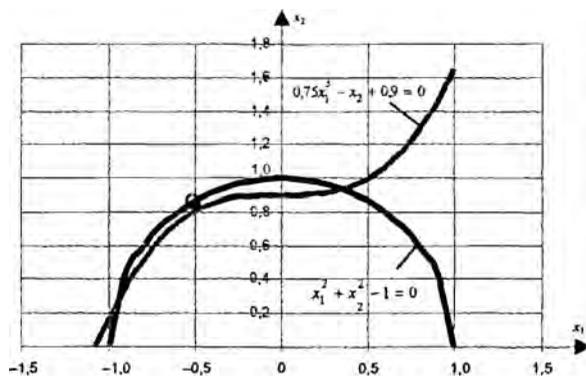


Рис. 1. Линии уровня функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$

«яму» (определитель матрицы Якоби в этой точке обращается в нуль).

Сравним вычислительную эффективность итерационных процессов метода Ньютона по параметру (5) и двухпараметрического метода минимизации (9) на решении системы уравнений (11), используя для вычислений пакет математического моделирования MATLAB. Ухудшения обусловленности системы (11) добьемся заданием точки начального приближения вблизи «ям» на поверхности функции (4):  $x_1^{(0)} = -0,4$ ;  $x_2^{(0)} = 0,8$ .

Сначала решение (11) выполним методом Ньютона по параметру с определением коэффициента  $\lambda_{(k)}$  исходя из достижения функцией (4) глобального минимума в направлении  $\Delta \mathbf{X}_j^{(k)}$ .

Разложим (11) в точке  $\mathbf{X}^{(k)}$  в ряд Тейлора по  $\Delta \mathbf{X}_j$ . Отбросив все члены разложения старше первых трех, умножим вектор  $\Delta \mathbf{X}_j$  на  $\lambda$ . В результате система (11) приобретает вид:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) + 2x_1\lambda\Delta X_1 + 2x_2\lambda\Delta X_2 + \lambda^2\Delta X_1^2 + \lambda^2\Delta X_2^2 = 0; \\ f_2(x_1, x_2) + 2,25x_1^2\lambda\Delta X_1 - \lambda\Delta X_2 + 2,25x_1\lambda^2\Delta X_1^2 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Уравнения (12) можно представить как:

$$\begin{cases} a_1 + \lambda b_1 + \lambda^2 c_1 = 0; \\ a_2 + \lambda b_2 + \lambda^2 c_2 = 0, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= f_1(x_1, x_2); & a_2 &= f_2(x_1, x_2); \\ b_1 &= 2x_1 \Delta X_1 + 2x_2 \Delta X_2; & b_2 &= 2,25x_1^2 \Delta X_1 - \Delta X_2; \\ c_1 &= \Delta X_1^2 + \Delta X_2^2; & c_2 &= 2,25x_1 \Delta X_1^2. \end{aligned}$$

Величина коэффициента релаксации  $\lambda$  на каждом шаге (5) определяется из условия глобального минимума функции (4) в направлении  $\Delta X_j$

$$\min_{\lambda} \varphi(\mathbf{X} + \lambda \Delta \mathbf{X}_j) \approx \min_{\lambda} \sum_i (a_i + \lambda b_i + \lambda^2 c_i)^2. \quad (14)$$

На основании метода наименьших квадратов можно записать условие минимума (14) по  $\lambda$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = k_3 \lambda^3 + k_2 \lambda^2 + k_1 \lambda + k_0 = 0. \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} k_0 &= 2(a_1 b_1 + a_2 b_2); & k_2 &= 6(b_1 c_1 + b_2 c_2); \\ k_1 &= 2(b_1^2 + 2a_1 c_1 + b_2^2 + 2a_2 c_2); & k_3 &= 4(c_1^2 + c_2^2). \end{aligned}$$

Кубическое уравнение (15) решается методом Кордано. Из трех корней (15) в качестве  $\lambda$  принимается действительный корень, доставляющий (4) глобальный минимум в направлении  $\Delta X_j$ .

Вектор небалансов (11) в точке начального приближения равен

$$\mathbf{F}_{\text{нб}}(\mathbf{X}^{(0)}) = \begin{bmatrix} (-0,4)^2 + (0,8)^2 - 1 \\ 0,75 \cdot (-0,4)^3 + 0,8 + 0,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,200 \\ 0,052 \end{bmatrix}.$$

Матрица Якоби и вектор  $\Delta X_j$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{X}^{(0)}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{X}^{(0)}} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2,25x_1^2 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{X}^{(0)}} = \begin{bmatrix} -0,800 & 1,600 \\ 0,360 & -1,000 \end{bmatrix}; \\ \Delta \mathbf{X}_j^{(0)} &= \begin{bmatrix} -0,521 \\ -0,136 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Результаты вычислений представлены в табл. 1.

Из табл. 1 видно, что уже, начиная с первой итерации,  $\lambda$  стремится к нулю, а значения вектора искомых параметров  $\mathbf{X}$  – к координатам обозначенной выше «ямы». Якобиан системы (11) на первой итерации меняет знак, а на последующих итерациях монотонно стремится к нулю. Функция (4) в точке  $\mathbf{X}$  приближается к некоторому отличному от нуля значению. В итоге отчетливо наблюдается «скатывание» процесса решения (11) в «яму» на поверхности (4). Данный способ решения нелинейных систем алгебраи-

ческих уравнений гораздо менее чувствителен к неудачному выбору начального приближения и более надежен, чем классический метод Ньютона.

Таблица 1

Результаты решения системы уравнений (11) методом Ньютона по параметру с определением  $\lambda_{(k)}$  из условия достижения функцией (4) глобального минимума в направлении  $\Delta X_j^{(k)}$

Номер итерации	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(\mathbf{X}) \cdot 10^{-3}$	42,704	3,222	3,014	2,916	2,875	2,858	2,852	2,850	2,850
$x_1$	-0,4	-0,665	-0,585	-0,564	-0,549	-0,540	-0,536	-0,532	-0,531
$x_2$	0,8	0,731	0,801	0,817	0,827	0,833	0,836	0,838	0,839
$\lambda$	-	0,509	0,059	0,033	0,014	0,006	0,002	$7 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$
$J(\mathbf{X})$	0,224	-0,126	-0,096	-0,065	-0,042	-0,025	-0,014	-0,009	-0,005

Второе решение (11) выполним методом Ньютона по параметру с определением коэффициента  $\lambda_{(k)}$  способом (6), предложенным в [4].

Матрица вторых производных (11) в точке начального приближения равна

$$H(\mathbf{X}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 4,5x_1^{(0)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1,8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Величина  $B_1$  составляет

$$B_1^{(0)} = \frac{1}{2 \|F_{н6}(\mathbf{X}^{(k)})\|_m} \left\| \sum_j \sum_l \frac{\partial^2 F_{н6}(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial X_j \partial X_l} \Delta X_j^{(k)} \Delta X_l^{(k)} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot (-0,2)} \max(2(\Delta X_1^{(0)})^2 + 2(\Delta X_2^{(0)})^2; 4,5x_1^{(0)}(\Delta X_1^{(0)})^2) =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot (-0,2)} \max(2 \cdot (-0,521)^2 + 2 \cdot (-0,136)^2; 4,5 \cdot (-0,4) \cdot (-0,521)^2) = 1,452.$$

В выражении (6) на каждом шаге принимаем  $K^{(k)} = 1,1B_1^{(k)}$ . Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты решения системы уравнений (11) методом Ньютона по параметру с определением коэффициента  $\lambda_{(k)}$  способом (6)

Номер итерации	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(\mathbf{X}) \cdot 10^{-3}$	42,704	12,073	11,986	12,022	12,017	12,017	12,017	12,017	12,017
$x_1$	-0,4	-0,615	-0,521	-0,496	-0,493	-0,492	-0,492	-0,492	-0,492
$x_2$	0,8	0,821	0,887	0,901	0,903	0,903	0,904	0,904	0,904
$B_1$	-	1,452	3,582	5,987	96,518	$4,2 \cdot 10^3$	$1,6 \cdot 10^5$	$6,2 \cdot 10^6$	$2,3 \cdot 10^8$
$K$	-	1,597	3,940	6,586	106,170	$4,6 \cdot 10^3$	$1,8 \cdot 10^5$	$6,8 \cdot 10^6$	$2,6 \cdot 10^8$
$\lambda$	-	0,626	0,254	0,152	$9,4 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$5,6 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$3,9 \cdot 10^{-9}$
$J(\mathbf{X})$	0,224	-0,245	-0,168	-0,041	$-6 \cdot 10^{-3}$	$-1 \cdot 10^{-3}$	$-2 \cdot 10^{-4}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	$-4 \cdot 10^{-6}$

Анализ данных табл. 2 показывает, что якобиан (11) на первой итерации меняет знак, а на последующих – монотонно стремится к нулю. Коэффициент  $\lambda$  также стремится к нулю, а вектор  $\mathbf{X}$  – к координатам «ямы» на

поверхности (4). Аналогичные расчеты выполнялись автором при выборе  $K^{(k)} = (1 \dots 20)B_1^{(k)}$ , но достигнуть решения (11) не удалось.

Третье решение (11) выполнено двухпараметрическим методом минимизации, реализующим итерационный процесс (9). Вектор-столбец гессеановской составляющей разложения (11) в ряд Тейлора в точке начального приближения равен

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{H}(\mathbf{X}^{(0)}) \Delta \mathbf{X}_J^{(0)}, \Delta \mathbf{X}_J^{(0)} \right) &= \left[ \begin{array}{c} (\Delta X_{J(1)}^{(0)})^2 + (\Delta X_{H(2)}^{(0)})^2 \\ 2,25x_1^{(0)} (\Delta X_{J(1)}^{(0)})^2 \end{array} \right] = \\ &= \left[ \begin{array}{c} (-0,521)^2 + (-0,134)^2 \\ 2,25 \cdot (-0,4) \cdot (-0,521)^2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0,290 \\ -0,245 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Вектор  $\Delta \mathbf{X}_H^{(0)}$ , определяющий гессеановское направление минимизации (4), вычисленный из системы уравнений (10) в точке начального приближения, равен

$$\Delta \mathbf{X}_H^{(0)} = \left[ \begin{array}{c} -0,452 \\ -0,407 \end{array} \right].$$

Применим к системе уравнений (11) в точке  $\mathbf{X}^{(k)}$  трехчленную формулу Тейлора по  $\Delta \mathbf{X} = \lambda \Delta \mathbf{X}_J + \gamma \Delta \mathbf{X}_H$ . В результате получим систему вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2) + 2x_1(\lambda \Delta X_{J(1)} + \gamma \Delta X_{H(1)}) + 2x_2(\lambda \Delta X_{J(2)} + \gamma \Delta X_{H(2)}) + \\ + (\lambda \Delta X_{J(1)} + \gamma \Delta X_{H(1)})^2 + (\lambda \Delta X_{J(2)} + \gamma \Delta X_{H(2)})^2 = 0; \\ f_2(x_1, x_2) + 2,25x_1^2(\lambda \Delta X_{J(1)} + \gamma \Delta X_{H(1)}) - (\lambda \Delta X_{J(2)} + \gamma \Delta X_{H(2)}) + \\ + 2,25x_1(\lambda \Delta X_{J(1)} + \gamma \Delta X_{H(1)})^2 = 0. \end{array} \right. \quad (16)$$

Уравнения (16) можно переписать следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + \lambda b_1 + \gamma c_1 + \lambda^2 d_1 + \lambda \gamma e_1 + \gamma^2 f_1 = 0; \\ a_2 + \lambda b_2 + \gamma c_2 + \lambda^2 d_2 + \lambda \gamma e_2 + \gamma^2 f_2 = 0, \end{array} \right. \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= f_1(x_1, x_2); & a_2 &= f_2(x_1, x_2); \\ b_1 &= 2x_1 \Delta X_{J(1)} + 2x_2 \Delta X_{J(2)}; & b_2 &= 2,25x_1^2 \Delta X_{J(1)} - \Delta X_{J(2)}; \\ c_1 &= 2x_1 \Delta X_{H(1)} + 2x_2 \Delta X_{H(2)} & c_2 &= 2,25x_1^2 \Delta X_{H(1)} - \Delta X_{H(2)}; \\ d_1 &= \Delta X_{J(1)}^2 + \Delta X_{J(2)}^2; & d_2 &= 2,25x_1 \Delta X_{J(1)}^2; \\ e_1 &= 2(\Delta X_{J(1)} \Delta X_{H(1)} + \Delta X_{J(2)} \Delta X_{H(2)}); & e_2 &= 4,5 \Delta X_{J(1)} \Delta X_{H(1)}; \\ f_1 &= \Delta X_{H(1)}^2 + \Delta X_{H(2)}^2; & f_2 &= 2,25x_1 \Delta X_{H(1)}^2. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $\lambda$  и  $\gamma$  на каждом шаге итерационного процесса (9) определяются из условия доставления глобального минимума (4) на плоскости, порожденной векторами  $\Delta \mathbf{X}_J$ ,  $\Delta \mathbf{X}_H$ :

$$\begin{aligned} & \min_{\lambda, \gamma} \varphi(\mathbf{X} + \lambda \Delta \mathbf{X}_J + \gamma \Delta \mathbf{X}_H) \approx \\ & \approx \min_{\lambda, \gamma} \sum_i (a_i + \lambda b_i + \gamma c_i + \lambda^2 d_i + \lambda \gamma e_i + \gamma^2 f_i)^2. \end{aligned} \quad (18)$$

В точках минимума (18) производные  $\frac{\partial \varphi(\mathbf{X})}{\partial \lambda}$  и  $\frac{\partial \varphi(\mathbf{X})}{\partial \gamma}$  равны нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\mathbf{X})}{\partial \lambda} &= k_{10} \lambda^3 + k_{11} \gamma^3 + k_{12} \lambda^2 \gamma + k_{13} \lambda \gamma^2 + k_{14} \lambda^2 + k_{15} \gamma^2 + \\ &+ k_{16} \lambda \gamma + k_{17} \lambda + k_{18} \gamma + k_{19} = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\mathbf{X})}{\partial \gamma} &= k_{20} \lambda^3 + k_{21} \gamma^3 + k_{22} \lambda^2 \gamma + k_{23} \lambda \gamma^2 + k_{24} \lambda^2 + k_{25} \gamma^2 + \\ &+ k_{26} \lambda \gamma + k_{27} \lambda + k_{28} \gamma + k_{29} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} k_{10} &= 2(d_1^2 + d_1^2); & k_{20} &= k_{12} / 3; \\ k_{11} &= e_1 f_1 + e_2 f_2; & k_{21} &= 2(f_1^2 + f_2^2); \\ k_{12} &= 3(d_1 e_1 + d_2 e_2); & k_{22} &= k_{13}; \\ k_{13} &= e_1^2 + 2d_1 f_1 + e_2^2 + 2d_2 f_2; & k_{23} &= k_{11} / 3; \\ k_{14} &= 3(b_1 d_1 + b_2 d_2); & k_{24} &= k_{16} / 2; \\ k_{15} &= c_1 e_1 + b_1 f_1 + c_2 e_2 + b_2 f_2; & k_{25} &= 3(c_1 f_1 + c_2 f_2); \\ k_{16} &= 2(b_1 e_1 + c_1 d_1 + b_2 e_2 + c_2 d_2); & k_{26} &= k_{15} / 2; \\ k_{17} &= b_1^2 + 2a_1 d_1 + b_2^2 + 2a_2 d_2; & k_{27} &= k_{18}; \\ k_{18} &= a_1 e_1 + b_1 c_1 + a_2 e_2 + b_2 c_2; & k_{28} &= c_1^2 + 2a_1 f_1 + c_2^2 + 2a_2 f_2; \\ k_{19} &= a_1 b_1 + a_2 b_2; & k_{29} &= a_1 c_1 + a_2 c_2. \end{aligned}$$

Из множества пар  $(\lambda^*, \gamma^*)$ , удовлетворяющих (19) и (20), в качестве решения (18) принимается пара, доставляющая функции (4) глобальный минимум.

Результаты вычислений сведены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты решения системы уравнений (11) двухпараметрическим методом минимизации

Номер итерации	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(\mathbf{X}) \cdot 10^{-3}$	42,704	1,884	$8,8 \cdot 10^{-3}$	—	—	—	—	—	—
$x_1$	-0,4	-0,960	-0,982	—	—	—	—	—	—
$x_2$	0,8	0,280	0,190	—	—	—	—	—	0
$\lambda$	—	-0,046	1,049	—	—	—	—	—	—
$\gamma$	—	1,293	0,765	—	—	—	—	—	—
$J(\mathbf{X})$	0,224	0,760	1,140	—	—	—	—	—	—

Из табл. 3 видно, что итерационный процесс (9), «обогнув» «яму» на поверхности (4), уверенно сошелся к решению (11), расположенному в области, где рельеф функции (4) имеет наиболее сложный характер.

Табл. 1–3 в целом подтверждают высокую эффективность итерационного процесса (9) при использовании предложенного в [3] алгоритма определения параметров  $\lambda$  и  $\gamma$ . Определим, насколько близко к координатам «ям» можно задавать начальное приближение, чтобы итерационный процесс сходился к одному из решений (1). Для этого численно построим примерные границы «скатывания» итерационных процессов (5) и (9) к координатам «ям» на поверхности (4)

$$X = (-0,5369; 0,8278)$$

при решении системы уравнений (11). В результате расчетов итерационным процессом (5) с определением  $\lambda$  из условия достижения функцией (4) глобального минимума в направлении  $\Delta X_j$  определены следующие координаты граничных точек области «скатывания» (рис. 2):

$$\begin{aligned} X_n &= (-1,163; 0,8278); & X_p &= (0,001; 0,8278); \\ X_b &= (-0,5369; 0,643); & X_a &= (-0,5369; 1,28). \end{aligned}$$

При определении  $\lambda$  из (6) координаты граничных точек оказались равными (рис. 3):

$$\begin{aligned} X_n &= (-1,449; 0,8278); & X_p &= (0,001; 0,8278); \\ X_b &= (-0,5369; 0,731); & X_a &= (-0,5369; 1,06). \end{aligned}$$

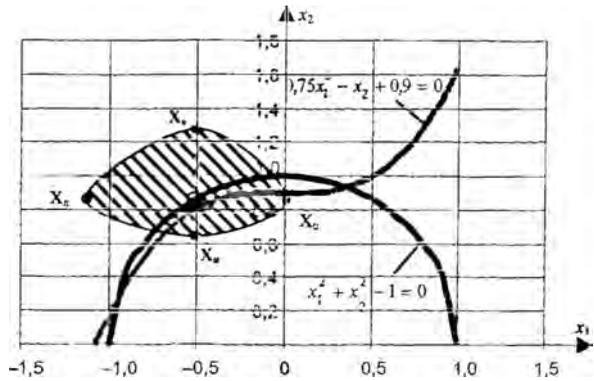


Рис. 2. Границы первой области «скатывания» итерационного процесса (5)

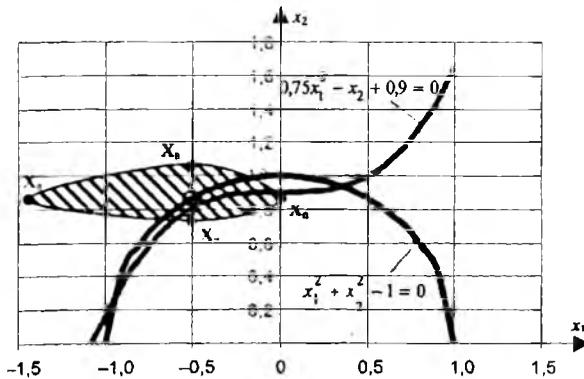


Рис. 3. Границы второй области «скатывания» итерационного процесса (5)

Решение итерационным процессом (9) выявило две области, из которых процесс «скатывался» в «яму». Первая область ограничена точками с координатами:

$$X_{n1} = (-1,874; 1,823); \quad X_{p1} = (-1,014; 1,823);$$

$$X_{n1} = (-1,309; 0,801); X_{b1} = (-1,309; 2,844)$$

и находится слева от координат «ямы». Вторая область, ограниченная точками с координатами:

$$X_{n2} = (-1,081; 0,8278); X_{n2} = (0,154; 0,8278);$$

$$X_{n2} = (-0,5369; 0,797); X_{b2} = (-0,5369; 1,173),$$

находится непосредственно в области «ямы» (рис. 4).

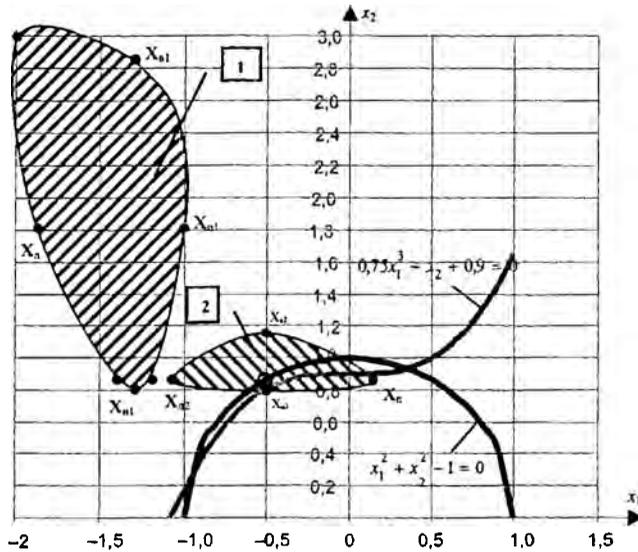


Рис. 4. Границы области «скатывания» итерационного процесса (9)

В [3] показано, что эффективность итерационного процесса (9) и его вычислительные характеристики в основном определяются составом минимизирующей пары векторов и алгоритмом определения длины шагов  $\lambda, \gamma$  по принятым направлениям минимизации функции (4). Если пара векторов, порождающих плоскость минимизации в [3], выбрана эффективно, то чувствительность итерационного процесса (9) к виду овражности функции (4) может проявляться в результате неточностей прогноза поведения (4) в направлении спуска при определении параметров  $\lambda$  и  $\gamma$ .

Критерием определения  $\lambda$  и  $\gamma$  на каждом шаге (9) должно быть условие достижения глобального минимума функции

$$\min_{\lambda, \gamma} \phi(X^{(k)} + \lambda \Delta X_f^{(k)} + \gamma \Delta X_H^{(k)}) = \min_{\lambda, \gamma} \sum_i w_i^2 (X^{(k)} + \lambda \Delta X_f^{(k)} + \gamma \Delta X_H^{(k)}). \quad (21)$$

В [3] коэффициенты  $\lambda, \gamma$  находят из условия достижения глобального минимума функции

$$\min_{\lambda, \gamma} \phi(X^{(k)} + \lambda \Delta X_f^{(k)} + \gamma \Delta X_H^{(k)}) =$$

$$= \min_{\lambda, \gamma} \sum_j (a_j + \lambda b_j + \gamma c_j + \lambda^2 d_j + \lambda \gamma e_j + \gamma^2 f_j)^2, \quad (22)$$

которая получается применением к компонентам (21) (уравнениям системы (11)) трехчленной формулы Тейлора. Если бы уравнения (11), как в [4], были квадратичными, то функция (21), составленная из квадратичных

уравнений, строго выражалась бы трехчленной формулой Тейлора, так как уже вторые частные производные квадратичных уравнений не зависят от значений вектора  $\mathbf{X}$ , а третьи – тождественно равны нулю. В таком случае функции (21) и (22) были бы идентичны. Параметры  $\lambda$  и  $\gamma$ , определенные из условия достижения глобального минимума функции (22), доставили бы глобальный минимум и функции (21). Однако второе уравнение системы (11) кубическое. Поэтому третьи частные производные этого уравнения не будут равны нулю и функция (21) не будет строго представляться трехчленной формулой Тейлора и не окажется идентичной функции (22). Нелинейность функции (21) больше нелинейности функции (22), поэтому и количество локальных минимумов у нее может быть больше. Следовательно,  $\lambda$  и  $\gamma$ , определенные из условия достижения глобального минимума функции (22), могут не соответствовать глобальному минимуму (21).

Подтвердим сказанное численно. Для этого рассмотрим вычисление коэффициентов  $\lambda$ ,  $\gamma$  на первом шаге итерационного процесса (9) с использованием методики [3]. Решение задачи начнем с точки начального приближения  $\mathbf{X} = (-1,5; 1,6)$ , с которой итерационные процессы (5) при определении  $\lambda$  по любому из указанных выше способов сходятся, но не сходятся итерационный процесс (9) при определении  $\lambda$ ,  $\gamma$  по методике [3]. Система двух кубических уравнений относительно переменных  $\lambda$ ,  $\gamma$ , получающаяся при решении задачи (22), имеет 11 пар корней, часть которых может быть комплексной. Действительные решения (22) на первом шаге (9) представ-

лены в табл. 4. Из табл. 4 видно, что глобальный минимум функции (22) доставляет восьмая пара корней  $\lambda$ ,  $\gamma$  (выделена жирным шрифтом), которая и принимается алгоритмом [3] как решение задачи (21).

Для определения действительных минимумов функции (21) продолжим решение

итерационным уточнением каждой пары корней (22) (табл. 4) как «хорошего начального приближения» к минимумам функции (21), более нелинейной, чем (22). Для этого воспользуемся методом наименьших квадратов, не разлагая компоненты (21) в ряд Тейлора. Полученную систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(\lambda, \gamma) = 0; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}(\lambda, \gamma) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

решим относительно  $\lambda$ ,  $\gamma$  по вычислительной схеме метода Ньютона (2)

$$\begin{bmatrix} \lambda^{(k+1)} \\ \gamma^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{(k)} \\ \gamma^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \gamma} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \gamma} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(\lambda^{(k)}, \gamma^{(k)}) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}(\lambda^{(k)}, \gamma^{(k)}) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Результаты итерационного уточнения корней (22) для функции (21) приводятся в табл. 5.

Как видно из табл. 5, количество полученных таким образом пар корней, удовлетворяющих задаче (21), стало три вместо девяти для задачи (22), и они совершенно отличаются от корней (22). Так как задача (21) более нелинейная, возможно существование более девяти пар корней, удовлетворяющих ее решению. Следовательно, нет возможности выбора той пары  $\lambda, \gamma$ , которая доставила бы глобальный минимум функции (21).

Тем не менее, продолжим расчет, принимая в качестве решения задачи (21) пару  $\lambda, \gamma$ , доставляющую более глубокий минимум (21) на каждом шаге (9), т. е. третью пару корней в табл. 5. Результаты этого расчета (табл. 6) показывают, что при выборе параметров  $\lambda, \gamma$  по критерию достижения более глубокого минимума (21) на каждом шаге (9) позволяют уже на первой итерации достичь решения  $\mathbf{X}^* = (-0,9817; 0,1904)$  с точностью до  $\varphi(\mathbf{X}) = 5,8 \cdot 10^{-21}$ , причем выбранные на первом шаге (9) решения задач (22) и (21) существенно отличаются друг от друга.

Таблица 5  
Действительные решения задачи (22)  
на первом шаге (9)

№ п/п	$\lambda$	$\gamma$	$\varphi(\mathbf{X}^{(k)} + \lambda \Delta \mathbf{X}^{(k)} + \gamma \Delta \mathbf{X}_n^{(k)})$
1	-2,1891	20,7520	$1,7378 \cdot 10^{-13}$
2	0,0946	6,4680	0,0026
3	2,9150	-6,5205	$5,7540 \cdot 10^{-21}$

Таблица 6  
Результаты решения системы уравнений (11) итерационным процессом (9)  
при уточнении параметров  $\lambda_{(k)}, \gamma_{(k)}$ , вычисленных способом [3]

Номер итерации	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(\mathbf{X}) \cdot 10^{-3}$	42,704	$5,8 \cdot 10^{-18}$	-	-	-	-	-	-	-
$x_1$	-1,5	-0,9817	-	-	-	-	-	-	-
$x_2$	1,6	0,1904	-	-	-	-	-	-	-
$\lambda$	-	2,9150	-	-	-	-	-	-	-
$\gamma$	-	-6,5205	-	-	-	-	-	-	-
$J(\mathbf{X})$	-13,200	1,1376	-	-	-	-	-	-	-

Применяя этот же подход к вычислению коэффициентов  $\lambda$  и  $\gamma$ , численно определим насколько близко к координатам «ямы» можно задавать начальное приближение, для того чтобы итерационный процесс (9) сходил к одному из решений (1). Выполненные для системы уравнений (11) расчеты позволили определить координаты граничных точек области, из которой итерационный процесс (9) с вычислением  $\lambda, \gamma$  по критерию достижения функцией (21) более глубокого минимума «скатывается» в «яму»:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_d &= (-0,801; 0,8278); \mathbf{X}_n = (-0,448; 0,8278); \\ \mathbf{X}_a &= (-0,5369; 0,776); \mathbf{X}_b = (-0,5369; 1,050). \end{aligned}$$

Область, ограниченная вычисленными точками, показана на рис. 5.

Из рис. 5 можно видеть, что, во-первых, область осталась только одна – в зоне координат «ямы», а во-вторых, границы этой области существенно сузились по сравнению с итерационными процессами (5) и (9) при вычислении  $\lambda$  и  $\gamma$  способом [3] (рис. 2–4).

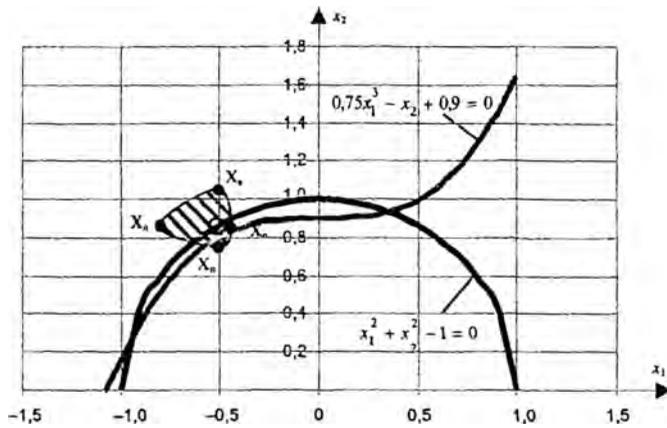


Рис. 5. Границы области «скатывания» модифицированного итерационного процесса (9)

Применение описанной выше модификации алгоритма вычисления коэффициентов  $\lambda$ ,  $\gamma$  в практических расчетах послеаварийных режимов схем с использованием более нелинейных математических моделей восстанавливает высокие вычислительные характеристики итерационного процесса (9), которыми он обладает при решении систем квадратных уравнений установившихся режимов.

В табл. 7 показаны результаты численного сравнения сходимости методов Ньютона по параметру и двухпараметрической минимизации с основным и модифицированным алгоритмами определения коэффициентов релаксации  $\lambda$ ,  $\gamma$  на примерах расчетов утяжеленных режимов схем при увеличенной нелинейности задачи.

Таблица 7

Результаты численного сравнения сходимости

Схемы электрических сетей с количеством узлов $n$ и ветвей $m$			Сходимость (число итераций) алгоритмов			
			Ньютона	По параметру	Двухпараметрической минимизации с вычислением $\lambda$ , $\gamma$ способом [3]	Двухпараметрической минимизации с модифицированным алгоритмом вычисления $\lambda$ , $\gamma$
Схема 1	$n$	646	Расходится	Расходится	Расходится	16
	$m$	905				
Схема 2	$n$	1352	Расходится	19	14	14
	$m$	1737				
Схема 3	$n$	993	Расходится	Расходится	17	16
	$m$	1500				
Схема 4	$n$	984	Расходится	18	15	15
	$m$	1358				
Схема 5	$n$	871	Расходится	Расходится	Расходится	12
	$m$	1055				
Схема 6	$n$	652	Расходится	Расходится	16	15

Из табл. 7 видно, что при расчете режимов схем 1 и 5 с плохого начального приближения решение не удастся получить ни методом Ньютона (2), ни по параметру (5), ни двухпараметрическим методом минимизации (9) с определением параметров  $\lambda$ ,  $\gamma$  способом [3]. Модифицированный алгоритм

определения коэффициентов  $\lambda$ ,  $\gamma$  более точно отслеживает изменение рельефа поверхности линий уровня (4) с учетом возросшей нелинейности модели и обеспечивает сходимость метода (9) к решению с требуемой точностью для схемы 1 за 16, а для схемы 5 – за 12 итераций.

## ВЫВОДЫ

1. Исследована вычислительная эффективность итерационных процессов метода Ньютона по параметру и двухпараметрического метода минимизации с алгоритмом определения коэффициентов релаксации, предложенным в [3], при решении плохо обусловленных алгебраических систем кубических уравнений. Определены области «скатывания» исследуемых итерационных процессов к координатам «ямы» на поверхности функции (4) для системы двух кубических уравнений. Установлено, что причиной «скатывания» итерационного процесса двухпараметрического метода минимизации в «яму» являются неточности прогноза изменений рельефа поверхности (4) в направлении спуска при определении коэффициентов релаксации для системы кубических уравнений.

2. Предложен модифицированный алгоритм вычисления коэффициентов релаксации в двухпараметрическом методе минимизации, восстанавливающий его высокие вычислительные характеристики при решении плохо обусловленных алгебраических систем кубических и более высокого порядка нелинейных уравнений, основанный на уточнении предварительно найденных значений коэффициентов релаксации непосредственной минимизацией (4) методом наименьших квадратов без разложения компонентов функции в ряд Тейлора. Показано, что площадь области «скатывания» итерационного процесса (9) в «яму» на поверхности (4) существенно уменьшается с применением модифицированного алгоритма вычисления коэффициентов релаксации. На основе исследования сходимости двухпараметрического метода минимизации с модифицированным алгоритмом на утяжеленных режимах схем, описываемых уравнениями более нелинейными, чем квадратичные, показано, что предложенный алгоритм более точно отслеживает изменение рельефа поверхности (4).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Идельчик В. И. Расчеты установившихся режимов электрических систем / Под ред. В. А. Веникова. – М.: Энергия, 1977. – 192 с.
2. Идельчик В. И., Тарасов В. И. Экспериментальное исследование сходимости методов Ньютона и по параметру при расчете установившихся режимов сложных электрических систем // Вопросы применения математических методов при управлении режимами и развитием электрических систем: Тр. / Иркутск. политехн. ин-т. – Иркутск, 1971. – Вып. 72. – С. 5–26.
3. Тарасов В. И. Об одном двухпараметрическом минимизационном методе расчета установившихся режимов электроэнергетических систем // Изв. РАН. Энергетика. – 1997. – № 6. – С. 21–33.
4. Матвеев В. А. Метод приближенного решения систем нелинейных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1964. – Т. 4, № 6. – С. 983–994.
5. Редковский Н. Н. Численный метод решения систем нелинейных уравнений при помощи криволинейного спуска // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1983. – Т. 23, № 2. – С. 261–266.
6. Третьяков А. А. Две схемы нелинейного метода оптимизации в экстремальных задачах // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1984. – Т. 24, № 7. – С. 966–992.

Представлена кафедрой  
электрических систем

Поступила 6.03.2006