МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Математические методы в строительстве»

Е. Л. Ерошевская

# МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
для студентов строительных специальностей

В 2-х частях

Часть 2

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области строительства и архитектуры*

Минск
БНТУ
2020

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.1я7
Е78

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра высшей математики Белорусского аграрного технического университета (зав. кафедрой, кандидат физ.-мат. наук, доцент *А. А. Тиунчик*);
доцент кафедры аналитической экономики и эконометрики Белорусского государственного университета, канд. физ.-мат. наук *М. В. Дубатовская*

**Ерошевская, Е. Л.**
Е78 Математика : учебно-методическое пособие для студентов строительных специальностей: в 2 ч. / Е. Л. Ерошевская. – Минск : БНТУ, 2020. – Ч. 2. – 63 с.
ISBN 978-985-583-110-6 (Ч. 2).

Данное пособие предназначено для студентов первого курса (1-й семестр) дневного и заочного отделений.

В нем излагаются элементы линейной алгебры, векторы, метод координат, элементы аналитической геометрии, дифференциальное исчисление функции одной переменной и его применение к исследованию функций. Разобрано достаточное количество примеров, которые поясняют смысл основных понятий при решении задач.

Данное издание имеет целью помочь студентам в их самостоятельной работе при изучении тем первого семестра.

Первая часть была издана в 2018 г.

**УДК 519.2 (075.8)**
**ББК 22.1я7**

**ISBN 978-985-583-110-6 (Ч. 2)**
**ISBN 978-985-550-889-3**

## Занятие № 1 и № 2

### *Тема: Матрицы и действия с ними. Методы вычислений определителей*

### *Задания первого уровня*

1. Найти размер матрицы $A$: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Сложить матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

3. Найти $\alpha \cdot A$, если $\alpha = 3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу $X$ из условия, что $2X + 3A = E$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Перемножить матрицы:

5. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$;

6. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Вычислить $f(A)$, если $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$.

10. Вычислить определитель по правилу треугольника:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

11. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$.

12. Решить неравенство $\begin{vmatrix} 8 & x & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} > 0$.

13. Вычислить определитель с помощью разложения по элементам первого столбца $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

14. Вычислить определитель с помощью разложения по элементам второй строки: $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

15. Пользуясь свойствами определителей, вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$.

### *Задания второго уровня*

1. Вычислить $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти размеры матрицы $2A-3B+C$, если $A=\begin{pmatrix}3 & -13 & 0\\ 2 & -1 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 7 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-14 & 50 & 3\\ -5 & 3 & 10\end{pmatrix}$.

3. Найти матрицу $X$ из условия $A+X=2A^T$, где $A=\begin{pmatrix}1 & -5 & 3\\ 0 & -6 & 1\\ -3 & 3 & 7\end{pmatrix}$.

Найти произведение матриц:

4. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\\ 5 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\ -10\end{pmatrix}$;

6. $\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & -2\\ 0 & 8\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

7. Показать, что матрица $A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -3 & -2\end{pmatrix}$ является корнем многочлена $P(x)=x^2+x-14$.

8. Вычислить $f(A)$, если $f(x)=3x^2-2x+5$, $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$.

9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}3x & -2\\ 4 & -5x\end{vmatrix}$.

10. При каких значениях $a$ обращается в нуль определитель $\Delta=\begin{vmatrix}a+3 & 5\\ -1 & a-3\end{vmatrix}$?

11. Вычислить определитель по правилу Саррюса: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

12. Вычислить определитель по правилу треугольника: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

13. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

14. Решить неравенство $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & x & 8 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} > 0$.

15. Построить график функции $y = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix}$.

16. Пользуясь свойствами определителей, вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 6 & 9 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1+3+7 & 5 & 4 \\ 2+1+9 & 11 & 3 \\ 3-4+8 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 5 & -6 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 4 \end{vmatrix}$.

## *Домашнее задание*

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. Проверить справедливость свойств транспонирования $\left(A\cdot B\right)^T=B^T\cdot A^T$.

2. Вычислить $\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

3. Вычислить $\begin{pmatrix}5 & 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 7\\ 4\end{pmatrix}$.

4. Вычислить $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$. Найти $A\cdot C$, $B\cdot A$, $A\cdot B$, если это возможно.

6. Вычислить $f(A)$, если $f\left(x\right)=3x^2-4$, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

7. Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix}3 & x & -x\\ 2 & -1 & 3\\ x+10 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$; б) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 5-x & 2\\ 8-x & 3 & 3\end{vmatrix}=0$.

8. Решить неравенство $\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & x & -2\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}<0$.

9. Пользуясь свойствами определителей, вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -8 & 1 \\ 3 & 15 & 18 & 91 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 13 & 39 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 8 & 28 & 38 & 48 \\ 4 & 14 & 19 & 24 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & -15 & -18 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

## *Ответы*

*2.* $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; *3.* $\begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$; *4.* $\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$;

*5.* $A\cdot C=\begin{pmatrix} 14 \\ 10 \end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

*6.* $\begin{pmatrix} 2 & 15 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; *7. а*) $\left\{-4-\sqrt{22};-4+\sqrt{22}\right\}$; *б*) $\left\{4-\sqrt{7};4+\sqrt{7}\right\}$;

*8.* $x\in(4;\infty)$; *9. а*) 120; *б*) 0; *в*) –72; *г*) 0; *д*) –2858; *е*) 320.

## Занятие № 3

### *Тема: Обратная матрица. Решение невырожденных систем линейных алгебраических уравнений матричным методом и по формулам Крамера*

### *Задания первого уровня*

1. Найти матрицу $A^{-1}$, обратную данной матрице $A$, если:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

2. Решить уравнение $A \cdot X = B$, где $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 5 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решить систему матричным способом $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$.

4. Решить систему по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 7x - 5y = -3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y - 2z = 5 \\ 3x + 6y + 4z = 3 \end{cases}$.

### *Задания второго уровня*

1. Найти матрицу $A^{-1}$, обратную данной матрице $A$, если:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу $X$ из уравнения $A \cdot X = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & -5 & -4 \\ 3 & -8 & -7 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Найти матрицу $X$, если $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Решить систему матричным способом:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 22 \\ 10x_1 + 5x_2 + x_3 = 23 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x + 7y + 13z = 0 \\ 3x + 14y + 12z = 18 \\ 5x + 25y + 16z = 39 \end{cases}$.

5. Решить систему по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + 2y + 3z - 4t = 11 \\ 2x + y + 5z + t = 3 \\ 3x + 2y + z + 2t = -1 \\ x + y + 5z + t = 5 \end{cases}$.

## *Домашнее задание*

1. Найти матрицу $X$, если $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу $X$ из уравнения $A \cdot X + B = C$, где

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Решить систему матричным способом: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -6 \end{cases}$.

4. Решить систему уравнений по формулам Крамера, если

а) $\begin{cases} 4x+3y=5 \\ 5x+2y=8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+4y+5z=1 \\ x+3y+7z=2 \\ 3x+5y+8z=5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2 \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3 \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3 \end{cases}$.

## *Ответы*

*1*. $X=\begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$. *2*. $X=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. *3*. (0; –2; 1).

*4*. *а*) (2; –1), *б*) (4; –3; 1), *в*) (–2; 0; 1; –1).

## Занятие № 4

### *Тема: Ранг матрицы. Метод Гаусса. Решение произвольных систем линейных алгебраических уравнений*

### *Задания первого уровня*

1. Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 6 & 1 & -8 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 9 & 9 & 8 \\ -1 & -3 & 0 & -13 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему:

а) $\begin{cases} x+y+z=5 \\ x-y+z=1 \\ x+z=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-2y+2z=2 \\ x+3y=-1 \end{cases}$.

3. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ x+y+2z=7 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$.

## *Задания второго уровня*

1. Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 12 & 0 \\ 6 & 0 & 18 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 11 & 1 & 6 \\ 12 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 15 & 25 & 10 & 5 & 30 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 5 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4 \\ 7x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 5x_4 = -7 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$.

3. Решить систему методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x - 2y + 5z = 3 \\ 2x - 4y + z = 6 \\ 3x + y - 3z = 2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$.

## *Домашнее задание*

1. Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 7 & -15 & 7 & 11 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему: а) $\begin{cases} x+5y-4z=-5 \\ 2x-3y+z=2 \\ 4x+y-3z=-4 \\ x+2y-2z=-3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-y+z=9 \\ 3x+3y+2z=5 \\ 2x+7y+4z=-1 \\ 2x-5y-z=15 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3x_1-4x_2+x_3-x_4=0 \\ 6x_1-8x_2+2x_3+3x_4=0 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x-y-z=0 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$.

3. Решить систему методом Гаусса: а) $\begin{cases} 2x-2y+z=9 \\ 3x+5y+2z=-1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+3x_2+x_3=5 \\ x_1+x_2+5x_3=-7 \\ 2x_1+3x_2-3x_3=14 \end{cases}$.

### *Ответы*

*1*. *а*) 3; *б*) 3; *в*) 2.
*2*. *а*) несовместна; *б*) (2, –3, 4); *в*) ($C_1$, $C_2$, $4C_2-3C_1$, 0); *г*) (0, 0, 0).
*3*. *а*) (1; –2; 3); *б*) (1, 2, –2).

## Занятие № 5 и № 6

### *Тема: Векторы в $R^2$ и в $R^3$.*
### *Скалярное произведение векторов и его свойства*

### *Задания первого уровня*

1. Построить вектор $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{в}-\frac{4}{3}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}$.

2. Вычислить проекцию вектора $\vec{a}$ на ось *OX*, если даны $|\vec{a}|=4$ и угол наклона $\alpha=\frac{\pi}{4}$ вектора $\vec{a}$ к оси *OX*.

3. Даны точки $M_1(1,3,5)$, $M_2(2,4,-1)$. Найти модуль вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

4. Даны векторы $\vec{a}=(1,-3,4)$, $\vec{в}=(2,1,3)$, $\vec{c}=(-2,5,4)$. Найти векторы: $5\vec{a}$, $3\vec{в}-7\vec{c}$, $3\vec{a}-5\vec{в}+6\vec{c}$.

5. Найти орт вектора $\vec{a}=(6,7,-6)$.

6. Найти угол между векторами $\vec{a}=(3,1)$ и $\vec{b}=(-1,3)$.

7. Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{a}=(3,-6,6)$.

8. Параллелограмм построен на векторах $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{k}-3\vec{j}$. Определить длины диагоналей параллелограмма.

9. Являются ли точки $A(-1; 2; 3)$, $B(2; -1; 1)$, $C(1; -3; -1)$, $D(-5; 3; 3)$ вершинами трапеции?

10. Доказать, что в пространстве вещественных матриц второго порядка матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ являются линейно-независимы.

11. Найти угол между векторами $\vec{a}=(2;4;-3)$ и $\vec{b}=(6;-4;2)$ и проекцию вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$.

12. При каком значении α векторы $\vec{a}=\alpha\vec{i}-6\vec{j}+5\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}-\alpha\vec{k}$ взаимно перпендикулярны?

13. При каких значениях α и β векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\alpha\vec{k}$ $\vec{b}=\beta\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ коллинеарны?

14. Найти вектор $\vec{x}$ коллинеарный вектору $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$, образующий с ортом $\vec{j}$ острый угол и имеющий длину $|\vec{x}|=15$.

## *Задания второго уровня*

1. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$ и $\vec{b}=-3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$.

Найти проекции на координатные оси суммы и разности этих векторов.

2. В равнобедренной трапеции $OACB$ угол $\angle BOA = 60°$, $\left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CA}\right| = 2$, $M$, $N$ – середина сторон $BC$ и $AC$. Выразить векторы $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{MN}$ через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы направлений $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

3. Найти проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на координатные оси и его направляющие косинусы, если $A(2; –1, 4)$ и $B(1; 3; 2)$.

4. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(1; –2; 3)$, $B(3; 2; 1)$, $C(6; 4; 4)$. Найти вершину $D$.

5. Дана точка $M(5; –3; 4)$. Определить длину и направление ее радиус-вектора.

6. Дан модуль вектора $|\vec{a}| = 2$ и углы его наклона с координатными осями $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$. Вычислить координаты этого вектора.

7. Найти вектор $\vec{x}$, образующий со всеми тремя базисными ортами равные острые углы, если $|\vec{x}| = 2\sqrt{3}$.

8. Будут ли линейно зависимы векторы $\overrightarrow{x_1} = (3;4;0)$, $\overrightarrow{x_2} = (0;-3;1)$, $\overrightarrow{x_3} = (0;2;5)$?

9. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ заданы координатами своих концов $A(1; –3; –4)$, $B(–1; 0; 2)$, $C(2; –4; –6)$, $D(1; 1; 1)$. Определить угол между этими векторами и проекцию вектора $\overrightarrow{BC}$ на направление вектора $\overrightarrow{AD}$.

10. Найти угол между векторами $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ и $\vec{в} = \vec{m} - \vec{n}$, где $\overrightarrow{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы, образующие угол 120°.

11. На материальную точку действуют силы $\overrightarrow{f_1} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{f_2} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\overrightarrow{f_3} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Найти работу равнодействующей этих сил $\vec{R}$ при перемещении точки из положения $A(2; –1; 0)$ в положение $B(4; 1; –1)$.

## *Домашнее задание*

1. Найти координаты вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a} = (2; -3; 1)$, $\vec{b} = (4; -3; -5)$.

2. Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$. Определить проекцию вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$ и проекцию вектора $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$.

3. Даны три вершины $A(3; -4; 7)$, $B(-5; 3; -2)$ и $C(1; 2; -3)$ параллелограмма *ABCD*. Найти четвертую вершину *D*, противоположную *B*.

4. Определить вектор $\vec{x}$ коллинеарный вектору $\vec{a}$, если $\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{j} - 7{,}5\vec{k}$, $|\vec{x}| = 50$. Вектор $\vec{x}$ образует острый угол с осью *OZ*.

5. Радиус-вектор $\vec{r}$ точки *M* составляет с осью *OX* угол 45° и с осью *OY* угол 60°. Длина вектора $\vec{r}$ равна 6. Определить координаты точки *M*, если ее координата *z* отрицательна, и выразить вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ через орты $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

6. Найти вектор $\vec{x}$, образующий с ортом $\vec{j}$ угол 60°, с ортом $\vec{k}$ – угол 120°, если $|\vec{x}| = 5\sqrt{2}$.

7. Является ли линейно-независимой система векторов $\overrightarrow{x_1} = (1; 1; -1)$, $\overrightarrow{x_2} = (2; 2; -2)$?

8. Показать, что векторы $\overrightarrow{x_1} = (-1; 3; 2)$, $\overrightarrow{x_2} = (2; -3; -4)$, $\overrightarrow{x_3} = (-3; 12; 6)$ линейно зависимы.

9. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{j} + \vec{k}$.

10. Даны вершины треугольника *A*(–1; –2; 4), *B*(–4; –2; 0), *C*(3; –2; 1). Определить внутренний угол при вершине *B*.

11. Вычислить $(\vec{m} + \vec{n})^2$, если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы с углом между ними 30°.

12. Вычислить работу силы $\vec{F} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ при перемещении материальной точки из положения $A(-1;\ 2;\ 0)$ в положение $B(2;\ 1;\ 3)$.

### *Ответы*

*1.* $\vec{c} = (-8; 3; 17)$. *2.* $\dfrac{8}{3\sqrt{2}}, \dfrac{8}{\sqrt{6}}$. *3.* $D(9; -5; 6)$. *4.* $\vec{x} = (-24; 32; 30)$.

*5.* $M\left(3\sqrt{2}; 3; -3\right)$, $\vec{r} = 3\sqrt{2}\cdot\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$. *6.* $\vec{x} = \pm 5\vec{i} + \dfrac{5}{\sqrt{2}}\vec{j} - \dfrac{5}{\sqrt{2}}\vec{k}$.

*7.* Нет. *9.* $\dfrac{\pi}{2}$. *10.* $\dfrac{\pi}{4}$. *11.* $2+\sqrt{3}$. *12.* 4.

## Занятие № 7

### *Тема: Векторное и смешанное произведение векторов, их свойства*

### *Задания первого уровня*

1. Упростить выражение $\vec{i}\times\left(\vec{j}+\vec{k}\right) - \vec{j}\times\left(\vec{i}+\vec{k}\right) + \vec{k}\times\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)$.

2. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}\times\vec{b}$, где $\vec{a} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

3. Вычислить $\left|\vec{a_1}\times\vec{a_2}\right|$, если $\left|\vec{a_1}\right| = 1$, $\left|\vec{a_2}\right| = 2$, $\left(\vec{a_1},\wedge\vec{a_2}\right) = \dfrac{2}{3}\pi$.

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (1; 3; 5)$, $\vec{b} = (3; -4; 6)$.

5. Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a} = (2; 1; -1)$, $\vec{b} = (-4; 3; -1)$, $\vec{c} = (8; -6; 3)$.

6. Сила $\vec{F} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ приложена к точке $A(4;\ -2;\ 3)$. Определить момент этой силы относительно точки $B(3;\ 2;\ -1)$.

7. Определить, какой тройкой является тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

а) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{k}$;

б) $\vec{a} = (1; -1; 3)$, $\vec{b} = (-4; 4; 2)$, $\vec{c} = (3; -2; 10)$.

8. Компланарны ли векторы $\vec{a}=(2;3;-1)$, $\vec{b}=(1;-1;3)$, $\vec{c}=(1;9;-11)$?

9. Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$.

### *Задания второго уровня*

1. Упростить выражения:

а) $\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\times\vec{c}+\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\times\vec{b}+\left(\vec{b}-\vec{c}\right)\times\vec{a}$;

б) $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}-\vec{a}\right)+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

2. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a}=2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{k}$. Найти площадь и высоты параллелограмма.

3. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(4;3;2)$.

4. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ и $3\vec{a}+2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$, $\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

5. Сила $\vec{F}=-\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ приложена к точке $M(3;2;-1)$. Найти момент этой силы относительно точки $A(1;2;3)$ и углы, составляемые им с координатными осями.

6. Какой ориентации тройка векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, если $A_1(0, 1, 3)$, $A_2(1, -2, 7)$, $A_3(2, 1, -4)$, $A_4(0, 1, 2)$?

7. Лежат ли в одной плоскости следующие точки: $A(1;-6;3)$, $B(0;-1;2)$, $C(2;-5;6)$, $D(-4;3;2)$?

8. Даны четыре вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$:

$\vec{a}=(3;4;-3)$, $\vec{b}=(-5;5;0)$, $\vec{c}=(2;1;-4)$, $\vec{d}=(8;-16;17)$.

Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис и найти вектор $\vec{d}$ в этом базисе.

9. Вершинами пирамиды служат точки $A(3;5;4)$, $B(5;8;3)$, $C(1;9;9)$, $D(6;4;8)$. Найти объем пирамиды.

## *Домашнее задание*

1. Упростить выражение $2\vec{i}\cdot\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)+3\vec{j}\cdot\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)+\overrightarrow{4k}\cdot\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)$.

2. Даны вершины треугольника $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины $B$ на сторону $AC$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-3\vec{n}$, где $\left|\vec{m}\right|=5$, $\left|\vec{n}\right|=3$, $\left(\vec{m},\hat{}\vec{n}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

4. Доказать, что четыре точки: $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.

5. Дана пирамида с вершинами $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$, $D(4; 1; 3)$. Найти:

1) длину ребер $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$;

2) скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $3\cdot\overrightarrow{AC}$;

3) угол между ребрами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$;

4) площадь грани $ABC$;

5) объем пирамиды;

6) длину высоты, опущенной на грань $ABC$.

6. Даны четыре вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$:

$\vec{a}=\left(1; 2; 3\right)$, $\vec{b}=\left(-1; 3; 2\right)$, $\vec{c}=\left(7; -3; 5\right)$, $\vec{d}=\left(6; 10; 17\right)$.

Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис и найти вектор $\vec{d}$ в этом базисе.

## *Ответы*

*1*. –1. *2*. 5; *3*. 37,5.

*5*. *1*) $\sqrt{54}$, $\sqrt{14}$, $2\sqrt{3}$; *2*) 45; *3*) $\arccos\dfrac{2}{\sqrt{42}}$; *4*) 11,5; *5*) 3; *6*) 0,78;

*6*. $\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}$.

## Занятие № 8

### *Тема: Плоскость. Различные формы уравнений*

### *Задания первого уровня*

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -3; 4)$ и отсекающей на осях $OX$ и $OY$ отрезки $a = 2$ и $b = 4$ соответственно.
2. Найти уравнение плоскости, если точка $M(1; 2; -3)$ есть основание перпендикуляра, опущенного из точки $N(-1; -1; 0)$ на эту плоскость.
3. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки: $M(1; 2; 0)$, $N(1; -1; 2)$, $P(2; -3; -7)$.
4. Определить, какие из заданных пар плоскостей параллельны, совпадают или пересекаются?
   1. $2x - y + z + 7 = 0; 6x - 3y + 3z + 21 = 0$;
   2. $3x - y + z - 2 = 0; x + y - z + 1 = 0$;
   3. $x - 2y + z + 5 = 0; 2x- - 4y + 2z - 3 = 0$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1; 2; 3)$ параллельно плоскости $2x - y + z - 5 = 0$.
6. Найти угол между плоскостями $x + 2y - 2z + 1 = 0$, $x + y - 4 = 0$.
7. Найти расстояние от точки $M(2; -1; -1)$ до плоскости $12x - 16y + 15z - 8 = 0$.

### *Задания второго уровня*

1. Как расположены следующие плоскости:
   а) $2x + 3y - 5 = 0$; б) $3z + 2 = 0$; в) $x + 2y - 3z = 0$?
2. Зная единичный вектор $\vec{n}^0 = (\frac{4}{13}; \frac{12}{13}; \frac{-3}{13})$, направленный из начала координат перпендикулярно к плоскости, и расстояние плоскости от начала координат $p = 7$, составить нормальное уравнение плоскости в векторной и координатной формах.
3. Найти уравнение плоскости, параллельной оси $OZ$ и проходящей через точки $M(2; 3; -1)$ и $N(-1; 2; 4)$.
4. На плоскость $5x - y + 3z + 12 = 0$ из начала координат опущен перпендикуляр. Найти его длину и углы, образованные им

с координатными осями, а также координаты основания этого перпендикуляра.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;\ 1;\ 1)$ параллельно векторам $\vec{a}=(0;1;2)$, $\vec{b}=(-1;0;1)$.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;\ 2;\ 0)$, $M_2(2;\ 1;\ 1)$ параллельно вектору $\vec{a}=(3;0;1)$.

7. Через точки $M_1(-1;\ 2;\ -3)$ и $M_2(1;\ 4;\ -5)$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $3x+5y-6z+1=0$.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;\ -3;\ 5)$ перпендикулярно линии пересечения плоскостей

$$\begin{cases} 2x+y-2z+1=0; \\ x+y+z-5=0. \end{cases}$$

## *Домашнее задание*

1. Как расположены следующие плоскости:

а) $y-5z=0$; б) $3x+7z-6=0$; в) $2x-7y-5z=0$?

2. Какие из следующих уравнений плоскости являются нормальными:

а) $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-1=0$; б) $\frac{3}{4}x-\frac{6}{7}y+\frac{2}{7}z+3=0$; в) $y-1=0$;

г) $\frac{4}{5}y-\frac{3}{5}z-2=0$; д) $x+y-1=0$; е) $\frac{-12}{13}x+\frac{5}{13}y-13=0$.

3. Найти величины отрезков, отсекаемых плоскостью $x-10y+2z-12=0$ на координатных осях.

4. Найти расстояние от точки $M(2;\ -4;\ 2)$ до плоскости $2x+11y+10z-10=0$.

5. Найти расстояние между параллельными плоскостями $2x-3y+6z-14=0$ и $2x-3y+6z+28=0$.

6. Через точку $M(-4;\ -1;\ 2)$ провести плоскость, параллельную плоскости $3x+4y-z-8=0$.

7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;\ 4;\ 5)$ и ось $OY$.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; -2; 2)$ перпендикулярно к двум плоскостям $2x - y + z - 1 = 0$, $x + 2y - z + 1 = 0$.

9. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2; -3; 1)$, $N(3; 1; 2)$ перпендикулярно плоскости $3x - 2y - 4z = 0$.

10. Вычислить угол между плоскостями $2x - y + 2z - 3 = 0$ и $4x - 3y + 5 = 0$.

### *Ответы*

*1*. *а*) проходит через ось ОХ; *б*) параллельна оси ОУ; *в*) проходит через точку 0(0; 0; 0).

*2*. *а*), *г*), *е*). *3*. $a = 12$; $b = -1{,}2$; $c = 6$. *4*. 2. *5*. 6.

*6*. $3x + 4y - z + 18 = 0$. *7*. $2z - 5x = 0$. *8*. $x - 3y - 5z + 2 = 0$.

*9*. $2x - y + 2z - 9 = 0$. *10*. $\arccos\dfrac{11}{15}$.

## Занятия № 9 и № 10

### *Тема: Прямая в $R^3$. Прямая и плоскость. Прямая в $R^2$*

### *Задания первого уровня*

1. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1; -3; 1)$ перпендикулярно плоскости $x + 7y - 3z + 1 = 0$.

2. Установить взаимное расположение прямых

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -6t \\ z = -1 - 8t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 7 - 6t \\ y = 2 + 9t \\ z = 12t \end{cases}.$$

3. Найти проекцию точки $A(4; -3; 1)$ на плоскость $x + 2y - z - 3 = 0$.

4. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1; -2; 5)$ параллельно прямой $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z+7}{5}$.

5. Общее уравнение прямой $4x - 3y + 12 = 0$ представить в виде:

а) с угловым коэффициентом; б) в отрезках; в) в нормальном виде; г) построить прямую.

6. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 3, и проходящей параллельно прямой $6y - 3x - 5 = 0$.

7. Найти точку, симметричную с точкой $P(-8;\ 12)$ относительно прямой $4x + 7y + 13 = 0$.

8. Даны вершины треугольника $ABC$: $A(-9;\ 44)$, $B(9;\ 20)$, $C(-15;\ 27)$.

Найти: а) уравнение стороны $AB$; б) уравнение высоты $CD$; в) уравнение медианы $AM$; г) точку $N$ пересечения медианы $AM$ и высоты $CD$; д) расстояние от точки $C$ до прямой $AB$.

### *Задания второго уровня*

1. Прямая задана общими уравнениями $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$.

Записать ее канонические уравнения.

2. Установить взаимное расположение прямых $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-3}{4}$ и $\dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$.

3. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ и плоскости $3x + 5y - z - 2 = 0$.

4. Из точки $A(1;\ 0;\ -1)$ опустить перпендикуляр на плоскость $2x - y + 5 = 0$.

5. Найти точку симметричную точке $A(4;\ 3;\ 10)$ относительно прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{5}$.

6. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z}{2}$ и $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-3}{2}$.

7. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;\ 2;\ 3)$, если направляющий вектор $\vec{S}$

прямой образует с координатными осями $OX$, $OY$, $OZ$ углы соответственно $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

8. Найти угловой коэффициент прямой и отрезок, отсекаемый ею на оси ординат, зная, что прямая проходит через $P(2;\ -8)$ и $Q(-1;\ 7)$.

9. В равнобедренном прямоугольном треугольнике даны координаты вершины острого угла (5; 7) и уравнение противолежащего катета $6x + 4y - 9 = 0$. Составить уравнения двух других сторон треугольника.

10. Составить уравнения сторон квадрата, если даны одна из его вершин А(2; –4) и точка пересечения диагоналей $M(5;\ 2)$.

11. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x - y - 1 = 0$; $x - 2y - 1 = 0$ и точка $P(2;\ -2)$ пересечения его диагоналей. Составить уравнения двух других сторон параллелограмма.

12. Дан треугольник: $A(1;\ 2)$, $B(3;\ 7)$, $C(5;\ -13)$. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины $B$ на медиану, проведенную из вершины А.

13. Даны точки $A(-1;\ 2;\ 3)$, $B(3;\ 1;\ 2)$ и $C(1;\ 3;\ 1)$. Найти точку пересечения медиан треугольника $ABC$.

## ***Домашнее задание***

1. Через точку $A(1;\ 3;\ -1)$ провести прямую, перпендикулярную плоскости $3x - y + z - 2 = 0$.

2. Найти проекцию точки $A(1; -3; 2)$ на плоскость $6x + 3y - z - 41 = 0$.

3. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(2;\ 3;\ 1)$ на прямую $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

4. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(7; -8; 3)$ параллельно: а) вектору $\vec{S} = (1; -2; 3)$; б) прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-1}{0}$; в) прямой $\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = -2t + 2 \\ z = 5t - 3 \end{cases}$.

5. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1; -2; 3)$ перпендикулярно прямым $\frac{x-2}{1}=\frac{y+7}{-1}=\frac{z}{2}$ и $\frac{x+4}{3}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-1}{1}$.

6. Найти точку, симметричную точке $A(3; -4; -6)$ относительно плоскости, проходящей через точки $M(-6; 1; -5)$, $N(7; -2; -1)$, $P(10; -7; 1)$.

7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; 2; -1)$ и прямую $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z}{4}$.

8. Даны четыре точки: $A_1(4; 4; 3)$, $A_2(3; 8; 4)$, $A_3(1; 3; 8)$, $A_4(5; 7; 2)$.

Составить уравнения: а) прямой $A_1A_2$; б) плоскости $A_1A_2A_3$; в) прямой $A_4M$, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$; г) прямой $A_4N$, параллельной прямой $A_1A_2$; д) найти угол между прямой $A_1A_4$ и плоскостью $A_1A_2A_3$.

9. Требуется найти: а) длину стороны $BC$ и $AB$; б) уравнение стороны $BC$; в) уравнение высоты, проведенной из вершины $A$; г) длину высоты, проведенной из вершины $A$; д) уравнение биссектрисы внутреннего угла $B$; е) уравнение медианы, проведенной из вершины $C$; ж) центр тяжести треугольника, если $A(4; 1)$, $B(0; -2)$, $C(-5; 10)$.

### *Ответы*

*1.* $\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}$. *2.* $A'(7; 0; 1)$. *3.* $\frac{x-2}{-3}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-1}{1}$.

*4. а)* $\begin{cases} x=t+7 \\ y=-2t-8 \\ z=3t+3 \end{cases}$; *б)* $\begin{cases} x=3t+7 \\ y=5t-8 \\ z=3 \end{cases}$; *в)* $\begin{cases} x=3t+7 \\ y=-2t-8 \\ z=5t+3 \end{cases}$.

*5.* $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-3}{1}$. *6.* $A''(1; -2; 2)$. *7.* $5x-3y+1=0$.

*8. а)* $\frac{x-4}{-1}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-3}{1}$; *б)* $21x+2y+13z-131=0$;

*в)* $\frac{x-5}{21}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-2}{13}$; *г)* $\frac{x-5}{-1}=\frac{y-7}{4}=\frac{z-2}{1}$; *д)* $\varphi=\arcsin 0{,}17$.

*9. а)* 13; 5; *б)* $12x + 5y + 10 = 0$; *в)* $12y - 5x + 8 = 0$; *г)* $\frac{63}{13}$;

*д)* $11x - 3y - 6 = 0$; *е)* $3x + 2y - 5 = 0$; *ж)* $C(-\frac{1}{3}; 3)$.

## Занятие № 11

### *Тема: Кривые второго порядка*

### *Задания первого уровня*

1. Какой геометрический образ определяется уравнением $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 29 = 0$?

2. Определить тип каждого из следующих уравнений, привести уравнения к каноническому виду и установить, какой геометрический образ они определяют:

а) $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$;

б) $6y^2 - 12y - 2x + 5 = 0$;

в) $225x^2 + 45x + 225y^2 - 150y - 416 = 0$;

г) $x^2 + 2y^2 + 4x - 4y = 0$;

д) $16y^2 - 36x^2 - 72x - 612 = 0$.

3. Назвать и построить кривые:

а) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 5 = 0$;

б) $x^2 + 4y^2 + 4x - 16y - 8 = 0$;

в) $x^2 + 8x + 2y + 10 = 0$;

г) $25x^2 - 9y^2 + 36y - 261 = 0$.

### *Задания второго уровня*

1. Составить простейшее уравнение эллипса, зная, что:

а) полуоси его соответственно равны 4 и 2;

б) расстояние между фокусами равно 6 и большая полуось равна 5;

в) большая полуось равна 10 и $\varepsilon = 0{,}8$.

2. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ при условии, что эксцентриситет ее $\varepsilon = 1{,}25$.

3. Назвать и построить кривые:

а) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$;

б) $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$;

в) $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$;

г) $3x^2 + 4y^2 - 18x - 8y - 5 = 0$.

## *Домашнее задание*

1. Составить уравнение параболы, зная что:

а) расстояние фокуса от вершины равно 3;

б) фокус имеет координаты (5; 0), а ось ординат служит директрисой.

2. Составить уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах эллипса $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = 1$, а фокусы в его вершинах.

3. Назвать и построить кривые:

а) $x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0$;

б) $5y^2 + 20y + x^2 + 6x + 4 = 0$;

в) $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$;

г) $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$;

д) $4x^2 - y^2 - 8x - 6y - 4 = 0$.

4. Какие геометрические места точек определяют уравнения:

а) $5x^2 + 5y^2 - 10x + 20y + 31 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$.

## *Ответы*

*1. а)* $y^2 = 12x$; *б)* $y^2 = 10x - 25$; *2.* $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1$.

*3. а*) окружность; *б*) эллипс; *в*) парабола; *г*) пересекающиеся прямые; *д*) гипербола; *4. а*) мнимая окружность; *б*) точка (2; –3).

## Занятие № 12

### *Тема: Контрольная работа*

### *Вариант № 0*

1. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x+2y+z=8 \\ -2x+3y-3z=-5. \\ 3x-4y+5z=10 \end{cases}$$ В случае совместности решить ее.

2. Даны координаты вершин пирамиды $A_1$(0; 6; 2), $A_2$(4; 1; 5), $A_3$(3; 5; 2); $A_4$(2; 8; 7). Найти:

1) векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$;

2) угол между ребрами $A_1A_2$ и $A_1A_4$;

3) площадь грани $A_1A_2A_3$;

4) объем пирамиды;

5) уравнение прямой $A_1A_4$;

6) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

7) уравнение высоты, опущенной из вершины $A_4$ на грань $A_1A_2A_3$;

8) длину высоты, опущенной из вершины $A_4$ на грань $A_1A_2A_3$;

9) угол между ребром $A_1A_4$ и гранью $A_1A_2A_3$;

3. Даны вершины треугольника $A$(1; –1), $B$(–2; 1), $C$(3; 5). Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины $A$ на медиану, проведенную из вершины $B$.

4. Назвать и построить кривую $3x^2+4y^2-18x-8y-5=0$.

5. Назвать и построить поверхность $36z^2+16y^2-9x^2+18x=9$.

Каждый вариант контрольной работы оценивается в 10 баллов.

Задача № 1: 2 балла.

Задача № 2: 1) 0,1 балла; 2) 0,5 балла; 3) 0,5 балла; 4) 0,5 балла; 5) 0,1 балла; 6) 0,3 балла; 7) 0,2 балла; 8) 0,3 балла; 9) 0,5 балла.

Задача № 3: 2 балла.

Задача № 4: 1,5 балла.

Задача № 5: 1,5 балла.

## Занятие № 13

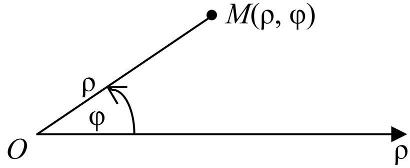
### *Тема: Полярная система координат*

Положение любой точки на плоскости можно определить при помощи полярной системы координат, которое устанавливается следующим образом:

1) Выберем на плоскости прямую, на этой прямой выберем положительное направление (на чертеже указано стрелкой). Эта направленная прямая называется *полярной осью*.

2) На полярной оси выберем точку $O$ (полюс).

3) Выберем единицу масштаба $\vdash m \dashv$.



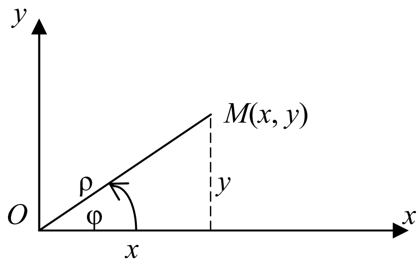

Пусть $M$ – произвольная точка плоскости. Для определения положения точки $M$ плоскости в полярной системе координат из полюса $O$ проводят луч $OM$, и точке $M$ сопоставляется пара вещественных чисел: длина $\rho$ отрезка $OM$, измеряемая в масштабе измерения длин отрезков на плоскости, и величина $\varphi$ ориентированного угла. Число $\varphi$ равное углу отрезка $OM$ с полярной осью, измеренному в радианах называется полярным углом точки $M$. $\rho$ называется полярным радиусом. Числа $\rho$ и $\varphi$ называются полярными координатами точки $M$ и записываем $M(\rho, \varphi)$.

Значение полярного угла, удовлетворяющее условию $0 \le \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \le \pi$, называется главным. $0 \le \rho < \infty$.

Иногда на практике пользуются обобщенными полярными координатами, такими, что $-\infty < \rho < \infty, -\infty < \varphi < \infty$.

Декартовы и полярные координаты связаны между собой.

Полюс поместим в начало координат прямоугольной декартовой системы, а полярную ось совместим с осью $OX$.




Из прямоугольного треугольника получим, что $\cos\varphi = \dfrac{x}{\rho}$; $\sin\varphi = \dfrac{y}{\rho}$, откуда

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \tag{1.1}$$

Формулы (1.1) выражают декартовы координаты точки через ее полярные координаты. Чтобы выразить полярные координаты через декартовы, возведем обе части каждого из равенств (1.1) в квадрат, а затем сложим полученные равенства почленно и получим

$$\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = x^2 + y^2,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Разделив почленно второе из равенств (1.1) на первое, имеем

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x},\ \ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,$$

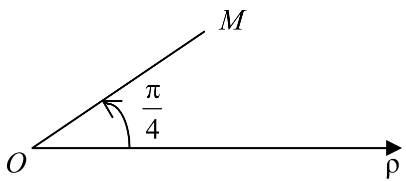
$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x},\ \varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}. \tag{1.2}$$

Формулы (1.2) выражают полярные координаты точки через ее декартовы координаты.

Если $0 \le \varphi < 2\pi$, то значению $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{y}{x}$ соответствуют два значения φ. Из этих двух значений выбирают по знакам $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

***Пример 1***. Построить точку $M(3;\ \frac{\pi}{4})$ в полярной системе координат.

***Решение.***




***Пример 2***. Записать в полярных координатах уравнение окружности радиуса $R$ с центром в полюсе.

***Решение***. $x^2 + y^2 = R^2$,

$(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = R^2$, $\rho^2 = R^2 \Rightarrow \rho = R$.

Уравнение эллипса, гиперболы, параболы в полярной системе координат имеет вид

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \qquad (1.3)$$

где $p$ – параметр;

$\varepsilon$ – эксцентриситет.

При $\varepsilon < 1$ уравнение (1.3) определяет эллипс, при $\varepsilon > 1$ – гиперболу, при $\varepsilon = 1$ – параболу.

### *Задание*

1) Какая линия определяется уравнением $\varphi = \text{const}$ в полярных координатах?

2) Построить точки $A_1(2; \frac{\pi}{4})$, $A_2(-2; \frac{\pi}{4})$, $A_3(-2; \frac{5}{4}\pi)$.

3) Дана точка $M(\sqrt{3}; -1)$ в декартовых координатах. Найти ее полярные координаты.

4) Найти прямоугольные координаты точки $A$, полярные координаты которой $(2; \frac{\pi}{4})$.

5) Написать в полярных координатах уравнение окружности с центром в точке $O_1(4; 0)$ и радиусом равным 4.

6) Построить кривую, заданную уравнением в полярных координатах $\rho^2 = 9\sin 2\varphi$ (лемниската Бернулли).

7) Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \dfrac{9}{5-4\cos\varphi}$. Записать в декартовых координатах уравнение этой линии.

### *Домашнее задание*

1) Преобразовать к полярным координатам уравнения кривых:

а) $x^2 + y^2 = 16$; б) $x^2 - y^2 = 4$; в) $x^2 + y^2 = 4x$;

г) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, где $a > 0$.

2) Построить графики функций:

а) $\rho = \mathrm{a}\cos 2\varphi$ (четырехлепестковая роза);

б) $\rho = a \cdot \varphi$, где $a > 0$ (спираль Архимеда);

в) $\rho = 2a(1+\cos\varphi)$, $\mathrm{a} > 0$ (кардиоида).

3) Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \dfrac{3}{1-\cos\varphi}$.

## Занятие № 14

### *Тема: Поверхности второго порядка*

### *Задания первого уровня*

1. Какие поверхности заданы уравнениями:

а) $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$; б) $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$; в) $4x^2 + 9y^2 - z^2 = -36$;
г) $z = 3x^2 + 4y^2$; д) $z = 3x^2 - 4y^2$; е) $x^2 + y^2 = z$; ж) $y^2 + z^2 = 1$;
з) $y^2 - z^2 = 0$.

2. Составить уравнение поверхности, образованной вращением линии $\begin{cases} py^2 = z \\ x = 0 \end{cases}$ вокруг оси $OZ$.

Подобрать значение параметра $p$ так, чтобы точка $A(-1;\ 2;\ 5)$ лежала на поверхности. Определить название поверхности и построить ее.

3. Назвать и построить поверхности:

а) $y^2 = 4x$; б) $x^2 = y^2 + z^2$; в) $x^2 + y^2 = 2y - z^2 - 1$; г) $x^2 + z^2 = 16y$; д) $z = 3 + x^2 + y^2$; е) $x^2 + y^2 + 2x + z^2 - 4z = 0$; ж) $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.

### *Задания второго уровня*

1. Какое из уравнений а) $x^2 = 3y$; б) $y^2 = 4z$; в) $z^2 = 6y$ является уравнением цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси $OX$, и направляющей-параболой?

2. Составить уравнение поверхности, образованной вращением линии $\begin{cases} x^2 - pz^2 = p \\ y = 0 \end{cases}$ вокруг оси $OX$ и подобрать значение параметра $p$ так, чтобы точка $A(3;\ 2;\ -2)$ лежала на поверхности. Определить название поверхности и построить ее.

3. Описать следующие поверхности второго порядка:

а) $y^2 + z^2 + x = 0$; б) $x^2 + 3y^2 - 4z^2 - 12 = 0$;

в) $x^2 + 4y^2 = 16$; г) $y^2 = 8z$.

4. Назвать и построить поверхности:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$; б) $9x^2 - y^2 - 90x + 214 = 0$;

в) $x^2 + z^2 - 10x + 4z + 28 = 0$; г) $2x^2 + 6x + 3y + 6 = 0$;

д) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{4} = 1$; е) $4x^2 + z^2 + 8x + 16y + 6z - 3 = 0$;

ж) $-x^2 + \dfrac{y^2}{5} + \dfrac{z^2}{7} = 0$.

5. Какая линия задана уравнениями $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$?

### *Домашнее задание*

1. Какую поверхность определяет уравнение $z = \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9}$?

2. Составить уравнение поверхности, образованной вращением линии $\begin{cases} x^2 = pz^2 + 5 \\ y = 0 \end{cases}$ вокруг оси $OZ$, и подобрать значение парамет-

ра $p$ так, чтобы точка $A(1;\,3;\,-1)$ лежала на поверхности. Определить название поверхности и построить ее.

3. Назвать и построить поверхности:

а) $4x^2+4x+2y-1=0$; б) $x=\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}$;

в) $9y^2-16z^2+64z-18y-199=0$;

г) $4x^2+9y^2+16x-90y+205=0$;

д) $4x^2+9y^2-9z^2-16x+18y-18z+34=0$;

е) $6x^2-12x+4y^2-16y-z^2+6z+1=0$;

ж) $9x^2+16y^2-36z^2+54x-64y+288z-431=0$.

### ***Ответы***

*1*. Гиперболический параболоид.
*2*. Однополостный гиперболоид вращения.
*3*. *а*) параболический цилиндр; *б*) эллиптический параболоид; *в*) гиперболический цилиндр; *г*) эллиптический цилиндр; *д*) двуполостный гиперболоид; *е*) однополостный гиперболоид; *ж*) конус второго порядка.

## Занятие № 15

### ***Тема: Операции над множествами. Числовая последовательность и ее предел***

### ***Задания первого уровня***

1. Найти $A\bigcup B$, если $A=\{2,\,3,\,4,\,6\}$, $B\{1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6\}$.

2. Найти $A\setminus B,\ B\setminus A$, если $A=\{2,3,4,9\}$, $B=\{2,\,3,\,5,\,7\}$.

3. Зная общий член последовательности $x_n=5n$ написать ее первых 10 членов.

4. Дана последовательность $1,\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{27},\ \ldots,\ \dfrac{1}{1000},\ \ldots$ Написать общий член последовательности.

5. Указать предел $a$ числовой последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = \dfrac{3n}{n+1}$. Пользуясь определением предела числовой последовательности, найти номер члена последовательности, начиная с которого $|x_n - a| < 0{,}001$.

6. Найти предел числовой последовательности с общим членом а) $x_n = \dfrac{1-8n+7n^2-n^4}{3-n^2+4n^4}$; б) $x_n = \dfrac{1}{n}\sin 5n$.

7. Найти указанные пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+5}{n^2+7}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-4n+1}{3n^2+n-8}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+6n-5n^2}{n^3+2n-17}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+7n^2}{7n^2+5n-1}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

### *Задания второго уровня*

1. $A$ – множество делителей 42 и $B$ – множество делителей 18. Найти $A\bigcap B$, $A\bigcup B$. Что представляет собой наибольший элемент $A\bigcap B$?

2. Дана последовательность, общий член которой $x_n = \dfrac{5n+1}{n+2}$. Доказать, что эта последовательность возрастающая.

3. Найти общий член последовательности

а) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{7}, \dfrac{3}{11}, \dfrac{4}{15}, \ldots$; б) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{11}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{11}{21}, \dfrac{7}{13} \ldots$

4. Указать предел $a$ числовой последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = \dfrac{2n-3}{n+4}$.

Пользуясь определением предела числовой последовательности, найти номер члена последовательности, начиная с которого $|x_n - a| < 0{,}0001$.

5. Написать несколько членов последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = \frac{n+1}{n} \cdot \cos n\frac{\pi}{2}$. Существует ли $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$?

6. Найти предел числовой последовательности с общим членом

а) $x_n = \frac{\sqrt{3n^2 - 7}}{n+5}$; б) $x_n = \frac{4n}{2n-1} \cdot \frac{3n^3+1}{n^3+5n-7}$;

в) $x_n = \frac{\sin n}{5n+4}$; г) $x_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$.

7. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+n^2}{6+n+7n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^4 - 4n + 1}{3n^2 - 4n + 5}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 8n}{6n^5 + 7n - 1}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n - \sqrt{n^2 - n + 1}\right)$; д) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 3n - 5}}{n-1}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+4}$.

## *Домашнее задание*

1. Написать несколько членов последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = \frac{4n+1}{2n} \cdot \cos n\frac{\pi}{4}$. Существует ли $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$?

2. Дана последовательность $\{x_n\}$, общий член которой $x_n = \frac{3n+5}{n+1}$. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ убывающая.

3. Выяснить, ограничена ли последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = 5 \cdot 3^{n-1}$.

4. Указать предел $a$ числовой последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

Пользуясь определением предела числовой последовательности, найти номер члена последовательности, начиная с которого $|x_n - a| < 0,001$.

5. Найти предел числовой последовательности с общим членом

а) $x_n = \dfrac{6n^2+5n-1}{2n^2+7}$; б) $x_n = \dfrac{6n}{8n+3}+\dfrac{1}{n}\cdot\cos 3n$.

6. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^4-2n^2-7}{9n^4+3n+5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^2+n+5}{n^5+n^4-3n^2}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n}{n^2+7}-\dfrac{1}{3^n}\right)$;

г) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n-2}-\sqrt{n}\right)$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{5n^2+4}}{n+1}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos n^2}{n^2+3}$.

### *Ответы*

*1*. Нет. *3*. Нет. *4*. $a = 2$, $n > 999$.

*5*. *а*) 3, *б*) $\dfrac{3}{4}$. *6*. *а*) $\dfrac{1}{3}$, *б*) 0, *в*) 0, *г*) 0, *д*) $\sqrt{5}$, *е*) 0.

## Занятие № 16

### *Тема: Числовая функция и ее предел*

### *Задания первого уровня*

1. Показать, что предел функции $y = 3x - 5$ в точке $x_0 = 2$ равен $b = 1$. Для данного $\varepsilon = 1$ найти такую $\delta$ – окрестность точки $x_0 = 2$, чтобы для всех $x$, взятых из этой окрестности, выполнялось неравенство $|y-b|<\varepsilon$.

2. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^7+6x^4-4}{x^7+4x-14}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-2x^3+2}{x^2+10}$; д) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4}$; е) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{x-4}-\sqrt{5}}{x^2-81}$;

ж) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;

и) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$; к) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$.

### *Задания второго уровня*

1. Показать, что функция $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ в точке $x_0 = -2$ имеет предел, равный $b = -4$. Для данного $\varepsilon = 0{,}01$ найти $\delta$ – окрестность точки $x_0 = -2$, чтобы для всех $x$, взятых из этой окрестности, выполнялось неравенство $|y-b|<\varepsilon$.

2. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x+\dfrac{x^3+7}{2x-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+3}{x^4-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2(x+1)-x(x^2-2)}{2x^3+4x^2-9}$; д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+7x+5}{x^3+1}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x^2}-1}{x^2+x^3}$; ж) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$;

и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+2}\right)$; к) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$;

л) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$; м) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

### *Домашнее задание*

1. Показать, что предел функции $y=\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}$ в точке $x_0 = 1$ равен $b = 6$. Для данного $\varepsilon = 0{,}1$ найти такую $\delta$ – окрестность точки $x_0 = 1$, чтобы для всех $x$, взятых из этой окрестности, выполнялось неравенство $|y-b|<\varepsilon$.

2. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{t\to 6}\left(t\cdot\sqrt{t^2-20}-\lg\left(t+\sqrt{t^2-20}\right)\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+2x-3}{5x^2-4x+4}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4x+2}{x^3-4x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}3^{\frac{6x+2}{3x-4}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x+5}\right)^x$; з) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$; и) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$;

к) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$; л) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; м) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$;

н) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-4x+3}$; о) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-6}-\sqrt{4x^2+2}\right)$;

п) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$; р) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$.

### *Ответы*

*1.* $\delta=\dfrac{1}{30}$. *2. а)* 23; *б)* $\dfrac{1}{2}$; *в)* $\dfrac{7}{5}$; *г)* 0; *д)* $\infty$; е) 9; ж) 0; *з)* 0; *и)* $\dfrac{9}{16}$; *к)* $\dfrac{1}{9}$; *л)* 1; *м)* $-\dfrac{1}{3}$; *н)* $\dfrac{1}{4}$; *0)* $-\infty$; *п)* $\dfrac{1}{4}$; *р)* $-\dfrac{5}{2}$; $\infty$.

## Занятие № 17

### *Тема: Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых функций. Применение бесконечно малых функций для вычисления пределов*

### *Задания первого уровня*

1. Доказать, что бесконечно малые функции $\sqrt{1+x}-1$ и $\dfrac{1}{2}x$ при $x\to0$ будут эквивалентными.

2. При $x\to0$ $\alpha(x)=2x^2+5x^3-x^5$ и $\beta(x)=3x^2-9x^4$ являются бесконечно малыми функциями. Сравнить их.

3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin7x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\operatorname{tg}5x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\operatorname{ctg}4x$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\sin6x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 4x}{4x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{2x^2}$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin8x+\sin2x}{4x}$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^{x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{2}{\sin x}}$; к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x+x^2}$;

л) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\arcsin 7x}$; м) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\cdot\sin x}-\dfrac{1}{x\cdot\operatorname{tg} x}\right)$.

### *Задания второго уровня*

1. При неограниченном возрастании $x$ функция $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ является бесконечно малой. Доказать это.

2. При $x\to 0$ $\alpha(x)=1-\cos x$ и $\beta(x)=\dfrac{x^3}{3-x}$ является бесконечно малыми функциями. Сравнить их порядок.

3. Определить при $x\to 0$ порядки малости относительно $x$ функций: а) $\dfrac{2x}{1+x}$; б) $1-\cos x$; в) $\operatorname{tg}x-\sin x$.

4. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{\sin^2\dfrac{x}{3}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x\cdot\arcsin 3x}{\sin 3x\cdot\operatorname{arctg}2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot\operatorname{tg}\dfrac{2}{9}x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\cos x-\cos 7x}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5\operatorname{tg}4x)^{\operatorname{ctg}4x}$; к) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right)^{x}$; л) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{x}$;

м) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$; н) $\lim\limits_{x\to 3}\sin\dfrac{x-3}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}x$; о) $\lim\limits_{x\to\frac{b}{2}}\dfrac{\cos 2x-\cos b}{x-\dfrac{b}{2}}$;

п) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot(\ln(x+1)-\ln x)$; р) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}$; с) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^{x}-e^{3}}{x-3}$.

## *Домашнее задание*

1. Если $x \to 0$, то какие из следующих бесконечно малых функций а) $5x$; б) $x^4$; в) $\sqrt{3x}$; г) $\operatorname{tg}\frac{x}{5}$; д) $\lg(1+x)$ имеют порядок высший, чем $x$; низший, чем $x$; тот же, что и $x$?

2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot\sin 5x}{\left(x-x^3\right)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 2x}{(\operatorname{arctg}5x)^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 4x}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 3x}{1-\cos 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{2}{\sin\frac{x}{4}}}$;

к) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$; л) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x}$; м) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{tg}^3\dfrac{1}{x}\arcsin\dfrac{3}{x\sqrt{x}}}{\sin\dfrac{2}{x^3}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\arcsin\dfrac{5}{x}}$;

н) $\lim\limits_{x\to\infty}x\big(\ln(2+x)-\ln x\big)$; о) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-1}{15x}$; п) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$;

р) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$; с) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2-4}$.

## *Ответы*

*1. б)* $x^4 = o(x)$; *в)* $x = o(\sqrt{3x})$; *а), г), д)* – одного порядка малости.

*2. а)* 15; *б)* $\dfrac{2}{25}$; *в)* –10; *г)* $\dfrac{3}{8}$; *д)* 3; *е)* $e^2$; *ж)* $\dfrac{1}{e}$; *з)* $e^6$; *и)* $e^2$;

*к)* 0; *л)* –1; *м)* 0,3; *н)* 2; *о)* $-\dfrac{1}{5}$; *п)* $-\dfrac{1}{2}$; *р)* 1; *с)* $\dfrac{1}{4}$.

## Занятие № 18

### *Тема: Непрерывность функции одной переменной*

### *Задания первого уровня*

1. Пользуясь определением непрерывности функции, доказать, что функция $y = 4x^3 - 5x + 6$ непрерывна при любом $x$.
2. Исследовать на непрерывность функции:

а) $f\left(x\right)=\dfrac{2x-4}{\left|2x-4\right|}$; б) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x(x-1)}$; в) $f\left(x\right)=4^{\frac{1}{x-3}}$;

г) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{1-x}}+1}$.

3. Исследовать на непрерывность функцию

$$f\left(x\right)=\begin{cases} 2^x \text{ при } -1 \le x < 1, \\ x-1 \text{ при } 1 < x \le 4. \end{cases}$$

Построить график этой функции.

4. Исследовать функцию $f\left(x\right)=2^{\frac{1}{x-3}}+1$ на непрерывность в точках $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

### *Задания второго уровня*

1. Исследовать функцию $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ на непрерывность и построить ее график.
2. Исследовать на непрерывность функцию $y=6^{\frac{1}{x-3}}+1$ в точках $x_1 = 3$ и $x_2 = 4$.
3. Исследовать на непрерывность функцию $y=7^{\frac{1}{5-x}}+1$ и построить ее график.
4. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ и построить ее график.

5. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ x \text{ при } 0\le x<1,\\ -x^2+4x-2 \text{ при } 1\le x<3,\\ 4-x \text{ при } x\ge 3.\end{cases}$$

Построить ее график.

6. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}x+4 \text{ при } -\infty<x<-1,\\ x^2+2 \text{ при } -1\le x\le 1,\\ \dfrac{2x}{x-1} \text{ при } 1<x<\infty.\end{cases}$$

Построить ее график.

### *Домашнее задание*

1. Исследовать на непрерывность функции:

а) $f(x)=\dfrac{|3x-6|}{3x-6}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{1-x}}+1}+2$.

2. Исследовать на непрерывность функцию $y=2^{\frac{1}{x-5}}$ и построить ее график.

3. Исследовать на непрерывность функции:

а) $\begin{cases}-2x \text{ при } x\le 0,\\ \sqrt{x} \text{ при } 0<x\le 4,\\ 1 \text{ при } x\ge 4;\end{cases}$ б) $\begin{cases}-x \text{ при } x\le 0,\\ x^2 \text{ при } 0<x\le 2,\\ x+1 \text{ при } x>2;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}1-x \text{ при } x\ge -2,\\ \dfrac{x}{x+3} \text{ при } x<-2.\end{cases}$

Построить ее график.

г) $f(x)=\begin{cases}\cos x \text{ при } x\le 0,\\ x+1 \text{ при } 0<x\le 1,\\ -x^2+1 \text{ при } x>1.\end{cases}$

Построить ее график.

### *Ответы*

*1.* *а)* $x = 2$ – точка разрыва 1-го рода,
*б)* $x = 1$ – точка разрыва 1-го рода.
*2.* $x = 5$ – точка разрыва 2-го рода.
*3.* *а)* $x = 0$ – точка непрерывности,
$x = 4$ – точка разрыва 1-го рода;
*б)* $x = 0$ – точка непрерывности,
$x = 2$ – точка разрыва 1-го рода;
*в)* $x = -2$ – точка разрыва 1-го рода,
$x = -3$ – точка разрыва 2-го рода;
*г)* $x = 0$ – точка непрерывности,
$x = 1$ – точка разрыва 1-го рода.

## Занятие № 19

### *Тема: Производная функции одной переменной, заданной явно*

### *Задания первого уровня*

1. Продифференцировать следующие функции:

а) $y=x^{\frac{3}{7}}$; б) $y=\sqrt[3]{x^2}$; в) $y=5x^3-3x^2+x+ax^{-7}-1$;

г) $y=a\sqrt{x}+x\sqrt{a}$; д) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{13}{5}x^5-2x^6+\frac{4}{7}x^7$;

е) $y=x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}$; ж) $y=\frac{2x+3}{x^2-5x+5}$; з) $y=(5x^2+7)^3$;

и) $y=x^3\cdot\sin x$; к) $y=(5x^2+7x+2)^3$; л) $y=(1+5x-8x^2)^5$;

м) $y=(a+bx)^m$; н) $y=\left(1+2\sqrt{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)^4$;

о) $y=\sin 15x+\cos 4x+\sin 2x^2+\operatorname{arcctg} 7x^5$; п) $y=\operatorname{tg}\dfrac{1+x}{2}$;

р) $y=e^{\cos\frac{x}{3}}+\operatorname{ctg}\dfrac{x}{7}$; с) $y=\ln\left(ax^2+b\right)\cdot x^3$;

т) $y=2^{x^2}+\sqrt[3]{\operatorname{tg} 6x+1}$; у) $y=\arcsin 2x\cdot\log_2\left(x^2+7x-5\right)$;

ф) $y=\operatorname{arctg}^3 4x+5^{-x^2}$; х) $y=(x+5)^2(2x-7)^3(3x+5)$.

### *Задания второго уровня*

Продифференцировать следующие функции:

1. $y=\operatorname{tg}\dfrac{3}{2}x+\cos 7x+\sin 5x+7$. 2. $y=\dfrac{x^3-x^2}{e^{-x}}$.

3. $y=\sqrt{x^3+\dfrac{3}{2}x^2+7x}+\dfrac{2x}{x^2+1}$. 4. $y=\dfrac{2^{3x}}{\sqrt{2-2^{2x}}}$.

5. $y=\sqrt{\cos(2x^2+\dfrac{3}{2}x)}$. 6. $y=\sin^2\left(\dfrac{3}{5}x^3+7x\right)$.

7. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)+\operatorname{arcctg} 4x$. 8. $y=(2^{\sin\frac{x}{3}}+\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{7})^4$;

9. $y=e^{\operatorname{ctg} 2x}+\log_5(\arcsin 2x)$. 10. $y=\cos\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}$;

11. $y=(x-3)^4\arccos 5x^3$. 12. $y=\arcsin\dfrac{\sqrt[3]{4x+1}}{x^2}+\ln\sqrt[4]{1+\operatorname{tg} 4x}$.

13. $y=(3^{\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+1}}}+x\cdot\operatorname{arctg} 3x)^4$.

14. $y=\left(2a+3bx\right)(2a-3bx)^2\cdot\sqrt{4a+6bx}$.

15. $y=\dfrac{\sqrt[4]{x^2+7x-8}\cdot\sqrt[6]{x^4-1}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+x-4}}$.

## *Домашнее задание*

1. Вычислить $y'(x_0)$ для функций $y(x)$:

а) $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$; $x_0=\dfrac{\pi}{6}$. б) $y=\dfrac{\arcsin x+3}{\sin x-1}$; $x_0=0$.

2. Продифференцировать следующие функции:

а) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{3}-2\operatorname{tg}3x+\dfrac{7x^9}{2}$; б) $y=\ln 2+2\ln 2x-x\cdot\sqrt[5]{(x-1)^3}$;

в) $y=\sqrt{\sin^3 x}-\dfrac{2}{\cos^2 x}+2^{\sqrt{x}}$; г) $y=4^{\sqrt{\cos 2x}}+\arcsin\dfrac{x}{x^2-1}$;

д) $y=\operatorname{arctg}(x-\sqrt{1+x^2})$; е) $y=\cos^2\left(\sin\dfrac{x}{3}\right)+\sqrt{x}\cdot e^{\frac{x}{2}}$;

ж) $y=(5^{\operatorname{arcctg}3x}+x\cdot\arccos 3x)^4$; з) $y=\dfrac{\arcsin x^2}{x^3+1}+x\cdot\operatorname{tg}^3 2x$;

и) $y=\dfrac{(x-3)^2\cdot(2x-1)}{(x+1)^3}$; к) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2\cdot(2x+1)}}$.

## *Ответы*

*1. а)* 2; *б)* –4; *2. а)* $\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x}}-\dfrac{6}{\cos^2 3x}+\dfrac{63}{2}x^8$;

*б)* $\dfrac{2}{x}-\sqrt[5]{(x-1)^3}-\dfrac{3x}{5\sqrt[5]{(x-1)^2}}$;

*в)* $\dfrac{3}{2}\sqrt{\sin x}\cdot\cos x-\dfrac{2\sin 2x}{\cos^4 x}+\dfrac{2^{\sqrt{x}}\ln 2}{2\sqrt{x}}$;

*г)* $4^{\sqrt{\cos 2x}}\cdot\ln 4\dfrac{(-\sin 2x)}{\sqrt{\cos 2x}}+\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^4-3x^2+1}}\cdot\dfrac{-1-x^2}{(x^2-1)^2}$. *д)* $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

*е)* $-\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{x}{3}\cdot\sin\left(2\sin\dfrac{x}{3}\right)+\dfrac{e^{\frac{x}{2}}(1+x)}{2\sqrt{x}}$;

*ж)* $4(5^{\operatorname{arcctg}3x}+x\cdot\arccos 3x)^3\cdot\left(5^{\operatorname{arcctg}3x}\cdot\ln 5\cdot\dfrac{-3}{1+9x^2}+\arccos 3x-\dfrac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}\right)$;

*з)* $\dfrac{\dfrac{2x\left(x^3+1\right)}{\sqrt{1-x^4}}-3x^2\cdot\arcsin x^2}{(x^3+1)^2}+\dfrac{6x\operatorname{tg}^2 2x}{\cos^2 2x}+\operatorname{tg}^3 2x$;

*и)* $\dfrac{(x-3)(19x-17)}{(x+1)^4}$; *к)* $-\dfrac{2x^2+9x+1}{2\sqrt{x+2}\cdot\sqrt[3]{(x-1)^5\cdot(2x+1)^4}}$.

## Занятие № 20

***Тема: Производная функций, заданных неявно и параметрически. Геометрическое приложение производной***

***Задания первого уровня***

1. Найти производную $y'(x)$:

а) $x^2-2xy+y^3=1$; б) $y=1+xe^y$; в) $x+y+\ln\dfrac{x}{y}=0$;

г) $y^4-4x^2y+a^2=0$; д) $\begin{cases}x=t-t^3\\ y=t^2-2\end{cases}$; е) $\begin{cases}x=e^{t^2}\\ y=\arcsin t\end{cases}$;

ж) $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$.

2. Написать уравнение касательной к кривой $x^5+y^5-2xy=0$ в точке $M_0(1;\,1)$.

3. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y=e^{1-x^2}$ в точке с абсциссой $x_0=-1$.

4. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $\begin{cases}y=3t^2\\ x=3t-t^2\end{cases}$ в точке $t_0=1$.

## *Задания второго уровня*

1. Найти производную $y'(x)$:

а) $e^{xy} - x^3 + y^3 = 0$; б) $xy = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$; в) $3x^2 \cdot \arcsin y + e^y = y^2$;

г) $x + y^2 + \ln\dfrac{x}{y} = 0$; д) $\operatorname{tg}(xy) = xy$; е) $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t \\ y = 2\ln\operatorname{ctg} t \end{cases}$; з) $\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t} \\ y = \dfrac{1-t}{1+t} \end{cases}$.

2. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ в точке с ординатой $y_0 = 3$.

3. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 2x^2 + 8$ в точке ее пересечения с параболой $y = 2x^2$.

4. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ в точке $M_0\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

## *Домашнее задание*

1. Найти $y'(x)$ в точке $M_0(0; 1)$, если $e^y + xy = e$.

2. Найти $y'(x)$ в точке $M(1; 1)$, если $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$.

3. Найти производную $y'(x)$:

а) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; б) 4. $xy - e^{x+y} = 0$;

в) $x^2 \cdot \sin 3y + y^2 \cdot \operatorname{tg} x = 7$; г) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \sin 2t + 2\cos 2t \end{cases}$;

д) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}$; е) $\begin{cases} x = e^t \cdot \cos t \\ y = e^t \cdot \sin t \end{cases}$ при $t = \dfrac{\pi}{6}$.

4. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

5. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y - 3\mathrm{tg}2x - 1 = 0$ в точке с абсциссой $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

6. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \ln\left(x^2 - 4x + 4\right)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

7. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3} \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t} \end{cases}$ в точке $M_0(2;\,2)$.

8. Найти координаты точки $A$ кривой $y = 4x - x^2$, в которой касательная к данной кривой перпендикулярна данной прямой $x - 2y + 6 = 0$.

## *Ответы*

*1.* $-\dfrac{1}{e}$. *2.* $\dfrac{4}{3}$. *а)* $\dfrac{x+y}{x-y}$; *б)* $\dfrac{e^{x+y} - y}{x - e^{x+y}}$. *в)* $\dfrac{-2x \cdot \sin 3y \cdot \cos^2 x - y^2}{\cos^2 x(3x^2 \cos 3y + 2y\mathrm{tg}x)}$;

*г)* $2\cos^2 t(\cos 2t - 2\sin 2t)$; *д)* $\dfrac{t}{2}$; *е)* $2 + \sqrt{3}$; *4.* $y - 5 = 0$; $x + 2 = 0$.

*5.* $y = 6x + 1 - 3\pi$, $y = -\dfrac{1}{6}x + 1 + \dfrac{\pi}{12}$. *6.* $2x + y - 2 = 0$, $x - 2y - 1 = 0$.

*7.* $7x - 10y + 6 = 0$, $10x + 7y - 34 = 0$. *8.* $A(3;\,3)$.

## Занятие № 21

### *Тема: Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков*

### *Задания первого уровня*

1. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$, если:

а) $y=(6x+1)^4$; б) $y=\frac{5}{6}\operatorname{ctg}6x$; в) $\begin{cases} x=2t \\ y=3t^2-5t \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x=e^{-t} \\ y=t^3 \end{cases}$; д) $y=1+x\cdot e^y$; е) $y^3+x^3-3axy=0$.

2. Найти $dy$, если $x^2+2xy-y^2=a^2$.

3. Найти дифференциалы второго порядка функций:

а) $y=\cos 5x$, б) $y=5^{-x^2}$.

4. Вычислить приближенно с помощью дифференциала с точностью до двух знаков после запятой следующие значения:

а) $e^{0,2}$; б) $\sqrt{70}$; в) arcsin 0,54.

### *Задания второго уровня*

1. Найти $y''_{xx}$, если:

а) $y=\left(1+x^2\right)\cdot\operatorname{arctg}x$; б) $y=\log_2\sqrt[3]{1-x^2}$; в) $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=4\sin^2 t \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x=e^{3t} \\ y=\operatorname{tg}t \end{cases}$; д) $e^y+xy=e$; е) $y=\sin(x+y)$.

2. Найти $dy$, если $y=e^{-\frac{x}{y}}$.

3. Найти $dy$, если $(x+y)^2\cdot(2x+y)^3=1$.

4. Найти дифференциалы второго порядка функций:

а) $y=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$; б) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}$.

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала с точностью до двух знаков после запятой следующие значения:

а) $\sqrt[3]{26,19}$; б) ln1,01; в) tg46º.

## *Домашнее задание*

1. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если:

а) $y = \dfrac{\text{arcsinx}}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$; г) $x = y - \operatorname{arctg} y$;

д) $\ln y - \dfrac{x}{y} = 10$.

2. Найти $y'''(0)$, если $y(x) = e^{2x} \cdot \sin 3x$.

3. Найти $y''$ в точке (1; 1), если $x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0$.

4. Найти $dy$ в точке (1; 2), если $y^3 - y = 6x^2$.

5. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

6. Найти $d^3z$, если $z = x^2 \cdot e^{-x}$.

7. Вычислить приближенно с помощью дифференциала с точностью до двух знаков после запятой следующие значения:

а) ln0,9; б) $\sqrt{8,76}$; в) arctg1,02.

## *Ответы*

*1. а)* $\dfrac{3x}{\left(1-x^2\right)^2} + \dfrac{\left(1+2x^2\right)\cdot\arcsin x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}}$; *б)* $9t^3$; *в)* $\dfrac{1}{3a\cos^4 t \cdot \sin t}$;

*г)* $\dfrac{-2\left(y^2+1\right)}{y^5}$; *д)* $\dfrac{-y^2}{\left(x+y\right)^3}$. *2.* 9. *3.* $\dfrac{111}{256}$. *4.* $\dfrac{12}{11}dx$.

*5.* $\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}dx^2$. *6.* $-e^{-x}\left(x^2-6x+6\right)dx^3$. *7. а)* –0,1; *б)* 2,96; *в)* 0,79.

## Занятие № 22

### *Тема: Теоремы о среднем. Правило Бернулли – Лопиталя*

### *Задания первого уровня*

1. Выполнены ли условия теоремы Ролля для функции $f(x)=\operatorname{tg}x$ на отрезке $[0;\ \pi]$?

2. Уравнение $e^x=1+x$, очевидно, имеет корень $x=0$. Показать, что это уравнение не может иметь другого действительного корня.

3. Применить теорему Лагранжа к функции $y=\ln x$ на отрезке $[1;\ e]$ и найти точку, в которой верна формула Лагранжа.

4. Проверить выполнение условий теоремы Коши и найти точку, в которой выполняется соответствующая формула, для функций $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\cos x$ на отрезке $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

5. Применяя правило Бернулли – Лопиталя, найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{100}+17}{e^x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^{20}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^9-2x^3-x+2}{x^3-7x+6}$;

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$;

к) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 3x\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

### *Задания второго уровня*

1. Функция $y=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ на концах отрезка $[0;4]$ принимает равные значения $f(0)=f(4)=\sqrt[3]{4}$. Справедлива ли для этой функции теорема Ролля на отрезке $[0;4]$?

2. Функция $f(x)=\dfrac{2-x^2}{x^4}$ принимает равные значения на концах отрезка $[-1;1]$. Проверить, что $f'(x)\neq 0$ при $x\in(-1;1)$. Справедлива ли для этой функции теорема Ролля на отрезке $[-1;1]$?

3. Проверить выполнение условий теоремы Лагранжа для функции $f(x)=x-x^3$ на отрезке $[-2;1]$ и найти соответствующее промежуточное значение *c*.

4. Для функций $f(x)=3x^2+2$ и $g(x)=x^3-1$ проверить выполнение условий теоремы Коши на отрезке $[1;2]$ и найти точку, в которой справедлива соответствующая формула.

5. Применяя правило Бернулли – Лопиталя, найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2\ln x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 4x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{x\cdot\sin 7x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}x}{1+\cos 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

## *Домашнее задание*

1. Показать, что функция $f(x)=x-x^3$ на отрезках $[-1;0]$ и $[0;1]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, и найти соответствующие значения *c*.

2. На дуге параболы $y=x^2$, заключенной между точками $A(1;\ 1)$ и $B(3;\ 9)$, найти точку, касательная в которой параллельна хорде $AB$.

3. Проверить выполнение условий теоремы Лагранжа для функции $y=x^3-x$ на отрезке $[-1;2]$ и найти точку, в которой верна формула Лагранжа.

4. Написать формулу Лагранжа и найти *c* для функции $f(x)=\operatorname{arctg}x$ на отрезке $[0;1]$.

5. Для функций $f(x)=x^3$ и $g(x)=x^2+1$ проверить выполнение условий теоремы Коши на отрезке $[1;2]$ и найти точку, в которой справедлива соответствующая формула.

6. Применяя правило Бернулли – Лопиталя, найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{4^x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-4\sin^2\dfrac{\pi}{6}x}{1-x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; е) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$;

ж) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; з) $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{3}}\right)$; и) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

к) $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

### *Ответы*

*1.* $c=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. *2.* (2; 4). *3.* $c=1$. *4.* $\sqrt{\dfrac{4}{\pi}-1}$. *5.* $c=\dfrac{14}{9}$. *6. а)* 0; *б)* $\infty$; *в)* $\dfrac{1}{2}$; *г)* $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$; *д)* $-\dfrac{1}{3}$; *е)* $\dfrac{4}{7}$; *ж)* $\dfrac{1}{2}$; *з)* 0; *и)* 1; *к)* $e^{-2}$.

## Занятие № 23

### *Тема: Монотонность и локальный экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке*

### *Задания первого уровня*

1. Найти интервалы монотонности функции:

а) $f(x)=x^3-12x+11$; б) $f(x)=x^2\cdot e^{-x}$.

2. Найти экстремумы функции:

а) $f(x)=x^4-\dfrac{20}{3}x^3+8x^2$; б) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$; в) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

3. Найти наименьшее $m$ и наибольшее $M$ значения функции $y=\frac{x-1}{x+1}$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2};4\right]$.

4. Найти экстремум функции $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-7x^2+24x+1$, используя два способа нахождения экстремума, а также определить ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-5;2]$.

### *Задания второго уровня*

1. Найти интервалы монотонности функции:

а) $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$; б) $f(x)=4x^3-21x^2+18x+20$;

в) $f(x)=\frac{x^2-x}{2-x}$.

2. Найти экстремумы функции:

а) $f(x)=(x-1)^3\cdot(x+1)^2$; б) $f(x)=x-\operatorname{arctg}2x$; в) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

3. Найти наименьшее $m$ и наибольшее $M$ значения функции $y=2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$.

4. Найти экстремум функции $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$, используя два способа нахождения экстремума, а также определить ее наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[-2;4]$.

5. Найти экстремум функции $y=x^3-3x^2+3x+2$, а также определить ее наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[2;5]$.

### *Домашнее задание*

1. Найти интервалы монотонности функции:

а) $f(x)=\frac{4x^2}{1-x^2}$; б) $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+1$.

2. Найти экстремумы функции:

а) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; б) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

в) $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^4}$; г) $f(x)=x^2\ln x$.

3. Найти наименьшее $m$ и наибольшее $M$ значения функции $y=\sin 2x-x$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. Найти экстремум функции $y=x^4+8x^3+16x^2$, используя два способа нахождения экстремума, а также определить ее наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[-3;1]$.

## *Ответы*

*1. а)* Убывает на $(-\infty;-1)\bigcup(-1;0)$; возрастает на $(0;1)\bigcup(1;\infty)$. *б)* Возрастает на $(-\infty;1)\bigcup(3;+\infty)$; убывает на $(1;3)$. *2. а)* В точке $x=0$ локальный максимум: $y(0)=-2$; в точке $x=2$ локальный минимум: $y(2)=2$; *б)* В точке $x=-1$ локальный минимум: $y(-1)=-1$; в точке $x=1$ локальный максимум: $y(1)=1$; *в)* В точке $x=-1$ локальный максимум: $y(-1)=1$; в точке $x=1$ локальный максимум: $y(1)=1$; *г)* В точке $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ локальный минимум: $y\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\dfrac{1}{2e}$.

*3*. $m=-\dfrac{\pi}{2}$ при $x=\dfrac{\pi}{2}$, $M=\dfrac{\pi}{2}$ при $x=-\dfrac{\pi}{2}$. *4*. В точке $x=-4$ локальный минимум: $y(-4)=0$, а в точке $x=-2$ локальный максимум: $y(-2)=16$; в точке $x=0$ локальный минимум: $y(0)=0$, $m=y(0)=0$, $M=y(1)=25$.

## Занятие № 24

### *Тема: Выпуклость, вогнутость, точки перегиба графика функции. Асимптоты*

### *Задания первого уровня*

1. Найти интервалы вогнутости, выпуклости, точки перегиба графика функции:

а) $y=\dfrac{x}{e^x}$; б) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

2. Найти точки перегиба графика функции:

а) $y=\dfrac{x^3}{x-1}$; б) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$.

3. Найти асимптоты графика функции:

а) $y=\dfrac{2}{x^2-4}$; б) $y=\dfrac{2x^2+x+3}{x+6}$; в) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

4. Для графика функции $y=\dfrac{x^3}{2\left(x+1\right)^2}$ найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба и асимптоты.

### *Задания второго уровня*

1. Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции:

а) $y=\dfrac{x}{\ln x}$; б) $y=e^{-x^2}$ (кривая Гаусса);

в) $y=\dfrac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}$; г) $y=\dfrac{x^3-3x}{x^2-1}$.

2. Найти асимптоты графика функции:

а) $y=\dfrac{x^2+1}{2x+3}$; б) $y=\sqrt{x^2+2x}+2$.

3. Для графика функции $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$ найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба и асимптоты.

## *Домашнее задание*

1. Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции:

а) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; б) $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$.

2. Найти точки перегиба графика функции:

а) $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$; б) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

3. Найти асимптоты графика функции:

а) $y = \dfrac{2x^2 + 4x\sqrt{x} + 2}{2x + 4}$; б) $y = (x - 2) \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

4. Для графика функции $y = \left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)^3$ найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба и асимптоты.

## *Ответы*

*1. а)* На $\left(0;\ e^{\frac{8}{3}}\right)$ график выпуклый, на $\left(e^{\frac{8}{3}};\ \infty\right)$ график вогнутый; $\left(e^{\frac{8}{3}};\ \dfrac{8}{3e^{\frac{4}{3}}}\right)$ – точка перегиба; *б)* На $(-\infty; -2)\bigcup(1; \infty)$ график вогнутый; на $(-2; 1)$ график выпуклый; $(-2; -36); (1; -12)$ – точки перегиба. *2. а)* $(0; 0); (2; 0)$; *б)* $(0; 0)$. *3. а)* $x = -2$; *б)* $x = 0$, $y = x - 3$. *4.* На $(-\infty; -1); (1; 3)$ график вогнутый; на $(-1; 1); (3; \infty)$ график выпуклый; $(1; 0); \left(3;\ \dfrac{1}{8}\right)$ – точки перегиба; асимптоты: $x = -1$; $y = 1$.

## Занятие № 25

### *Тема: Общее исследование функции и построение ее графика*

### *Задания первого уровня*

1. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^4+1}{x^2}$ и построить ее график.
2. Исследовать функцию $y=\dfrac{16}{x^2\left(x-4\right)}$ и построить ее график.

### *Задания второго уровня*

1. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2}{1+x}$ и построить ее график.
2. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2}{4-x^2}$ и построить ее график.
3. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2}-\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}$ и построить ее график.

### *Домашнее задание*

1. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ и построить ее график.
2. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ и построить ее график.

### *Ответы*

*1*. Д$\left(y\right):\left(-\infty,\ +\infty\right)$. Функция четная. $y = 1$ – асимптота; $(0, +\infty)$ – интервал возрастания; $\left(-\infty; 0\right)$ – интервал убывания; (0, 0) – точка минимума. $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty\right)$ – интервалы выпуклости; $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\ ;\ \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ – интервал вогнутости.

*2*. $Д(y): (-\infty,-1) \cup (-1;1) \cup (1,\infty)$. Функция нечетная. $x = \pm 1, y = x$ – асимптоты. Интервалы: возрастания $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$, убывания $\left(\sqrt{3}, -1\right); (-1,0); (0; 1); \left(1; \sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ – точка максимума; $\left(\sqrt{3}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ – точка минимума. Интервалы: выпуклости – $(-\infty, -1); (0, 1);$ вогнутости – $(-1, 0); (1; \infty)$. (0, 0) – точка перегиба.

# САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

## *Тема: Введение в математический анализ. Дифференцирование функции одной переменной*

### *Вариант № 0*

1. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 6x}{\operatorname{arctg}^2 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+4)}-x\right)$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

2. Исследовать на непрерывность функцию:

$$f(x)=\begin{cases}1-x \text{ при } x\ge -2,\\ \dfrac{x}{x+3} \text{ при } x<-2\end{cases}$$ и построить ее график.

3. Найти производную $y'(x)$:

а) $y=\left(\ln\operatorname{ctg}\sqrt{3}+\arcsin\left(e^{-6x}\right)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{6}{7}x+\operatorname{arctg}\sqrt[4]{8x+7}+2^{\frac{1-x}{1+x}}\right)^4$;

б) $y=x+x^3\cdot\operatorname{ctg}2y$;

в) $\begin{cases}x=t+\dfrac{1}{2}\sin 2t,\\ y=\cos^3 t.\end{cases}$

Каждый вариант самостоятельной работы оценивается в 10 баллов.
Задача № 1: а) 1 балл, б) 1 балл, в) 1 балл, г) 1 балл, д) 1 балл.
Задача № 2: 2 балла.
Задача № 3: а) 1 балл, б) 1 балл, в) 1 балл.

Содержание

Учебное издание

**ЕРОШЕВСКАЯ** Елена Леонидовна

**МАТЕМАТИКА**

Учебно-методическое пособие
для студентов строительных специальностей

В 2-х частях

Часть 2

Редактор *Е. В. Герасименко*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 14.05.2020. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 2,91. Тираж 100. Заказ 790.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.