

СТРОИТЕЛЬСТВО. АРХИТЕКТУРА

УДК 620.9.008

С. Н. Березовский, канд. техн. наук, доц., Н. И. Березовский, д-р техн. наук, проф.**ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫСОТЫ УСТУПОВ НА ГРАВИЙНО-ПЕСЧАНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЯХ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

В статье рассмотрено распределение случайных отклонений высоты добычного уступа от ее оптимального значения, что позволяет прогнозировать высоту уступа и связанные с ней параметры с заданной вероятностью. При определении технической производительности карьера возможно использование многих теоретических распределений. Сравнительный анализ показал, что для широкого диапазона горно-технических условий на открытых разработках гравийно-песчаных месторождений наиболее приемлемой моделью для описания распределения относительной высоты уступа является распределение Вейбулла. Аппроксимация полученного распределения коэффициента относительной высоты уступа другими типами распределений в широком диапазоне горно-технических условий дает худшие результаты.

При разработке гравийно-песчаных месторождений, имеющих сложное строение, значительным колебаниям подвержена высота уступов. Ее изменения оказывают значительное влияние на производительность выемочно-погрузочного оборудования, на интенсивность развития горных работ и на достижимую производительность карьера по горно-геологическим условиям. Применительно к производительности экскаваторов большое значение имеет изучение теоретических распределений так называемой «относительной высоты уступа», представляющей собой отношение фактической высоты уступа к ее оптимальной величине. Изучение распределения случайных отклонений высоты уступа от ее оптимального значения позволяет прогнозировать высоту уступа и связанные с ней параметры с заданной вероятностью. На рис. 1 приведены эмпирические распределения названного коэффициента для месторождений гравийно-песчаной смеси Республики Беларусь. Большой объем информации предопределил группирование данных и их представление в виде гистограмм.

Случайная изменчивость относительной высоты уступа может быть оценена, если установлено соответствие эмпирических распределений теоретическим. На этом основываются главные элементы прогнозирования случайных величин вероятностными методами. Задача состояла в том, чтобы с помощью выборки сделать вывод, какое именно распределение имеет совокупность, из которой взята выборка, т. е. установить связь между возможными значениями относительной высоты уступа и соответствующими им вероятностями. Изучение распределения этого коэффициента позволяет с заданной точностью осуществлять прогноз производительности оборудования и карьера в целом, что особенно важно при производстве горных работ на месторождениях гравийно-песчаной смеси.

В наиболее общем виде плотность распределения случайной величины x с помощью интегральной функции распределения выражается формулой

$$f(x) = \frac{d}{dx} |F(x)|. \quad (1)$$

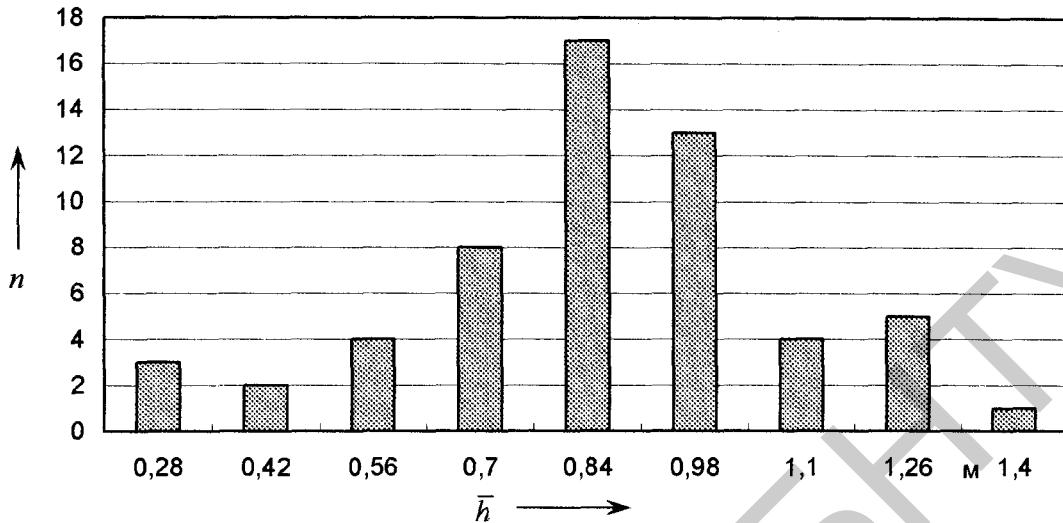


Рис. 1. Гистограмма распределения относительной высоты уступа для гравийно-песчаных месторождений РБ

Вероятность того, что случайная величина примет значение, не превышающее x_1 , можно найти с помощью плотности распределения следующим образом:

$$p(x \leq x_1) = F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(y) dy. \quad (2)$$

Аналогично определяются вероятности $p(x > x_2)$ и $p(x_1 < x < x_2)$.

При выборе плотности распределения коэффициента относительной высоты уступа нужно ограничиваться теми функциями, которые принимают неотрицательные значения, а их интеграл равен единице на заданном пространстве изменения аргумента. Этим требованиям удовлетворяет целый ряд распределений, из которых наиболее общими моделями являются гамма-распределение, распределение Вейбулла, логарифмически-нормальное распределение и др.

Пусть \bar{h} – коэффициент относительной высоты уступа, для которого требуется подобрать теоретическое распределение. Подбор теоретического распределения начинается с определения накопленной теоретической вероятности для каждого интервала относительной

высоты уступа. Определив интервальные теоретические вероятности для каждого класса распределения и сравнивая их с эмпирическими частотами по величине критерия χ^2 -Пирсона для заданного уровня значимости, судят о соответствии выбранного распределения экспериментальным данным. Критерий χ^2 определяется по формуле

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - NP_i)^2}{NP_i}, \quad (3)$$

где m – количество классов; n_i – интервальная эмпирическая частота; N – число наблюдений; P_i – интервальная теоретическая вероятность.

Вычисленное значение критерия сравнивается с граничным для заданного уровня значимости и числа степеней свободы. Число степеней свободы

$$k = m - p - 1, \quad (4)$$

где p – число неизвестных параметров распределения.

Граничное значение критерия χ^2 устанавливается по специальной таблице.

Аппроксимация экспериментальных данных относительной высоты ус-

тупа различными типами распределений показала, что наилучшей моделью является распределение Вейбулла, функция плотности вероятности которой имеет вид:

$$f(h'; \eta, \sigma) = \frac{\eta}{\sigma} \left(\frac{h'}{\sigma}\right)^{\eta-1} \exp\left[-\left(\frac{h'}{\sigma}\right)^\eta\right],$$

$$h' \geq 0, \sigma > 0, \eta > 0, \quad (5)$$

где σ – параметр масштаба; η – параметр формы.

Параметры масштаба σ и формы η вычислены по опытным данным с использованием формулы (1):

$$\left(\frac{s}{\bar{x}}\right)^2 + 1 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\eta}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\eta}\right)}; \quad (6)$$

Табл. 1. Сравнение фактических данных наблюдений с теоретическими при выборе распределения Вейбулла

Класс	Центр	Фактическое число наблюдений	Предсказанное число наблюдений
0,21...0,35	0,28	3	1
0,35...0,49	0,42	2	3
0,49...0,63	0,56	4	6
0,63...0,77	0,7	8	10
0,77...0,91	0,84	17	12
0,91...1,05	0,98	13	11
1,05...1,19	1,1	4	8
1,19...1,33	1,26	5	4
1,33...1,47	1,4	1	1

При определении технической производительности карьера возможно использование и других теоретических распределений. Поэтому представляет интерес их сравнительный анализ. Аппроксимация полученного распределения коэффициента относительной высоты уступа другими типами распределений в широком диапазоне горно-технических условий дает худшие ре-

$$\sigma = \frac{\bar{x}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\eta}\right)}. \quad (7)$$

Для параметров распределения относительной высоты уступа получены оценки $\sigma = 0,95$ и $\eta = 3,92$.

Сравнение фактического числа наблюдений с ожидаемым для различных интервалов относительной высоты уступа на основе распределения Вейбулла приведено в табл. 1.

Критерий χ^2 для 5-процентного уровня значимости равен 8,92, что меньше его допустимого табличного значения ($\chi^2 = 12,6$ при 6-ти степенях свободы). Следовательно, полученные данные не противоречат распределению Вейбулла (видно из приведенной таблицы).

результаты. Например, критерий χ^2 равен для гамма-распределения 37,7 и для логарифмически-нормального распределения 26,5, что превышает его допустимое табличное значение.

Таким образом, для широкого диапазона горно-технических условий на открытых разработках гравийно-песчаных месторождений наиболее приемлемой моделью для описания распреде-

ления относительной высоты уступа является распределение Вейбулла. Теперь можно прогнозировать высоту уступа и связанные с ней параметры с заданной вероятностью.

Прогнозирование производительности экскаватора необходимо на стадии проектирования горного предприятия и на этапе его эксплуатации. Ожидаемую производительность экскаваторов необходимо определять при составлении технико-экономического обоснования условий для разработки полезных ископаемых, технического проекта на разработку месторождения, при разработке плана развития горных работ на текущий год, при изменении технологической схемы производства горных работ.

Особенно важно точно определять технически достижимую производительность экскаватора при изменчивых параметрах залежи, что характерно для гравийно-песчаных месторождений.

Для таких сложных условий нужны совершенные методы определения достижимой технической производительности экскаваторов, обеспечивающие высокую надежность прогноза.

На практике большое распространение для определения технической производительности экскаваторов получили формулы простейшего вида:

$$Q_{\text{см}} = 3600 k_n k_h E / (t_{\text{ц}} k_p), \quad (8)$$

где $t_{\text{ц}}$ – продолжительность цикла, с; k_n и k_p – коэффициенты наполнения ковша и разрыхления породы в ковше соответственно; k_h – коэффициент относительной высоты уступа; E – емкость ковша экскаватора, м³.

Значения коэффициента относительной высоты уступа рекомендуется принимать в зависимости от соотношения фактической высоты уступа и ее рационального значения (табл. 2).

Табл. 2. Значения коэффициента относительной высоты уступа

Отношение фактической высоты забоя к рациональной высоте забоя	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
k_h	0,8	0,91	0,97	1,00	0,97	0,85

В формуле (8) емкость ковша – величина детерминированная, она определяется конкретной моделью экскаватора. Значения коэффициентов наполнения и разрыхления ковша в пределах одной категории обрабатываемых пород также являются величинами стабильными. Значительным вариациям подвержен коэффициент относительной высоты уступа, т. к. фактические значения высоты уступов в процессе работ непостоянны. Так, например, для рудных карьеров при номинальном значении 15 м фактическая высота уступа меняется от 14 до 17 м, что указывает на необходимость учета ее вариаций. Большие колебания имеет высота уступа гравийно-песчаных месторождений. Высота вскрышных уступов колеблется в преде-

лах от 0,2 до 6 м, в отдельных случаях до 10 м. Более сложная ситуация на добычных уступах, для которых вариация высоты выше в 2 раза. Поэтому при использовании формулы (8) и ее аналогов для определения производительности экскаватора большое значение имеет достоверное определение коэффициента относительной высоты уступа.

При известной зависимости производительности карьера от коэффициента относительной высоты уступа задача сводится к оценке его наиболее вероятного значения. Первоначально определим вид зависимости $k_h = f(\bar{h})$. Для ее установления воспользуемся эмпирическими данными (см. табл. 2), для подбора коэффициентов уравнения – методом наименьших квадратов. Подбор уравнения

регрессии выполнен на ПЭВМ по специальной программе. На рис. 2 приведено полученное уравнение регрессии.

Зависимость хорошо (индекс корреляции равен 0,98) описывается уравнением

$$k_h = (0,84(\bar{h})^2 - 1,6\bar{h} + 1,76)^{-1}. \quad (9)$$

Плотность вероятности относительной высоты уступа \bar{h} с достаточной степенью приближения может быть представлена формулой (2). Подставляя

в формулу (5) функцию плотности вероятности относительной высоты уступа, имеем

$$F(\bar{h}; \eta, \sigma) = \int_0^{\bar{h}} \frac{\eta}{\sigma} \left(\frac{y}{\sigma}\right)^{\eta-1} \exp\left[-\left(\frac{y}{\sigma}\right)^\eta\right] dy = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\bar{h}}{\sigma}\right)^\eta\right], \quad \bar{h} \geq 0. \quad (10)$$



Рис. 2. Зависимость коэффициента высоты уступа от относительной высоты уступа

Определим верхнее значение \bar{h} , обеспечивающее попадание случайного значения \bar{h} в интервал $[0, \bar{h}]$ с вероятностью $P(\bar{h})$:

$$P(\bar{h}) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\bar{h}}{\sigma}\right)^\eta\right], \quad (11)$$

следовательно,

$$1 - P(\bar{h}) = \exp\left[-\left(\frac{\bar{h}}{\sigma}\right)^\eta\right].$$

Логарифмируя левую и правую части уравнения, имеем

$$\begin{aligned} -\ln(1 - P(\bar{h})) &= \left(\frac{\bar{h}}{\sigma}\right)^\eta, \\ -\ln(1 - P(\bar{h})) \cdot \sigma^\eta &= \bar{h}^\eta, \end{aligned}$$

откуда

$$\bar{h} = \sigma \sqrt[\eta]{-\ln(1 - P(\bar{h}))}. \quad (12)$$

Формула (12) позволяет просто и надежно определять прогнозную относительную высоту уступа и соответст-

вующую ей производительность экскаватора по результатам контрольных измерений фактической высоты уступа или по результатам имитационного моделирования. Предлагается следующий порядок выполнения расчетов.

1. По результатам моделирования или измерений на ЭВМ вычисляются параметры формы η и масштаба σ коэффициентов относительной высоты уступа.

2. Задается вероятность, с которой фактическое значение относительной высоты уступа не превысит ожидаемое.

3. Определяется предельное значение относительной высоты уступа.

4. Рассчитывается ожидаемое значение коэффициента относительной высоты уступа и с заданной вероятностью определяется техническая производительность экскаватора по формуле (8).

На практике возникает задача оценки вероятности попадания относительной высоты уступа в заданный интервал. В процессе отработки уступа значение k_h , как это следует из рис. 2 и зависимости (9), может изменяться в определенных пределах, принимая значения меньше единицы. Решив уравнение (9), можно определить диапазон \bar{h} , в пределах которого k_h не опустится ниже заданного предела. При экстремальном характере зависимости (9) вероятность того, что k_h , а следовательно, и производительность экскаватора, не

опустится ниже заданного значения и будет определяться частотой \bar{h} , попадающей в интервал $[\bar{h}_1, \bar{h}_2]$, где \bar{h}_1, \bar{h}_2 – корни уравнения (9). Выполнив интегрирование функции распределения вероятностей относительной высоты уступа в интервале $[\bar{h}_1, \bar{h}_2]$, получим выражение для вычисления искомой вероятности:

$$P(\bar{h}_1 \leq \bar{h} \leq \bar{h}_2) = \int_{\bar{h}_1}^{\bar{h}_2} \frac{\eta}{\sigma} \left(\frac{y}{\sigma}\right)^{\eta-1} \exp\left[-\left(\frac{y}{\sigma}\right)^\eta\right] dy = \\ = \exp\left[\left(-\frac{\bar{h}_1}{\sigma}\right)^\eta\right] - \exp\left[\left(-\frac{\bar{h}_2}{\sigma}\right)^\eta\right]. \quad (13)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амосов, А. А. Вычислительные методы для инженеров / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский. – М. : Высш. шк., 1994. – 544 с.
2. Беляков, Ю. И. Выемочно-погрузочные работы на карьерах / Ю. И. Беляков. – М. : Недра, 1987. – 268 с.
3. Хан, Г. Статистические модели в инженерных задачах / Г. Хан, С. Шапиро. – М. : Мир, 1969. – 231 с.
4. Хартман, К. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / К. Хартман, Э. Лецкий, В. Шеффер. – М. : Мир, 1977. – 552 с.

Белорусско-Российский университет
Материал поступил 01.10.2010

S. N. Berezovsky, N. I. Berezovsky
The research on the theoretical distribution
of the ledge height in gravel-sand deposits
of the Republic of Belarus

The distribution of random deviations of the height of the mining ledge from its optimum value is considered in the paper, and it allows forecasting the ledge height and the height associated parameters with a specified probability. It is possible to use lots of theoretical distributions in determining the quarry capacity. The comparative analysis has shown that the Weibull distribution is the most acceptable model for describing the distribution of relative height of the ledge for a wide range of mining technical conditions in open-cast mines of gravel-sand deposits. The approximation of the obtained distribution of the modulus of relative height of the ledge by other types of distributions gives worse results in a wide range of mining technical conditions.