МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Высшая математика № 1»

МАТЕМАТИКА

Практикум

ЧАСТЬ I

Минск
БНТУ
2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 1»

МАТЕМАТИКА

Практикум

В 4 частях

ЧАСТЬ I

Минск
БНТУ
2014

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.1я7
М34

С о с т а в и т е л и :
Е. А. Бричикова, Е. А. Герасимова, Л. А. Раевская,
Е. В. Сагарда, В. И. Юринок, Т. С. Яцкевич

Р е ц е н з е н т ы :
А. Н. Исаченко, В. П. Грибкова

Математика : практикум : в 4 ч. / сост.: Е. А. Бричикова [и др.]. –
М34 Минск : БНТУ, 2014– . – Ч. 1. – 2014. – 134 с.
ISBN 978-985-550-340-9 (Ч. 1)

Издание написано в соответствии с действующей программой курса «Математика» для студентов инженерно-технических специальностей БНТУ.

Практикум состоит из 34 занятий по основным темам разделов «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Введение в математический анализ», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной», «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных». Каждое занятие содержит задания для аудиторной и самостоятельной работы студентов. Задания снабжены ответами, что позволит студентам проконтролировать правильность решений задач. Издание содержит также варианты типовых расчетов, которые могут быть использованы и для индивидуальных заданий студентов, и для проведения текущего контроля знаний студентов.

Практикум предназначен для студентов дневной и заочной форм обучения и послужит лучшей организации их самостоятельной работы.

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-550-340-9 (Ч. 1)
ISBN 978-985-550-341-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Занятие 1.
Декартова и полярная системы координат.
Построение графиков функций

Аудиторные задания

1.1 Построить графики функций:

1) $y = 2^{\log_2 \cos x}$; 2) $y = \dfrac{x^3 - x^2}{2|x-1|}$; 3) $y = \begin{cases} 2^{x-1}, 0 < x \le 2, \\ -x^2 - 2x, -3 < x \le 0. \end{cases}$;

4) $y = 2x - |x-2| + 1$; 5) $y = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$; 6) $y = \sin|x| - 1$;

7) $y = \log_{1/2} x^2 + 1$; 8) $y = \dfrac{1}{|x|+1}$.

1.2 Построить графики функций, заданных параметрически:

1) $x = -1 + 2t,\ y = 2 - t$; 2) $x = t,\ y = t^2 - 4$;

3) $x = 2\cos t,\ y = \sin t$; 4) $x = 1 - t^2,\ y = t - t^3$;

5) $x = at^2,\ y = bt^3$; 6) $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t$;

7) $x = -1 + 2\cos t,\ y = 3 + 2\sin t$; 8) $x = 2(t - \sin t),\ y = 2(1 - \cos t)$.

1.3 Записать уравнения кривых в полярных координатах:

1) $y = x$; 2) $y = 1$; 3) $x^2 + y^2 = 4$;

4) $x^2 + y^2 = 2y$; 5) $x + y - 1 = 0$; 6) $x^2 - y^2 = a^2$.

1.4 Построить графики функций, заданных уравнением в полярной системе координат:

1) $r = 1$; 2) $r = 2\varphi$; 3) $r\cos\varphi = 2$; 4) $r = e^{\varphi}$;

5) $r = 4\cos\varphi$; 6) $r = 3\sin 2\varphi$; 7) $r = 2(1+\cos\varphi)$; 8) $r = \dfrac{6}{3 + 2\cos\varphi}$;

9) $r = \dfrac{2}{1+\sin\varphi}$; 10) $r = 2\cos 3\varphi$; 11) $r^2 = 36\sin 2\varphi$.

Домашние задания

1.5 Построить следующие кривые:

1) $y=|x^2-x-2|$; 2) $y=x+|x+3|$; 3) $x=t^2+1,\ y=t$;

4) $x=t^3,\ y=t^2$; 5) $r=2\sin\varphi$; 6) $r=3(1-\sin\varphi)$;

7) $r=4\cos 2\varphi$; 8) $r=\dfrac{3}{1-\cos\varphi}$.

Ответы:

1.3 1) $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$; 2) $r=\dfrac{1}{\sin\varphi}$; 3) $r=2$;

4) $r=2\sin\varphi$; 5) $r=\dfrac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}$; 6) $\rho^2=\dfrac{a^2}{\cos 2\varphi}$.

Занятие 2.
Матрицы и действия над ними

Аудиторные задания

2.1 Найти $2A+3B-C$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & -3\\ -4 & 3 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 4\\ 1 & -5 & 6\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 1 & -3 & 2\\ 8 & -6 & 7\end{pmatrix}.$$

2.2 Найти $3A+2E$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -4\\ -1 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$, E – единичная матрица третьего порядка.

2.3 Найти матрицу X, если

$$2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}+\frac{1}{3}X=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 2 & 8\\ -3 & 9\end{pmatrix}.$$

2.4 Найти матрицу, транспонированную матрице A:

1) $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 4\\ 1 & 3 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}a & a & a\end{pmatrix}$.

2.5 Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\\ 5 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\\ 7 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 6\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

Найти: 1) $2A$; 2) $2A+3B-C$; 3) $-2C^T$.

2.6 Даны матрицы A и B. Найти AB и BA, если:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 3 & 2 & -4\\ 1 & -3 & 5\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 7\\ 3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

2.7 Вычислить

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\\ 5 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}.$$

2.8 Найти те из произведений AB, BA, A^2, B^2, которые существуют:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5\\ -3\\ -4\\ 1\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-4\\ -3\\ 5\end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -1\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}$.

2.9 Найти произведение матриц $(AB)C$ и $A(BC)$:

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 3\\ 4 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}.$$

2.10 Показать, что матрица $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ является корнем многочлена $f(x)=x^2-3x+5$.

2.11 Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если:

1) $f(x)=2x^2-3x+1,\ A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$;

2) $f(x)=x^2-3x+2,\ A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 2\end{pmatrix}$;

3) $f(x)=2x^3-x^2+3,\ A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

Домашние задания

2.12 Найти: 1) $3A-2B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$;

2) $2B-5A$, если $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ -6 & 4 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & 5 & 10\\ -15 & 10 & 0\end{pmatrix}$.

2.13 Найти $(A+3B)^2$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & -8\\ -3 & 6 & 9\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

2.14 Найти те из произведений AB, BA, AC, CA, BC, CB, которые имеют смысл, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

2.15 Проверить, коммутируют ли матрицы A и B:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7 & -6 & 1\\ -5 & 3 & 1\\ 6 & -3 & -3\end{pmatrix}$.

2.16 Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если:

1) $f(x)=2x^2-2x+7,\ A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$;

2) $f(x)=3x^2+5x-2,\ A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -3\\ 0 & 1 & 4\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

2.17 Найти матрицу A^T, если:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -7\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

Ответы: 2.1 $\begin{pmatrix}-4 & -1 & -9\\ 9 & -4 & 4\\ -13 & -3 & 21\end{pmatrix}$. 2.2 $\begin{pmatrix}8 & 15 & -12\\ -3 & -7 & 3\\ 6 & 3 & -4\end{pmatrix}$.

2.3 $\begin{pmatrix}9 & -39\\ -6 & 0\\ -9 & -3\end{pmatrix}$. 2.4 1) $A^T=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 5 & 3 & 0\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$; 2) $A^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

3) $A^T = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$. 2.5 1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 6 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 3 \\ 33 & -3 \end{pmatrix}$;3) $\begin{pmatrix} -2 & -10 & 4 \\ -6 & -12 & -6 \end{pmatrix}$.

2.6 1) $AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 0 & -11 & 19 \\ 13 & 13 & 29 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 30 \\ -13 & -2 & -8 \\ 21 & 3 & 18 \end{pmatrix}$;

2) $AB = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 21 & -7 & 35 \\ 15 & -1 & 20 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $AB = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 9 \\ 20 & -8 & 12 \\ 10 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, $BA = (13)$. 2.7 $\begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2.8 1) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$; $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

2) $AB = (-1)$; $BA = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 15 & 0 \\ -3 & 6 & -9 & 0 \\ -4 & 8 & -12 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; A^2 и B^2 – не существуют;

3) $AB = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$; BA, A^2, B^2 – не существуют;

4) $AB = \begin{pmatrix} -14 & 11 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 14 & 2 & -2 \\ -9 & -15 & 3 \\ 17 & 23 & -5 \end{pmatrix}$; A^2 и B^2 – не существуют.

2.9 $(AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} 33 \\ -18 \\ -31 \\ 32 \end{pmatrix}$.

2.11 1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & -12 & -3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 18 & -20 \\ 30 & -2 \end{pmatrix}$.

2.12 1) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 2.13 $\begin{pmatrix} 96 & 12 & 2 \\ -18 & 54 & -8 \\ 51 & 105 & 111 \end{pmatrix}$.

2.14 $BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; $AC = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. 2.15 1) не коммутируют; 2) не коммутируют: $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$;

3) коммутируют: $AB = BA = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2.16 1) $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -25 & 60 & -6 \\ 60 & -18 & 44 \\ 70 & 23 & -63 \end{pmatrix}$.

2.17 1) $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Занятие 3.
Вычисление определителей

Аудиторные задания

3.1 Вычислить определители второго порядка:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & -a \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} \sqrt[4]{a} & a \\ -1 & \sqrt[4]{a^3} \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} \ln x & \ln y \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.

3.2 Вычислить определители третьего порядка различными способами:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 8 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

3.3 Вычислить определители по правилу Саррюса и разлагая по элементам 1-й строки:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

3.4 Решить уравнение: $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$.

3.5 Решить уравнение $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$.

3.6 Построить график функции $y = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

3.7 Вычислить определители, разлагая по элементам ряда:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 6 \\ 4 & 9 & 3 & 8 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

3.8 Вычислить определители методом приведения их к треугольному виду:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$.

3.9 Вычислить определители, предварительно упростив их:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 & 13 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 10 & -1 & 5 \\ -3 & -15 & -6 & 13 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Домашние задания

3.10 Решить уравнение $\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 4 \\ x & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

3.11 Найти $\det(AB)$ и проверить, что $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, если $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0&3\\2&1&1\\4&-3&2\end{pmatrix}$.

3.12 Вычислить определители, разлагая их по элементам ряда:

1) $\begin{vmatrix}2&-1&1&0\\0&1&2&-1\\3&-1&2&3\\3&1&6&1\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}2&3&-3&4\\2&1&-1&2\\6&2&1&0\\2&3&0&-5\end{vmatrix}$.

3.13 Вычислить определители методом приведения их к треугольному виду:

1) $\begin{vmatrix}2&1&5&1\\3&2&1&2\\1&2&3&-4\\1&1&5&1\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$.

3.14 Решить неравенство $\begin{vmatrix}3&0&-1\\1&x+5&2-x\\3&-1&2\end{vmatrix}\le 4$.

3.15 Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix}0&5&2&0\\8&3&5&4\\7&2&4&1\\0&4&1&0\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}7&3&2&6\\8&-9&4&9\\7&-2&7&3\\5&-3&3&4\end{vmatrix}$.

Ответы: 3.1 1) 13; 2) $-2a^2$; 3) $\sin 2x$; 4) $2a$; 5) $\ln\dfrac{x^5}{y^2}$.

3.2 1) 78; 2) 0; 3) $\sin 2\alpha$; 4) 100; 5) – 6. 3.3 1) 0; 2) 0. 3.4 $x=-1$; $x=-4$. 3.5 $x=-3$. 3.6 Прямая $y=2x-2$. 3.7 1) 0; 2) 16. 3.8 1) 20; 2) 27. 3.9 1) 38; 2) 168; 3) – 192; 4) 75; 5) – 12; 6) 300.

3.10 $x_1 = -1, x_2 = 2$. 3.11 40. 3.12 1) 0; 2) 48. 3.13 1) 54; 2) 160.

3.14 $\left(-\infty; -\dfrac{36}{5}\right]$. 3.15 1) 60; 2) 150.

Занятие 4.
Обратная матрица. Решение матричных уравнений

Аудиторные задания

4.1 Найти матрицы, обратные данным, если они существуют:

1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.2 Найти обратную матрицу, если она существует:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ -4 & -14 & -6 \end{pmatrix}$.

4.3 Решить матричные уравнения:

1) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 2 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$.

4.4 Решить матричные уравнения:

1) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4.5 Решить матричные уравнения:

1) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

2) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Домашние задания

4.6 Найти матрицы, обратные данным, если они существуют:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

4.7 Решить матричные уравнения:

1) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответы: 4.1 1) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; 2) не существует; 3) $-\dfrac{1}{38}\begin{pmatrix} -10 & 4 & -2 \\ 7 & 1 & -10 \\ -8 & -12 & 6 \end{pmatrix}$; 4) $-\dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} -7 & -14 & 35 \\ -7 & 21 & -21 \\ -7 & -7 & 14 \end{pmatrix}$;

5) $-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.2 1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) не существует.

4.3 1) $\begin{pmatrix} -\dfrac{11}{15} & 1 \\ \dfrac{1}{15} & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{4} & \dfrac{3}{4} \\ -\dfrac{1}{8} & \dfrac{5}{8} \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} \dfrac{5}{13} & 3 \\ \dfrac{5}{13} & -1 \\ \dfrac{30}{13} & 4 \end{pmatrix}$.

4.4 1) $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

4.5 1) $\begin{pmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -17 & 13 & -10 \\ -8 & 5 & -4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

4.6 1) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$;

4) не существует.

4.7 1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; 2) $-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 \\ -14 & -8 & -2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 5/2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 1 \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -1 \\ \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -1 \end{pmatrix}$.

Занятие 5.
Решение невырожденных систем линейных уравнений

Аудиторные задания

5.1 Убедиться, что система является невырожденной, и решить ее по формулам Крамера и матричным способом:

1) $\begin{cases} x+2y+3z=5, \\ 4x+5y+6z=8, \\ 7x+8y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-7, \\ x_1+2x_2-3x_3=14, \\ -x_1-x_2+5x_3=-18; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=3, \\ 2x_1+6x_2+4x_3=12, \\ 3x_1+10x_2+8x_3=21. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0, \\ 2x_1-x_2=1, \\ 3x_1+2x_2-x_3=4. \end{cases}$

5) $\begin{cases} -2x+2y-z+7=0, \\ x-3y+z-6=0, \\ 3x+y+2z-7=0. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=2, \\ x_1-2x_2+2x_3=-1, \\ 4x_1-3x_2-x_3=5. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x-y+5z=4, \\ 3x-y+5z=0, \\ 5x+2y+13z=2. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x_1+2x_2=8, \\ 3x_1+4x_2=18. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1, \\ 3x + 2y - z = 9, \\ x - 4y + 3z = -5. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 14 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 10 = 0. \end{cases}$

Домашние задания

5.2 Проверить, являются ли системы невырожденными, и если являются, то решить их матричным методом и по формулам Крамера:

1) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5, \\ x_1 + 4x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + y \quad = 5, \\ x + \quad 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

Ответы: 5.1 1) (–2;2;1); 2) (1;2;–3); 3) (–3;3;0); 4) $x_1 = x_2 = x_3 = 1$;
5) $x = 2,\ y = -1,\ z = 1$; 6) $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1$;
7) $x = -4,\ y = -2,\ z = 2$; 8) $x_1 = 2,\ x_2 = 3$;
9) $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0$; 10) $x = 2,\ y = 1,\ z = -1$;
11) $x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = -1$.

5.2 1) $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$; 2) $x_1 = \frac{8}{3},\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = -\frac{2}{3}.$;
3) $x = 1,\ y = 3,\ z = 5$; 4) $x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$.

Занятие 6.
Ранг матрицы

Аудиторные задания

6.1 Найти ранг матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

6.2 Найти ранги матриц с помощью элементарных преобразований или методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор.

1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \\ 2 & -4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & -2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$.

6.3 При каких значениях λ ранг матрицы равен двум:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ 0 & \lambda-2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$?

6.4 Проверить справедливость неравенств $r_{AB} \le r_A$, $r_{AB} \le r_B$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 3\\ -3 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 3 & -1 & 5\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Домашние задания

6.5 Найти ранги матриц и указать какой-нибудь базисный минор.

1) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -6\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 11 & 2 & -5\\ -1 & 4 & 10 & 5 & -4\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 2 & 5 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

6.6 Проверить справедливость неравенства $r_{A+B} \le r_A + r_B$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Ответы: 6.1 1) 2; 2) 2. 6.2 1) $r=3$, $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 6\\ 2 & -4 & 4\end{vmatrix}$;

2) $r=2$, $\begin{vmatrix}-8 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}$; 3) $r=3$, $\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & -3\\ 7 & 7 & 1\end{vmatrix}$; 4) $r=3$, $\begin{vmatrix}3 & -1 & 5\\ 5 & -3 & 4\\ 7 & -5 & 1\end{vmatrix}$;

5) $r=2$, $\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}$. 6.3 1) $\lambda=3$; 2) $\lambda=0$, $\lambda=2$. 6.5 1) 2; 2) 3; 3) 3.

Занятие 7.
Решение произвольных и однородных систем линейных уравнений

Аудиторные задания

7.1 Исследовать системы на совместность и в случае совместности решить их.

1) $\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -3, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 = 5. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 18, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 = -7, \\ x_1 - x_4 + 2x_5 = 8, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 3, \\ 3x_1 + \quad + 5x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 10x_2 + \quad 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 20x_2 + 6x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

7.2 Решить однородную систему и найти фундаментальную систему решений.

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 20x_4 = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4=0, \\ 2x_1+4x_2-x_3-x_4=0, \\ 3x_1+6x_2-4x_3 \qquad =0. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=0, \\ 6x_1+3x_2+x_3-2x_4+x_5=0, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$

7.3 Решить системы методом Гаусса:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1+2x_2-3x_3=0, \\ -2x_1 \qquad -2x_3=16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3, \\ 2x_1-x_2+x_3=2, \\ x_1+4x_2+2x_3=5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x-y+2z=0, \\ 4x-3y+3z=0, \\ x+3y \qquad =0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+2y+3z=6, \\ 4x+5y+6z=9, \\ 7x+8y \qquad =-6. \end{cases}$

Домашние задания

7.4 Исследовать системы уравнений и в случае совместности решить их.

1) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=-1, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=3, \\ 3x_1+5x_2+6x_3=7. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=1, \\ 2x_1+3x_2-2x_3=2, \\ 4x_1+x_2+4x_3=4. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1+3x_2=1, \\ 3x_1+4x_2=1, \\ x_1+2x_2=1, \\ 4x_1+5x_2=1. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3-x_4=1, \\ 2x_1-10x_2+3x_4=0, \\ 4x_1-20x_2+6x_3+x_4=2. \end{cases}$

7.5 Решить системы:

1) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3=0, \\ 4x_1+x_2+3x_3=0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3+x_4=0, \\ x_1+2x_2-4x_3-2x_4=0. \end{cases}$

Ответы: 7.1 1) Система несовместна;

2) $\left\{\left(\dfrac{C_1-9C_2-2}{11},\ \dfrac{10-5C_1+C_2}{11},\ C_1, C_2\right)\middle|\ \forall C_1, C_2 \in R\right\}$;

3) $\left\{\left(\dfrac{9-C_1-14C_2-C_3}{7},\ \dfrac{4C_1-7C_2-3C_3-1}{7},\ C_1,\ C_2,\ C_3\right) \Big| \ \forall C_1,\ C_2,\ C_3 \in R\right\}$;

4) $\left\{\left(\dfrac{-3-5C_1+13C_2-5C_3}{5},\ \dfrac{4+C_2}{5},\ C_1,\ C_2,\ C_3\right) \Big| \forall C_1, C_2, C_3 \in R\right\}$;

5) $x_1 = 5, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 2$;

6) $\{(C, C+1, C+2, C+3) | \forall C \in R\}$;

7) система несовместна;

8) $\left\{\left(C_1, C_2, \dfrac{3-5C_1+25C_2}{9}, \dfrac{10C_2-2C_1}{3}\right) \Big| \forall C_1, C_2 \in R\right\}$.

7.2 1) $\left\{\left(\dfrac{3}{5}C_1, \dfrac{C_1}{5}, C_1\right) \Big| \forall C_1 \in R\right\}$; $(3, 1, 5)$; 2) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$;

3) $\left\{\left(\dfrac{-7C_1-8C_2}{7}, C_1, \dfrac{5C_2}{7}, C_2\right) \Big| \forall C_1 C_2 \in R\right\}$; $(-1, 1, 0, 0)$; $\left(-\dfrac{8}{7}, 0, \dfrac{5}{7}, 1\right)$;

4) $\left\{\left(\dfrac{-19C_1+38C_2}{3}, \dfrac{7C_1-14C_2}{2}, C_1,\ C_2\right) \Big| \forall C_1 C_2 \in R\right\}$, $\left(-\dfrac{19}{3}, \dfrac{7}{2}, 1, 0\right)$, $\left(\dfrac{38}{3}, -7, 0, 1\right)$;

5) $\left\{\left(C_1, C_2, \dfrac{3C_1+6C_2}{4}, \dfrac{5C_1+10C_2}{4}\right) \Big| \forall C_1, C_2 \in R\right\}$, $\left(1, 0, \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{4}\right)$, $\left(0, 1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$;

6) $\left\{\left(\dfrac{8C_1+9C_2}{26}, -\dfrac{6C_1+23C_2}{26}, \dfrac{22C_1-11C_2}{26}, C_1, C_2\right) \Big| \forall C_1 C_2 \in R\right\}$, $\left(\dfrac{4}{13}, -\dfrac{3}{13}, \dfrac{11}{13} 1, 0\right)$, $\left(\dfrac{9}{26}, -\dfrac{23}{26}, -\dfrac{11}{26}, 0, 1\right)$.

7.3 1) $(-C-8; 2C+4; C)$; $C \in R$; 2) несовместна;

3) $(-3C; C; 5C)$; $C \in R$; 4) (–2;1;2).

7.4 1) Несовместна; 2) $\left\{\left(\dfrac{5-7C}{5}, \dfrac{8C}{5}, C\right) \Big| \ \forall C \in R\right\}$;

3) $x_1 = -1, x_2 = 1$; 4) $\left\{\left(C_1, C_2, \dfrac{3-5C_1+25C_2}{9}, \dfrac{10C_2-2C_1}{3}\right) \Big| \forall C_1, C_2 \in R\right\}$.

7.5 1) $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$; 2) $\{(0, 2C_1 + C_2, C_1, C_2) \mid \forall C_1, C_2 \in R\}$.

Занятие 8.
Векторы. Линейные операции над векторами.
Скалярное произведение векторов

Аудиторные задания

8.1 Определить, для каких векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняются следующие условия:

1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$; 2) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$; 3) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$;

4) $|\vec{a}+\vec{b}|=0$; 5) $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

8.2 Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$ и $\vec{b}=-2\vec{i}+\vec{j}$. Определить проекции на координатные оси следующих векторов:

1) $-\dfrac{1}{2}\vec{b}$; 2) $2\vec{a}$; 3) $2\vec{a}+3\vec{b}$.

8.3 Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}(2;-1;3)$ и $\vec{b}(-6;3;-9)$. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположные стороны.

8.4 При каких α и β векторы $\vec{a}=\alpha\vec{i}-5\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\alpha\vec{k}$ ортогональны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}+\beta\vec{k}$ коллинеарны?

8.5 Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a}(6;-2;-3)$.

8.6 Определить модули суммы и разности векторов $\vec{a}=3\vec{i}-5\vec{j}+8\vec{k}$ и $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$.

8.7 Даны вершины треугольника $A(4;-1;2)$, $B(0;1;-3)$, $C(6;5;3)$. Найдите: 1) координаты вектора $\overrightarrow{AD}$, если AD – медиана треугольника; 2) координаты точки O пересечения медиан этого треугольника.

8.8 Даны точки $A(4;4;0)$, $B(0;0;0)$, $C(0;3;4)$, $D(1;4;4)$. Докажите, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция.

8.9 Дан треугольник с вершинами в точках $A(2;3;-1)$, $B(4;1;-2)$, $C(1;0;2)$. Найти:

а) внутренний угол при вершине C; б) площадь треугольника ABC; в) длину высоты, опущенной из вершины C на AB.

8.10 Даны точки $A(-1;2;1), B(2;1;-3), C(3;0;5)$. Подобрать точку D так, чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом.

8.11 Найти $(\widehat{\vec{m}+2\vec{n}, \vec{m}-\vec{n}})$, если $\vec{m}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{n}=\vec{a}-3\vec{b}$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$; $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{3}$.

8.12 Даны вершины четырехугольника $A(1;-2;2), B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$ и $D(-5;-5;3)$. Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

8.13 Вычислить внутренние углы треугольника ABC, если $A(1;2;1)$, $B(3;-1;7)$, $C(7;4;-2)$. Убедиться, что этот треугольник равнобедренный.

8.14 Вычислить проекцию вектора $\vec{a}=5\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$ на ось вектора $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.

8.15 Даны векторы $\vec{a}=(1;-3;4)$, $\vec{b}=(3;-4;2)$, $\vec{c}=(-1;1;4)$. Найти $np_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

8.16 Какую работу производит сила $\vec{F}=(2;-1;-4)$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $A=(1;-2;3)$ в точку $B=(5;-6;1)$?

Домашние задания

8.17 Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(3;-5;8)$ и $\vec{b}(-1;1;-4)$, и косинус угла между его диагоналями.

8.18 Даны три вектора $\vec{a}(-2;1;1), \vec{b}(1;5;0)$ и $\vec{c}(4;4;-2)$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{c}}(3\vec{a}-2\vec{b})$.

8.19 При каком значении α векторы $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\alpha\vec{k}$ взаимно перпендикулярны?

8.20 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. Зная, что

$|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 1$, вычислить угол α между векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

8.21 Найти координаты вектора $\vec{b}$, коллинеарного вектору $\vec{a} = (2; 1; -1)$, при условии что $(\vec{a}, \vec{b}) = 3$.

8.22 Даны точки $A(-1;0;2), B(2;3;-4), C(2;3;4)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AD}$, если известно, что точка D делит отрезок BC в отношении $\lambda = 3$.

8.23 Найдите направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(3;4;-5), B(-1;8;-3)$.

8.24 Найдите вектор $\vec{b}$, ортогональный вектору $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и удовлетворяющий условиям $(\vec{b}, \vec{i}) = 3; (\vec{b}, \vec{j}) = 2$.

Ответы: 8.1 1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; 2) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, $|\vec{a}| \geq |\vec{b}|$; 3) $\vec{a} \perp \vec{b}$; 4) $\vec{a} = -\vec{b}$; 5) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; $\vec{a} \neq 0$; $\vec{b} \neq 0$.

8.2 1) $\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right)$; 2) $(6; -4; 12)$; 3) $(0; -1; 12)$.

8.3 Векторы противоположно направленные, вектор $\vec{b}$ длиннее вектора $\vec{a}$ в 3 раза.

8.4 1) $\alpha = -5$; 2) $\alpha = -10; \beta = -\frac{3}{5}$.

8.5 $\cos\alpha = \frac{6}{7}$; $\cos\beta = -\frac{2}{7}$; $\cos\beta = -\frac{3}{7}$.

8.6 $|\vec{a} + \vec{b}| = 6$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 14$.

8.7 1) $\overrightarrow{AD} = (-1;4;-2)$; 2) $O = \left(\frac{10}{3}; \frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

8.9 а) $\arccos\frac{18}{\sqrt{494}}$; б) $\frac{\sqrt{170}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{170}}{3}$. 8.10 $D(0; 1; 9)$. 8.11 -42.

8.13 $\cos\angle A=-\frac{12}{49}$; $\cos\angle B=\frac{\sqrt{122}}{14}$; $\cos\angle C=\frac{\sqrt{122}}{14}$. 8.14 $-\frac{2}{3}$.

8.15 5. 8.16 20. 8.17 $|\vec a+\vec b|=6$, $|\vec a-\vec b|=14$, $\cos\varphi=\frac{20}{21}$.

8.18 $np_{\vec c}(3\vec a-2\vec b)=-11$. 8.19 $\alpha=-6$. 8.20 $\alpha=\arccos\frac{2}{\sqrt7}$.

8.21 $\vec b=\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. 8.22 $\overrightarrow{AD}(3;3;0)$.

8.23 $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$; $\cos\beta=\frac{2}{3}$; $\cos\gamma=\frac{1}{3}$. 8.24 $\vec b(3;2;7)$.

Занятие 9.
Векторное и смешанное произведения векторов

Аудиторные задания

9.1 Векторы $\vec a$ и $\vec b$ ортогональны. Зная, что $|\vec a|=3, |\vec b|=4$, вычислить: 1) $|[\vec a,\vec b]|$; 2) $|[\vec a+\vec b,\vec a-\vec b]|$; 3) $|[(3\vec a+\vec b),(\vec a-\vec b)]|$.

9.2 Даны векторы $\vec a=(3;-1;-2), \vec b=(1;2;-1)$. Найти координаты векторных произведений:
1) $[\vec a,\vec b]$; 2) $[2\vec a+\vec b,\vec b]$; 3) $[2\vec a-\vec b, 2\vec a+\vec b]$.

9.3 Найдите какой-либо ненулевой вектор $\vec c$, перпендикулярный векторам $\vec a=(1;2;3)$ и $\vec b=(0;2;5)$.

9.4 Вычислите синус угла, образованного векторами $\vec a=6\vec j+\vec k$ и $\vec b=\vec i+3\vec j$.

9.5 Даны вершины треугольника $A(1;-1;2), B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Вычислить площадь треугольника и длину высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

9.6 Докажите справедливость тождества $[\vec a-\vec b,\vec a+\vec b]=2[\vec a,\vec b]$ и выясните его геометрический смысл.

9.7 Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j} + \vec{k}$. Найдите: 1) $\left[\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right]$; 2) $\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right]$.

9.8 Известно, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Докажите, что $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}\right]$.

9.9 Сила $\vec{F} = (3;4;2)$ приложена к точке $C = (-2;1;-2)$. Определите величину и направляющие косинусы момента силы относительно начала координат.

9.10 Выясните, компланарны ли векторы:

а) $\vec{a} = (0;1;1)$, $\vec{b} = (1;1;1)$, $\vec{c} = (1;0;0)$; **б)** $\vec{a} = (4;-2;0)$, $\vec{b} = (-3;6;3)$, $\vec{c} = (1;4;-5)$

9.11 Доказать, что четыре точки $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(0;\ 1;\ 5)$, $C(-1;\ 2;\ 1)$, $D(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

9.12 Даны вершины тетраэдра: $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Найти объем тетраэдра и длину высоты, опущенной из вершины D.

9.13 Выясните ориентацию тройки векторов:

1) $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$;

2) $\vec{a} = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

9.14 Найти длину высоты параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Домашние задания

9.15 Найти вектор $\vec{c}$, ортогональный векторам $\vec{a} = (2;-3;1)$ и $\vec{b} = (1;-2;3)$ и удовлетворяющий условию $(\vec{c}, \vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

9.16 Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (0;-1;1)$ и $\vec{b} = (1;1;1)$.

9.17 Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a} = (2;-2;1)$ и $\vec{b} = (2;3;6)$.

9.18 Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; -1; 3), \vec{c} = (1; 9; -11)$.

9.19 Лежат ли точки $A(5; 5; 4), B(3; 8; 4), C(3; 5; 10), D(5; 8; 2)$ в одной плоскости?

9.20 Выяснить, правой или левой будет тройка векторов $\vec{a} = (3; 4; 0)$, $\vec{b} = (0; -4; 1)$, $\vec{c}(0; 2; 5)$.

9.21 Вычислите объем тетраэдра $ABCD$ и длину высоты, опущенную из точки D на основание ABC, если известны координаты его вершин $A(0,0,1), B(-3,2,3), C(2,-1,3), D(1,3,8)$.

9.22 Даны три силы $\vec{F}_1 = (2;-1;3), \vec{F}_2 = (3;2;-1), \vec{F}_3 = (-4;1;-3)$, приложенные к точке $C = (-1;4;-2)$. Определите величину и направляющие косинусы момента равнодействующей силы относительно точки $A = (2;3;-1)$.

Ответы: 9.1 1) 12; 2) 24; 3) 48. 9.2 1) (5;1,7); 2) (10; 2; 14); 3) (20; 4; 28). 9.3 $\vec{c} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$. 9.4 $\sqrt{\dfrac{23}{185}}$. 9.5 $\dfrac{25}{2}; 5$. 9.6 Площадь параллелограмма, сторонами которого являются диагонали данного параллелограмма, равна удвоенной площади данного параллелограмма.

9.7 1) $-4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$; 2) $2\vec{j} + 2\vec{k}$.

9.9 15; $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}; \cos\beta = -\dfrac{2}{15}; \cos\gamma = -\dfrac{11}{15}$. 9.10 **а)** да; **б)** нет.

9.12 $\dfrac{154}{3}; 11$. 9.13 1) правая тройка; 2) левая тройка. 9.14 $\dfrac{16}{3\sqrt{14}}$.

9.15 $\vec{c} = (7,5,1)$. 9.16 $\sqrt{6}$. 9.17 $\sin\varphi = \dfrac{5\sqrt{17}}{21}$. 9.18 Компланарны.

9.19 Нет, не лежат. 9.20 Левая. 9.21 $\dfrac{29}{6}, \dfrac{29}{\sqrt{137}}$.

9.22 $\sqrt{66}; \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{66}}; \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{66}}; \cos\gamma = \frac{7}{\sqrt{66}}$.

Занятие 10.
Прямая на плоскости

Аудиторные задания

10.1 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;\,2)$, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, если $M_1(2;\,-7)$, $M_2(3;\,2)$.

10.2 Написать каноническое и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(3;-2)$ параллельно: 1) вектору $\vec{S}(1;\,5)$; 2) оси Oy.

10.3 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;\,8)$ и образующей с осью абсцисс угол, равный $\frac{3\pi}{4}$.

10.4 Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2;1), M_2(4;5)$, и найти точки ее пересечения с осями координат.

10.5 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4;3)$, являющуюся основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

10.6 При каком значении A прямая $Ax + 4y - 13 = 0$ образует с осью Ox угол $\alpha = 45°$?

10.7 Даны вершины треугольника $A(2;-3), B(4;5), C(-3;4)$. Найти: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение медианы, проведенной из вершины C; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины C.

10.8 Написать уравнение прямой, параллельной биссектрисе второго координатного угла и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 3.

10.9 Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-3)$: 1) параллельно прямой $y = 2x - 9$; 2) перпендикулярно прямой $x + 3y - 2 = 0$.

10.10 Каково взаимное расположение двух прямых, угловые коэффициенты которых равны – 2,5 и – 0,4?

10.11 Найдите расстояние от точки $M\left(-1;2\right)$ до прямой:

1) $\begin{cases} x=-1+t, \\ y=2+3t, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=5+2t, \\ y=-3-3t. \end{cases}$

10.12 Какие прямые данной пары пересекаются, параллельны или совпадают? Если прямые пересекаются, найдите координаты точки их пересечения:

1) $2x+y-1=0$ и $x-3y-2=0$; 2) $2x+6y=2$ и $x+3y-1=0$;

3) $-x-y=3$ и $3x+3y+1=0$; 4) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}$ и $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-2}{1}$.

10.13 Найти расстояние между прямыми $12x-5y-26=0$ и $12x-5y+13=0$.

10.14 Найти проекцию точки $A(2;6)$ на прямую $3x+4y-5=0$.

Домашние задания

10.15 Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-2y-7=0$ и $x+3y-6=0$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3.

10.16 Найти точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, если $A(-1;-3), B(3;5), C(5;2), D(3;-5)$.

10.17 Даны вершины треугольника ABC: $A(1;2)$, $B(2;-2)$, $C(6;1)$. Найти:

1) уравнение стороны AB;

2) уравнение высоты CH;

3) уравнение медианы AM;

4) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;

5) расстояние от точки C до прямой AB.

10.18 Найти уравнения перпендикуляров к прямой $3x+5y-15=0$, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат.

10.19 Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;3)$ и составляющей с осью Ox угол: а) 45°; б) 90°; в) 0°.

10.20 Найти точку B, симметричную точке $A(8;12)$ относительно прямой $x-2y+6=0$.

10.21 Найти один из углов между прямыми:

1) $2x+3y-5=0$ и $x-3y-7=0$; 2) $\begin{cases} x=4 \\ y=t+7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=\sqrt{3}t+2 \end{cases}$.

Ответы: 10.1 $x+9y-17=0$. 10.2 1) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{5}$, $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2+5t \end{cases}$; 2) $\dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y+2}{1}$, $x=3$. 10.3 $x+y-7=0$. 10.4 $2x-y-3=0$; $(0;-3)$, $(1{,}5;0)$. 10.5 $4x+3y-25=0$. 10.6 -4. 10.7 1) $4x-y-11=0$; 2) $x+2y-5=0$; 3) $x+4y-13=0$. 10.8 $y=-x+3$. 10.9 1) $2x-y-7=0$; 2) $3x-y-9=0$. 10.10 Пересекаются. 10.11 1) 0; 2) $\dfrac{8}{\sqrt{13}}$. 10.12 1) $\left(\dfrac{5}{7};-\dfrac{3}{7}\right)$; 2) совпадают; 3) параллельны; 4) $(9;-5)$. 10.13 3. 10.14 $(-1,\ 2)$. 10.15 $x=3$. 10.16 $O(3;1/3)$. 10.17 1) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-4}$; 2) $x-4y-2=0$; 3) $5x+6y-17=0$; 4) $4x+y-25=0$; 5) $\dfrac{19}{\sqrt{17}}$. 10.18 $5x-3y-25=0$, $5x-3y+9=0$. 10.19 1) $x-y+5=0$; 2) $x+2=0$; 3) $y-3=0$. 10.20 $B(12;\ 4)$. 10.21 1) $\arccos\dfrac{7}{\sqrt{130}}$; 2) $\dfrac{\pi}{3}=60^\circ$.

Занятие 11.
Плоскость

Аудиторные задания

11.1 Даны точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(4;-2;-1)$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

11.2 Составьте уравнение плоскости, проходящей через три точки:
1) $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$ и $M_3(2;0;2)$; 2) $M_1(1;3;4)$, $M_2(3;0;2)$ и $M_3(2;5;7)$.

11.3 Укажите особенности в расположении относительно системы координат $Oxyz$ плоскости, заданной уравнением: 1) $3y+2z-1=0$; 2) $2x+y-5z=0$; 3) $2x-y-1=0$; 4) $2x+y=0$; 5) $x+z=0$; 6) $3y-4z=0$; 7) $2x+3=0$; 8) $z+4=0$; 9) $y=0$.

11.4 Найдите длины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью $3x-2y+z-6=0$.

11.5 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;-1;0)$ параллельно векторам: 1) $\vec{a}=(0;2;3)$ и $\vec{b}=(-1;4;2)$; 2) $\bar{s}_1=(2;-1;3)$ и $\bar{s}_2=(3;0;1)$.

11.6 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;-3;-2)$ параллельно: 1) плоскости $3x-2y+4z-3=0$; 2) плоскости Oyz.

11.7 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;0;-2)$ перпендикулярно к плоскостям $x-2y+z+5=0$ и $2x-y+3z-1=0$.

11.8 Найдите угол между плоскостями:
1) $x+4y-z+1=0$ и $x+y-z-3=0$;
2) $x+2y-z+5=0$ и $2x-y+z-3=0$.

11.9 Дана пирамида с вершинами $A(2;2;-3)$, $B(3;1;1)$, $C(-1;0;5)$,

$D(4;-2;-3)$. Найдите длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

11.10 Установите, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают:

1) $x-y+3z+1=0$ и $2x-y+5z-2=0$;

2) $3x+2y-z+2=0$ и $6x+4y-2z+1=0$;

3) $2x+6y+2z-4=0$ и $3x+9y+3z-6=0$.

11.11 Найдите расстояние между плоскостями $2x-3y+6z-21=0$ и $4x-6y+12z+35=0$.

Домашние задания

11.12 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно к вектору $\vec{n}$, если: 1) $M(3;5;-1)$; $\vec{n}(13;2;1)$; 2) $M(2;0;0)$; $\vec{n}(0;7;0)$; 3) $M(0;3;-1)$; $\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_1(1;-1;0)$, $M_2(3;0;2)$.

11.13 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1;2;3)$, параллельно плоскости, проходящей через точки $M_1(1;0;-2)$, $M_2(3;4;5)$, $M_3(-1;2;0)$.

11.14 Определите, при каком значении параметра α плоскость $\alpha x+(2\alpha-1)y+z-5=0$:

1) параллельна плоскости $2x+3y+z-4=0$;

2) параллельна плоскости $y-z+7=0$;

3) перпендикулярна к плоскости $3x+y-z=0$;

4) перпендикулярна к плоскости Oxz.

11.15 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;2;3)$ и $M_2(2;1;1)$ перпендикулярно к плоскости $3x+4y+z-6=0$.

11.16 Найдите расстояние от точки $M(2;1;1)$ до плоскости $x+y-z+1=0$.

11.17 Найдите точку пересечения плоскостей $x+y+z-6=0$, $2x-y+z-3=0$, $x+2y-z-2=0$.

Ответы: 11.1 $x-y-3z+2=0$. 11.2 1) $3x+3y+z-8=0$; 2) $5x+8y-7z-1=0$. 11.3 1) параллельно оси Ox; 2) проходит через начало координат; 3) параллельна оси Oz; 4) проходит через ось Oz; 5) проходит через ось Oy; 6) проходит через ось Ox; 7) параллельна плоскости Oyz; 8) параллельна плоскости Oxy; 9) совпадает с плоскостью Oxz. 11.4 2; 3; 6. 11.5 1) $8x+3y-2z-5=0$; 2) $x-7y-3z-8=0$. 11.6 1) $3x-2y+4z-1=0$; 2) $x=1$. 11.7 $5x+y-3z-11=0$. 11.8 $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$. 11.9 1) пересекаются; 2) параллельны; 3) совпадают. 11.10 $h=5$. 11.11 5,5. 11.12 1) $13x+2y+z-48=0$; 2) $y=0$; 3) $2x+y+2z-1=0$. 11.13 $x+3y-2z+1=0$. 11.14 1) $\alpha=2$; 2) $\alpha=0$; 3) $\alpha=0{,}4$; 4) $\alpha=0{,}5$. 11.15 $x-y+z-2=0$. 11.16 $\sqrt{3}$. 11.17 $(1;2;3)$.

Занятие 12.
Прямая в пространстве.
Прямая и плоскость в пространстве

Аудиторные задания

12.1 Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;0;-3)$ параллельно вектору $\vec{a}=(2;-3;5)$.

12.2 Составьте канонические и параметрические уравнения прямой:

1) $\begin{cases} x+y+2z-3=0, \\ x-y+z-1=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y+z-1=0, \\ 3x+2y+z-2=0. \end{cases}$

12.3 Найдите угол между прямыми $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{-1}$ и $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-10}{6}$.

12.4 При каких значениях a прямые $\frac{x-1}{a}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-(a-2)^2}{a}$ и $\frac{x}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z}{1}$:
1) пересекаются; 2) скрещиваются; 3) параллельны; 4) совпадают?

12.5 Составьте уравнения сторон треугольника с вершинами в точках $A(-3;2;1)$; $B(1;-1;0)$; $C(2;3;-5)$.

12.6 Найдите уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;-5;4)$ параллельно прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+5}{4}$.

12.7 Выясните взаимное расположение прямой и плоскости: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{5}$ и $x-3y+2z-5=0$.

12.8 Напишите канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;-1;3)$ перпендикулярно плоскости $3x-y+2z-4=0$.

12.9 Найдите угол между прямой и плоскостью:

1) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-6}$ и $4x+4y-7z+1=0$;

2) $\begin{cases} x+4y-2z+7=0, \\ 3x+7y-2z=0 \end{cases}$ и $3x+y-z+1=0$.

12.10 Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;0;-3)$ параллельно прямым $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$ и $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$.

12.11 Найдите координаты точки пересечения прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{1}$ с плоскостью $3x-y+2z+5=0$.

12.12 Найдите проекцию точки $A(3;-1;4)$ на плоскость $2x+y-z+5=0$.

12.13 Найдите точку A, симметричную точке $P(6;-5;5)$ относительно плоскости $2x-y+z-4=0$.

12.14 Найдите проекцию точки $A(2;3;1)$ на прямую $\frac{x+7}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{3}$ и расстояние от этой точки до данной прямой.

Домашние задания

12.15 Составьте уравнения прямой, проходящей через точку $M(4;-3;2)$: 1) параллельно оси Ox; 2) параллельно оси Oz; 3) перпендикулярно к плоскости $x-3y+2z-5=0$; 4) перпендикулярно к плоскости Oxz.

12.16 Вычислите угол между прямой $\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 3y+z-1=0 \end{cases}$ и плоскостью $2x+3y-z+1=0$.

12.17 Найдите уравнения перпендикуляра, проведенного из точки $A(3;-5;1)$ на плоскость: 1) $2x-y+5z+3=0$; 2) $3x-2z+4=0$; 3) $y-1=0$.

12.18 Пересекаются ли прямые: 1) $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{3}$ и $\frac{x}{3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-3}{5}$; 2) $\begin{cases} x+3y-4z+7=0, \\ 3x+y+2z-5=0, \end{cases}$ и $\begin{cases} x-y+3z-6=0, \\ 2x+y-z+3=0 \end{cases}$?

12.19 Составьте параметрические уравнения медианы треугольника с вершинами $A(3;6;-7), B(-5;1;-4), C(0;2;3)$, проведенной из вершины C.

12.20 Найдите координаты точки Q, симметричной точке $P(-3;1;-9)$ относительно плоскости $4x-3y-z-7=0$.

12.21 Найти координаты точки Q, симметричной точке

$P(2;-5;7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5;4;6)$ и $M_2(-2;-17;-8)$.

12.22 Найдите угол между прямыми:

1) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+1}{0}$ и осью Ox; 2) $\begin{cases} x+y=0, \\ x-y=0, \end{cases}$ и $\begin{cases} y+z=0, \\ y-z+2=0. \end{cases}$

Ответы: 12.1 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+3}{5}$; $\begin{cases} x=2+2t, \\ y=-3t, \\ z=-3+5t. \end{cases}$

12.2 1) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-2}$; $\begin{cases} x=2+3t, \\ y=1+t, \\ z=-2t. \end{cases}$

2) $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$; $\begin{cases} x=-1-t, \\ y=2+t, \\ z=1+t. \end{cases}$. 12.3 $\dfrac{\pi}{2}$. 12.4 1) $a=3$;

2) $a\neq\pm1; a\neq 3$; 3) $a=-1$; 4) $a=1$. 12.5 $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-1}{-1}$;

$\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-6}$; $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{-5}$. 12.6 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+5}{-3}=\dfrac{z-4}{4}$.

12.7 Прямая параллельна плоскости. 12.8 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$.

12.9 1) $\arcsin\left(\dfrac{62}{63}\right)$; 2) $\arcsin\left(\dfrac{19}{11\sqrt{7}}\right)$. 12.10 $x+2y-5z-17=0$.

12.11 $(-3;-4;0)$. 12.12. $(1;-2;5)$.. 12.13 $A(-2;7;1)$.

12.14 $(-5;2;4)$; $\sqrt{59}$. 12.15 1) $\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-2}{0}$;

2) $\frac{x-4}{0}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-2}{1}$; 3) $\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-2}{2}$; 4) $\frac{x-4}{0}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{0}$.

12.16 $\sin\varphi=\frac{5}{7}$; $\varphi\approx 45^\circ 36'$. 12.17 1) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z-1}{5}$;

2) $\frac{x-3}{3}=\frac{y+5}{0}=\frac{z-1}{-2}$; 3) $\frac{x-3}{0}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-1}{0}$. 12.18 1) нет;

2) да. 12.19 $\begin{cases} x=2t, \\ y=-3t+2, \\ z=17t+3. \end{cases}$ 12.20 $Q(1;-2;-10)$. 12.21 $Q(4;1;-3)$.

12.22. 1) $\cos\varphi=\frac{3}{5}$; 2) $\cos\varphi=\frac{6}{\sqrt{61}}$.

Занятие 13.
Кривые второго порядка на плоскости

Аудиторные задания

13.1 Для следующих эллипсов и гипербол найдите: а) полуоси; б) расстояние между фокусами; в) эксцентриситет ε; г) координаты фокусов; д) координаты вершин; е) для гипербол составьте уравнения асимптот.

1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$;

3) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=-1$; 4) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$.

13.2 Составьте уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс и симметричны относительно начала координат, если:
1) его полуоси равны 1 и 7;

2) расстояние между фокусами равно 8 и малая полуось равна 3;
3) большая полуось равна 5 и точка $M_0(3;-2;4)$ лежит на эллипсе.

13.3 Составьте уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат и симметричны относительно начала координат, если:
1) его полуоси равны 2 и 5;
2) расстояние между фокусами равно 12 и большая полуось 13;
3) малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

13.4 Составьте уравнение гиперболы, если:
1) ее фокусы находятся в точках $F_1(7;0)$, $F_2(-7;0)$, а действительная полуось равна 5;
2) гипербола проходит через точку $M_0(6;-2{,}5\sqrt{3})$, а ее вершины находятся в точках $A_1(-4;0)$, $A_2(4;0)$.

13.5 Составьте уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси ординат и симметричны относительно начала координат, если:
1) ее действительная и мнимая полуоси равны 11 и 4 соответственно;
2) расстояние между фокусами равно 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$;
3) уравнение одной из асимптот $y = \frac{3}{4}x$, а действительная полуось равна 6.

13.6 Составьте каноническое уравнение параболы, если:
1) ее вершина совпадает с началом координат, а фокус находится в точке $F(2;0)$;
2) ветви направлены вверх, а параметр равен 4;
3) уравнение директрисы $y = 3$, а фокус находится в точке $F(0;-3)$;
4) ее вершина совпадает с началом координат, парабола проходит через точку $M_0(9;-6)$ и ось абсцисс является осью параболы.

13.7 Определите вид и расположение линии 2-го порядка, постройте ее:

1) $9x^2+4y^2-18x+16y-11=0$;

2) $9x^2-16y^2+54x+64y-127=0$;

3) $x^2-10x-8y+49=0$;

4) $y^2-2x-4y-2=0$;

5) $4x^2-9y^2-16x-18y+7=0$;

6) $x^2+4y^2+4x-32y+68=0$.

Домашние задания

13.8 Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что:

1) расстояние между фокусами равно 8, малая полуось равна 3;

2) малая полуось равна 6, эксцентриситет равен 4/5.

13.9 Найти координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $4x^2+y^2=4$.

13.10 Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};-1\right)$ и $M_2\left(-1;\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$, и найти его эксцентриситет.

13.11 Найти уравнение гиперболы, если ее асимптоты заданы уравнениями $x\pm 2y=0$, а расстояние между вершинами, лежащими на оси Ox, равно 4.

13.12 Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что:

1) расстояние между фокусами равно 30, а расстояние между вершинами равно 24;

2) действительная полуось равна 4 и гипербола проходит через точку $M(2;4\sqrt{2})$.

13.13 Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $6x^2+5y^2=30$.

13.14 Составить каноническое уравнение параболы, если известно, что:
1) парабола имеет фокус $F(0;2)$ и вершину в точке $O(0;0)$;
2) парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через точку $M(4;-2)$.

13.15 Найти длину общей хорды параболы $y=2x^2$ и окружности $x^2+y^2=5$.

13.16 Написать уравнение параболы, проходящей через точки $(0;\ 0)$ и $(-2;\ 4)$, если парабола симметрична: 1) относительна оси Ox; 2) относительно оси Oy.

13.17 Составить канонические уравнения парабол, фокусы которых совпадают с фокусами гиперболы $x^2-y^2=8$.

13.18 Выяснить, какая фигура соответствует каждому из данных уравнений, и (в случае непустого множества) изобразить ее в системе координат *Oxy*:

1) $x^2+y^2-4x+6y+4=0$;

2) $3x^2-4y^2-12x-8y+20=0$;

3) $y^2-3x-4y+10=0$;

4) $2x^2+3y^2+6x+6y+25=0$.

5) $4x^2+25y^2+4x-10y-8=0$;

6) $x^2-y^2+2x-2y=0$;

7) $x^2-6x+2y+11=0$.

Ответы: 13.1 1) **а)** $a=4; b=5$; **б)** $2c=6$; **в)** $\varepsilon=\frac{3}{5}$; **г)** $F_1(0;-3), F_2(0;3)$; **д)** $(4;0), (-4;0), (0;5), (0;-5)$;

2) **а)** $a=5; b=4$; **б)** $2c=6$; **в)** $\varepsilon=\frac{3}{5}$; **г)** $F_1(3;0), F_2(-3;0)$;

д) $(5;0),(-5;0),(0;4),(0;-4)$;

3) **а)** $a=12; b=5$; **б)** $2c=26$; **в)** $\varepsilon=\dfrac{13}{5}$; **г)** $F_1(0;-13), F_2(0;13)$;

д) $A_1(0;-5), A_2(0;5)$; **е)** $y=\pm\dfrac{5}{12}x$; 4) **а)** $a=12; b=5$; **б)** $2c=26$;

в) $\varepsilon=\dfrac{13}{12}$; **г)** $F_1(13;0), F_2(-13;0)$; **д)** $A_1(-12;0), A_2(12;0)$;

е) $y=\pm\dfrac{5}{12}x$.

13.2 1) $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{1}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$; 3) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

13.3 1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{133}+\dfrac{y^2}{169}=1$; 3) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{169}=1$.

13.4 1) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{24}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{15}=1$.

13.5 1) $\dfrac{y^2}{121}-\dfrac{x^2}{16}=1$; 2) $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1$; 3) $\dfrac{y^2}{36}-\dfrac{x^2}{64}=1$.

13.6 1) $y^2=8x$; 2) $x^2=8y$; 3) $x^2=-12y$; 4) $y^2=4x$.

13.7 Во всех задачах новые координатные оси Ox, Oy, Oz сонаправлены старым, начало координат новой системы координат находится в точке O'.

1) эллипс $\dfrac{X^2}{4}+\dfrac{Y^2}{9}=1$, $O'(1;-2)$;

2) гипербола $\dfrac{X^2}{16}-\dfrac{Y^2}{9}=1$, $O'(-3;2)$;

3) парабола $X^2 = 8Y$, $O'(5;3)$;

4) парабола $Y^2 = 2X$, $O'(-3;2)$;

5) пара пересекающихся прямых $2x - 3y - 7 = 0$ и $2x + 3y - 1 = 0$;

6) точка $O'(-2;4)$.

13.8 1) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$;

2) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{100} = 1$; $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$.

13.9 $F_1\left(0, -\sqrt{3}\right)$, $F_2\left(0, \sqrt{3}\right)$, $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

13.10 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$; $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. 13.11 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{1} = 1$.

13.12. 1) $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{81} = 1$; $\dfrac{y^2}{144} - \dfrac{x^2}{81} = 1$; 2) $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{4} = 1$.

13.13 $\dfrac{y^2}{1} - \dfrac{x^2}{5} = 1$. 13.14 1) $x^2 = 8y$; 2) $y^2 = x$. 13.15 2.

13.16 1) $y^2 = -8x$; 2) $y = x^2$. 13.17 $y^2 = \pm 16x$.

13.18 1) окружность $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 12$;

2) гипербола $\dfrac{(y+1)^2}{3} - \dfrac{(x-2)^2}{4} = 1$;

3) парабола $(y-2)^2 = 3(x-2)$; 4) пустое множество;

5) эллипс $\dfrac{(x+0{,}5)^2}{2{,}5} + \dfrac{(y-0{,}2)^2}{0{,}4} = 1$;

6) пара пересекающихся прямых $x + y + 2 = 0$; $x - y = 0$;

7) парабола $(x-3)^2=-2(y+1)$.

Занятие 14.
Поверхности второго порядка

Аудиторные задания

14.1 Определите вид поверхностей и их расположение относительно координатных осей:

1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1$; 2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{100}=-1$;

3) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{100}=1$; 4) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{49}=-1$; 5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=2z$;

6) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{25}=0$; 7) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{100}=-1$;

8) $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{25}=-2x$; 9) $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{100}=1$; 10) $\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{25}=1$;

11) $z^2=18x$.

14.2 Привести к каноническому виду уравнение 2-го порядка, используя преобразование параллельного переноса, определить вид поверхности и ее расположение относительно новой системы координат:

1) $9x^2+4y^2+4z^2-18x+16z-11=0$;

2) $9x^2+4y^2-4z^2-18x-16z-43=0$;

3) $9x^2-4y^2+4z^2+18x+16z+25=0$;

4) $9y^2+4z^2=36x+72$;

5) $x^2+y^2+6x-4y+12=0$;

6) $y^2=4x+16$;

7) $x^2+y^2+z^2+6x-4y+2z-10=0$.

14.3 Постройте тело, ограниченное поверхностями:

1) $x^2+y^2=4;\ z=0;\ z=1;\ y=x;\ y=x\sqrt{3}$, расположенное в первом октанте;

2) $x^2+y^2=2x;\ z=0;\ z=x^2+y^2$;

3) $z=x^2+y^2+1;\ x=0;\ y=0;\ z=0;\ x=4;\ y=4$;

4) $z=x^2-y^2;\ z=0;\ x=3$; 5) $x^2+y^2+z^2=9;\ x^2+y^2=3a$.

Домашние задания

14.4 Определить вид поверхности и построить ее:

1) $x^2+y^2+z^2-3x+5y-4z=0$; 2) $x=y^2+2z^2$;

3) $2x^2-y^2+z^2=4$; 4) $2x^2-y^2+3z^2=0$; 5) $z^2=4x$;

6) $x^2+z^2=5$; 7) $x^2+y^2+z^2=2z$; 8) $x^2+3z^2-8x+18z+34=0$;

9) $5x^2+y^2+10x-6y-10z+14=0$;

Ответы: 14.1 1) эллипсоид; 2) двуполостный гиперболоид, вытянутый вдоль оси Oz; 3) двуполостный гиперболоид, вытянутый вдоль оси Ox; 4) двуполостный гиперболоид, вытянутый вдоль оси Oy; 5) эллиптический параболоид, вытянутый в положительном направлении оси Oz; 6) конус, вытянутый вдоль оси Ox; 7) однополостный гиперболоид, вытянутый вдоль оси Ox; 8) эллиптический параболоид, вытянутый в отрицательном направлении оси Ox; 9) эллиптический цилиндр, образующие параллельны оси Oy; 10) гиперболический цилиндр, образующие параллельны оси Oy; 11) параболический цилиндр, образующие параллельны оси Oy.

14.2 Во всех задачах новые координатные оси OX, OY, OZ сонаправлены старым, начало координат новой системы координат находится в точке O'.

1) эллипсоид $\dfrac{X^2}{4}+\dfrac{Y^2}{9}+\dfrac{Z^2}{9}=1;\ O'(1;0;-2)$;

2) однополостный гиперболоид $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}-\frac{Z^2}{9}=1$, вытянутый вдоль оси OZ, $O'(1;0;-2)$;

3) конус второго порядка $9X^2-4Y^2+4Z^2=0$, вытянутый вдоль оси OY, $O'(-1;0;-2)$;

4) эллиптический параболоид $\frac{Y^2}{4}+\frac{Z^2}{9}=X$, вытянутый в положительном направлении оси OX, $O'(-2;0;0)$;

5) эллиптический цилиндр (круговой) $X^2+Y^2=1$, образующие параллельны оси OZ, $O'(-3;2;0)$;

6) параболический цилиндр $Y^2=4X$, образующие параллельны оси OZ, $O'(-4;0;0)$;

7) сфера $X^2+Y^2+Z^2=4$, $O'(-3;2;-1)$.

14.4 1) сфера $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2+(z-2)^2=\frac{25}{2}$; 2) эллиптический параболоид; 3) однополостный гиперболоид; 4) коническая поверхность; 5) параболический цилиндр; 6) круговой цилиндр; 7) сфера $x^2+y^2+(z-1)^2=1$; 8) эллиптический цилиндр $\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(z+3)^2}{3}=1$; 9) эллиптический параболоид $z=\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(y-3)^2}{10}$.

Занятие 15.
Функция. Предел последовательности и предел функции

Аудиторные задания

15.1 Найти области определения функций:

1) $y=\sqrt{x^2-6x+5}$; 2) $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$;

3) $y=\sqrt{25-x^2}+\lg\sin x$; 4) $y=2^{x^2-2}$.

15.2 Проверить функции на четность или нечетность:

1) $f(x)=x^4+5x^2$; 2) $f(x)=x^2+x$;

3) $f(x)=\dfrac{x}{2^x-1}$; 4) $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$.

15.3 Построить графики функций:

1) $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$; 2) $y=|3x+4-x^2|$;

3) $y=-2\sin(2x+2)$; 4) $y=x\sin x$.

15.4 Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2+2x-3\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to -3}(x+3)^2(x-1)$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-3x-x^2}{2x^2+x-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+1}{2-x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x+1}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x}{5-3x^2+4x^4}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^2+x^3}{2x+1}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{5n+7}-\dfrac{1+2n^3}{2+5n^3}\right)$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n+2}}{n+1}$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$; 13) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{4-x^2}$;

14) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-27}{81-x^4}$; 15) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$; 16) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-6x+5}$;

17) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+5x-9}{2x^2+3x-5}$; 18) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$; 19) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{3x+4}-4}{\sqrt{x}-2}$;

20) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{1-\sqrt{3-x}}$; 21) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$;

22) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$; 23) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n-1}-\sqrt{n^2-7n+3}\right)$;

24) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{3/2}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$; 25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{16+x^2}-4}$;

26) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$; 27) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$; 28) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\sin n}{n+1}$;

29) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-7x+6}$; 30) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$; 31) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+5^n}{3^n-5^n}$;

32) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

Домашние задания

15.5 Найти пределы указанных последовательностей функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+4x^2+3x^3}{x^3-7x-10}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+10x+20}{x^3-10x^2-1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n-3}{5^{n+1}+2}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$; 6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-10x-8}{16-x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-4x+3}$; 8) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{x-1}-2}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-1}{x}$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+1}\right)\right)$;

12) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{3}{8-x^2}\right)$; 13) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{7-3x}-4}$;

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\dfrac{x^3}{x^2+3x-2}\right)$; 15) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$.

Ответы: 15.1 1) $(-\infty;1]\cup[5;+\infty)$; 2) $\left[-\dfrac{1}{3};1\right]$; 3) $[-5;-\pi)\cup(0;\pi)$; 4) $(-\infty;+\infty)$. 15.2 1) четная; 2) ни четная, ни нечетная; 3) ни четная, ни нечетная; 4) нечетная. 15.4 1) 1; 2) 0; 3) $-\dfrac{1}{3}$; 4) ∞; 5) 0; 6) $\dfrac{5}{3}$; 7) 0; 8) ∞; 9) 0; 10) 3; 11) 0; 12) 0; 13) – 3; 14) $-\dfrac{1}{6}$; 15) $-\dfrac{2}{5}$; 16) $\dfrac{5}{2}$; 17) $\dfrac{13}{7}$; 18) $\dfrac{1}{6}$; 19) $\dfrac{3}{2}$; 20) $\dfrac{1}{3}$; 21) $-\dfrac{1}{6}$; 22) 0; 23) $\dfrac{5}{2}$; 24) 1; 25) 3; 26) $\dfrac{2}{3}$; 27) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 28) 0; 29) $\dfrac{3}{5}$; 30) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 31) – 1; 32) – 1.

15.5 1) 3; 2) 0; 3) 0; 4) $\dfrac{1}{5}$; 5) $\dfrac{1}{2}$; 6) $-\dfrac{7}{4}$; 7) – 1; 8) 40; 9) $\dfrac{3}{2}$; 10) $-\dfrac{1}{3}$; 11) 2; 12) ∞; 13) $\dfrac{40}{3}$; 14) 3; 15) $-\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

Занятие 16.
Первый и второй замечательные пределы

Аудиторные задания

16.1 Вычислить, воспользовавшись первым замечательным пределом:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{3\arcsin 2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 5x}{2x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg}^2 5x\cdot\cos 2x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+4}-2}$; 12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-7x+6}{\sin(2(x-1))}$; 13) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\operatorname{tg}(x+1)}{x^2-4x-5}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+\sin 3x}-\sqrt{2-\sin 3x}}{5\operatorname{tg} 2x}$; 15) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$;

16) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\pi-4x}$; 17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos^3 2x}{4x\operatorname{tg} 3x}$;

18) $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt{x}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$; 19) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\operatorname{ctg} x\right)$;

20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\operatorname{arctg} 5x}{\cos x-\cos 4x}$; 21) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$.

16.2 Используя второй замечательный предел, найти:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x-1}\right)^{2x-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x+5}\right)^{x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-7x)^{3/x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7x+3}{9x+3}\right)^{1/x}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{6x-3}\right)^{x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}((2x+1)(\ln(3x+1)-\ln(3x-2)))$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6-x}{7-x}\right)^{\frac{1-x^3}{x^2}}$; 10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$;

11) $\lim\limits_{x\to\infty}((x-4)(\ln(2-3x)-\ln(5-3x)))$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec} x}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3\operatorname{tg}^2 x\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{(1-x)/x}$; 16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{x}$; 17) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{2x/(x-1)}$.

16.3 Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{1/2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x+x^2)^{1/\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{3^x-1}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{2x}-1}{x}$.

Домашние задания

16.4 Найти пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{2\operatorname{arctg} 3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{3\sin x\operatorname{tg} 3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{1-\sqrt{1-x^2}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 4x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2x}-\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 2x}}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x^2\sin x}$;

6) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-7x+3}{\operatorname{tg}(2x-1)}$; 7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-3x}{1-2x}\right)^{1/x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x(\ln(2+x)-\ln x)\right)$;

11) $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{5x^2/(1-x)}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/\sin^2 x}$; 13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-1}{x}$;

14) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{\sin x}$.

Ответы: 16.1 1) 5; 2) 1/3; 3) 7/2; 4) 2/3; 5) 5/2; 6) 1/2; 7) 6; 8) 9/25; 9) 4; 10) 1/2; 11) 12; 12) – 5/2; 13) – 1/6; 14) $\dfrac{3}{10\sqrt{2}}$; 15) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 16) $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; 17) 1/3; 18) 0; 19) 0; 20) 2; 21) 1.

16.2 1) e^2; 2) e^2; 3) e^{-11}; 4) e^{-2}; 5) e^{-21}; 6) $e^{-2/3}$; 7) 0; 8) 2; 9) e^{-1}; 10) e^{-1}; 11) 1; 12) e; 13) e^2; 14) e^3; 15) e^{-4}; 16) 7; 17) e^4.

16.3 1) $e^{-1/2}$; 2) $\sqrt{e}$; 3) e; 4) 2/3; 5) 2; 6) $1/\ln 3$; 7) $2\ln a$.

16.4 1) 4/3; 2) 8/9; 3) – 8; 4) 1; 5) ∞; 6) $-\dfrac{5}{2}$; 7) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 8) e^{-6}; 9) e^{-1}; 10) 2; 11) e^{15}; 12) e^{-2}; 13) $3\ln 2$; 14) e; 15) 7.

Занятие 17.
Сравнение бесконечно малых функций. Непрерывность функций. Точки разрыва

Аудиторные задания

17.1 Вычислить пределы, используя теорему об отношении двух бесконечно малых функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{2\,\mathrm{tg}\,3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 10x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 3(x-2)}{x^2-3x+2}$; 6) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\mathrm{tg}(x+5)}{x^2-25}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4 4x}{\mathrm{arctg}^3\, 2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2\left(1+\sqrt{7x}\right)}{1-e^{x/3}}$.

17.2 Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва:

1) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$; 2) $f(x)=\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$; 3) $f(x)=3^{\frac{x}{4-x^2}}$;

4) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$; 5) $f(x)=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x-3}$; 6) $f(x)=\dfrac{|x+1|}{x+1}$;

7) $f(x)=\begin{cases}2^x, & -\infty<x\le 1,\\ x^2+1, & x>1.\end{cases}$; 8) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -\infty<x\le 1,\\ x^2-3, & 1<x<2,\\ x-1, & x\ge 2.\end{cases}$

9) $f(x)=\dfrac{5^{\frac{1}{x-2}}-1}{5^{\frac{1}{x-2}}+1}$; 10) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$.

Домашние задания

17.3 Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 7x}-1}{x^2+3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{\arcsin(1-2x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\operatorname{tg}(x^2-3x+2)}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin 3x}-1}{\ln(1+\operatorname{tg}2x)}$;

6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\arcsin^3(x-3)}{\left(e^{x-3}-1\right)^2\operatorname{arctg}x}$.

17.4 Исследовать на непрерывность функции; установить характер точек разрыва:

1) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x}{x^2+2x}$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$; 3) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}, & -2\le x\le 2,\\ x-2, & 2<x\le 4,\\ -2\sqrt{x}, & x>4.\end{cases}$

Построить график функции;

4) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$; 5) $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & -\infty\le x\le 0,\\ \cos x, & 0<x\le\pi,\\ x-\pi-1, & x>\pi.\end{cases}$ Построить график функции; 6) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{2x^2-x^3}$.

Ответы: 17.1 1) 3; 2) $-\dfrac{1}{6}$; 3) – 1; 4) $\dfrac{1}{2}$; 5) 3; 6) $-\dfrac{1}{10}$; 7) 0; 8) – 21.

17.2 1) $x=1$ – точка разрыва 2-го рода; 2) $x=2$ – точка устранимого разрыва, $f(2)=1$; 3) $x=\pm 2$ – точки разрыва 2-го рода; 4) $x=1$ – точка устранимого разрыва, $f(1)=\dfrac{1}{2}$; $x=-1$ – точка разрыва 2-го рода; 5) $x=3$ – точка разрыва 1-го рода; 6) $x=-1$ – точка разрыва 1-го рода; 7) функция непрерывна при $x\in R$; 8) $x=1$ – точка разрыва 1-го рода; 9) $x=2$ – точка разрыва 1-го рода; 10) $x=-1$ – точка устранимого разрыва; $f(-1)=3$.

17.3 1) 7/2; 2) 7/3; 3) – 2; 4) 4; 5) 3/4; 6) 0.

17.4 1) $x=0$ – точка устранимого разрыва, $f(0)=\frac{1}{2}$; $x=-2$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k=0;\pm1;\pm2$ и т.д.) – точки разрыва 2-го рода; 2) $x=0$ – точка разрыва 1-го рода; 3) $x=4$ – точка разрыва 1-го рода; 4) $x=0$ – точка устранимого разрыва, $f(0)=2$; 5) всюду непрерывна; 6) $x=0$ – точка устранимого разрыва, $f(0)=\frac{1}{4}$; $x=2$ – точка разрыва 2-го рода.

Занятие 18.
Производная функции, ее геометрический и физический смысл

Аудиторные задания

18.1 Исходя из определения, найдите производные функций:

1) $y=7x^2$; 2) $y=\sqrt{x}$; 3) $y=5(\mathrm{tg}\,x-x)$.

18.2 Найдите производные функций:

1) $y=5x^4-8\sqrt[7]{x^3}+\frac{7}{x^5}+4$; 2) $y=x^3\sin 2x$; 3) $y=\frac{x^4+2x+3}{x^5-1}$;

4) $y=\left(x^5+3x-7\right)^4$; 5) $y=\sqrt[3]{\left(\frac{x^3+1}{x^7-2}\right)^2}$;

6) $y=\sqrt{x}\cdot\ln\left(2x^3+3x^2-2\right)$; 7) $y=\frac{\sin 4x-\cos\frac{x}{2}}{\sin 3x+\cos x}$;

8) $y=e^{-x^2}\cdot\log_3\frac{1}{x}$; 9) $y=\sqrt{x^3}\cdot\arccos\frac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$;

10) $y=-\mathrm{ctg}^3\frac{x}{4}-2\ln\sin\frac{x}{2}$; 11) $y=\mathrm{arctg}\left(\sqrt{x}+2\right)$;

12) $y=\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{1}{x}$; 13) $y=\cos^5\left(\sin\dfrac{2x}{3}\right)+\sin\left(\cos\dfrac{x}{4}\right)$;

14) $y=2^{-\sqrt{x}/\ln x}$; 15) $y=\arcsin\dfrac{2}{x}+\arccos\dfrac{1}{2}$; 16) $y=\log_a \ln x$.

18.3 Решите уравнение $f'(x)-\dfrac{2}{x}f(x)=0$, если $f(x)=x^3\ln x$.

18.4 Решите неравенство $f'(x)+\varphi'(x)\geq 0$, если $f(x)=2x^3+12x^2$, $\varphi(x)=9x^2+72x$.

18.5 Вычислите значения производных заданных функций при указанных значениях независимой переменной:

1) $f(x)=\sqrt{x^2+3}+\dfrac{2x}{x+1}+6;\ f'(1)=?$

2) $f(x)=\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}+\sin\dfrac{\pi}{6};\ f'(3)=?$

3) $f(x)=\sin 8x\cos 4x;\ f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=?$

4) $f(x)=\dfrac{2\cos x}{1+\sin x};\ f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=?$

5) $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^3}};\ f'(1)=?$

6) $f(x)=4e^{-x^2}\cdot\arcsin\dfrac{x}{2};\ f'(0)=?$

7) $f(x)=3^{-\sqrt{2x}};\ f'(2)=?$

8) $f(x)=\ln\dfrac{2x}{1+4x};\ f'(2)=?$

9) $f(x)=5\left(x^2-x\right)\cdot\cos^2 x;\ f'(0)=?$

10) $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1+\sqrt[3]{x}}$; $f'(1)=?$

11) $f(x)=\frac{2x-4}{\sin^2 x}$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$

18.6 Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y=x^2+4$ в точке $M(1;5)$.

18.7 Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y=\operatorname{tg}x$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{4\pi}{3}$.

18.8 Тело массой 7 движется прямолинейно по закону $y=t^2+t+4$. Определите кинетическую энергию тела в момент времени $t=3$.

18.9 Радиус шара изменяется со скоростью 6 см/с. С какой скоростью изменяются объем и поверхность шара?

18.10 Найдите силу тока в проводнике, если заряд, проходящий через поперечное сечение проводника, изменяется по закону $q=2t+e^{-3t}$ (кл).

18.11 Материальная точка движется по окружности так, что угловое перемещение φ изменяется по закону $\varphi=6{,}5+7t+3{,}5t^2+2t^3$ (рад). Найдите угловую скорость движения материальной точки к моменту времени $t=2c$ от начала движения.

Домашние задания

18.12 Найдите производные функций:

1) $y=5e^{2x}\cdot\sqrt{x}$; 2) $y=\frac{\cos 3x}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$; 3) $y=x^2\arcsin 8x$;

4) $y=\frac{x^3\cdot\operatorname{ctg}2x}{\sqrt{x+1}}$; 5) $y=3^{\arcsin x/2}$; 6) $y=5\log_2\sin\frac{x}{7}$;

7) $y=\dfrac{3}{2x-7}-\dfrac{4}{x}$; 8) $y=\ln^3\left(8x-4^{-x^2}\right)$; 9) $y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

10) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$; 11) $y=\dfrac{\sqrt{x-x^2}}{e^{-x^3}}$; 12) $y=\dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[5]{x^3}}{b}$.

18.13 Составьте уравнения касательной и нормали к графику функции $y=e^{1-x^2}$ в точке с абсциссой $x_0=-1$.

18.14 Вычислите значения производных заданных функций при указанных значениях независимой переменной:

1) $f(x)=\sqrt{x^2+5}+\dfrac{14x}{2x-1}$; $f'(2)=?$

2) $f(x)=\dfrac{2x}{3}-\dfrac{3}{5x}+\sin 9x$; $f'(\pi)=?$

3) $f(x)=\dfrac{1}{6}\sin 6x\cdot\cos 3x$; $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=?$

4) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{x}}x$; $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=?$

5) $f(x)=\ln\dfrac{2x^2}{1+4\sqrt{x}}$; $f'(2)=?$

6) $f(x)=\arccos\sqrt{1-2x}+\sqrt{2x-4x^2}$; $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=?$

7) $f(x)=\operatorname{arctg}x\dfrac{1+x}{1-x}$; $f'(0)=?$

Ответы: 18.3 $x=\dfrac{1}{e}$. 18.4 $x\in(-\infty;-4]\cup[-3;+\infty)$.

18.5 1) $f'(1)=7$; 2) $f'(3)=\dfrac{2}{3}$; 3) $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=5$ 4) $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$;

5) $f'(1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3\pi}{8}$; 6) $f'(0)=2$; 7) $f'(2)=-\dfrac{\ln 3}{18}$; 8) $f'(2)=\dfrac{1}{18}$;

9) $f'(0)=-5$; 10) $f'(1)=\dfrac{7}{12}$; 11) $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$.

18.6 $y=2x+3$; $x+2y-11=0$. 18.7 $y=3x-\pi$. 18.8 $K=\dfrac{49}{2}$.

18.9 $v'=24\pi R^2$, $s'=48\pi R$. 18.10 $I=2-3e^{-3t}$. 18.11 $\omega=45$ рад/с.

18.13 $2x-y+3=0$; $x+2y-1=0$. 18.14 1) $f'(2)=-\dfrac{8}{9}$;

2) $f'(\pi)=\dfrac{9-125\pi^2}{15\pi^2}$; 3) $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-6$; 4) $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{4\pi-1}{\sqrt{\pi^3}}$;

5) $f'(2)=\dfrac{3\sqrt{2}+1}{4\sqrt{2}+1}$; 6) $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$; 7) $f'(0)=-1$.

Занятие 19.
Производная функции. Логарифмическая производная

Аудиторные задания

19.1 Найдите производные функций:

1) $y=\sqrt{x+2\sqrt{x+3\sqrt{x}}}+\operatorname{sh}x$; 2) $y=\log_x e$;

3) $y=\dfrac{1}{\cos^n(m+1)x}$; 4) $y=\log_2 \ln^n mx$; 5) $y=e^{-2x}\operatorname{ch}5x$;

6) $y=\operatorname{arcctg}(\operatorname{th}x)$; 7) $y=\dfrac{\operatorname{ctg}4x}{\operatorname{cth}3x}$; 8) $y=5\operatorname{sh}\dfrac{1}{x}$.

19.2 Используя предварительно логарифмирование, найти производные функций:

1) $y=\dfrac{(x-3)^2(2x-1)^5}{(4x+1)^3}$; 2) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(4x-7)^2\left(12x-x^2\right)^8}{(2-3x)^5}}$;

3) $y=(2x)^{\sin x/3}$; 4) $y=(\arcsin 3x)^{\sqrt{x}}$; 5) $y=(\operatorname{tg}8x)^{x^9}$;

6) $y=x^{x^3}$; 7) $y=\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{\arcsin 5x}$; 8) $y=(\log_2 x)^{5/x}$;

9) $y=\operatorname{arctg}2x\cdot(1+4x)^{\sqrt{x}}$; 10) $y=(\operatorname{th}6x)^{e^{-x^2}}$.

Домашние задания

19.3 Найдите производные функций:

1) $y=a^{\sqrt{\cos x}}\cdot\sqrt[a]{\cos x}$; 2) $y=\arcsin\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}\right)$; 3) $y=x^{-\operatorname{tg}6x}$;

4) $y=(\operatorname{acctg}2x)^{\ln 3x}$; 5) $y=x^{x^x}$; 6) $y=\dfrac{(3x+1)^4\sqrt[5]{2-x}}{\sqrt[5]{(3-x)^4}\cdot x^{4/3}}$;

7) $y=x^3\cdot\sqrt{\dfrac{1-x}{\sqrt[5]{3x-8}}}$; 8) $y=x^{4^x}$; 9) $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{1/\sqrt{x}}$;

10) $y=(\log_x 7)^x$.

19.4 Вычислите значения производных заданных функций при указанных значениях независимой переменной:

1) $f(x)=(3x)^{x^4}$; $f'(1)=?$ 2) $f(x)=\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\cos x}$; $f'(1)=?$

3) $f(x)=(\cos x)^{1/x}$; $f'(2\pi)=?$ 4) $f(x)=x^{\ln 3x}$; $f'(1)=?$

5) $f(x)=(\sin x)^{\operatorname{tg}2x}$; $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=?$ 6) $f(x)=(\arcsin x)^{2x}$; $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=?$

7) $f(x)=(x+1)^{2/x}$; $f'(2)=?$ 8) $y=\dfrac{(x-2)^2\sqrt{x+1}}{(x-5)^3}$; $f'(1)=?$

9) $y=\dfrac{(3x-2)^4\sqrt{5x+1}}{(7x-5)^3}$; $f'(0)=?$

Ответы: 19.4 1) $f'(1)=12\ln 3+3$; 2) $f'(1)=-2\cos 1$;
3) $f'(2\pi)=0$; 4) $f'(1)=\ln 3$; 5) $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$;
6) $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi\ln\pi}{3}-\dfrac{\pi\ln 6}{3}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; 7) $f'(2)=1-\dfrac{3}{2}\ln 3$;
8) $f'(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{64}$; 9) $f'(0)=-\dfrac{56}{625}$.

Занятие 20.
Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно. Дифференциал функции

Аудиторные задания

20.1 Найти производные функций, заданных параметрически:

1) $x=t^2+2,\ y=\frac{1}{3}t^3-1$; 2) $x=\dfrac{1}{t+1}, y=\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2$;

3) $x=a(\varphi-\sin\varphi), y=a(1-\cos\varphi)$; 4) $x=\ln t, y=t^2-1$;

5) $x=\arccos\sqrt{t}, y=\sqrt{t-t^2}$; 6) $x=\operatorname{arctg} t, y=\ln(1+t^2)$;

7) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$; 8) $x=\operatorname{tg} t, y=\sin 2t+2\cos 2t$.

20.2 Найти y'_x в указанных точках:

1) $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t; t=\dfrac{\pi}{6}$. 2) $x=\dfrac{3at}{1+t^2}, y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}; t=2$.

20.3 Найти производные функций, заданных неявно:

1) $e^x + 2x^2y^2 - e^y = 0$;

2) $2y\ln y = x$;

3) $x - y = \arcsin x - \arcsin y$;

4) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$;

5) $\mathrm{arctg}\, y = y - x^2$;

6) $\sin(xy) + \cos(xy) = 0$;

7) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;

8) $e^x \sin y - e^y \cos x = 0$.

20.4 Найти y'_x в точке $x = 1$, если $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$, $y(1) = 1$.

20.5 Найти y'_x в точке $(0,1)$, если $e^y + xy = e$.

20.6 Найти дифференциалы функций:

1) $y = x\,\mathrm{tg}^3 x$;

2) $y = \sqrt{\mathrm{arctg}\, x} + (\arcsin x)^2$;

3) $y = \ln(x + \sqrt{4 + x^2})$;

4) $y^5 + y - x^2 = 1$.

20.7 Найти приближенное значение функции $y(x) = e^{x^2 - x}$ при $x = 1,2$.

20.8 Вычислить приближенно:

1) $\arcsin 0{,}05$;

2) $\ln 1{,}2$;

3) $\sqrt[4]{17}$;

4) $\mathrm{tg}\, 44^\circ 56'$.

Домашние задания

20.9 Найти y'_x:

1) $x = \dfrac{t+1}{t}, y = \dfrac{t-1}{t}$;

2) $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$.

20.10 Убедиться в том, что функция, заданная параметрически уравнениями $x = \dfrac{1 + \ln t}{t^2}$, $y = \dfrac{3 + 2\ln t}{t}$, удовлетворяет соотношению $yy' = 2x(y')^2 + 1$.

20.11 Найти производные от функций, заданных неявно:

1) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$;

2) $\sin(xy) + \cos(xy) = \mathrm{tg}(x + y)$.

20.12 Убедиться в том, что функция *y*, определенная уравнением $xy - \ln y = 1$, удовлетворяет соотношению $y^2 + (xy - 1)\cdot y' = 0$.

20.13 Найти дифференциалы функций:

1) $y = x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} - 3$;

2) $e^y = x + y$.

20.14 Вычислить приближенно: 1) $\sin 29^\circ$; 2) $\sqrt{\dfrac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}}$.

20.15 На сколько приблизительно изменится площадь круга радиуса $R=3$ см, если радиус увеличится на 0,1 см?

Ответы: 20.1 1) $\dfrac{t}{2}$; 2) $-\dfrac{2t}{t+1}$; 3) $\dfrac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}=\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$; 4) $2t^2$; 5) $2t-1$; 6) $2t$; 7) $-\operatorname{tg}t$; 8) $2(\cos 2t-2\sin 2t)\cos^2 t$.

20.2 1) $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)^2$; 2) $-\dfrac{4}{3}$. 20.3 1) $\dfrac{e^x+4xy^2}{e^y-4x^2y}$; 2) $\dfrac{1}{2(\ln y+1)}$; 3) $\dfrac{\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)\sqrt{1-y^2}}{\left(\sqrt{1-y^2}-1\right)\sqrt{1-x^2}}$; 4) $\dfrac{2^x-2^{x+y}}{2^{x+y}-2^y}$; 5) $\dfrac{2x\left(1+y^2\right)}{y^2}$; 6) $-\dfrac{y}{x}$; 7) $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$; 8) $\dfrac{e^y\sin x+e^x\sin y}{e^y\cos x-e^x\cos y}$.

20.4 $\dfrac{4}{3}$. 20.5 $-e^{-1}$. 20.6. 1) $\operatorname{tg}^2 x\left(\operatorname{tg}x+\dfrac{3x}{\cos^2 x}\right)dx$; 2) $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg}x}}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$; 3) $\dfrac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$; 4) $\dfrac{2xdx}{5y^4+1}$.

20.7 1,2. 20.8 1) 0,05; 3) 0,2; 4) 2,02. 20.9 1) –1; 2) $\dfrac{1-\operatorname{tg}t}{1+\operatorname{tg}t}$.

20.11 1) $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$; 2) $-\dfrac{y\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}{x\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}$.

20.13 1) $\arcsin x dx$; 2) $\dfrac{dx}{e^y-1}$. 20.14 1) 0,485; 2) 0,355. 20.15 $0{,}6\pi$.

Занятие 21.
Производные и дифференциалы высших порядков

Аудиторные задания

21.1 Найти производные 2-го порядка от следующих функций:

1) $y=\cos^2 x$; 2) $y=\mathrm{arctg}x^2$; 3) $y=\log_2\sqrt[3]{1-x^2}$;

4) $y=\frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x$; 5) $y=\left(1+x^2\right)\mathrm{arctg}\,x$;

6) $y=e^{\sqrt{x}}$.

21.2 Показать, что функция $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ при любых постоянных c_1 и c_2 удовлетворяет уравнению $y''-5y'+6y=0$.

21.3 Найти производные 2-го порядка от функций, заданных неявно:

1) $y=1+xe^y$; 2) $x^3+y^3=3xy$; 3) $\mathrm{arctg}y=y-x$;

4) $y=x+\ln y$; 5) $x+y=e^{x-y}$; 6) $y=\sin(x+y)$.

21.4 Найти производные 2-го порядка от функций, заданных параметрически:

1) $x=t^2+2, y=\frac{1}{3}t^3-1$; 2) $x=\arcsin t, y=\sqrt{1-t^2}$;

3) $x=a\cos^2 t, y=a\sin^2 t$; 4) $x=\ln t, y=t^2-1$;

5) $x=a(\varphi-\sin\varphi), y=a(1-\cos\varphi)$; 6) $x=1+e^{\alpha t}, y=\alpha t+e^{-\alpha t}$.

21.5 Найти дифференциалы 1, 2 и 3-го порядков функции $y=(2x-3)^3$.

21.6 Найти дифференциалы 2-го порядка функций:

1) $y=e^{-x^2}$; 2) $xy+y^2=1$.

21.7 Найти дифференциал 3-го порядка функции $y=\frac{\ln x}{x}$.

21.8 Найти приближенное значение $\sqrt[5]{31}$ с точностью до двух знаков после запятой.

Домашние задания

21.9 Найти производные второго порядка следующих функций:

1) $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$; 2) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

3) $y=-\dfrac{1}{9}x\sin 3x-\dfrac{2}{27}\cos 3x$; 4) $y=\dfrac{1}{1+x^3}$.

21.10 Найти $y^{(n)}(x)$, если $y=e^{-x}$.

21.11 Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если:

1) $e^{x+y}=xy$; 2) $x=\dfrac{1}{\cos t}, y=\operatorname{tg} t$;

3) $x^2+y^2+xy-4=0$; 4) $x=\operatorname{arctg} t,\ y=\ln(1+t^2)$.

21.12 Вычислить значение производной второго порядка функции y, заданной уравнением $x^2+2y^2-xy+x+y=4$, в точке $M(1;1)$.

21.13 Доказать, что функция $y=e^{4x}+2e^{-x}$ удовлетворяет уравнению $y'''-13y'-12y=0$. Записать для этой функции d^3y.

21.14 Вычислить приближенное значение функции $y=\sqrt[3]{x^2-5x+12}$ при $x=1{,}3$ с точностью до двух знаков после запятой.

Ответы: 21.1 1) $-2\cos 2x$; 2) $\dfrac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$; 3) $-\dfrac{2}{3\ln 2}\cdot\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$;

4) $2\sqrt{1-x^2}$; 5) $\dfrac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg} x$; 6) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x\sqrt{x}}$.

21.3 1) $\dfrac{(3-y)e^{2y}}{(2-y)^3}$; 2) $\dfrac{-2xy}{\left(y^2-x\right)^3}$; 3) $\dfrac{-2\left(1+y^2\right)}{y^5}$; 4) $-\dfrac{y}{(y-1)^3}$;

5) $\dfrac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$; 6) $-\dfrac{y}{(1-\cos(x+y))^3}$. 21.4 1) $\dfrac{t^2+1}{4t^3}$; 2) $-\sqrt{1-t^2}$;

3) 0; 4) $4t^2$; 5) $-\dfrac{1}{a(1-\cos\varphi)^2}$; 6) $2e^{-3\alpha t}-e^{-2\alpha t}$.

21.5 $6(2x-3)^2dx$; $24(2x-3)dx^2$; $48dx^3$.

21.6 1) $e^{-x^2}\left(4x^2-2\right)dx^2$; 2) $\dfrac{2dx^2}{(x+2y)^3}$. 21.7 $\dfrac{2\ln x-3}{x^3}dx^3$.

21.8 1,99. 21.9 1) $-\dfrac{\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$; 2) $-\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; 3) $x\sin 3x$;

4) $\dfrac{6x\left(2x^3-1\right)}{\left(x^3+1\right)^3}$. 21.10 $(-1)^n e^{-x}$. 21.11 1) $-\dfrac{y((x-1)^2+(y-1)^2)}{x^2(y-1)^3}$;

2) $-\operatorname{ctg}^3 t$; 3) $-\dfrac{24}{(x+2y)^3}$; 4) $2\left(1+t^2\right)$. 21.12 – 1.

21.13 $\left(64e^{4x}-2e^{-x}\right)dx^3$. 21.14 1,93.

Занятие 22.
Правило Лопиталя-Бернулли

Аудиторные задания

22.1 Применяя правило Лопиталя-Бернулли, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin 3x}{\arcsin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{3^x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^2+2\cos x-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{\ln x}-x}{\ln x}$;

7) $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\ln(x-a)\cdot\cos x}{\ln\left(e^x-e^a\right)}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2+x-1}{x^2+4x+2}$;

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{3/x}-1}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$;

12) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\operatorname{ctg}x}{\ln 2x}$; 13) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{3}{x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot e^{1/x^2}$;

15) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$; 16) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$; 17) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;

18) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$; 19) $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

20) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$; 21) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$;

22) $\lim\limits_{x\to 0}x^{3/(1+\ln x)}$; 23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+10^x\right)^{1/x}$; 24) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}$;

25) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{1/x}$; 26) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{1/\ln x}$; 27) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$;

28) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$; 29) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg}x}$; 30) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\pi-2x)^{\cos x}$.

Домашние задания

22.2 Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2\ln x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x-\sin x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 5x}{\ln\sin 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3+x+1}{e^{-x}}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{x\sqrt{1-x^2}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-e^{\sin x}}{x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg}x}-\dfrac{1}{x}\right)$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2x\operatorname{tg}x}\right)$; 10) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}\pi x$;

12) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)$; 13) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{1/x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$; 16) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Ответы: 22.1 1) – 1; 2) 0; 3) 2; 4) 1/2; 5) 12; 6) $\ln 2-1$; 7) $\cos a$; 8) 5; 9) 2/3; 10) 1/2; 11) 2; 12) ∞; 13) 3; 14) + ∞; 15) 1/2; 16) 0; 17) 2; 18) – 1; 19) $-2/\pi$; 20) $-\dfrac{1}{2}$; 21) 1; 22) e^3; 23) 10; 24) e^{-2}; 25) e^2; 26) e^{-1}; 27) 1; 28) 1; 29) 1; 30) 1. 22.2 1) 1; 2) 6; 3) 1; 4) 0; 5) 1/3; 6) $\ln\dfrac{2}{3}$; 7) – 4; 8) 0; 9) 1/6; 10) 1/2; 11) 1/π; 12) 0; 13) 1; 14) 1; 15) *e*; 16) $e^{-1/6}$.

Занятие 23.
Формула Тейлора

Аудиторные задания

23.1 Разложить многочлен $x^4-2x^2+13x+9$ по степеням двучлена $x+2$.

23.2 Разложить многочлен x^3+3x^2-2x+4 по степеням двучлена $x+1$.

23.3 Для многочлена x^4+4x^2-x+3 написать формулу Тейлора 2-го порядка в точке $x_0=1$. Записать остаточный член в форме Лагранжа.

23.4 Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $f(x)=10^x$ в точке $x_0=0$.

23.5 Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ в точке $x_0=2$.

23.6 Написать формулу Тейлора 2-го порядка для функции $f(x)=\operatorname{tg}x$ в точке $x_0=0$.

23.7 Вывести приближенную формулу $\sin x\approx x-\dfrac{x^3}{6}$ и оценить ее точность при $|x|<0{,}05$.

23.8 Вывести приближенные формулы и оценить их погрешность при $|x|<1$:

1) $\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2$; 2) $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{9}x^2$.

23.9 Проверить, что при вычислении значений функции e^x при $0<x\le\dfrac{1}{2}$ по приближенной формуле $e^x\approx 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ допускаемая погрешность меньше 0,01. Пользуясь этим, найти $e^{0,2}$ с тремя верными цифрами.

23.10 Вычислить с точностью до 10^{-4} $\cos 10^\circ$.

23.11 Вычислить с точностью до 10^{-3}: 1) $\sqrt[5]{33}$; 2) $\ln 1{,}05$.

23.12 Найти пределы, используя разложение по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2+x^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{\left(e^x-1\right)^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x\sqrt{1+x}}{x^2}$.

Домашние задания

23.13 Разложить многочлен $x^4-5x^3+x^2-3x+4$ по степеням двучлена $x-4$.

23.14 Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при $x_0=1$.

23.15 Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y=\arcsin x$ при $x_0=0$.

23.16 Написать формулу Тейлора n-го порядка для функции $y=\dfrac{1}{x}$ при $x_0=-1$.

23.17 Написать формулу Маклорена n-го порядка для функции $f(x)=xe^x$, $x_0=0$.

23.18 Вычислить приближенные значения с заданной точностью Δ:

1) $\sin 1°$, $\Delta=10^{-4}$; 2) $\sqrt{e}$, $\Delta=10^{-3}$;

3) $\sqrt[10]{1027}$, $\Delta=10^{-4}$; 4) $\cos 5°$, $\Delta=10^{-5}$.

23.19 Найти пределы, используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^2\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1-x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

Ответы:

23.1 $f(x) = -9 - 11(x+2) + 22(x+2)^2 - 8(x+2)^3 + (x+2)^4$;

23.2 $f(x) = (x+1)^3 - 5(x+1) + 8$;

23.3 $f(x) = 7 + 11(x-1) + 10(x-1)^2 + 4(1+\theta(x-1))(x-1)^3$;

23.4 $10^x = 1 + \ln 10 \cdot x + \dfrac{\ln^2 10}{2!} x^2 + \dfrac{\ln^3 10}{3!} x^3 + \dfrac{10^{\theta x} \ln^4 10}{4!} x^4$, $0 < \theta < 1$;

23.5 $\dfrac{x}{x-1} = 2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + \dfrac{(x-2)^4}{(1+\theta(x-2))^5}$, $0 < \theta < 1$;

23.6 $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{1 + 2\sin^3 \theta x}{\cos^4 \theta x} \cdot \dfrac{x^3}{3}$, $0 < \theta < 1$; 23.7 $\Delta < 3 \cdot 10^{-9}$;

23.8 1) $\dfrac{1}{16} \cdot \dfrac{x^3}{(1+\theta x)^{5/2}}$, $0 < \theta < 1$; 2) $\dfrac{5}{81} \cdot \dfrac{x^3}{(1+\theta x)^{8/3}}$, $0 < \theta < 1$;

23.9 1,221; 23.10 0,9848; 23.11 1) 2,012; 2) 0,049;
23.12 1) 1; 2) 1/2; 3) 1/6; 4) – 1;

23.13 $f(x) = -56 + 21(x-4) + 37(x-4)^2 + 11(x-4)^3 + (x-4)^4$;

23.14 $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}(x-1)^2 - \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}(x-1)^3 +$

$+ \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot 4!} \cdot \dfrac{(x-1)^4}{(1+\theta(x-1))^{9/2}}$, $0 < \theta < 1$;

23.15 $y = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{4!} \cdot \dfrac{9\theta x + 6\theta^3 x^3}{\left(1 - \theta^2 x^2\right)^{7/2}}$, $0 < \theta < 1$;

23.16 $y = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - \ldots - (x+1)^n +$

$+ (-1)^{n+1} \dfrac{(x+1)^{n+1}}{(-1+\theta(x+1))^{n+2}}$, $0 < \theta < 1$;

23.17 $f(x)=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot(\theta x+n+1)e^{\theta x}$, $0<\theta<1$;

23.18 1) 0,0175; 2) 1,648; 3) 2,0006; 4) 0,99619;
23.19 1) – 1/6; 2) 1; 3) – 2; 4) 1/2.

Занятие 24.
Монотонность функций. Экстремум.
Наибольшее и наименьшее значения функций.
Выпуклость и вогнутость графиков функций

Аудиторные задания

24.1 Найти интервалы возрастания, убывания и точки экстремума функций:

1) $y=15-x^2-2x$; 2) $y=2x^3-6x^2-18x+7$;

3) $y=\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11}{2}x^2-6x+\frac{9}{4}$; 4) $y=x\sqrt{1-x^2}$;

5) $y=\frac{2x^2-1}{x^4}$; 6) $y=x^2e^{-x}$; 7) $y=\frac{x}{\ln x}$;

8) $y=\sqrt[3]{x^2-2x}$; 9) $y=\frac{e^x}{x+1}$; 10) $y=\ln\frac{x+1}{x+2}$.

24.2 Найти экстремумы функций, пользуясь производной 2-го порядка:

1) $y=4x^3-9x^2+6x$; 2) $y=e^{3x}-3x+2$; 3) $y=\frac{2x}{1+x^2}$;

4) $y=x\ln^2 x$; 5) $y=x^2(a-x)^2$; 6) $y=x+\sqrt{1-x}$.

24.3 Определить наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

1) $y=x^4-2x^2+5$, $[-2;0]$; 2) $y=x+2\sqrt{x}$, $[0;4]$;

3) $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$, $[0;1]$; 4) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$, $[0;1]$;

5) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $[-2;1]$; 6) $y=x\ln x-x$; $[1/e;e]$.

24.4 Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графиков функций:

1) $y=\ln\left(1+x^2\right)$; 2) $y=e^{-8x^2+4x}$; 3) $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$; 4) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$;

5) $y=x^4-2x^2+3$; 6) $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$; 7) $y=\dfrac{2x^2-1}{x^4}$;

8) $y=x^2\cdot e^{-x}$; 9) $y=x\sqrt{1-x^2}$; 10) $y=\sqrt[3]{x^2-2x}$.

24.5 Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 см^3, причем стороны основания относились бы как 1 : 2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность ящика была наименьшей?

24.6 Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую полную поверхность.

24.7 Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R.

Домашние задания

24.8 Найти интервалы возрастания, убывания и точки экстремума функций:

1) $y=\ln x-\operatorname{arctg}x$; 2) $y=\dfrac{x^3}{x-1}$;

3) $y=(x-1)e^x$; 4) $y=x^3-6x^2+16$.

24.9 Найти экстремум функции $y = x + \frac{a^2}{x}, a > 0$, используя вторую производную.

24.10 Найти точки перегиба графиков функций:

1) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$; 2) $y = x \operatorname{arctg} x$; 3) $y = \frac{4x^3}{1-x^3}$; 4) $y = e^{-x^2/2}$ (кривая Гаусса).

24.11 Найти наибольшее и наименьшее значения функций в интервалах (или во всей области определения):

1) $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $[0;1]$; 2) $y = xe^{-x^2/2}$;

3) $y = \ln\left(4-x^2\right)$, $[-1;1]$; 4) $y = x + 2\sqrt{x}$, $[0;4]$.

24.12 Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб для подачи воды. При каком угле α наклона боковых стенок к днищу желоба площадь поперечного сечения будет наибольшей?

Ответы: 24.1 1) $(-\infty;-1)$ – возрастает; $(-1;+\infty)$ – убывает; $y_{\max} = y(-1) = 16$;

2) $(-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$ – возрастает; $(-1;3)$ – убывает; $y_{\min} = y(3) = -47$; $y_{\max} = y(-1) = 13$;

3) $(1;2) \cup (3;+\infty)$ – возрастает; $(-\infty;1) \cup (2;3)$ – убывает; $y_{\min} = y(1) = y(3) = 0$; $y_{\max} = y(2) = \frac{1}{4}$;

4) $\left(-1;-1/\sqrt{2}\right) \cup \left(1/\sqrt{2};1\right)$ – убывает; $\left(-1/\sqrt{2};1/\sqrt{2}\right)$ – возрастает; $y_{\min} = y\left(-1/\sqrt{2}\right) = -1/2$; $y_{\max} = y\left(1/\sqrt{2}\right) = 1/2$;

5) $(-\infty;-1) \cup (0,1)$ – возрастает; $(-1;0) \cup (1;+\infty)$ – убывает; $y_{\max} = y(-1) = y(1) = 1$;

6) $(0;2)$ – возрастает; $(-\infty;0) \cup (2;\infty)$ – убывает;

$y_{\min} = y(0) = 0; y_{\max} = y(2) = 4/e^2$;

7) $(e;+\infty)$ – возрастает; $(0;1)\cup(1;e)$ – убывает; $y_{\min} = y(e) = e$;

8) $(1;+\infty)$ – возрастает; $(-\infty;1)$ – убывает; $y_{\min} = y(1) = -1$;

9) $(0;+\infty)$ – возрастает; $(-\infty;-1)\cup(-1;0)$ – убывает; $y_{\min} = y(0) = 1$;

10) $(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$ – возрастает; $(-2;-1)$ – убывает; экстремумов нет.

24.2 1) $y_{\max} = y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{4}$; $y_{\min} = y(1) = 1$; 2) $y_{\min} = y(0) = 3$;

3) $y_{\max} = y(1) = 1$; $y_{\min} = y(-1) = -1$;

4) $y_{\max} = y\left(e^{-2}\right) = 4/e^2$; $y_{\min} = y(1) = 0$;

5) $y_{\max} = y\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{a^4}{16}$; $y_{\min} = y(0) = y(a) = 0$;

6) $y_{\max} = y\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{5}{4}$;

24.3 1) $y_{наиб.} = y(-2) = 13$; $y_{наим.} = y(-1) = 4$;

2) $y_{наиб.} = y(4) = 8$; $y_{наим.} = y(0) = 0$;

3) $y_{наиб.} = y(0) = 2$; $y_{наим.} = y(1) = \sqrt[3]{2}$;

4) $y_{наиб.} = y(0) = \dfrac{\pi}{4}$; $y_{наим.} = y(1) = 0$;

5) $y_{наиб.} = y(-2) = \dfrac{3}{5}$; $y_{наим.} = y(0) = -1$;

6) $y_{наиб.} = y(e) = 0$; $y_{наим.} = y(1) = -1$;

24.4 1) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ – функция выпукла; $(-1;1)$ – функция вогнута; $(-1;\ln 2)$, $(1;\ln 2)$ – точки перегиба;

2) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ – функция выпукла; $(-\infty;0)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ – функция вогнута; $(0;1)$, $\left(\frac{1}{2};1\right)$ – точки перегиба;

3) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ – функция вогнута; точек перегиба нет;

4) $(-\infty;-2)$ – функция выпукла; $(-2;1)\cup(1;+\infty)$ – функция вогнута; $\left(-2;\frac{1}{9}\right)$ – точка перегиба;

5) $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$ – функция вогнута; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ – функция выпукла; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{22}{9}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{22}{9}\right)$ – точки перегиба;

6) $(-\infty;0)$ – функция выпукла; $(0;+\infty)$ – функция вогнута; точек перегиба нет;

7) $\left(-\infty;-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{5}{3}};+\infty\right)$ – функция вогнута; $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}};0\right)\cup\left(0;\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ – функция выпукла; $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}};\frac{21}{25}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{5}{3}};\frac{21}{25}\right)$ – точки перегиба;

8) $\left(-\infty;2-\sqrt{2}\right)\cup\left(2+\sqrt{2};+\infty\right)$ – функция вогнута; $\left(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right)$ – функция выпукла; $\left(2+\sqrt{2};\left(2+\sqrt{2}\right)^2e^{-2-\sqrt{2}}\right)$, $\left(2-\sqrt{2};\left(2-\sqrt{2}\right)^2e^{-2+\sqrt{2}}\right)$ – точки перегиба;

9) $(-1;0)$ – функция вогнута; $(0;1)$ – функция выпукла; $(0;0)$ – точка перегиба;
10) $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ – функция выпукла; $(0;2)$ – функция вогнута; $(0;0)$; $(2;0)$ – точки перегиба.

24.5 3,6 и 4 см; 24.6 H=2R; 24.7 $H=\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$;

24.8 1) возрастает на всей области определения;
2) $(-\infty;1)\cup\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$ – убывает; $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$ – возрастает; $y_{\min}=y\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{27}{4}$;
3) $(-\infty;0)$ – убывает; $(0;+\infty)$ – возрастает; $y_{\min}=y(0)=-1$;
4) $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$ – возрастает; $(0;4)$ – убывает; $y_{\max}=y(0)=16$, $y_{\min}=y(4)=-16$;
24.9 $y_{\max}=y(-a)=-2a$; $y_{\min}=y(a)=2a$;
24.10 1) $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{8}{9}\right)$; 2) точек перегиба нет; 3) $(0;0)$, $\left(-\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}};\dfrac{4}{3}\right)$;
4) $\left(-1;e^{-1/2}\right)$, $\left(1;e^{-1/2}\right)$.
24.11 1) 1 и 3/5; 2) $1/\sqrt{e}$ и $-1/\sqrt{e}$; 3) $\ln 4$ и $\ln 3$; 4) 8 и 0;
24.12 $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$.

Занятие 25.
Асимптоты. Построение графиков функций

Аудиторные задания

25.1 Найти асимптоты графиков функций:

1) $y=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$; 2) $y=\dfrac{e^x}{x+1}$; 3) $y=\dfrac{x^4}{x^3+1}$; 4) $y=\dfrac{\ln x}{x}$;

5) $y = 3x + \operatorname{arctg} 5x$; 6) $y = \dfrac{x^2+2}{x^2-9}$; 7) $y = x + \sin x$;

8) $y = (x-2)e^{-1/x}$; 9) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$; 10) $y = x^2 + 2/x$.

25.2 Провести полное исследование и построить графики функций:

1) $y = \dfrac{2x^2-1}{x^4}$; 2) $y = x^2 e^{-x}$; 3) $y = x\sqrt{1-x^2}$; 4) $y = \sqrt[3]{x^2-2x}$;

5) $y = x^2 \ln x$; 6) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; 7) $y = \dfrac{x}{(1+x)^3}$; 8) $y = (x-1)e^x$;

9) $y = \dfrac{4x^3}{1-x^3}$; 10) $y = x^3 - 6x^2 + 16$.

Домашние задания

25.3 Найти асимптоты графиков функций:

1) $y = \dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$; 2) $y = x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$;

3) $y = \dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$; 4) $y = \dfrac{2+x^3}{x^2}$.

25.4 Исследовать функции и построить графики:

1) $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$; 2) $y = xe^{1/x}$; 3) $y = \ln\left(1-x^2\right)$; 4) $y = e^{2x-x^2}$.

Ответы: 25.1 1) $x = 2$; $y = x - 2$; 2) $x = -1$; $y = 0$ (левая);

3) $x = -1$; $y = x$; 4) $x = 0$; $y = 0$; 5) $y = 3x + \dfrac{\pi}{2}$ (правая),

$y = 3x - \frac{\pi}{2}$ (левая); 6) $x = 3,\ x = -3,\ y = 1$; 7) нет; 8) $x = 0;\ y = x - 3$; 9) $x = \pm 1;\ y = \pm x$; 10) $x = 0$.

25.3 1) $x = \pm\frac{1}{2};\ y = 1$; 2) $x = -1/e;\ y = x + \frac{1}{e}$; 3) $x = -1;\ y = \frac{1}{2}x - 1$; 4) $x = 0;\ y = x$.

Занятие 26.
Кривизна кривой

Аудиторные задания

26.1 Найдите кривизну и радиус кривизны линии $y = x^2 + 2$ в точке $(1;3)$.

26.2 Вычислите кривизну линии $y = \sqrt[3]{x} + 2$ в любой точке.

26.3 Вычислите кривизну эллипса $x^2 + 9y^2 = 9$ в его вершинах.

26.4 Найдите кривизну кривой $xy = 4$ в точке $(2;2)$.

26.5 Найдите кривизну и радиус кривизны кривой $x^2 + xy + y^2 = 3$ в точке $M(1;1)$.

26.6 Вычислите кривизну кривой $r = 2(1 - \cos\varphi)$ в точке $\varphi = \pi$.

26.7 Вычислите кривизну кривой $x = t^2,\ y = t - \frac{t^3}{3}$ в точке $\left(1;\frac{2}{3}\right)(t = 1)$.

Домашние задания

26.8 Найдите кривизну и радиус кривизны линии $y = \sqrt{x^3}$ в точке $M(4;8)$.

26.9 Вычислите кривизну линии $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ в точке $x=0$.

26.10 Вычислите кривизну гиперболы $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ в точке $x=2,\ y=0$.

26.11 Найдите кривизну кривой $x^2+y^2-xy=1$ в точке $M(1;1)$.

26.12 Вычислите кривизну линии $x=\dfrac{t^2}{2},\ y=\dfrac{t^3}{3}$ в точке $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)(t=1)$.

26.13 Вычислите кривизну линии $y=2\cos t,\ y=3\sin t$ в любой ее точке.

Ответы:

26.1 $K=\dfrac{2}{5\sqrt{5}};\ R=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$; 26.2 $K=\dfrac{1}{6\sqrt[3]{x}}\cdot\sqrt{\left(9x^{4/3}+1\right)^3}$;

26.3 $K=3;\ K=\dfrac{1}{9}$; 26.4 $K=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; 26.5 $K=\dfrac{1}{3\sqrt{2}};\ R=3\sqrt{2}$;

26.6 $K=\dfrac{3}{8}$; 26.7 $K=\dfrac{1}{2}$; 26.8 $K=\dfrac{3}{80\sqrt{10}};\ R=\dfrac{80\sqrt{10}}{3}$;

26.9 $K=1$; 26.10 $K=\dfrac{9}{2}$; 26.11 $K=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$; 26.12 $K=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;

26.13 $K=\dfrac{\left(4\sin^2 t+9\cos^2 t\right)^{3/2}}{6}$.

Занятие 27.
Область определения и область значений функции нескольких переменных. Частные производные

Аудиторные задания

27.1 Найти область определения и область значений функций и изобразить их графически:

1) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$; 2) $z=\ln\left(y-x^2+2x\right)$.

27.2 Найти область определения функций и изобразить их графически:

1) $z=\arcsin\left(3-x^2-y^2\right)$; 2) $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$;

3) $u=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}}$; 4) $z=x+\arccos y$.

27.3 Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to2}}\dfrac{\sin\left(x^2y\right)}{xy^2}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to1}}\dfrac{\sin(x+y-2)}{(x+y)^2-4}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$.

27.4 Исследовать функции на непрерывность:

1) $z=\dfrac{xy+1}{x^2-y}$; 2) $z=\dfrac{x^2+y^2+2}{x^2+y^2}$;

3) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2-4}$; 4) $z=e^{1/(x-y)}$.

27.5 Найти частные производные функций:

1) $z=x^2y^3+x^2+y+10$; 2) $z=\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}+\dfrac{1}{3xy}$;

3) $z=(x+3y)\sin\sqrt{xy}$; 4) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$; 5) $z=x^{y}$; 6) $z=x^{\cos y}$.

Домашние задания

27.6 Найти область определения функций и изобразить ее графически:

1) $z=\ln\left(x^2+y^2-4\right)$; 2) $z=\arccos\dfrac{x}{3}+\arcsin\dfrac{x}{3}$.

27.7 Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to-1}}\dfrac{\operatorname{tg}(x+y)e^{x-y}}{x^2-y^2}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to0}}\dfrac{\sin y\left(x^2+2x-4\right)}{\left(x^2+2\right)y}$.

27.8 Исследовать функции на непрерывность:

1) $z=\dfrac{x^2+y^2+1}{(x-y)^3}$; 2) $z=\dfrac{1}{y-x^2}$.

27.9 Найти частные производные функций:

1) $z=x\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$; 2) $z=\left(5x^2y-y^3+7\right)^3$;

3) $z=\dfrac{y^2}{x}+\operatorname{tg}^2 y$; 4) $z=x\cdot e^{x^2/y}$.

Ответы: 27.3 1) 0; 2) 1/4; 3) 2; 4) 1. 27.5 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy^3+2x,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2+1$;

2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{2y}{x^3}-\dfrac{1}{3yx^2},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2x}{y^3}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{3xy^2}$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\sin\sqrt{xy}+(x+3y)\cdot\cos\sqrt{xy}\cdot\dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3\sin\sqrt{xy}+(x+3y)\cdot\cos\sqrt{xy}\cdot\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}};$$

4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}$; 5) $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot x^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$;

6) $\frac{\partial z}{\partial x}=\cos y\cdot x^{\cos y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-x^{\cos y}\ln|x|\cdot\sin y$.

27.7 1) $\frac{e^2}{2}$; 2) $-\frac{1}{3}$. 27.9 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{y}-\frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x}=30xy\left(5x^2y-y^3+7\right)^2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3\left(5x^2y-y^3+7\right)^2\left(5x^2-3y^2\right)$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y^2}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x}+2\operatorname{tg}y\cdot\frac{1}{\cos^2 y}$;

4) $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{\frac{x^2}{y}}+\frac{2x^2\cdot e^{\frac{x^2}{y}}}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^3\cdot e^{\frac{x^2}{y}}}{y^2}$.

Занятие 28.
Полный дифференциал функции нескольких переменных и его применение. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Аудиторные задания

28.1 Найти полный дифференциал функций:

1) $z=\frac{x-y}{x+y}$; 2) $z=\left(x^2+y^2\right)e^{xy}$; 3) $u=(xy)^z$; 4) $u=\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$.

28.2 Вычислить приближенно:

1) $1{,}08^{3{,}96}$; 2) $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$;

3) $\operatorname{arctg}\dfrac{0{,}02}{0{,}95}$;   4) $\sqrt{5\cdot e^{0{,}02}+2{,}03^2}$.

28.3 Найти частные производные второго порядка функций:

1) $z=e^{x-2y}$; 2) $z=\dfrac{1}{xy}$; 3) $z=\sin(xy)$; 4) $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

28.4 Найти полный дифференциал второго порядка функций:

1) $z=\dfrac{x}{y}$; 2) $z=\dfrac{1}{(x-y)^2}$; 3) $z=\ln\sqrt{x^2+y}$; 4) $z=\sin(x+\cos y)$.

Домашние задания

28.5 Найти полный дифференциал функций:

1) $z=\sqrt{x^2-y^2}$;   2) $z=e^{x\sin y}$;   3) $z=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

28.6 Вычислить приближенно:

1) $0{,}98^{2{,}01}$;   2) $\ln\left(0{,}9^3+0{,}09^3\right)$; 3) $\sqrt{(4{,}04)^2+(3{,}01)^2}$.

28.7 Найти частные производные второго порядка:

1) $z=y\cdot\ln x$;   2) $z=\dfrac{xy}{x-y}$;   3) $z=e^{xy}$.

28.8 Найти полные дифференциалы второго порядка:

1) $z=3x^2y-2xy+y^2-1$; 2) $z=\dfrac{x}{y^2}$;   3) $z=e^{x^2-y^3}$.

Ответы: 28.1 1) $dz=\dfrac{2y}{(x+y)^2}dx-\dfrac{2x}{(x+y)^2}dy$;

2) $dz=e^{xy}\left[\left(2x+x^2y+y^3\right)dx+\left(2y+x^3+xy^2\right)dy\right]$;

3) $dz=(xy)^{z-1}\left(zydx+zxdy+xy\ln|xy|dz\right)$;

4) $du=\dfrac{dx}{\sqrt{y^2+z^2}}-\dfrac{xydy+xzdz}{\sqrt{\left(y^2+z^2\right)^3}}$;

28.2 1) 1,32; 2) 4,998; 3) 0,02; 4) 3,037;

28.3 1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{x-2y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4e^{x-2y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2e^{x-2y}$;

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2}{x^3y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2}{y^3x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{1}{x^2y^2}$;

3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-y^2\sin(xy)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-x^2\sin(xy)$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\cos(xy)-xy\sin(xy)$;

4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$;

28.4 1) $d^2z=-\dfrac{2}{y^2}dxdy+\dfrac{2x}{y^3}dy^2$;

2) $d^2z=\dfrac{6}{(x-y)^4}\left(dx^2-2dxdy+dy^2\right)$;

3) $d^2z=\dfrac{\left(2y-2x^2\right)dx^2-4xdxdy-dy^2}{2\left(x^2+y\right)^2}$;

4) $d^2z=-\sin(x+\cos y)d^2x+2\sin(x+\cos y)\cdot\sin ydxdy-$
$-\left(\sin^2 y\sin(x+\cos y)+\cos y\cos(x+\cos y)\right)dy^2$;

28.5 1) $dz=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}dx-\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}dy$;

2) $dz=e^{x\sin y}\cdot\sin ydx+e^{x\sin y}x\cos ydy$;

3) $dz=\dfrac{\sqrt{\dfrac{y}{x}}}{2(x+y)}dx-\dfrac{\sqrt{\dfrac{x}{y}}}{2(x+y)}dy$;

28.6 1) 0,96; 2) – 0,3; 3) 5,038;

28.7 1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{1}{x}$;

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2y^2}{(x-y)^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2x^2}{(x-y)^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\dfrac{2xy}{(x-y)^3}$;

3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^{xy}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2e^{xy}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=e^{xy}(1+xy)$;

28.8 1) $d^2z=6ydx^2+2(6x-2)dxdy+2dy^2$;

2) $d^2z=-\dfrac{4}{y^3}dxdy+\dfrac{6x}{y^4}dy^2$;

3) $d^2z=e^{x^2-y^3}\left(\left(4x^2+2\right)dx^2-12xy^2dxdy+\left(9y^4-6y\right)dy^2\right)$.

Занятие 29.
Производные сложных функций нескольких переменных. Производная функции, заданной неявно

Аудиторные задания

29.1 Найти указанные производные для функций:

1) $z=x^2+y^2+xy$, если $x=a\sin t$, $y=a\cos t$, $\dfrac{dz}{dt}$ – ?

2) $z=x^2\ln y$, если $x=\sqrt{t^2+1}$, $y=\arcsin t$, $\dfrac{dz}{dt}$ – ?

3) $z=x^2+\sqrt{y}$, если $y=\sin x$, $\frac{\partial z}{\partial x}-?$ $\frac{dz}{dx}-?$

4) $z=3^x \operatorname{arctg}\frac{1}{y}$; если $y=e^{-x}$, $\frac{dz}{dx}-?$ $\frac{\partial z}{\partial x}-?$

5) $z=\ln\left(u^2+v^2\right)$, если $u=x\cos y$, $v=y\sin x$, $\frac{\partial z}{\partial x}-?$ $\frac{\partial z}{\partial y}-?$

6) $z=\sqrt{u^2-v^2}$, если $u=x^y$, $v=x\ln y$, $\frac{\partial z}{\partial x}-?$ $\frac{\partial z}{\partial y}-?$

7) $z=\cos xy$, если $x=u\cdot e^v$, $y=\frac{u}{v}$, $\frac{\partial z}{\partial u}-?$ $\frac{\partial z}{\partial v}-?$.

29.2 Найти частные производные от неявно заданных функций:

1) $x^2y-xy^2-xyz+6-xyz^3=0$; 2) $\frac{xy}{z}+\frac{z}{x}=1$;

3) $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}+1$; 4) $x+\operatorname{arctg}\frac{y}{z}=z$; 5) $z^{xy}+\cos z=0$.

Домашние задания

29.3 Найти указанные производные для функций:

1) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, если $x=e^{2t+1}$, $y=e^{2t-1}$, $\frac{dz}{dt}-?$

2) $z=x\sin(x+y)$, если $x=\frac{1}{t^3}$, $y=(t-1)^2$, $\frac{dz}{dt}-?$

3) $z=u^2\ln v$, если $u=\frac{y}{x}$, $v=x^2+y^2$, $\frac{\partial z}{\partial x}-?$ $\frac{\partial z}{\partial y}-?$

4) $z=\arcsin\frac{x}{y}$, если $x=u^2+v^2$, $y=u\cdot v$, $\frac{\partial z}{\partial u}-?$ $\frac{\partial z}{\partial v}-?$

29.4 Найти частные производные от неявно заданных функций:

1) $xyz = x + y + z$; 2) $z^3 - 3xyz = a^3$;

3) $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$; 4) $ze^{xy} + zxy^2 = a^2$.

Ответы: 29.1 1) $\frac{dz}{dt} = a^2 \cos 2t$; 2) $\frac{dz}{dt} = \frac{2xt \ln y}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{x^2}{y\sqrt{1-t^2}}$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$; $\frac{dz}{dx} = 2x + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$;

4) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3^x \cdot \ln 3 \operatorname{arctg}\frac{1}{y}$; $\frac{dz}{dx} = 3^x \cdot \ln 3 \operatorname{arctg}\frac{1}{y} + 3^x \cdot \frac{1}{1+y^2} \cdot e^{-x}$;

5) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v^2} \cdot \cos y + \frac{2v}{u^2+v^2} y \cdot \cos x$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2u}{u^2+v^2} x \cdot \sin y + \frac{2v}{u^2+v^2} \cdot \sin x$;

6) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u}{\sqrt{u^2-v^2}} \cdot y \cdot x^{y-1} - \frac{v}{\sqrt{u^2-v^2}} \cdot \ln y$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{u}{\sqrt{u^2-v^2}} \cdot x^y \ln x - \frac{v}{\sqrt{u^2-v^2}} \cdot \frac{x}{y}$;

7) $\frac{\partial z}{\partial u} = -\sin(xy) \cdot y \cdot e^v - \sin(xy) \cdot x \cdot \frac{1}{v}$;

$\frac{\partial z}{\partial v} = -\sin(xy) \cdot y \cdot u \cdot e^v + \sin(xy) \cdot x \cdot \frac{u}{v^2}$;

29.2 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy - y^2 - yz - yz^3}{xy + 3xyz^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 - 2xy - xz - xz^3}{xy + 3xyz^2}$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2 z}{z^2 - x^2 y}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x+z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y(x+z)}$;

4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z^2+y^2}{z^2+y^2+y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{z^2+y^2+y}$;

5) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{z^{xy}y\ln|z|}{xyz^{xy-1}-\sin z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z^{xy}x\ln|z|}{xyz^{xy-1}-\sin z}$;

29.3 1) $\frac{dz}{dt}=\frac{2e^{2t}(x-y)}{x^2+y^2}$;

2) $\frac{dz}{dt}=-3\frac{\sin(x+y)+x\cos(x+y)}{t^4}+2x(t-1)\cos(x+y)$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x}=2u\left(\frac{ux}{v}-\frac{y\ln v}{x^2}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=2u\left(\frac{\ln v}{x}-\frac{uy}{v}\right)$;

4) $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\left(2u-\frac{x}{y}v\right)$; $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\left(2v-\frac{x}{y}u\right)$;

29.4 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-yz}{xy-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1-xz}{xy-1}$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=-1$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-1$;

4) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yze^{xy}+zy^2}{e^{xy}+xy^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xze^{xy}+2xyz}{e^{xy}+xy^2}$.

Занятие 30.
Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент

Аудиторные задания

30.1 Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в указанной точке:

1) $x^2+y^2+z^2=26$; $M_0(3,4,1)$; 2) $z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$; $M_0(2,3,2)$;

3) $e^z-z+xy=3$; $M_0(2,1,0)$; 4) $z=xy-\sqrt{x^2+y^2}$; $M_0(3,4,0)$;

5) $z=\sin(xy)$; $M_0\left(1,\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

30.2 Найти производную функции $u=xy^2+z^3-xyz$ в точке $M(1,1,2)$ по направлению вектора, образующего с координатными осями острые углы, если $\alpha=60°$, $\beta=45°$?

30.3 Найти производную функции $u=x^2-2xz+y^2$ в точке $M(1,2,-1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{MM_1}$, где M_1 – точка с координатами $(2,4,-3)$.

30.4 Найти градиент функций в указанных точках:

1) $z=4-x^2-y^2$; $M(1,2)$; 2) $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$; $M(0,3)$;

3) $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$; $M(1,1)$.

30.5 Найти наибольшую скорость возрастания функций в указанных точках:

1) $z=5x^2+6xy$; $M_0(2,1)$; 2) $u=xzye^{x+y+z}$; $M(1,1,-1)$.

Домашние задания

30.6 Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в указанной точке:

1) $x^2+3y^2-4z^2=15;\ M_0(2,-3,2)$;

2) $4y^2-z^2+4xy-xz+3z=9;\ M_0(1,-2,1)$;

3) $z+x^3+y^3+z^3+xyz=6;\ M_0(1,2,-1)$.

30.7 Найти производную по направлению функции $z=5x^2-2y^2$ в точке $M_0(2,5)$ по направлению к точке $N(-2,2)$.

30.8 Найти градиенты функций в указанных точках:

1) $u=x^3+y^3+z^3-3xyz;\ M_0(2,1,-1)$;

2) $u=x^2-\operatorname{arctg}(y+z);\ M_0(2,1,1)$.

Ответы: 30.1 1) $3x+4y+z=26;\ \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z-1}{1}$;

2) $3x+2y-3z=6;\ \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2/3}=\dfrac{z-2}{-1}$;

3) $x+2y=4;\ \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}$;

4) $17x+11y-5z=95;\ \dfrac{x-3}{17}=\dfrac{y-4}{11}=-\dfrac{z}{5}$;

5) $\pi x+3y-6z-2\pi+3\sqrt{3}=0;\ \dfrac{x-1}{\pi}=\dfrac{y-\frac{\pi}{3}}{3}=\dfrac{z-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-6}$;

30.2 5; 30.3 $\dfrac{16}{3}$; 30.4 1) $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, z=-2\vec{i}-4\vec{j}$; 2) $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, z=\dfrac{9}{10}\vec{i}$;

3) $\overrightarrow{\text{grad}\, z} = -e\bar{j}$; 30.5 1) $2\sqrt{205}$; 2) $2\vec{e}$;

30.6 1) $2x-9y-8z-15=0$; $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{-9}=\dfrac{z-2}{-8}$;

2) $3x+4y+5=0$; $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{0}$;

3) $x+11y+5z-17=0$; $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{11}=\dfrac{z+1}{6}$;

30.7 – 4; 30.8 1) $\overrightarrow{\text{grad}\, u} = 15\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k}$; 2) $\overrightarrow{\text{grad}\, u} = 4\bar{i} - \dfrac{1}{5}\vec{j} - \dfrac{1}{5}\vec{k}$.

Занятие 31.
Экстремум и условный экстремум функции нескольких переменных

Аудиторные задания

31.1 Исследовать на экстремум следующие функции:

1) $z = x^3 + y^3 - 3xy$; 2) $z = -4 + 6x - x^2 - xy - y^2$; 3) $z = x^3 + y^3$;

4) $z = 6x^2y^3 - 6x^2 - 9y^2 + 1$; 5) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

31.2 Найти условные экстремумы следующих функций:

1) $z = 2x + y$, если $x^2 + y^2 = 5$;

2) $z = xy + 3x^2$, если $x + y + 1 = 0$;

3) $z = 2x^2 + 9y^2$, если $x^2 + 9y^2 = 1$;

4) $z = x^2 + 2y^2$, если $3x + 2y = 11$.

Домашние задания

31.3 Исследовать на экстремум функции:

1) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$; 2) $z = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y$;

3) $z = (x-1)^2 + 4y^2$.

31.4 Найти условные экстремумы функций:

1) $z = xy$, $x + y = 1$; 2) $z = e^{xy}$, $x + y = 1$; 3) $z = xy$, $x^2 + y^2 = 8$.

Ответы: 31.1 1) $z_{\min} = z(1,1) = -1$; 2) $z_{\max} = z(4,-2) = 8$; 3) экстремума нет; 4) $z_{\max} = z(0,0) = 1$; 5) $z_{\max} = z(4,4) = 15$;

31.2 1) $z(2,1) = 5$ – условный max, $z(-2,-1) = -5$ – условный min;
2) $z(0{,}25;-1{,}25) = -0{,}125$ – условный min;
3) $z(-1,0) = 2$; $z(1,0) = 2$ – условный max, $z\left(0,-\frac{1}{3}\right) = 1$; $z\left(0,\frac{1}{3}\right) = 1$ – условный min; 4) $z(3,1) = 11$ – условный min;

31.3 1) $z_{\min} = z(1;0{,}5) = 0$;
2) $z_{\min} = z(1;3) = -72$; $z_{\max} = z(-1,-3) = 72$; 3) $z_{\min} = z(1;0) = 0$;

31.4 1) $z(0{,}5;0{,}5) = 0{,}25$ – условный max; 2) $z\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{4}}$ – условный max;
3) $z(2;-2) = z(-2;2) = -4$ – условный min; $z(-2,-2) = 4$ – условный max.

Занятие 32.
Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных в замкнутой области

Аудиторные задания

32.1 Найти наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области:

1) $z = e^{x^3 + 3x^2 + 6y^2}$, $x^2 + y^2 \le 1$;

2) $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$, $x + y + 5 = 0$, $x = 0$, $y = 0$;

3) $z = x^2 + 2xy - 10$, $y = x^2 - 4$, $y = 5$;

4) $z = x^2 y(4 - x - y)$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$;

5) $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 9$.

Домашние задания

32.2 Найти наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области:

1) $z = x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y + 5$, $x + y = 3$, $x = 0$, $y = -1$;

2) $z = x + y$, $x^2 + y^2 \le 1$;

3) $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 2$;

4) $z = xy - 2x - y$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 8$;

5) $z = 1 + 2x + 3y$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$.

Ответы: 32.1 1) $z_{наиб} = z(0,1) = e^6$, $z_{наим} = z(0,0) = 1$;

2) $z_{наиб} = z(0,-5) = 41$, $z_{наим} = z(-2,-1) = -3$;

3) $z_{наиб} = z(3,5) = 29$, $z_{наим} = z(-3,5) = -31$;

4) $z_{наиб} = z(2,1) = 4$, $z_{наим} = z(4,2) = -64$;

5) $z_{наиб} = 9$ (в точках окружности $x^2 + y^2 = 9$), $z_{наим} = z(0,0) = 0$;

32.2 1) $z_{наиб} = z(0,3) = 20$, $z_{наим} = z(2,0) = 1$;

2) $z_{наиб} = z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$, $z_{наим} = z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$;

3) $z_{наиб} = z(2,-1) = 13$, $z_{наим} = z(1,1) = z(0,-1) = -1$;

4) $z_{наиб} = z(3,5;4,5) = 4,25$; $z_{наим} = z(8,6) = -16$;

5) $z_{наиб} = z(0,6) = 19$, $z_{наим} = z(0,0) = 1$.

Занятие 33.
Комплексные числа и действия над ними

Аудиторные задания

33.1 Найти $\alpha+\beta,\ \alpha-\beta,\ \overline{\alpha},\ \overline{\beta},\ \alpha\beta,\ \dfrac{\alpha}{\beta},\ \alpha^{-1},\ \beta^{2}$, если:

1) $\alpha=3+7i,\ \beta=3+2i$; 2) $\alpha=1-6i,\ \beta=5+4i$.

33.2 Возведите в указанную степень данные комплексные числа:

1) $(1+i)^2$; 2) $(1-2i)^3$; 3) $(1+i)^5$; 4) $(1-i)^6$.

33.3 Найдите действительную и мнимую части каждого комплексного числа:

1) $(1-i)^2$; 2) $(3-4i)^2$; 3) $(3+2i)^3$.

33.4 Выполните действия:

1) $(2+3i)(4-i)+5+4i$; 2) $(2+5i)^2+(3-i)^2+\dfrac{3+4i}{2-3i}$;

3) $\dfrac{1-3i}{1+2i}+4i-1$; 4) $\dfrac{(8-i)^2}{3+5i}+3i-4$.

33.5 Представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме записи:

1) $1+i$; 2) $-i$; 3) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; 4) $5-4i$.

33.6 Выполните указанные действия:

1) $(1-i)^5$; 2) $(2+2i)^4$; 3) $(-i)^{10}$; 4) $\sqrt[3]{3+3i}$;

5) $\sqrt{i}$; 6) $\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i}$; 7) $\sqrt[3]{-8}$; 8) $\sqrt[6]{-64}$; 9) $\sqrt[4]{1}$.

Домашние задания

33.7 Найти $\alpha+\beta,\ \alpha-\beta,\ \alpha\beta,\ \overline{\alpha},\ \overline{\beta},\ \alpha^{-1},\ \dfrac{\alpha}{\beta},\ \beta^{2}$, если

$\alpha=1+2i,\ \beta=2-i$.

33.8 Найти действительную и мнимую части комплексных чисел:

1) $\dfrac{4+2i}{1+3i}$; 2) $(2+4i)^3$.

33.9 Вычислите: 1) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$; 2) $\dfrac{(1+i)^7}{(1-i)^5}$.

33.10 Запишите в тригонометрической форме записи следующие числа:

1) 3; 2) – 5; 3) $-5+5i$.

33.11 Возведите в указанную степень каждое из данных комплексных чисел:

1) $\left(4\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^3$; 2) $\left(\sqrt{5}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^4$;

3) $\left(2\left(\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)\right)^{-3}$.

33.12 Найдите значения корня указанной степени из данных комплексных чисел:

1) $\sqrt[3]{8\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)}$; 2) $\sqrt[3]{-2+2i}$; 3) $\sqrt[3]{i}$; 4) $\sqrt[4]{-1}$.

Ответы:

33.1 1) $6+9i$; $5i$; $3-7i$; $3-2i$; $-5+27i$; $\dfrac{23}{13}-\dfrac{4}{13}i$; $\dfrac{3}{58}-\dfrac{7}{58}i$; $5+12i$;

2) $6-2i$; $-4-10i$; $1+6i$; $5-4i$; $29-26i$; $-\dfrac{19}{41}-\dfrac{34}{41}i$; $\dfrac{1}{37}+\dfrac{6}{37}i$; $9+40i$.

33.2 1) $2i$; 2) $-11+2i$; 3) $-4-4i$; 4) $8i$.

33.3 1) $\mathrm{Re}(1-i)^2=0$, $\mathrm{Im}(1-i)^2=-2$;

2) $\mathrm{Re}(3-4i)^2=-7$, $\mathrm{Im}(3-4i)^2=-24$;

3) $\mathrm{Re}(3+2i)^2=-9$, $\mathrm{Im}(3+2i)^3=46$.

33.4 1) $16+14i$; 2) $-\frac{175}{13}+\frac{199}{13}i$; 3) $-2+3i$; 4) $-\frac{27}{34}-\frac{261}{34}i$.

33.5 1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

4) $\sqrt{41}\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{5}\right)\right)+i\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{5}\right)\right)\right)$.

33.6 1) $-4+4i$; 2) -64; 3) -1;

4) $\rho_1=\sqrt[3]{3\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

$\rho_2=\sqrt[3]{3\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt[3]{3\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

$\rho_2=\sqrt[3]{3\sqrt{2}}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$;

5) $\rho_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\rho_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

6) $\rho_1=2\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)$; $\rho_2=2\left(\cos\frac{7\pi}{9}+i\sin\frac{7\pi}{9}\right)$;

$\rho_3=2\left(\cos\frac{13\pi}{9}+i\sin\frac{13\pi}{9}\right)$;

7) $\rho_1=1+i\sqrt{3}$; $\rho_2=-2$; $\rho_3=1-i\sqrt{3}$;

8) $\rho_1=\sqrt{3}+i$; $\rho_2=2i$; $\rho_3=-\sqrt{3}+i$; $\rho_4=-\sqrt{3}-i$; $\rho_5=-2i$; $\rho_6=\sqrt{3}-i$;

9) $\rho_1=1$; $\rho_2=i$; $\rho_3=-1$; $\rho_4=-i$.

33.7 $3+i$; $-1+3i$; $4+3i$; $1-2i$; $2+i$; $\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$; i; $3+4i$.

33.8 1) $\operatorname{Re}\frac{4+2i}{1+3i}=1$, $\operatorname{Im}\frac{4+2i}{1+3i}=-1$;

2) $\operatorname{Re}(2+4i)^3=-88$, $\operatorname{Im}(2+4i)^3=-16$.

33.9 1) 2; 2) – 2. 33.10 1) $3(\cos 0+i\sin 0)$; 2) $5(\cos\pi+i\sin\pi)$;

3) $5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. 33.11 1) – 64; 2) – 25;

3) $\frac{1}{8}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)\right)$.

33.12 1) $\rho_1=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; $\rho_2=2\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$;

$\rho_3=2\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$;

2) $\rho_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; $\rho_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$;

$\rho_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$;

3) $\rho_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; $\rho_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; $\rho_3=-i$;

4) $\rho_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; $\rho_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$;

$\rho_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$; $\rho_4=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

Типовой расчет № 1
Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

З а д а ч а 1

Исследовать систему уравнений и в случае совместности решить ее.

1.1. а) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_4 = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$

1.2. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = -1, \\ 7x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

1.3. а) $\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = -1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

1.4. а) $\begin{cases} 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

1.5. а) $\begin{cases} 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

1.6. а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_2 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

1.7. а) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -5, \\ 4x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

1.8. а) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

1.9. а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 = 6. \end{cases}$

1.10. а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$

1.11. а) $\begin{cases} 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_4 = -2. \end{cases}$

1.12. а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 5, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

1.13. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$

1.14. а) $\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

1.15. а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 - 13x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

1.16. а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_4 = 5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

1.17. а) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

1.18. а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_3 - x_4 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ 6x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

1.19. а) $\begin{cases} 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

1.20. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1, \\ x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

1.21. а) $\begin{cases} x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 - x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + 4x_4 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

1.22. а) $\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - 4x_4 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 9. \end{cases}$

1.23. а) $\begin{cases} 3x_1 - x_3 - 5x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

1.24. а) $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 7x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - 10x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

1.25. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Задача 2

2.1. Вычислить $(\vec{a}, \vec{b})$, где $\vec{a} = 3\vec{m}_1 - 2\vec{m}_2;$ $\vec{b} = \vec{m}_1 + 4\vec{m}_2;$ $\vec{m}_1, \vec{m}_2$ – единичные векторы, угол между которыми равен $\frac{\pi}{4}$.

2.2. Найти проекцию вектора $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ на направление вектора $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

2.3. Найти $(\vec{a}, \vec{b})$, $|\vec{a}|, |\vec{b}|$, если $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$.

2.4. Вектор $\vec{c}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{k}$, образует острый угол с осью Oz. Найти координаты вектора $\vec{c}$, если $|\vec{c}| = 3\sqrt{29}$.

2.5. Найти $(2\vec{a} - 3\vec{b},\ \vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

2.6. Найти $(\vec{a}, \vec{b})$, $|\vec{a}|, |\vec{b}|$, если $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n} - \vec{p};$ $\vec{b} = \vec{m} - 4\vec{p},$ $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ – ортогональный базис и $|\vec{m}| = 2,$ $|\vec{n}| = 3,$ $|\vec{p}| = 4$.

2.7. Найти длину вектора $\vec{a} = 3\vec{m} + 4\vec{n}$, если $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1,$ $\left(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

2.8. Найти вектор $|\vec{b}|$, коллинеарный вектору $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ и удовлетворяющий условию $(\vec{a}, \vec{b}) = 3$.

2.9. Найти $\left(2\vec{a}-5\vec{b},\ \vec{a}+3\vec{b}\right)$, если $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$.

2.10. Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, сторонами которого служат векторы $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$.

2.11. Найти вектор $\vec{d}$, удовлетворяющий условиям $\left(\vec{d},\ \vec{a}\right)=5$, $\left(\vec{d},\ \vec{b}\right)=2,\ \left(\vec{d},\vec{c}\right)=3$, если $\vec{a}(-1,2,0),\ \vec{b}(-1,0,5),\ \vec{c}(1,0,0)$.

2.12. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k},\ \vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{a}+\vec{b}$ на направление вектора $\vec{c}$.

2.13. Вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=6\vec{i}-8\vec{j}-7{,}5\vec{k}$, образует острый угол с осью Oz. Найти координаты вектора $\vec{b}$, если $|\vec{b}|=50$.

2.14. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}=3\vec{a}-2\vec{b}$ и $\overrightarrow{AC}=6\vec{a}+3\vec{b}$, если $|\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=3\ \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

2.15. Найти $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|$, если $|\vec{a}|=8,\ |\vec{b}|=15,\ \left(\vec{a},\vec{b}\right)=96$.

2.16. Какой угол образуют векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{m}=\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{n}=5\vec{a}-4\vec{b}$ ортогональны, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$?

2.17. Вычислить $\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)+\left(\vec{b},\ \vec{c}\right)+\left(\vec{c},\ \vec{a}\right)$, если $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$.

2.18. Даны точки $A(-5,\ 7,\ -6)$ и $B(7,\ -9,\ 9)$. Найти проекцию вектора $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ на направление вектора $\overrightarrow{AB}$.

2.19. Найти координаты вектора $\vec{a}$, если $\left(\widehat{\vec{a},\vec{i}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$,

$\left(\vec{a},\hat{}\vec{j}\right)=\dfrac{\pi}{4}$, $|\vec{a}|=6$.

2.20. Найти вектор $\vec{x}$, ортогональный вектору $\vec{a}(12,\ -3,\ 4)$, имеющий с ним одинаковую длину и лежащий в плоскости Oyz.

2.21. Найти угол между векторами $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, если $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1,\ \left(\vec{m},\hat{}\vec{n}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$.

2.22. Найти проекцию вектора $\vec{a}\ (4,\ -3,\ 4)$ на направление вектора $\vec{b}(2,\ 2,\ 1)$.

2.23. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если векторы $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ и $\vec{b}=5\vec{m}-4\vec{n}$ ортогональны?

2.24. Доказать, что скалярное произведение двух векторов не изменится, если к одному из них прибавить вектор, ортогональный другому сомножителю.

2.25. При каких значениях α и β векторы $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=5\vec{i}+\beta\vec{j}-\vec{k}$ коллинеарны?

Задача 3

3.1. Найти $\left[2\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}\right]$, где $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$; $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

3.2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-3\vec{n}$, если $|\vec{m}|=5$; $|\vec{n}|=3$, $\left(\vec{m},\hat{}\vec{n}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

3.3. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\dfrac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}|=6, |\vec{b}|=3, |\vec{c}|=3$, вычислить $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

3.4. Найти $\left[2\vec{a}-\vec{b},\ 2\vec{a}+\vec{b}\right]$, где $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{b}=3\vec{k}-\vec{i}-2\vec{j}$.

3.5. Найти вектор $\vec{x}$, если известно, что он ортогонален векторам $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ и $\left(\vec{x},\ 2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}\right)=51$.

3.6. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если он ортогонален векторам $\vec{a}(2,\ 3,\ -1)$, $\vec{b}(1,\ -1,\ 3)$ и $|\vec{x}|=1$.

3.7. Найти единичный вектор $\vec{d}$, компланарный векторам $\vec{a}(2,\ -1,\ 3)$ и $\vec{b}(4,\ 2,\ 0)$ и ортогональный вектору $\vec{c}(1,\ 1,\ 1)$.

3.8. Вычислить площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-3\vec{n}$, если $|\vec{m}|=5$, $|\vec{n}|=3$, $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

3.9. Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, сторонами которого служат векторы $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$.

3.10. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3.11. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=4\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{j}+3\vec{k}$, образует с осью Oy тупой угол. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $|\vec{x}|=26$.

3.12. Вычислить площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A(1,\ -1)$, $B(2,\ -3)$, $C(1,\ 4)$.

3.13. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(0,\ 0,\ 0)$, $B(3,\ 4,\ -1)$, $C(2,\ 3,\ 5)$, $D(6,\ 0,\ -3)$. Найти длину высоты, проведенной из вершины A.

3.14. Проверить, лежат ли точки $A(2,\ -1,\ 2)$, $B(3,\ 0,\ 5)$, $C(-1,\ 2,\ 3)$, $D(0,\ 2,\ -1)$ в одной плоскости.

3.15. Проверить, компланарны ли векторы $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{c}=7\vec{i}+14\vec{j}-13\vec{k}$.

3.16. Дана треугольная пирамида с вершинами $A(0, 0, 1)$, $B(2, 3, 4)$, $C(6, 2, 3)$, $D(3, 7, 2)$. Найти длину высоты пирамиды, проведенной на грань BCD.

3.17. Найти площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

3.18. Найти $\left[3\vec{a} - \vec{b}, \vec{a}\right]$, если $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

3.19. Найти $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку и взаимно перпендикулярны, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 4$.

3.20. Показать, что точки $A(3, 1, -1)$, $B(5, 7, -2)$, $C(1, 5, 0)$ и $D(9, 4, -4)$ лежат в одной плоскости.

3.21. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j}$.

3.22. Найти единичный вектор, ортогональный векторам $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

3.23. Вершинами треугольной пирамиды являются точки $A(-5, 4, 8)$, $B(2, 3, 1)$, $C(4, 1, -2)$ и $D(6, 3, 7)$. Найти длину высоты, проведенной на грань BCD.

3.24. Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

3.25. Проверить, лежат ли точки $A(-1, 2, 3)$, $B(0, 4, -1)$, $C(2, 3, 1)$ и $D(-2, 1, 0)$ в одной плоскости.

Задача 4

4.1. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат перпендикулярно прямой $2x - 6y + 13 = 0$.

4.2. Найти угол между прямой $2x + 3y - 1 = 0$ и прямой, проходящей через точки $M_1(-1; 2)$, $M_2(0; 3)$.

4.3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;\,4)$ параллельно прямой $2x+3y-4=0$.

4.4. Дан треугольник с вершинами в точках $A(-1,\,2)$, $B(0,1)$ и $C(1,\,4)$. Написать уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно противоположной стороне.

4.5. При каком значении параметра α прямые $(3\alpha+2)x+$ $+(1-4\alpha)y+8=0$ и $(5\alpha-2)x+(\alpha+4)y-7=0$ взаимно перпендикулярны?

4.6. Даны вершины треугольника $A(3,\,5)$, $B(-3,\,3)$ и $C(5,\,-8)$. Определить длину медианы, проведенной из вершины *C*.

4.7. При каких значениях α прямые $\alpha x-2y-1=0$ и $6x-4y-3=0$:

а) параллельны; б) имеют одну общую точку?

4.8. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(4;\,3)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, если $M_1(0,\,-2)$, $M_2(3,\,5)$.

4.9. Дан треугольник с вершинами в точках $M_1(2,\,5)$, $M_2(-1,\,3)$ и $M_3(0,\,0)$. Составить уравнение медианы, проведенной из вершины M_3.

4.10. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(-1,\,2)$ перпендикулярно прямой, соединяющей точки $M_2(2,\,3)$ и $M_3(0,\,-1)$.

4.11. На прямой $2x+y+11=0$ найти точку, равноудаленную от двух данных точек $A(1,1)$ и $B(3,\,0)$.

4.12. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;1)$ параллельно прямой $4x+y-5=0$.

4.13. Найти расстояние между прямыми $3x-4y+25=0$ и $6x-8y-50=0$.

4.14. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;\ 2,\ 3)$ параллельно вектору $\overrightarrow{AB}$, если $A(-1;\ 2,\ 4)$, $B(3;\ 5,\ 8)$.

4.15. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0. \end{aligned}\right\}$$

4.16. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;\ 3)$ и точку пересечения прямых $2x-y-1=0$, $3x+y-4=0$.

4.17. Найти значения параметров a и d, при которых прямая

$$\left.\begin{aligned} x &= 3+4t \\ y &= 1+4t \\ z &= -3+t \end{aligned}\right\}$$ принадлежит плоскости $ax+2y-4z+d=0$.

4.18. Дан треугольник с вершинами в точках $A(1,\ 5)$, $B(-4,\ 3)$, $C(2,\ 9)$. Найти уравнение высоты, проведенной из вершины A.

4.19. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-5y+2=0$, $5x-2y+4=0$ и точку $A(1,\ 3)$.

4.20. Дан треугольник с вершинами в точках $A(1,\ 1)$, $B(-2,\ 3)$, $C(4,\ 7)$. Написать уравнение медианы, проведенной из вершины А.

4.21. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,\ -1)$ параллельно прямой, соединяющей точки $M_1(2,-3)$ и $M_2(5,\ 1)$.

4.22. Даны уравнения сторон треугольника $x+2y-1=0$, $5x+4y-17=0$, $x-4y+11=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через одну из вершин треугольника параллельно противоположной стороне.

4.23. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(2, 3)$ ортогонально вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, если $M_2(4, 5)$.

4.24. Выяснить, принадлежат ли точки $A(-1,\ 2)$, $B(3,\ 4)$ и $C(1,\ 2)$ одной прямой.

4.25. Даны точки $A(-1, 2, 3)$, $B(3, 1, 2)$ и $C(1, 3, 1)$. Найти точку пересечения медиан треугольника ABC.

Задача 5

Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Требуется найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) объем пирамиды; 5) уравнение прямой A_1A_4; 6) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 7) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Сделать чертеж.

5.1. $A_1(3,3,9)$, $A_2(6,9,1)$, $A_3(1,7,3)$, $A_4(8,5,8)$.

5.2. $A_1(3,5,4)$, $A_2(5,8,3)$, $A_3(1,9,9)$, $A_4(6,4,8)$.

5.3. $A_1(2,4,3)$, $A_2(7,6,3)$, $A_3(4,9,3)$, $A_4(3,6,7)$.

5.4. $A_1(9,5,5)$, $A_2(-3,7,1)$, $A_3(5,7,8)$, $A_4(6,9,2)$.

5.5. $A_1(0,7,1)$, $A_2(4,1,5)$, $A_3(4,6,3)$, $A_4(3,9,8)$.

5.6. $A_1(5,5,4)$, $A_2(3,8,4)$, $A_3(3,5,10)$, $A_4(5,8,2)$.

5.7. $A_1(6,1,1)$, $A_2(4,6,6)$, $A_3(4,2,0)$, $A_4(1,2,6)$.

5.8. $A_1(7,5,3)$, $A_2(9,4,4)$, $A_3(4,5,7)$, $A_4(7,9,6)$.

5.9. $A_1(6,6,2)$, $A_2(5,4,7)$, $A_3(2,4,7)$, $A_4(7,3,0)$.

5.10. $A_1(1,-3,1)$, $A_2(-3,2,-3)$, $A_3(-3,-3,3)$, $A_4(-2,0,-4)$.

5.11. $A_1(1,-1,6)$, $A_2(4,5,-2)$, $A_3(-1,3,0)$, $A_4(6,1,5)$.

5.12. $A_1(1,1,1)$, $A_2(3,4,0)$, $A_3(-1,5,6)$, $A_4(4,0,5)$.

5.13. $A_1(0,0,0)$, $A_2(5,2,0)$, $A_3(2,5,0)$, $A_4(1,2,4)$.

5.14. $A_1(7,1,2)$, $A_2(-5,3,-2)$, $A_3(3,3,5)$, $A_4(4,5,-1)$.

5.15. $A_1(-2,3,-2)$, $A_2(2,-3,2)$, $A_3(2,2,0)$, $A_4(1,5,5)$.

5.16. $A_1(3,1,1)$, $A_2(1,4,1)$, $A_3(1,1,7)$, $A_4(3,4,-1)$.

5.17. $A_1(4,-3,-2)$, $A_2(2,2,3)$, $A_3(2,-2,-3)$, $A_4(-1,-2,3)$.

5.18. $A_1(5,1,0)$, $A_2(7,0,1)$, $A_3(2,1,4)$, $A_4(5,5,3)$.

5.19. $A_1(4,2,-1)$, $A_2(3,0,4)$, $A_3(0,0,4)$, $A_4(5,-1,-3)$.

5.20. $A_1(0,0,2)$, $A_2(3,0,5)$, $A_3(1,1,0)$, $A_4(4,1,2)$.

5.21. $A_1(3,0,5)$, $A_2(0,0,2)$, $A_3(4,1,2)$, $A_4(1,1,0)$.

5.22. $A_1(1,1,0)$, $A_2(4,1,2)$, $A_3(0,0,2)$, $A_4(3,0,5)$.

5.23. $A_1(4,1,2)$, $A_2(1,1,0)$, $A_3(3,0,5)$, $A_4(0,0,2)$.

5.24. $A_1(0,0,0)$, $A_2(3,-2,1)$, $A_3(1,4,0)$, $A_4(5,2,3)$.

5.25. $A_1(3,1,0)$, $A_2(0,7,2)$, $A_3(-1,0,-5)$, $A_4(4,1,5)$.

Задача 6

Построить на плоскости кривую, приведя ее уравнение к каноническому виду.

6.1. $x^2+8x+2y+20=0$.

6.2. $3x^2-4y^2+18x+15=0$.

6.3. $x^2+2y^2-2x+8y+7=0$.

6.4. $x^2+8x+y+15=0$.

6.5. $x^2+y^2+4x-10y+20=0$.

6.6. $5x^2+9y-30x+18y+9=0$.

6.7. $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$.

6.8. $9x^2-16y^2-5x-64y-127=0$.

6.9. $2x^2+8x-y+12=0$.

6.10. $x^2+4y^2-6y+3=0$.

6.11. $9x^2+4y^2-54x-32y+109=0$.

6.12. $x^2-5x-y+7=0$.

6.13. $x^2-4y^2+6x+16y-11=0$.

6.14. $4x^2 + 8x - y + 7 = 0$.

6.15. $9x^2 + 4y^2 - 18x = 0$.

6.16. $x + 2y^2 - 8y + 3 = 0$.

6.17. $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y = 3$.

6.18. $x - 5y^2 + 10y - 6 = 0$.

6.19. $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y = 24$.

6.20. $x^2 + 6x + 5 = 2y$.

6.21. $9x^2 + 10y^2 + 40y - 50 = 0$.

6.22. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

6.23. $x - 2y^2 + 12y - 14 = 0$.

6.24. $y^2 + 2y + 4x - 11 = 0$.

6.25. $x^2 + 2y^2 + 2x = 0$.

Задача 7

Построить поверхность, приведя ее уравнение к каноническому виду.

7.1. а) $z = 1 - x^2 - y^2$; б) $z = 4 - x^2$.

7.2. а) $x^2 + 2x + 2y^2 + 4z^2 = 0$; б) $y^2 + 5y + z = 4$.

7.3. а) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 6x = 0$; б) $x^2 + z^2 = 2z$.

7.4. а) $2y^2 + z^2 = 1 - x$; б) $xy = 4$.

7.5. а) $9x^2 + 4y^2 - 8y - z^2 = 32$; б) $x^2 - y^2 - 6x = 0$.

7.6. а) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 2z = 0$; б) $z^2 + 4z - 6y - 20 = 0$.

7.7. а) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$; б) $y^2 = 4x + 1$.

7.8. а) $z = 2 + x^2 + y^2$; б) $z = 1 - x^2$.

7.9. а) $36x^2 + 16y^2 - 9z^2 + 18z = 9$; б) $z^2 - 2z - 8x - 7 = 0$.

7.10. а) $x^2 - y^2 - z^2 = 0$; б) $y^2 = 4x - 2$.

7.11. а) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$; б) $y = x^2$.

7.12. а) $x^2 + 3y^2 - z^2 + 2z = 2$; б) $x = 1 - z^2$.

7.13. а) $2x^2 - 4y^2 + z^2 = 2z$; б) $x^2 + 5z = 2x$.

7.14. а) $z = 4 - x^2 - y^2$; б) $x^2 + y^2 = 2y$.

7.15. а) $2y^2 + x^2 - 4x - 4z^2 + 4 = 0$; б) $z = (x-1)^2$.

7.16. а) $y^2 - 2y - z^2 - x^2 = 0$; б) $x = y^2$.

7.17. а) $x^2 + y^2 - 2y = 2z - 1$; б) $z^2 + y^2 = 2z$.

7.18. а) $x^2 + y^2 = 2z + 6$; б) $x^2 + z^2 - 6z = 0$.

7.19. а) $9x^2 + 4y^2 + 8y - 36z^2 = 32$; б) $2x^2 + 5y = 10$.

7.20. а) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$; б) $z^2 = 7x$.

7.21. а) $5x^2 + 15y^2 - 4z^2 + 8z - 24 = 0$; б) $4x^2 - y^2 = 8$.

7.22. а) $4z^2 = x^2 + 2y^2 + 2x + 3$; б) $xy = 9$.

7.23. а) $x^2 - 4y^2 + z^2 - 8y = 4$; б) $x^2 + y^2 - 3 = 0$.

7.24. а) $x^2 + y^2 + 2z = 0$; б) $x^2 - y^2 + 4 = 0$.

7.25. а) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$; б) $x = 2 - y^2$.

Типовой расчет № 2
Предел функции. Производная и ее применение к исследованию функций и построению графиков

Задача 1

Найти пределы функции, не пользуясь правилом Лопиталя.

1.1. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+7x+12}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+2x+1}{3x^3+3x^2-2}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right)^{x+2}$.

1.2. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-3x+2}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-2x^3+1}{5x^3+4x+3}$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$.

1.3. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+x-4}{3x^2+5x+2}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5+4x-12}{3x^6-4x^2+1}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{x^2}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+2}\right)^{x+2}$.

1.4. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+x^2-6}{2x^4-x-12}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\,\mathrm{tg}\,x}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$.

1.5. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+4x+1}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-8x+1}{7x^5+4x^2+5}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$.

1.6. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-10}{x^2-x-2}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-6x-5}{5x^2-x-1}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{x}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

1.7. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\dfrac{x}{2}-1}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2+(x+1)^2}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^{2x}$.

1.8. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x^2+1}{4x^6+6x^3-3}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{ctg}2x}{\sin 2x}$. г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$.

1.9. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+10}{2x^2+9x+10}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+5x^2-3}{4x^6+6x^3-3}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$.

1.10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-x-1}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+5x^2-4x^5}{8-6x-x^5}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2\dfrac{x}{3}}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

1.11. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-x-10}{x^3-x-6}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-2x^4+3}{2x^6+3x^2-1}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{1-\sqrt{1-x^2}}$. г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{2x}-1}{x}$.

1.12. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{20+x-x^2}{3x^2-11x-20}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^3+x-5}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{2x\,\mathrm{tg}\,4x}$. г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$.

1.13. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-5x-21}{2x^2-3x-9}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^5-5x^2-1}{24x^4-4x+7}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin x\,\mathrm{ctg}\,3x$. г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\,\mathrm{tg}^2 x)^{\mathrm{ctg}^2 x}$.

1.14. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+7x+2}{2x^2+5x+2}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^6+5x^5-x^3+5}{3x^4-4x^3+1}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{3x\sin 2x}$. г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$.

1.15. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2+7x-15}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-3x-5x^2}{1+4x+2x^2}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{x^3}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)\big(\ln(2x+1)-\ln(2x-1)\big)$.

1.16. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-2x}{x^2-2x+1}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+x-3x^2}{1-3x+6x^3}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-3)\big(\ln(x-2)-\ln(x-1)\big)$.

1.17. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{3x^2-2x-1}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^2+x-2}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\,\mathrm{tg}\,2x}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\big(\ln(x+a)-\ln x\big)$.

1.18. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x-5}{2x^2-x-1}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\cos x-1}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-4)(\ln(2-3x)-\ln(5-3x))$.

1.19. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-9x-5}{x^2-4x-5}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 x-\sin 2x}{x\sin^2 2x}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-5)(\ln(2x+4)-\ln(2x+1))$.

1.20. а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{5x^2+9x-44}{2x^2+5x-12}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+1}{5x^2-x+2}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)(\ln(2x+3)-\ln(2x-4))$.

1.21. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-2x-15}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^3+3x^2}{2x^3-100x+1}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 8x-1}{1-\cos 4x}$. г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

1.22. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{x^2+3x+2}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-4x^2+5}{3x^2+x+3}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos mx}{x^2}$. г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$.

1.23. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2-7}{9x^4+3x+5}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{2x}$. г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec} x}$.

1.24. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+4}{5x^2-2x-3}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\arcsin x-\operatorname{arctg}2x}{x}$. г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x^2-x}}$.

1.25. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+2x-12}{x^2-3x+2}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-x^3+8}{100-x^3}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 3x}{x^2}$. г) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+5)-\ln x)$.

Задача 2

Исследовать данные функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии «б» дополнительно построить график функции.

2.1. а) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$. б) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{при } -\infty<x\le 1; \\ \dfrac{2}{x} & \text{при } 1<x<4; \\ x-3 & \text{при } x\ge 4. \end{cases}$

2.2. а) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$. б) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } -\infty<x\le 0; \\ \sin x & \text{при } 1<x<\dfrac{\pi}{6}; \\ \dfrac{1}{2} & \text{при } x\ge\dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$

2.3. а) $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$. б) $f(x)=\begin{cases} \ln x & \text{при } 0<x\le 1; \\ x-1 & \text{при } 1<x\le 3; \\ x^2-3 & \text{при } x>3. \end{cases}$

2.4. а) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{1-x}}$. б) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{tg}x & \text{при } 0<x\le\dfrac{\pi}{4}; \\ \dfrac{2\pi}{x} & \text{при } \dfrac{\pi}{4}<x<\pi; \\ \sin x+2 & \text{при } x\ge\pi. \end{cases}$

2.5. а) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$. б) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{при} \quad -\infty < x \le 1; \\ 3^x & \text{при} \quad 0 < x \le 2; \\ 6-x & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$

2.6. а) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$. б) $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{при} \quad 0 < x \le 1; \\ x^2+2 & \text{при} \quad 1 < x \le 2; \\ \dfrac{2}{x}+4 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$

2.7. а) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-x^3}$. б) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{при} \quad -\infty < x \le 1; \\ \dfrac{2}{x} & \text{при} \quad 1 < x \le 4; \\ x-2 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$

2.8. а) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}$. б) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{при} \quad -\infty < x \le 3; \\ 3x-7 & \text{при} \quad 3 < x \le 4; \\ 3+\sqrt{x} & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$

2.9. а) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$. б) $f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{при} \quad x \le 0; \\ 1-x & \text{при} \quad 0 < x \le 3; \\ x^2-5 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$

2.10. а) $f(x)=\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$. б) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0; \\ \operatorname{tg} x & \text{при} \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ \dfrac{4}{\pi}x & \text{при} \quad x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

2.11. а) $f(x)=\dfrac{2}{4-x^2}$. б) $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{при } x\le 0; \\ x & \text{при } 0<x\le \pi; \\ \sin x & \text{при } x>\pi. \end{cases}$

2.12. а) $f(x)=e^{\frac{1}{4x-2}}$. б) $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{при } x\le 1; \\ x & \text{при } 1<x\le 2; \\ x-2 & \text{при } x>2. \end{cases}$

2.13. а) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$. б) $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{при } x\le 0; \\ 1+x & \text{при } 0<x<1; \\ x & \text{при } x\ge 1. \end{cases}$

2.14. а) $f(x)=\dfrac{x+2}{x+4}$. б) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0; \\ 1 & \text{при } 0<x<1; \\ 2-x & \text{при } x\ge 1. \end{cases}$

2.15. а) $f(x)=2^{-\frac{1}{x+3}}$. б) $f(x)=\begin{cases} x & \text{при } x\le 0; \\ x^2 & \text{при } 0<x\le 1; \\ x^2+1 & \text{при } x>1. \end{cases}$

2.16. а) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+3x}$. б) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0; \\ 1 & \text{при } 0<x\le 1; \\ x & \text{при } x>1. \end{cases}$

2.17. а) $f(x)=\dfrac{3}{x^2-9}$. б) $f(x)=\begin{cases} \sin x & \text{при } x\le 0; \\ x^2 & \text{при } 0<x<1; \\ x-1 & \text{при } x\ge 1. \end{cases}$

2.18. а) $f(x)=4^{\frac{1}{4-x}}$. б) $f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{при } -\infty<x\le 0; \\ 1 & \text{при } 0<x\le 1; \\ 1-x & \text{при } x>1. \end{cases}$

2.19. а) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4x+3}$. б) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0;\\ -2 & \text{при} \quad 0<x\le 1;\\ x-2 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$

2.20. а) $f(x)=\dfrac{\sin(2-x)}{2-x}$. б) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad x\le 1;\\ x & \text{при} \quad 1<x\le 2;\\ 1-x^2 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$

2.21. а) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x\cdot\left(x^2-9\right)}{x^2-3x}$. б) $f(x)=\begin{cases}4-x^2 & \text{при} \quad -\infty<x\le 2;\\ x-1 & \text{при} \quad 2<x\le 4;\\ \sqrt{x}+1 & \text{при} \quad x>4.\end{cases}$

2.22. а) $f(x)=5^{\frac{1}{x-2}}$. б) $f(x)=\begin{cases}x^3 & \text{при} \quad -\infty<x\le 0;\\ -x^2+9 & \text{при} \quad 0<x\le 3;\\ x-3 & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$

2.23. а) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{2x^2-x^3}$. б) $f(x)=\begin{cases}x & \text{при} \quad -\infty<x\le 0;\\ -\sqrt{x} & \text{при} \quad 0<x\le 4;\\ (x-4)^2 & \text{при} \quad x>4.\end{cases}$

2.24. а) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x}$. б) $f(x)=\begin{cases}x+3 & \text{при} \quad -\infty<x\le 0;\\ \operatorname{tg}x & \text{при} \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{4};\\ 1 & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

2.25. а) $f(x)=3^{\frac{1}{1-x}}$. б) $f(x)=\begin{cases}-x & \text{при} \quad -\infty<x\le 0;\\ 1-x^2 & \text{при} \quad 0<x\le 1;\\ \ln x & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$

Задача 3

Найти производные функций.

3.1. а) $y=\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$; б) $y=x^{\arcsin x}$;

в) $x^4-6x^2y^2+9y^4-5x^2+15y^2-100=0$.

3.2. а) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{2x+1}{4}$; б) $y=x^{\frac{1}{\ln x}}$;

в) $x^y-y^x=0$.

3.3. а) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$; б) $y=x^x$;

в) $e^x+e^y-2^{xy}-3=0$.

3.4. а) $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$; б) $y=x^{\ln x}$;

в) $\sin\left(y-x^2\right)-\ln\left(y-x^2\right)+2\sqrt{y-x^2}-3=0$.

3.5. а) $y=\arcsin\dfrac{2x^3}{1+x^6}$; б) $y=x^{\sin x}$;

в) $\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}=0$.

3.6. а) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; б) $y=(\sin x)^{\cos x}$;

в) $x^2\sin y+y^3\cos x-2x-3y+1=0$.

3.7. а) $y=\arcsin\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$; б) $y=(x+1)^{\frac{2}{x}}$;

в) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$

3.8. а) $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$; б) $y=x^2e^{x^2}\sin 2x$;

в) $x^4+y^4=x^2y^2.$

3.9. а) $y=e^x-\sin e^x\cos^3 e^x-\sin^3 e^x\cos e^x$; б) $y=x^2e^{x^2}\ln x$;

в) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}.$

3.10. а) $y=\mathrm{arctg}(x+1)+\frac{x+1}{x^2+2x+2}$; б) $y=(x+1)^{\frac{2}{x}}$;

в) $2y\ln y=x.$

3.11. а) $y=\ln\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\cos x+\frac{1}{3}\cos^2 x$; б) $y=(\ln x)^x$;

в) $e^x\sin y-e^y\cos x=0.$

3.12. а) $y=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}$; б) $y=\frac{(x-2^2\cdot\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$;

в) $xy=\mathrm{arctg}\frac{x}{y}.$

3.13. а) $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$; б) $y=\frac{(x+1)^3\cdot\sqrt[4]{4-2x}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$;

в) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$

3.14. а) $y=\arccos\left(2e^{2x}-1\right)$; б) $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$;

в) $\sin(xy)+\cos(xy)=0.$

3.15. а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{3x-x^2}{1-3x^2}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$;

в) $2x+2^y=2^{x+y}$.

3.16. а) $y=\ln \operatorname{tg}\dfrac{e^{2\sin x}}{4}$; б) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

в) $x-y=\arcsin x-\arcsin y$.

3.17. а) $y=\dfrac{\operatorname{arctg}x}{2}-\ln\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$;

в) $x^2+y^2=r^2$.

3.18. а) $y=\sqrt{2x+1}\,(\ln(2x+1)-2)$; б) $y=2x^{\sqrt{x}}$;

в) $\operatorname{arctg}^{\frac{y}{x}}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

3.19. а) $y=\dfrac{1+\ln\cos x}{\cos x}$; б) $y=\left(x^2+1\right)^{\sin x}$;

в) $y^3-3y+3ax=0$.

3.20. а) $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}-\arcsin e^x$; б) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}}$;

в) $\cos(xy)=x$.

3.21. а) $y=\arccos\sqrt{1-e^x}$; б) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt[3]{x}}$;

в) $y^2\cos x=a^2\sin 3x$;

3.22. а) $y=\log_2\left(\sin^2 x\right)$; б) $y=(\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

в) $y^2-3y+2x^3=0$.

3.23. а) $y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^4$; б) $y=(\sin x)^{\arcsin x}$;

в) $e^{y} + xy = 1.$

3.24. а) $y = \ln\left(2x^3 + 3x^2\right);$ б) $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x};$

в) $x\sin y + y\sin x = 0.$

3.25. а) $y = \left(x^2 + 2x + 2\right)e^{-x};$ б) $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\cos\sqrt{x}};$

в) $\dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} = 0.$

Задача 4

Найти производные второго порядка от функций:

4.1. $y = \cos^2 x.$ 4.2. $y = \operatorname{arctg} x^3.$

4.3. $y = \log_2 \sqrt[3]{1 - x^4}.$ 4.4. $y = e^{-x^2}.$

4.5. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}.$ 4.6. $y = -\dfrac{22x}{x + 5}.$

4.7. $y = \dfrac{1}{4}x^2\left(2\ln x - 3\right).$

4.8. $y = \dfrac{1}{3}x^2 \cdot \sqrt{1 - x^2} + \dfrac{2}{3} \cdot \sqrt{1 - x^2} + x\arcsin x \cdot$

4.9. $y = -\dfrac{1}{9}x \cdot \sin 3x - \dfrac{2}{27}\cos 3x.$ 4.10. $y = \sin^2 x.$

4.11. $y = \operatorname{tg} x.$ 4.12. $y = \sqrt{1 + x^2}.$

4.13. $y = \left(x^2 - 3x + 2\right)^3.$ 4.14. $y = x \cdot e^{x^2}.$

4.15. $y = \dfrac{1}{1 + x^3}.$ 4.16. $y = \left(1 + x^2\right)\operatorname{arctg} x.$

4.17. $y = \sqrt{a^2 - x^2}.$ 4.18. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right).$

4.19. $y = e^{\sqrt{x}}$.

4.20. $y = \sqrt{1 - x^2} \cdot \arcsin x$.

4.21. $y = \arcsin(a \cdot \sin x)$.

4.22. $y = x \cdot \sqrt{1 + x^2}$.

4.23. $\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

4.24. $y = \ln\left(x^2 + \sqrt{1 + x^4}\right)$.

4.25. $y = x \ln x$.

4.26. $y = \dfrac{11}{x - 3}$.

Задача 5

Найти производные первого и второго порядков от функций, заданных параметрически:

5.1. $x = t^2 + 2;\ \ y = \dfrac{1}{3}t^3 - 1$.

5.2. $x = \arcsin t;\ \ y = \sqrt{1 - t^2}$.

5.3. $x = at^2;\ \ y = bt^3$.

5.4. $x = \cos t;\ \ y = \sin t$.

5.5. $x = a(t - \sin t);\ \ y = a(1 - \cos t)$.

5.6. $x = a\cos^2 t;\ \ y = a\sin^2 t$.

5.7. $x = \ln t;\ \ y = t^2 - 1$.

5.8. $x = \arcsin t;\ y = \ln\left(1 - t^2\right)$.

5.9. $x = at \cdot \cos t;\ y = at \cdot \sin t$.

5.10. $x = \arccos\sqrt{t};\ \ y = \sqrt{t - t^2}$.

5.11. $x = \dfrac{1}{\cos t};\ \ y = \operatorname{tg} t$.

5.12. $x = \operatorname{arctg} t;\ \ y = \ln\left(1 + t^2\right)$.

5.13. $x = a\cos^3 t;\ \ y = a\sin^3 t$.

5.14. $x = R\sin t + \sin Rt;\;\; y = R\cos t + \cos Rt$.

5.15. $x = t^2 + 2t;\;\; y = \ln(t+1)$.

5.16. $x = 1 + e^{\alpha t};\;\; y = \alpha t + e^{-\alpha t}$.

5.17. $x = \cos t + t\sin t;\;\; y = \sin t - t\cos t$.

5.18. $x = 2\cos t;\;\; y = \sin t$.

5.19. $x = t^2;\;\; y = t + t^3$.

5.20. $x = e^{2t};\;\; y = e^{3t}$.

5.21. $x = 2\cos^2 t;\;\; y = 2\sin^2 t$.

5.22. $x = 1 + e^{t};\;\; y = t + e^{-t}$.

5.23. $x = 2\sin t + \sin 2t;\;\; y = 2\cos t + \cos 2t$.

5.24. $x = e^{t}\cos t;\;\; y = e^{t}\sin t$.

5.25. $x = e^{2t} + 4;\;\; y = e^{3t} - 5$.

Задача 6

Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы функций:

6.1. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}+1}{\sqrt{x+2}+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

6.2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\alpha x}{1-\cos\beta x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

6.3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x$.

6.4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1+x)}$.

6.5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

6.6. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot\operatorname{ctg}x$.

6.7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}\ (\alpha>0)$.

6.8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^{100}}{e^{x}}$.

6.9. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{\sin\dfrac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

6.10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-b^{x}}{\operatorname{tg}x}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}(1+x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

6.11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^3}}$.

6.12. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)x$.

6.13. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{x}}{x^5}$.

6.14. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^{\ln x}-1}{\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^{1000}}{2x^{100}+1}$.

6.15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{5x}}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}x^{\frac{1}{1+x}}$.

6.16. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin^2 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x}{1+\cos 4x}$;   б) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

6.17. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{3^x}$.

6.18. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}\sin\frac{1}{x}}$.

6.19. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - \cos\alpha x}{e^{\beta x} - \cos\beta x}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^{10}}}$.

6.20. а) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

6.21. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 4x}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^9}{3^x}$.

6.22. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^3} - 1}{\cos x - 1}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\dfrac{a}{x}$.

6.23. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x} + x - 1}{\sin 2x}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arctg} x}$.

6.24. а) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} - \dfrac{1}{x}\right)$;   б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}$.

6.25. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

Задача 7

Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке x_0.

7.1. xe^{2x}, $x_0 = -1$.

7.2. $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $x_0 = 0$.

7.3. e^x, $x_0 = -1$.

7.4. 4^x, $x_0 = 0$.

7.5. $\sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

7.6. $x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$, $x_0 = 1$.

7.7. $\frac{1}{x+8}$, $x_0 = 0$.

7.8. $x\cos x$, $x_0 = 0$.

7.9. $\frac{x}{x-1}$, $x_0 = 2$.

7.10. $e^{\sin x}$, $x_0 = 0$.

7.11. $\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$, $x_0 = 0$.

7.12. $\ln(1 + \sin x)$, $x_0 = 0$.

7.13. $\ln(5 - 4x)$, $x_0 = 0$.

7.14. 3^x, $x_0 = 0$.

7.15. $\frac{1}{x}$, $x_0 = 1$.

7.16. e^{5x-1}, $x_0 = 0$.

7.17. $\frac{1}{x+2}$, $x_0 = -3$.

7.18. $\arcsin x$, $x_0 = 0$.

7.19. $x^3 \ln x$, $x_0 = 1$.

7.20. $\ln x$, $x_0 = 1$.

7.21. $x^5 - 5x^3 + x$, $x_0 = 2$.

7.22. $\ln(x + 5)$, $x_0 = 0$.

7.23. $\sin\frac{x}{3}$, $x_0 = 0$.

7.24. xe^x, $x_0 = 0$.

7.25. $\frac{1}{3 - 2x}$, $x_0 = 0$.

З а д а ч а 8

Исследовать функцию и построить ее график.

8.1. $y=\frac{1-x^2}{x^2}$.

8.2. $y=\frac{x}{(1+x)^3}$.

8.3. $y=\frac{4x^2+1}{x}$.

8.4. $y=\frac{x^3}{x^2-1}$.

8.5. $y=\frac{x^3}{2(1+x)^2}$.

8.6. $y=\frac{x^3+2}{2x}$.

8.7. $y=\frac{4x}{4+x^2}$.

8.8. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

8.9. $y=\frac{x^2}{x-1}$.

8.10. $y=\frac{4x^3+5}{x}$.

8.11. $y=\frac{x^4}{x^3-1}$.

8.12. $y=\frac{2-4x^2}{1-4x^2}$.

8.13. $y=\frac{2+x^3}{x^2}$.

8.14. $y=\frac{x^4+1}{x^2}$.

8.15. $y=\frac{x^3}{1-x^2}$.

8.16. $y=\frac{4x^3}{1-x^3}$.

8.17. $y=\frac{x^2}{1-x}$.

8.18. $y=\frac{x^4}{1-x^2}$.

8.19. $y=\frac{x^3}{x^2-4}$.

8.20. $y=\frac{x^3}{(x-2)^2}$.

8.21. $y=\frac{x^3-1}{x^2}$.

8.22. $y=\frac{4x^3}{x^3-1}$.

8.23. $y=\frac{x^2-5}{x-3}$.

8.24. $y=x^2e^{-x}$.

8.25. $y=x\sqrt{1-x^2}$.

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Практикум

В 4 частях

ЧАСТЬ I

Составители:
БРИЧИКОВА Елена Алексеевна
ГЕРАСИМОВА Екатерина Александровна
РАЕВСКАЯ Лариса Алексеевна и др.

Технический редактор *О. В. Песенько*

Подписано в печать 17.01.2014. Формат $60 \times 84^1/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 7,79. Уч.-изд. л. 6,09. Тираж 800. Заказ 992.
Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.