МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Информационно-измерительная техника
и технологии»

И. З. Джилавдари
Н. Н. Ризноокая

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗМЕРЕНИЙ

(сборник задач)

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей
1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника»;
1-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности»;
1-54 01 02 «Методы и приборы контроля качества
и диагностики состояния объектов»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области обеспечения качества*

Минск
БНТУ
2020

УДК 53.08(076.1)
ББК 30.10я7
Д41

Р е ц е н з е н т ы:
доцент кафедры медицинской и биологической физики
Белорусского государственного медицинского университета,
канд. физ.-мат. наук, доцент *А. А. Иванов*;
зав. кафедры «Физика» Белорусского государственного аграрного
технического университета, канд. физ.-мат. наук, доцент *В. К. Долгий*

Джилавдари, И. З.
Д41 Физические основы измерений (сборник задач) : учебно-методическое пособие для студентов специальностей 1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника»; 1-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности»; 1-54 01 02 «Методы и приборы контроля качества и диагностики состояния объектов» / И. З. Джилавдари, Н. Н. Ризноокая. – Минск: БНТУ, 2020. – 57 с.
ISBN 978-985-583-529-6.

Предлагаемое учебное пособие содержит 70 задачи с решениями и 64 задачи для самостоятельного решения. Все задачи разбиты на четыре раздела. Даны рекомендации преподавателям по составлению вариантов заданий для контрольных работ, выполняемых студентами.

УДК 53.08(076.1)
ББК 30.10я7

ISBN 978-985-583-529-6

© Джилавдари И. З., Ризноокая Н. Н., 2020
© Белорусский национальный технический университет, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данный сборник задач предназначен для самостоятельной работы студентов при изучении курса «Физические основы измерений». Здесь представлены четыре раздела курса: «Статические характеристики и статические погрешности средств измерений», «Динамические свойства и погрешности средств измерений», «Согласование измерительных преобразователей» и «Шумы и помехи».

В каждом разделе имеются задачи с решениями и задачи без решений. Первые задачи (всего их 70) позволяют изучить как само содержание данных разделов, так и методику решения задач. Задачи без решений (всего их 64) студенты должны решать самостоятельно. Большинство из них могут быть решены на основе содержания задач с решениями. Для решения остальных задач потребуется знать содержание курса лекций по физическим основам измерений, а также некоторых разделов рекомендуемых в курсе учебных пособий.

Предлагаемые задачи могут быть использованы преподавателями при текущем контроле знаний студентов. Задачи без решений можно также использовать при составлении заданий для контрольных и курсовых работ для студентов-заочников. В конце задачника даны рекомендации по составлению вариантов заданий. Число возможных вариантов практически неограниченно.

Основная часть задач составлена и решена автором данного пособия. Ряд задач являются стандартными, они перекочевывают из пособия в пособие, и их авторство установить невозможно. Формулировки нескольких задач взяты из книги «Методы подавления шумов и помех в электронных системах» Г. Отт.

1. СТАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И СТАТИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Отношение амплитуд U_1/U_2 двух сигналов, выраженное в децибеллах, равно N дБ. Найти отношение этих амплитуд в безразмерных единицах, т. е. значение отношения U_1/U_2. Найти также отношение мощностей P_1/P_2 этих сигналов.

Решение. Отношение амплитуд сигналов, выраженное в логарифмах, имеет вид $1\text{дБ} = 20 \cdot \log \dfrac{U_1}{U_2}$. При величине отношения N дБ отношение самих амплитуд $U_1 / U_2 = 10^{N/20}$. Так как $P = U^2$, то $\dfrac{P_1}{P_2} = \left(\dfrac{U_1}{U_2}\right)^2 = 10^{N/10}$.

Ответ: $U_1 / U_2 = 10^{N/20}$; $P_1 / P_2 = 10^{N/10}$.

2. На рис. 1 показан простейший фильтр высоких частот. Найти частоту, на которой отношение сигнала на выходе к сигналу на входе фильтра равно n дБ.

Решение. АЧХ фильтра, т. е. отношение $\dfrac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \dfrac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$.

Отсюда имеем

$$20 \cdot \log \frac{U_{\text{вх}}}{U_{\text{вых}}} = -20 \cdot \log \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} =$$

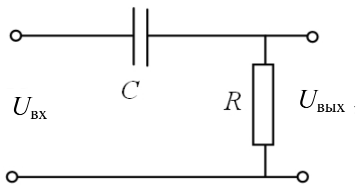


Рис. 1

Из этого равенства получим $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{10^{2n/20} - 1}} \dfrac{1}{RC}$.

Ответ: $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{10^{2n/20} - 1}} \dfrac{1}{RC}$.

3. Какой максимальный ток $I_{макс}$ можно измерить амперметром с пределом $I_к$ и с внутренним сопротивлением $R_{вн}$, если сопротивление шунта $R_ш$?

Решение. Схема подключения шунта к амперметру представлена на рис. 2. Показания амперметра $I_А$ связаны с измеряемым током I_X соотношением

$$I_А = \frac{R_ш}{R_{вн} + R_ш} I_x = \frac{1}{1 + \frac{R_{вн}}{R_ш}} I_х \rightarrow$$

$\rightarrow \ I_х = \left(1 + \frac{R_{вн}}{R_ш}\right) I_А$. Следовательно, $I_{макс} = \left(1 + \frac{R_{вн}}{R_ш}\right) I_к$.

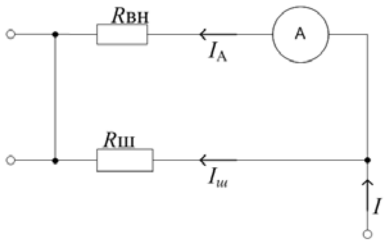


Рис. 2

Ответ: $I_{макс} = \left(1 + \frac{R_{вн}}{R_ш}\right) I_к$.

4. Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента имеет вид: $I = kU^2$. Найти напряжение на нагрузке R (рис. 3), если входное напряжение равно $U_{вх}$.

Решение. По закону Кирхгофа

$$U_{вх} = U_{нел\ эл} + U_R;$$

$$U_{нел\ эл} = \sqrt{I/k};$$

$$U_R = IR.$$

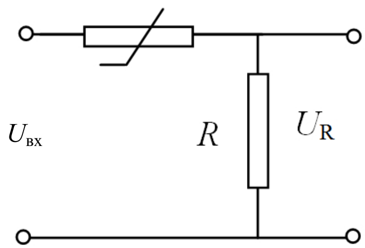


Рис. 3

Ток в резисторе

$$I = \frac{1 + 2kRU_{вх} \pm \sqrt{\left(1 + 2kRU_{вх}\right)^2 - 4\left(kRU_{вх}\right)^2}}{2kR^2} = \frac{1 + 2kRU_{вх} \pm \sqrt{1 + 4kRU_{вх}}}{2kR^2}.$$

При $k \rightarrow 0$ ток I должен стремится к нулю (это следует из формулы $I = kU^2$). Поэтому в предыдущей формуле необходимо выбрать знак «минус». Учитывая, что $U_R = IR$, имеем

$$U_{\text{R}} = \frac{1 + 2kRU_{\text{вх}} - \sqrt{1 + 4kRU_{\text{вх}}}}{2kR}.$$

Ответ: $U_{\text{R}} = \dfrac{1 + 2kRU_{\text{вх}} - \sqrt{1 + 4kRU_{\text{вх}}}}{2kR}.$

5. Найти относительную погрешность вычисления длины окружности по заданному значению радиуса, если для числа π взять значение 3,14.

Решение. Считая, что радиус известен точно, из формулы $l = 2\pi R$, имеем $\dfrac{\Delta l}{l} \approx \dfrac{\Delta\pi}{\pi}$. $\pi \approx 3{,}141592\ldots$ Следовательно, значение $\pi \approx 3{,}14$ дает погрешность $\Delta\pi \approx 0{,}0016$. Тогда $\dfrac{\Delta l}{l} \approx \dfrac{\Delta\pi}{\pi} = \dfrac{0{,}0016}{3{,}14} =$ $= 5 \cdot 10^{-4}$.

Ответ: $\dfrac{\Delta l}{l} \approx 5 \cdot 10^{-4}$.

6. Период малых колебаний математического маятника вычисляется по формуле $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Найти относительную методическую погрешность оценки периода, если амплитуда колебаний маятника равна α (значения l и g считать точными).

Решение. Во втором приближении $T(\alpha)$ дается формулой $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}\left(1 + \dfrac{\alpha^2}{16}\right) = T \cdot \left(1 + \dfrac{\alpha^2}{16}\right)$. Тогда $\Delta T = T_2 - T = \dfrac{\alpha^2}{16} \cdot T$. Отсюда относительная погрешность периода $\dfrac{\Delta T}{T} \approx \dfrac{\alpha^2}{16}$.

Ответ: $\dfrac{\Delta T}{T} \approx \dfrac{\alpha^2}{16}$.

7. Амперметром с пределом измерения $I_{\text{к}}$ нужно измерить силу тока I. Сопротивление амперметра $R_{\text{вн}}$. Рассчитать:

1) Сопротивление шунта для измерения тока I.

2) Относительную погрешность измерения силы тока, если погрешность нуля прибора $\Delta I_A = 0{,}1 I_{\text{к}}$ и величины сопротивлений

шунта и внутреннего сопротивления известны с погрешностями $\dfrac{\Delta R_{ш}}{R_{ш}} = \dfrac{\Delta R_{вн}}{R_{вн}} = \gamma$.

Решение. 1) На рис. 2 показана схема подключения (задача № 3). Показания амперметра $I_{А}$ связаны с измеряемым током I соотношением

$$I_{ш} R_{ш} = I_{А} R_{вн}, \quad I_{ш} = \frac{I_{А} R_{вн}}{R_{ш}};$$

$$I = I_{А} + I_{ш} \Rightarrow I_{ш} = I - I_{А};$$

$$I - I_{А} = \frac{I_{А} R_{вн}}{R_{ш}} \Rightarrow I_{А} = \frac{I}{\left(1 + \dfrac{R_{вн}}{R_{ш}}\right)}. \qquad (1)$$

Отсюда, считая $I_{А} = I_{К}$, найдем $R_{ш} = R_{вн} \dfrac{1}{I / I_{к} - 1}$.

2) Логарифмируя и дифференцируя формулу (1), получим

$$\frac{\mathrm{d}I_A}{I_A} = \frac{\mathrm{d}I}{I} - \frac{\mathrm{d}\left(1 + \dfrac{R_{вн}}{R_{ш}}\right)}{1 + \dfrac{R_{вн}}{R_{ш}}} = \frac{\mathrm{d}I}{I} - \frac{\dfrac{R_{вн}}{R_{ш}} \dfrac{dR_{вн}}{R_{вн}} - \dfrac{R_{вн}}{R_{ш}} \dfrac{dR_{ш}}{R_{ш}}}{1 + \dfrac{R_{вн}}{R_{ш}}}.$$

Заменяя здесь d на Δ и, так как Δ являются случайными погрешностями и могут иметь любой знак, а требуется оценить максимальную, заменяем знак «–» на знак «+».

Получим $\dfrac{\Delta I}{I} = \dfrac{\Delta I_A}{I_A} + \dfrac{2\gamma}{1 + \dfrac{R_{ш}}{R_{вн}}} = \dfrac{0{,}1 I_{к}}{I_A} + \dfrac{2\gamma}{1 + \dfrac{R_{ш}}{R_{вн}}} = 0{,}1 \dfrac{I_{к}}{I_A} + \dfrac{2\gamma}{1 + \dfrac{R_{ш}}{R_{вн}}}$.

Ответ: 1) $R_{ш} = R_{вн} \dfrac{1}{I / I_{к} - 1}$; 2) $\dfrac{\Delta I}{I} = 0{,}1 \dfrac{I_{к}}{I_A} + \dfrac{2\gamma}{1 + \dfrac{R_{ш}}{R_{вн}}}$.

8. Класс точности СИ обозначен в виде дроби $\frac{a}{b}$, абсолютная погрешность нуля равна Δ_{0x}, конечное значение шкалы x_k. Найти полный диапазон D этого СИ и его абсолютную Δ и относительную γ погрешность, если результат измерения равен x.

Решение. Класс точности СИ обозначают в виде $\frac{a}{b}$, когда относительную погрешность СИ описывают двучленной формулой:

$$\gamma(x) = \gamma(x_k) + \gamma(0)\left(\frac{x_k}{x} - 1\right),$$

где $a = \gamma(x_k)$ – относительная погрешность СИ в конце шкалы или на пределе измерения $(x = x_k)$; $b = \gamma(0)$ – относительная погрешность нуля СИ, так что $\gamma(0) = \frac{\Delta_{0x}}{x_k}$, причем $x \geq \Delta_{0x}$, a и b выражают в процентах.

Относительная γ погрешность, если результат измерения равен x

$$\gamma(x) = a + b\left(\frac{x_k}{x} - 1\right).$$

Абсолютная Δ погрешность, если результат измерения равен x

$$\Delta = x \cdot \gamma(x) = x\left(\gamma(x_k) + \gamma(0)\left(\frac{x_k}{x} - 1\right)\right) = x \cdot \gamma(x_k) + \gamma(0)(x_k - x).$$

Полный диапазон таких СИ выражают отношением $D = \frac{x_k}{\Delta_{0x}}$.

Ответ: $D = \frac{x_k}{\Delta_{0x}}$; $\gamma(x) = a + b\left(\frac{x_k}{x} - 1\right)$; $\Delta = x \cdot \gamma(x_k) + \gamma(0)(x_k - x)$.

9. Реальная чувствительность СИ на малом участке изменения входного сигнала x описывается формулой $F_{\text{реал}}(x) = a + bx + cx^2$. Найти абсолютную и относительную погрешности СИ, если его номинальная чувствительность дается формулой $F_{\text{ном}}(x) = b_0 x$.

Решение. Абсолютная погрешность любого СИ

$$\Delta y = F_{\text{реал}}(x) - F_{\text{ном}}(x) = a + bx - b_0 x + cx^2.$$

Погрешность нуля прибора $\Delta_0 y = a$. Абсолютная мультипликативная погрешность $\Delta_{\text{мульт}} y = (b - b_0)x$, абсолютная погрешность нелинейности $\Delta_{\text{нел}} y = cx^2$. Относительные погрешности найдем, разделив соответствующие составляющие погрешности Δy на $F_{\text{ном}}(x)$.

$$\frac{\Delta_0 y}{F_{\text{ном}}(x_k)} = \frac{a}{b_0 x_k};$$

(при расчете относительной погрешности нуля $x = x_k$, чтобы исключить неограниченный рост этой погрешности)

$$\frac{\Delta_{\text{мульт}} y}{F_{\text{ном}}(x)} = \frac{b}{b_0} - 1; \quad \frac{\Delta_{\text{нел}} y}{F_{\text{ном}}(x)} = \frac{cx}{b_0}.$$

Ответ: $\Delta_0 y = a$; $\Delta_{\text{мульт}} y = (b - b_0)x$; $\Delta_{\text{нел}} y = cx^2$; $\dfrac{\Delta_0 y}{F_{\text{ном}}(x_k)} = \dfrac{a}{b_0 x_k}$; $\dfrac{\Delta_{\text{мульт}} y}{F_{\text{ном}}(x)} = \dfrac{b}{b_0} - 1$; $\dfrac{\Delta_{\text{нел}} y}{F_{\text{ном}}(x)} = \dfrac{cx}{b_0}$.

10. Реальная чувствительность СИ на малом участке изменения входного сигнала x описывается формулой $F(x) = a \cdot \operatorname{sign}(x) + bx$. Найти абсолютную погрешность нуля по выходу $\Delta_0 y$ и по входу Δ_{0x}. Определить также мультипликативную погрешность СИ.

Решение. График зависимости $F(x)$ (рис. 4, сплошные). Отсюда видно, что погрешность нуля на выходе $\Delta_0 y = a.$ Эта погрешность, приведенная ко входу $\Delta_{0x} = a / F(x).$ Мультипликативную погрешность в данном случае установить нельзя, поскольку не известны ни номинальная, ни индивидуальная чувствительности СИ.

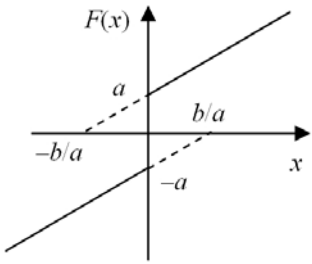


Рис. 4

Ответ: $\Delta_0 y = a;$ $\Delta_{0x} = a / F(x);$ мультипликативную погрешность в данном случае установить нельзя.

11. Погрешность СИ определяется по двучленной формуле. При этом абсолютная погрешность нуля равна $\Delta_{0x} = a$ и относительная мультипликативная погрешность равна $\gamma_S = b.$ Найти относительную погрешность СИ.

Решение. В случае определения погрешности СИ по двучленной формуле относительная погрешность имеет вид $\gamma(x) \approx \frac{\Delta_{0x}}{x} + \gamma_S.$ Тогда $\gamma(x) \approx \frac{a}{x} + b.$ Эта формула используется при $x \geq \Delta_{0x}.$

Ответ: $\gamma(x) \approx \frac{a}{x} + b,$ при $x \geq \Delta_{0x}.$

12. Погрешность СИ определяется по трехчленной формуле. При этом относительная мультипликативная погрешность $\gamma_S = a,$ абсолютная погрешность нуля $\Delta_{0x} = b$ и максимальное значение измеряемой величины $x_{max} = c.$ Найти абсолютную и относительную погрешность результата измерения и полный диапазон данного СИ.

Решение. В случае определения погрешности СИ по трехчленной формуле относительная погрешность имеет вид

$$\gamma(x) = \frac{\Delta_{0x}}{x} + \gamma_S + \frac{x}{x_{\max}},$$

тогда

$$\gamma(x) = \frac{b}{x} + a + \frac{x}{c}.$$

Абсолютная погрешность запишется в виде

$$\Delta = x \cdot \gamma(x) = x \cdot \left(\frac{b}{x} + a + \frac{x}{c}\right) = b + ax + x^2 c^{-1}.$$

Полный диапазон СИ определяется по формуле $D = \frac{x_{\max}}{\Delta_{0x}} = \frac{c}{b}$.

Ответ: $\Delta = b + ax + x^2 c^{-1}$; $\gamma(x) = \frac{b}{x} + a + \frac{x}{c}$; $D = \frac{c}{b}$.

13. Найти методическую относительную погрешность ε_i измерения постоянного тока амперметром, имеющим сопротивление r_a, в цепи, содержащей последовательно включенные источник ЭДС с внутренним сопротивлением r_0 и резистор с сопротивлением r.

Решение. Сначала нарисуем электрическую цепь (рис. 5).

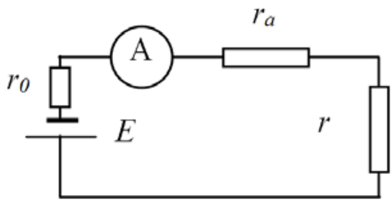


Рис. 5

Методическая погрешность измерения тока связана с наличием у амперметра внутреннего сопротивления. Ток в цепи $I_1 = \frac{E}{r_0 + r_a + r}$. При $r_a = 0$ $I_0 = \frac{E}{r_0 + r}$. Абсолютная методическая погрешность $\Delta I = I_1 - I_0$. Относительная методическая погрешность $\varepsilon_i = \frac{\Delta I}{I_0}$. В этом случае $\varepsilon_i = -\frac{r_a}{r_a + r_0 + r} =$

$$= -\frac{r_a / (r_0 + r)}{1 + r_a / (r_0 + r)}.$$

Ответ: $\varepsilon_i = -\frac{r_a / (r_0 + r)}{1 + r_a / (r_0 + r)}$.

14. Найти методическую относительную погрешность ε_u измерения постоянного напряжения на резисторе с сопротивлением r, включенного в цепь источника ЭДС с внутренним сопротивлением r_0, вольтметром, имеющим сопротивление r_b.

Решение. Нарисуем электрическую цепь (рис. 6).

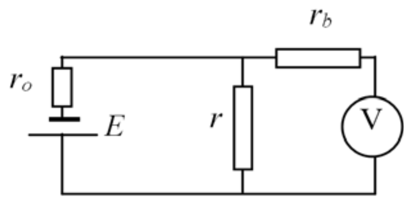


Рис. 6

Методическая погрешность измерения сопротивления связана с конечностью сопротивления r_b.

Напряжение на сопротивлении r можно найти, используя законы Кирхгофа. Оно дается формулой

$$U_1 = E\frac{rr_b}{r_0\left(r + r_b\right) + rr_b}.$$

Полагая $r_b \to \infty$, найдем напряжение $U_0 = E\frac{r}{r_0 + r}$. Методическая абсолютная погрешность $\Delta U = U_1 - U_0 = E\frac{rr_b}{rr_0 + r_0 r_b + rr_b} - E\frac{r}{r_0 + r}$.

Относительную методическую погрешность можно определить по формуле

$$\varepsilon_u = \frac{\Delta U}{U_0} = -\frac{r / r_b}{1 + r / r_0 + r / r_b}.$$

Ответ: $\varepsilon_u = -\dfrac{r / r_b}{1 + r / r_0 + r / r_b}$.

15. Найти случайную относительную погрешность γ_i измерения постоянного тока в цепи, содержащей последовательно включенные источник ЭДС с внутренним сопротивлением r_0 и резистор с сопротивлением r, если значение сопротивления амперметра r_a известно с относительной погрешностью γ_{ra}.

Решение. Нарисуем электрическую цепь (рис. 7).

Ток в цепи $I=\dfrac{E}{r_0+r_a+r}$. Логарифмируем и затем дифференцируем эту формулу, считая все параметры, за исключением сопротивления r_a, известными. Затем заменим дифференциалы на конечные приращения. В результате получим $\dfrac{\Delta I}{I}=-\dfrac{\Delta\left(r_0+r_a+r\right)}{r_0+r_a+r}=-\dfrac{\Delta r_a / r_a}{1+\left(r+r_0\right)/r_a}$. Для случайной погрешности знак «минус» следует отбросить. В результате получим $\gamma_i=\dfrac{\gamma_{ra}}{1+\left(r+r_0\right)/r_a}$.

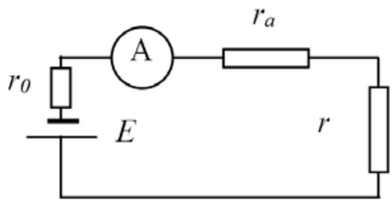


Рис. 7

Ответ: $\gamma_i=\dfrac{\gamma_{ra}}{1+\left(r+r_0\right)/r_a}$.

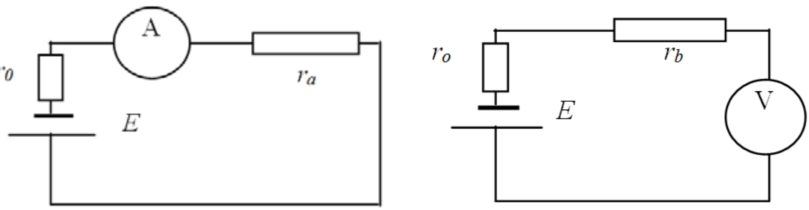
16. Найти случайную относительную погрешность γ_u измерения напряжения на резисторе с сопротивлением r, включенного последовательно в цепь источника ЭДС с внутренним сопротивлением r_0, вольтметром, значение сопротивления r_b которого известно с относительной погрешностью $\gamma_{rb}\left(\gamma_{rb}=\dfrac{\Delta r_b}{r_b}\right)$.

Решение. Напряжение на резисторе r дается формулой $U=E\dfrac{rr_b}{r_0\left(r+r_b\right)+rr_b}$. Логарифмируем и затем дифференцируем эту формулу, считая все параметры, за исключением сопротивления r_b, известными точно. Затем заменим дифференциалы (бесконечно малые приращения) на конечные приращения, которые мы будем считать случайными абсолютными погрешностями. В результате получим $\gamma_u=\dfrac{\Delta U}{U}=\dfrac{\Delta r_b}{r_b}-\dfrac{\Delta\left(r_0r+r_0r_b+rr_b\right)}{r_0r+r_0r_b+rr_b}=\gamma_{rb}\dfrac{1}{1+r_b\left(r+r_0\right)/rr_0}$.

Ответ: $\gamma_u=\gamma_{rb}\dfrac{1}{1+r_b\left(r+r_0\right)/rr_0}$.

17. При измерении ЭДС источника с внутренним сопротивлением r_0 к нему сначала подключили амперметр с внутренним сопротивлением r_a и измерили ток в цепи. Затем, отключив амперметр, к источнику подключили вольтметр с сопротивлением r_b и измерили падение напряжения. Показание амперметра было равно I, показание вольтметра было равно U. Найти значение ЭДС источника E и методическую погрешность ε_E измерения, выразив ее через методические погрешности ε_i и ε_u.

Решение. 1. При включении амперметра измерительная схема имеет вид, показанный на рис. 8, *а*.



а *б*

Рис. 8

Ток через амперметр $I = \dfrac{E}{r_0 + r_a}$. При включении вольтметра схема имеет вид, показанный на рис. 8, *б* ($r_b >> r_a$). Напряжение на резисторе $U = E\dfrac{r_b}{r_0 + r_b}$. Сопротивление r_0 неизвестно. Решая систему предыдущих двух уравнений $E = U\dfrac{I(r_b - r_a)}{U - Ir_a}$.

2. Прологарифмируем, затем продифференцируем предыдущую формулу. В результате получим

$$\varepsilon_E = \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} - \frac{\Delta(U - Ir_a)}{U - Ir_a} = \varepsilon_u \frac{Ir_a}{U - Ir_a} + \varepsilon_i \frac{U}{U - Ir_a}.$$

Ответ: $E = U\dfrac{I(r_b - r_a)}{U - Ir_a}$; $\varepsilon_E = \varepsilon_u \dfrac{Ir_a}{U - Ir_a} + \varepsilon_i \dfrac{U}{U - Ir_a}$.

18. Найти относительную погрешность измерения емкости γ_C в колебательном контуре путем измерения частоты резонанса в зависимости тока от частоты, если относительная погрешность оценки резонансной частоты равна γ_ω и значение индуктивности контура известно с относительной погрешностью γ_L.

Решение. При измерении зависимости тока от частоты резонанс наступает при частоте $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, или $\omega^2 = \dfrac{1}{LC}$. Логарифмируя и дифференцируя эту формулу, стандартным методом найдем

$$2\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta C}{C}\right) \quad \text{или} \quad 2\gamma_\omega = -\gamma_L - \gamma_C.$$

Отсюда, заменяя знак «минус» на знак «плюс» с тем, чтобы получить оценку для максимальной погрешности, найдем $\gamma_C = 2\gamma_\omega + \gamma_L$.

Ответ: $\gamma_C = 2\gamma_\omega + \gamma_L$.

19. Найти относительную погрешность измерения емкости γ_C в колебательном контуре путем измерения резонансной частоты в зависимости напряжения от частоты, если относительная погрешность оценки резонансной частоты равна γ_ω, значение индуктивности контура известно с относительной погрешностью γ_L и значение коэффициента затухания известно с погрешностью γ_δ, причем $\delta = 0{,}05\omega_0$.

Решение. При измерении зависимости напряжения на емкости от частоты резонанс наступает при частоте ω, определяемой равенством $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$, где $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ и $\delta = \dfrac{R}{2L}$. Запишем первую формулу в виде $\omega^2 = \dfrac{1}{LC} - 2\delta^2$. Логарифмируя и дифференцируя эту формулу, найдем

$$2\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta\left(\dfrac{1}{LC} - 2\delta^2\right)}{\dfrac{1}{LC} - 2\delta^2} = -\frac{\dfrac{1}{LC}\left(\dfrac{\Delta L}{L} + \dfrac{\Delta C}{C}\right) + 4\delta^2\dfrac{\Delta\delta}{\delta}}{\dfrac{1}{LC} - 2\delta^2}.$$

Отсюда $2\gamma_\omega = -\dfrac{\omega_0^2\left(\gamma_L + \gamma_C\right) + 4\delta^2\gamma_\delta}{\omega^2}$. Заменяя знак «минус» на знак «плюс» с тем, чтобы получить оценку для максимальной погрешности, найдем

$$\gamma_C = \gamma_L + 2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\left(\gamma_\omega + 2\frac{\delta^2}{\omega^2}\gamma_\delta\right).$$

Ответ: $\gamma_C = \gamma_L + 2\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\left(\gamma_\omega + 2\dfrac{\delta^2}{\omega^2}\gamma_\delta\right)$.

20. Определите абсолютную погрешность компенсационного метода измерений ЭДС в схеме, показанной на рис. 9. Здесь $I_{оп}$ – стабилизированный источник тока, А – амперметр, класс точности которого равен k и предел измерения которого равен I_k; E_x – источник измеряемой ЭДС с внутренним сопротивлением r; R_1 и R_2 сопротивления реохорда. Относительная погрешность значений всех сопротивлений γ_R. Относительная погрешность источника тока равна $\gamma_{оп}$.

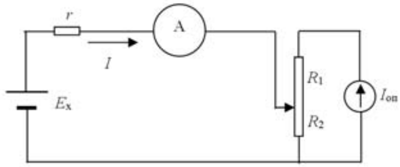


Рис. 9

Замечание: под классом точности прибора понимают значение относительной погрешности нуля $\varepsilon(0) = \dfrac{\Delta_0 x}{x_k}$.

Решение. По закону Кирхгофа $E_x = Ir + \left(I + I_{оп}\right)R_2$. Дифференцируя это выражение и заменяя дифференциалы d на конечные приращения Δ, получим

$$\Delta E_x = I\Delta r + \left(r + R_2\right)\Delta I + R_2\Delta I_{оп} + \left(I + I_{оп}\right)\Delta R_2.$$

При условии полной компенсации ток через амперметр $I = 0$. Тогда $\Delta E_x = \left(r + R_2\right)\Delta I + R_2\Delta I_{оп} + I_{оп}\Delta R_2$. Из условия задачи следует, что $\Delta I = 0{,}01kI_k$, $\Delta R_2 = \gamma_R R_2$, $\Delta I_{оп} = \gamma_{оп} I_{оп}$. Подставляя эти выражения в предыдущую формулу, окончательно получим $\Delta E_x = (\gamma_R + {}$ $+\gamma_{\text{оп}}) I_{\text{оп}} R_2 + 0{,}01 k I_k (r + R_2)$.

Ответ: $\Delta E_x = (\gamma_R + \gamma_{\text{оп}}) I_{\text{оп}} R_2 + 0{,}01 k I_k (r + R_2)$.

21. Физическую величину измеряют методом следящего уравновешивания. Найти:

1. Ток I, текущий через прибор отсчета при коэффициенте усиления прямой цепи K, коэффициенте передачи обратного преобразователя β и значении измеряемой величины x.

2. Мультипликативную и аддитивную погрешности СИ, если мультипликативная погрешность прямой цепи равна ΔK и аддитивная погрешность прямой цепи на выходе равна $\Delta_0 y$.

Решение. Схема измерения ФВ методом следящего уравновешивания показана на рис. 10.

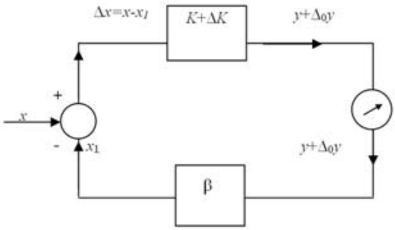


Рис. 10

Прохождение сигналов описывается системой уравнений

$$y + \Delta_0 y = (K + \Delta K)(x - x_1),$$

$$x_1 = \beta(y + \Delta_0 y).$$

Решая эту систему, найдем

$$y = \frac{K}{1+\beta K} x + \frac{\Delta K}{1+\beta K} x - \Delta_0 y, \quad \text{или} \quad y = Sx + \Delta S \cdot x - \Delta_0 y.$$

Величина $S = \dfrac{K}{1+\beta K}$ представляет собой чувствительность измерительного преобразователя при наличии отрицательной обратной связи.

1. Если $y = I$, то $I = \dfrac{K}{1+\beta K} x$.

2. Величина $\Delta S = \dfrac{\Delta K}{1+\beta K}$ представляет собой мультипликативную погрешность СИ. При $\beta K >> 1$ имеем $\Delta S << \Delta K$.

Величина $\Delta_0 y$ представляет собой аддитивную погрешность СИ на выходе. Эта погрешность не зависит ни от K, ни от β.

Ответ: 1. $I = \dfrac{K}{1+\beta K}x$; 2. $\Delta S = \dfrac{\Delta K}{1+\beta K}$, $\Delta_0 y$.

22. В схеме, показанной на рис. 11, коэффициент усиления УПТ (усилитель постоянного тока) равен K. Найти нестабильность чувствительности ΔS, реализуемую в данной схеме, если в паспорте на УПТ даны значения K и ΔK.

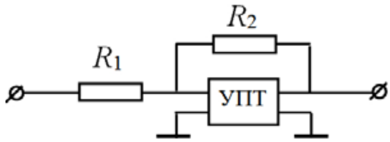


Рис. 11

Решение. УПТ имеет большое входное и малое выходное сопротивление. Будем считать, что $R_{\text{вх}} = \infty$ и $R_{\text{вых}} = 0$. Тогда ток во входной равен току в выходной цепи, поскольку входной ток не шунтируется входным сопротивлением УПТ (рис. 12).

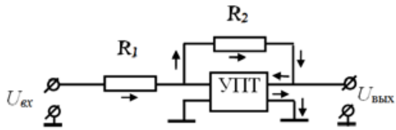


Рис. 12

Напряжение на входе УПТ $\Delta U = U_{\text{вх}} - IR_1$. Напряжение $U_{\text{вых}} = K\Delta U$, отсюда $U_{\text{вых}} = K\left(U_{\text{вх}} - IR_1\right)$. По второму закону Кирхгофа $U_{\text{вх}} + U_{\text{вых}} = I\left(R_1 + R_2\right)$. Из последних двух уравнений, исключая ток I, найдем $U_{\text{вых}} = U_{\text{вх}} \dfrac{K}{1+(1+K)\dfrac{R_1}{R_2}}$.

При $K >> 1$ следует $S \approx \dfrac{K}{1+\beta K}$, $\beta = \dfrac{R_2}{R_1}$. Отношение $\dfrac{R_2}{R_1} = \beta$ представляет собой коэффициент обратного преобразования. Следовательно, как и в схеме со следящим уравновешиванием, $\Delta S = \dfrac{\Delta K}{1+\beta K}$.

Ответ: $\Delta S = \dfrac{\Delta K}{1+\beta K}$.

23. Вблизи равновесия моста постоянного тока (рис. 13) ток через индикатор равновесия определяется формулой

$$I \approx E\frac{R_4\left(R_xR_4 - R_2R_3\right)}{R_2R_3\left(R_2 + R_4\right)\left(R_3 + R_4\right)}.$$

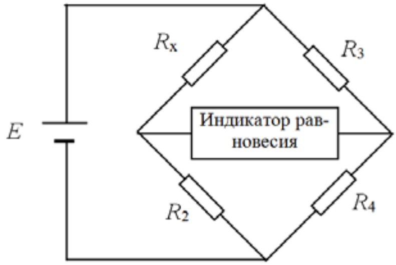


Рис. 13

Найти относительную погрешность измерения сопротивления R_x нулевым методом при известных значениях сопротивлений резисторов R_2, R_3, R_4 и ЭДС источника напряжения E, если погрешность значений сопротивлений R_2 и R_4 равна Δr, а погрешность резистора R_3 равна ΔR. Погрешностью индикатора равновесия пренебречь.

Решение: Условия равновесия моста в данном случае имеет вид $R_xR_4 = R_2R_3$, откуда $\frac{R_x}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$.

Логарифмируя и дифференцируя это выражение стандартным методом найдем $\frac{\Delta R_x}{R_x} + \frac{\Delta R_3}{R_3} = \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_4}{R_4}$,

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = -\frac{\Delta R_3}{R_3} + \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_4}{R_4} = -\frac{\Delta R}{R_3} + \left(2 + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_2}{R_4}\right)\frac{\Delta r}{\left(R_4 + R_2\right)}.$$

Заменяя здесь знак «минус» на знак «плюс» найдем

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R}{R_3} + \left(2 + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_2}{R_4}\right)\frac{\Delta r}{\left(R_4 + R_2\right)}.$$

Ответ: $\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R}{R_3} + \left(2 + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_2}{R_4}\right)\frac{\Delta r}{\left(R_4 + R_2\right)}.$

24. Найти контактную разность потенциалов двух металлических проводников, изготовленных из *алюминия* и *золота*, имеющих одинаковую температуру, исходя из значений коэффициентов тер-

мо-ЭДС по отношению к свинцу (*алюминий* α = –0,4 мкВ/С°, *золото* α = 2,9 мкВ/С°).

Решение: Для металлов термо-ЭДС описывается уравнением $\varepsilon = \alpha\left(T_1 - T_2\right)$, где α – коэффициент термо-ЭДС.

Термо-ЭДС цепи, составленной из двух различных материалов при одинаковой температуре описывается уравнением

$$U = \left(\alpha_A - \alpha_з\right)T = (-0{,}4 - 2{,}9)T = -3{,}3T.$$

Ответ: $U = -3{,}3T.$

25. Найти коэффициент α термо-ЭДС термопары, составленной из двух металлических проводников a и b, исходя из значений коэффициентов термо-ЭДС.

Решение: $\alpha = \alpha_b - \alpha_a.$

Ответ: $\alpha = \alpha_b - \alpha_a.$

26. ЭДС источника измеряют вольтметром с бесконечно большим входным сопротивлением. Температура источника ЭДС T_1 = 298 К, температура вольтметра T_2 = 334,6 К. Найти абсолютную погрешность ΔU измерения, возникшую из-за градиента температур в цепи, если коэффициент термо-ЭДС измерительной цепи $\alpha = 20$ мкВ/K.

Решение: Для металлов термо-ЭДС описывается уравнением $\varepsilon = \alpha\left(T_1 - T_2\right)$, где α – коэффициент термо-ЭДС.

Абсолютная погрешность ΔU измерения, возникшую из-за градиента температур в цепи $\Delta U = \alpha\left(T_2 - T_1\right).$

Ответ: $\Delta U = \alpha\left(T_2 - T_1\right).$

27. Сопротивление утечки изоляции линии связи равно $R_{ут}$. Найти сопротивление утечки при использовании активной защиты этой линии с помощью повторителя напряжения, имеющего коэффициент передачи $K = 1 - \varepsilon$.

Решение. При использовании повторителя напряжения в качестве активной защиты ток утечки

$$I_{\text{ут}} \approx \frac{U_0 \cdot \varepsilon}{R_{\text{ут}}},$$

где $R_{\text{ут}}$ – сопротивление изоляции.

Запишем эту формулу в виде

$$I_{\text{ут}} \approx \frac{U_0}{R_{\text{ут. акт}}},$$

где $R_{\text{ут. акт}}$ – сопротивление току утечки при наличии защиты.

Из этих двух формул имеем $R_{\text{ут. акт}} \approx \frac{R_{\text{ут}}}{\varepsilon}$.

Ответ: $R_{\text{ут. акт}} \approx \frac{R_{\text{ут}}}{\varepsilon}$.

28. Сопротивление изоляции линии связи $R_{\text{ут}}$. Найти ток утечки при напряжении между проводами U_0. Вычислить коэффициент передачи повторителя напряжения, чтобы уменьшить ток утечки в n раз методом активной защиты.

Решение. При использовании повторителя напряжения в качестве активной защиты ток утечки определяется по формуле

$$I_{\text{ут. акт}} \approx \frac{U_0 \cdot \varepsilon}{R_{\text{ут}}},$$

где ε – параметр, определяющий коэффициент передачи повторителя напряжения в соответствии с формулой $K = 1 - \varepsilon$.

При использовании повторителя напряжения $I_{\text{ут}} \approx \frac{U_0}{R_{\text{ут}}}$. Из условия задачи следует $\frac{I_{\text{ут}}}{I_{\text{ут. акт}}} = n = \frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, $K = 1 - \frac{1}{n}$.

Ответ: $K = 1 - \frac{1}{n}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

29. Уровень звукового давления составляет 20 дБ. Найти звуковое давление в абсолютных единицах.

30. Амплитуда сигнала увеличилась на 10 дБ. Как изменилась энергия сигнала?

31. Для простейшего фильтра низких частот найти частоту, на которой отношение сигнала на выходе к сигналу на входе фильтра равно *n* дБ.

32. Сформулируйте физическую и математическую модели физического маятника.

33. Сформулируйте физическую модель линейного электрического колебательного контура.

34. Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента (см. рис. 2) имеет вид: $I = k_1 U^2 + k_2 U^2$. Найти напряжение на нагрузке R, если входное напряжение равно $U_{\text{вх}}$.

35. Зависимость заряда от напряжения на конденсаторе в колебательном контуре имеет вид $q = CU_C + \alpha U_C^2$. Найти погрешность линейной математической модели зависимости $q(t)$, описываемой дифференциальным уравнением, по сравнению с нелинейной моделью, если $\frac{\alpha q}{C^2} << 1$.

36. Зависимость заряда от напряжения на конденсаторе в колебательном контуре имеет вид $q = CU_C + \alpha U_C^2$. Найти погрешность линейной математической модели зависимости $U_C(t)$, описываемой дифференциальным уравнением, по сравнению с нелинейной моделью.

37. В колебательном контуре индуктивность катушки зависит от тока в этой катушке, т. е. $L = f(I)$. Найти погрешность линейной математической модели зависимости $I(t)$, описываемой дифференциальным уравнением, по сравнению с нелинейной моделью.

38. Класс точности вольтметра постоянного тока равен K, его внутреннее сопротивление равно $R_{\text{вн}}$. Найти случайную и методическую погрешности измерения ЭДС источника напряжения.

39. Вольтметр с входным сопротивлением $R_{вх}$ подключен к источнику ЭДС с внутренним сопротивлением R_i. Найдите условие, при котором ЭДС будет измерена с минимальной погрешностью 0,01 %.

40. Амперметр с входным сопротивлением R_a подключен к источнику ЭДС с внутренним сопротивлением R_i. Найдите условие, при котором ток короткого замыкания источника будет измерен с минимальной погрешностью 0,01 %.

41. Класс точности амперметра постоянного тока равен K, его внутреннее сопротивление равно $R_{вн}$. Найти случайную и методическую погрешности измерения тока в цепи.

42. Класс точности вольтметра дан в виде отношения двух чисел $\frac{a}{b}$. Определить погрешность нуля и мультипликативную погрешность этого вольтметра.

43. Чувствительный элемент ИП удерживается пружиной. Смещение ЧЭ связано с силой, действующей на него уравнением $F(x) = c(\mathrm{sign}x) + kx + bx^3$. Определить погрешность нуля и погрешность нелинейности этого ИП.

44. Чувствительный элемент ИП содержит массу m, лежащую на плоской горизонтальной поверхности. Этот ИП преобразует силу F, действующую на массу в смещение массы x. Коэффициент трения покоя равен μ. Найти погрешность нуля этого ИП при измерении силы, действующей на массу под углом α к поверхности.

45. Найти значение коэффициента петлевого усиления в схеме измерения с отрицательной обратной связью, при котором мультипликативная погрешность прямой цепи уменьшается в N раз.

2. ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

46. Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента (см. рис. 2) имеет вид: $I = kU^2$. Найти на нагрузке R постоянную составляющую напряжения, а также первую, вторую и третью гармоники, если $U_{\text{вх}}(t) = U_0 + A\sin\omega t$, причем $0 < A < U_0$. Считать, что $4kRU_{\text{вх}} << 1$.

Решение. В данной задаче $U_{\text{вых}} = \dfrac{1 + 2kRU_{\text{вх}} - \sqrt{1 + 4kRU_{\text{вх}}}}{2kR}$ (вывод см. задачу № 4). Подставим сюда $U_{\text{вх}}(t)$ и проведем тригонометрические преобразования. В результате получим, что постоянная составляющая:

$$U_{\text{вых пост}} = kR\left(U_0^2 - 2kRU_0^3 - 3kRA^2U_0 + \frac{1}{2}A^2\right);$$

первая гармоника: $U_{\text{вых}}(\omega) = kR\left(2AU_0 - 6kRAU_0^2 - 3kRA^3\right)\sin\omega t;$

вторая гармоника: $U_{\text{вых}}(2\omega) = A^2kR\left(3kRU_0 - \frac{1}{2}\right)\cos 2\omega t;$

третья гармоника: $U_{\text{вых}}(3\omega) = \frac{1}{2}k^2R^2A^3\sin 3\omega t.$

47. Чему равно сопротивление R_f проводника цилиндрической формы диаметром d переменному току частотой f, если сопротивление его постоянному току равно R.

Решение. Сопротивление цилиндрического проводника переменному току, обусловленное скин-эффектом,

$$R_{\text{скин}} = \frac{l}{\sqrt{2}\pi d}\sqrt{\frac{2\pi f\mu}{\sigma}}.$$

Сопротивление постоянному току $R = \dfrac{4l}{\pi\sigma d^2}$. Поэтому полное сопротивление $R_f = R + R_{\text{скин}} = \left(1 + \sqrt{\pi\sigma\mu f}\,\dfrac{d}{4}\right)R.$

Ответ: $R_f = R + R_{\text{скин}} = \left(1 + \sqrt{\pi\sigma\mu f}\,\dfrac{d}{4}\right)R.$

48. Найти в момент времени τ относительную погрешность измерительного преобразователя, динамические свойства которого описываются звеном первого порядка с постоянной времени α, измеряющего постоянную физическую величину $U_{\text{вх}} = E$, поступившую на его вход в момент времени $t = 0$.

Решение. В качестве звена первого порядка возьмем интегрирующую RC – цепочку. Здесь $U_{\text{вых}} = U_C$. По второму закону Кирхгофа $U_R + U_C = U_{\text{вх}}$. Так как $I = \frac{dq}{dt}$ и $q = CU$, то $U_R = IR = RC\frac{dU_C}{dt}$.

Тогда из первого уравнения получаем $RC\frac{dU_C}{dt} + U_C = E$. Решение этого уравнения представляет собой сумму общего решения однородного уравнения $RC\frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$ и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения имеет вид $U_{C\,\text{одн}} = Ae^{-\alpha t}$, где $\alpha = \frac{1}{RC}$. Частное решение неоднородного уравнения имеет вид $U_{C\,\text{неодн}} = E$. Следовательно, $U_C = U_{\text{вых}} = E + Ae^{-\alpha t}$. Постоянную A найдем из начального условия: при $t = 0$, $U_C = 0$. Тогда $A = -E$. Окончательно найдем $U_{\text{вых}} = E\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$. $U_{\text{вых}} \to E$ при $t \to \infty$. Динамическую относительную погрешность этого звена найдем из разности $\gamma = \frac{\Delta U}{E} = \frac{U_{\text{вых}}(t=\infty) - U_{\text{вых}}(t)}{E} = e^{-\alpha t}$. При $t = \tau$ $\gamma = e^{-\alpha\tau}$.

Ответ: $\gamma = e^{-\alpha\tau}$.

49. Найти значение АЧХ на частоте f интегрирующей RC-цепочки при известных значениях R и C.

Решение. АЧХ интегрирующей RC-цепочки можно найти из дифференциального уравнения $RC\frac{dU_C}{dt} + U_C = E(t)$* (задача № 48). Сигнал на входе звена меняется по гармоническому закону $E(t) =$

$= E_0 e^{j\omega t}$. Тогда же решение уравнения ищут в виде $U_C = U_0 e^{j\omega t}$. Подставляя эти выражения в (*), получим уравнение для определения амплитуды U_0: $U_0 = \dfrac{E_0}{1 + j\omega RC}$. Частотную характеристику измерительного преобразователя находят как отношение амплитуд сигналов на выходе и входе: $H(\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega RC}$. АЧХ:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2 \tau^2}},$$

где $\tau = RC$.

Ответ: $|H(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2 \tau^2}}$, где $\tau = RC$.

50. Имеется идеальный интегрирующий измерительный преобразователь с конечным временем усреднения (интегрирования) $T_{\text{изм}}$. Найдите значение его АЧХ на частоте f при заданном значении $T_{\text{изм}}$.

Решение. Будем считать, что на вход преобразователя поступает гармонический сигнал $x(t) = e^{j\omega t}$. По определению, результат усреднения имеет вид $y(t) = < x(t) > = \dfrac{1}{T_{\text{изм}}} \int\limits_{t - T_{\text{изм}}}^{t} x(t)dt$. Легко найти, что $y(t) = \dfrac{\sin\frac{\omega T_{\text{изм}}}{2}}{\frac{\omega T_{\text{изм}}}{2}} e^{j\omega\left(t - \frac{T_{\text{изм}}}{2}\right)}$. Если сигнал на выходе $y(t) = H(\omega)e^{j\omega t}$, из предыдущей формулы найдем, что $H_T(\omega) = \dfrac{\sin\frac{\omega T_{\text{изм}}}{2}}{\frac{\omega T_{\text{изм}}}{2}} e^{-j\omega\frac{T_{\text{изм}}}{2}}$.

АЧХ интегрирующего преобразователя

$$\left|H_T(\omega)\right| = \left|\frac{\sin\frac{\omega T_{\text{изм}}}{2}}{\frac{\omega T_{\text{изм}}}{2}}\right| = \left|\frac{\sin(\pi f T_{\text{изм}})}{\pi f T_{\text{изм}}}\right|.$$

Ответ: $\left|H_T(\omega)\right| = \left|\frac{\sin(\pi f T_{\text{изм}})}{\pi f T_{\text{изм}}}\right|.$

51. Построить АЧХ импеданса (полного сопротивления) резистора с номиналом R, если последовательная паразитная индуктивность равна L_S и параллельная паразитная емкость равна $C_{\text{р}}$.

Решение. Реальный резистор имеет паразитные индуктивность и емкость. Модель такого резистора показана на рис. 14.

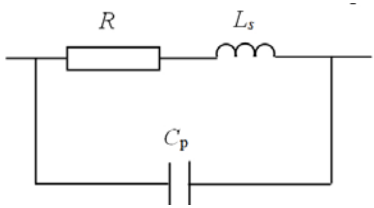


Рис. 14

Паразитные составляющие появляются из-за выводов и особенностей конструкции резистора. На частоте ω импеданс резистора

$$Z(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R + j\omega L_s} + j\omega C_{\text{р}}}.$$

Модуль реального импеданса, где переменные записаны в виде безразмерных отношений:

$$\frac{\left|Z(\omega)\right|}{R} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\omega_0}{\delta}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}},$$

где $\delta = \frac{R}{L_s}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_s C_{\text{р}}}}$.

На графиках показана зависимость $\frac{|Z(\omega)|}{R}$ в логарифмическом масштабе для нескольких значений параметра δ (в СИ): $\frac{\delta_1}{\omega_0} = 0{,}01;$ $\frac{\delta_2}{\omega_0} = 0{,}1;$ $\frac{\delta_3}{\omega_0} = 1;$ $\frac{\delta_4}{\omega_0} = 2.$

Из рис. 15 видно, что при малых *R* резистор ведет себя как индуктивность вплоть до частоты ω_0. На частотах $\omega > \omega_0$ этот резистор ведет себя как конденсатор.

Резистор с большим сопротивлением имеет практически постоянный импеданс вплоть до частоты ω_0 и затем ведет себя как конденсатор.

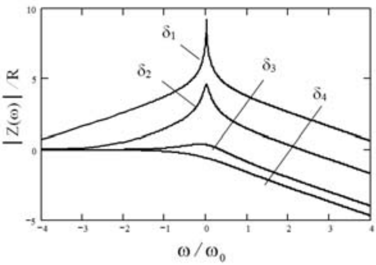


Рис. 15

52. Построить АЧХ импеданса емкости с номиналом *C*, если последовательная паразитная индуктивность равна L_S, сопротивление последовательного паразитного резистора равно R_s, сопротивление параллельного паразитного резистора равно R_p.

Решение. Модель реального конденсатора, показана на рис. 16.

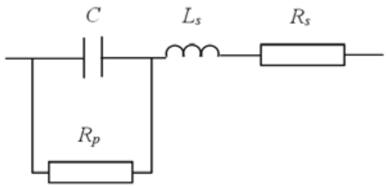


Рис. 16

Как и у резисторов, паразитные составляющие появляются из-за наличия выводов и вследствие конструкции конденсаторов. На циклической частоте ω импеданс конденсатора дается формулой

$$Z(\omega) = R_s + j\omega L_s + \frac{1}{j\omega C + 1/R_p}.$$

Модуль этого импеданса удобно представить в виде формулы, где переменные записаны в виде безразмерных отношений:

$$\frac{|Z(\omega)|}{R_s} = \sqrt{\left(1 + \frac{b}{a(\omega)}\right)^2 + b^2\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \frac{1}{a(\omega)} - \frac{a(\omega)}{1 + a(\omega)^2}\right]^2},$$

где функция $a(\omega) = b\frac{\omega}{\omega_0}\frac{\delta}{\omega_0}$;

параметры $\delta = \frac{R_s}{L_s}$, $b = \frac{R_p}{R_s}$,

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_s C}}$.

На рис. 17 показана эта зависимость в логарифмическом масштабе для нескольких значений параметра b: b_1 = 1000; b_2 = 500; b_3 = 200; b_4 = 100 и при значении параметра δ/ω_0 = 0,01.

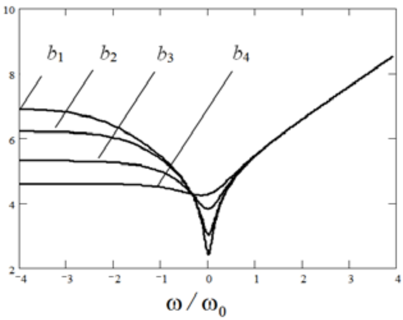


Рис. 17

53. Построить АЧХ импеданса катушки с номиналом L на частоте f, если сопротивление последовательного паразитного резистора равно R_s, сопротивление параллельного паразитного резистора равно R_p и параллельная паразитная емкость равна C_p.

Решение. Модель реальной катушки, показанной на рис. 18.

На частоте ω импеданс катушки дается формулой

$$Z(\omega) = \frac{1}{j\omega C_p + \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_s + j\omega L}}.$$

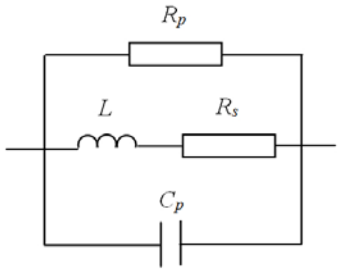


Рис. 18

Модуль этого импеданса можно представить в виде формулы, где переменные записаны в виде безразмерных отношений:

$$\frac{|Z(\omega)|}{R_p} = \frac{a(\omega)}{\sqrt{(a(\omega) + b)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 \left(a(\omega) - \rho^2 b^2\right)^2}},$$

где функция $a(\omega) = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \rho^2 b^2;$

параметры $\quad b = \frac{R_p}{R_s}, \quad \rho = \frac{1}{R_p}\sqrt{\frac{L}{C_p}},$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_p}}.$

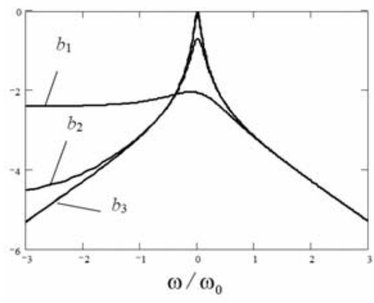


Рис. 19

На рис. 19 показана эта зависимость в логарифмическом масштабе для нескольких значений параметра b: $b_1 = 10$; $b_2 = 100$; $b_3 > 1000$ и при значении параметра $\rho = 0{,}1$.

54. Динамические свойства измерительного преобразователя описываются звеном второго порядка с собственной частотой f_0. Чему должен быть равен коэффициент затухания этого измерительного преобразователя, чтобы он обладал максимально равномерной АЧХ в начале частотного диапазона.

Решение. Нормированная АЧХ звена второго порядка дается формулой

$$\left|H(\omega)_F\right| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}.$$

В начальном интервале значений частот АЧХ изменяется минимально при критическом значении коэффициента затухания, т. е. при $\delta = \omega_0 / \sqrt{2}$.

Ответ: $\delta = \omega_0 / \sqrt{2}$.

55. На входе линейного измерительного преобразователя второго порядка на частоте f отношение спектральной плотности мощности шума к мощности полезного сигнала равно P / A^2, где A – амплитуда сигнала. Найти зависимость от частоты отношения шум/сигнал на выходе этого измерительного преобразователя, если шум – белый и амплитуда сигнала A постоянна.

Решение. АЧХ любого линейного измерительного преобразователя для полезного сигнала и для белого шума совпадают между собой. Поэтому отношение сигнал/шум на выходе линейного измерительного преобразователя совпадает с отношением этих величин на входе измерительного преобразователя.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

56. Последовательный электрический колебательный контур используется в качестве ИП для преобразования напряжения, изменяющегося по гармоническому закону. Нарисуйте АЧХ этого преобразователя, если выходное напряжение снимается с резистора.

57. Последовательный электрический колебательный контур используется в качестве ИП для преобразования напряжения, изменяющегося по гармоническому закону. Нарисуйте АЧХ этого преобразователя, если выходное напряжение снимается с конденсатора.

58. Последовательный электрический колебательный контур используется в качестве ИП для преобразования напряжения, изменяющегося по гармоническому закону. Нарисуйте АЧХ этого преобразователя, если выходное напряжение снимается с катушки.

59. Параллельный электрический колебательный контур используется в качестве ИП для преобразования напряжения, изменяющегося по гармоническому закону. Нарисуйте АЧХ этого преобразователя, если выходное напряжение снимается с резистора.

60. Параллельный электрический колебательный контур используется в качестве ИП для преобразования напряжения, изменяющегося по гармоническому закону. Нарисуйте АЧХ этого преобразователя, если выходное напряжение снимается с конденсатора.

61. Параллельный электрический колебательный контур используется в качестве ИП для преобразования напряжения, изменяющегося по гармоническому закону. Нарисуйте АЧХ этого преобразователя, если выходное напряжение снимается с катушки.

62. Зависимость выходного сигнала y от входного сигнала x в ИП описывается дифференциальным уравнением $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \alpha y + \beta = x(t)$, где α и β – постоянные параметры. Найти динамическую погрешность и систематическую погрешность нуля этого ИП.

63. Зависимость выходного сигнала y от входного сигнала x в ИП описывается нелинейным дифференциальным уравнением $\frac{d^2y}{dt^2}+$ $+Ay\frac{dy}{dt}+B\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+Cy+D=x(t)$, где A, B, C и D – постоянные параметры. Найти систематическую погрешность нуля этого ИП.

64. ИП является линейным динамическим звеном первого порядка. Запишите математическую модель этого звена в виде дифференциального уравнения.

65. Для схемы со следящей обратной связью найти чувствительность к полезному сигналу x и отношение $\frac{x}{x_ш}$, если K и β – постоянные. Определить вид АЧХ звена с передаточным коэффициентом Z, при котором отношение $\frac{x}{x_ш} > 1$ на заданной частоте ω.

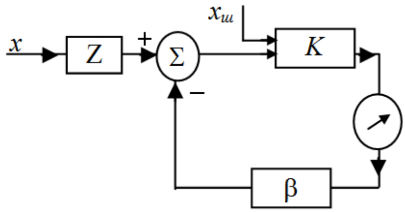


Рис. 20

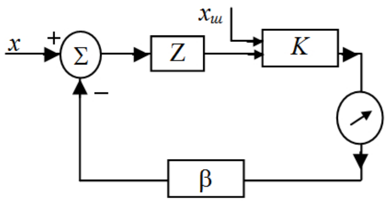


Рис. 21

66. Для схемы со следящей обратной связью найти чувствительность к полезному сигналу x и отношение $\frac{x}{x_ш}$, если K и β – постоянные. Определить вид АЧХ звена с передаточным коэффициентом Z, при котором отношение $\frac{x}{x_ш} > 1$ на заданной частоте ω. Найдите принципиальное отличие схем в данной и предыдущей задачах.

67. ИП является линейным динамическим звеном второго порядка. Запишите математическую модель этого звена в виде дифференциального уравнения.

68. ИП является линейным динамическим звеном первого порядка. Запишите АЧХ этого звена.

69. ИП является линейным динамическим звеном второго порядка. Запишите АЧХ этого звена.

70. Измерительный преобразователь представляет собой массу, подвешенную на пружине с жесткостью k и охваченную электромагнитной отрицательной обратной связью с петлевым коэффициентом усиления $K\beta$. При отсутствии обратной связи собственная частота колебаний массы равна f_0, а коэффициент затухания равен δ. Найти частоту f, на которой происходит максимальное подавление помех и шумов, а также отношение помеха/сигнал на этой частоте.

3. СОГЛАСОВАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

71. Имеется объект измерения или ИП генераторного типа с внутренним сопротивлением R_i. Построить график зависимости мощности $P_н$ полезного сигнала, выделяемой в нагрузке, от сопротивления нагрузки $R_н$.

Решение. Нарисуем измерительную цепь (рис. 22).

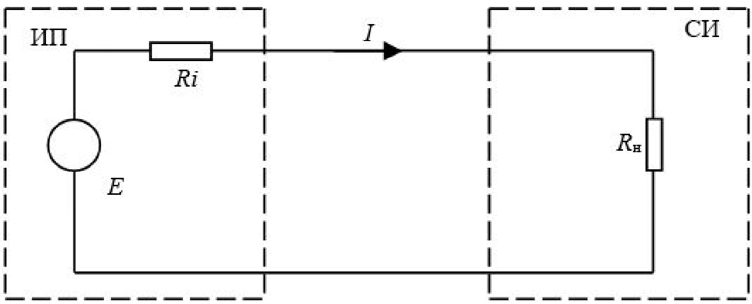


Рис. 22

Мощность сигнала, выделяемая в нагрузке (рис. 23)

$$P_н = I^2 R_н = \left(\frac{E}{R_i + R_н}\right)^2 \cdot R_н = \frac{E^2 R_н}{(R_i + R_н)^2}.$$

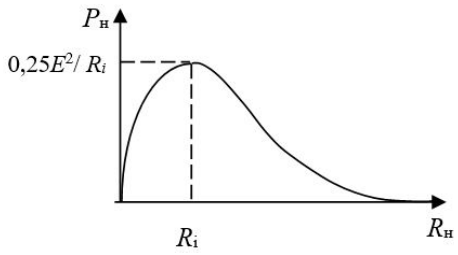


Рис. 23

72. Имеется объект измерения или ИП генераторного типа с внутренним сопротивлением R_i. Сопротивление нагрузки $R_н$. Найти коэффициент $\xi_{ГЕН}$ эффективности преобразования энергии ИП.

Решение. Измерительная цепь соответствует рис. 22.

Мощность сигнала, выделяемая в нагрузке

$$P_н = I^2 R_н = \left(\frac{E}{R_i + R_н} \right)^2 \cdot R_н = \frac{E^2 R_н}{(R_i + R_н)^2}.$$

Коэффициент эффективности преобразования энергии генераторного ИП $\xi_{ГЕН}$ определяют из соотношения $P_н = P_{кзип} \cdot \xi_{ГЕН}$, где $\frac{E^2}{R_i} = P_{кзип}$ – мощность генератора при коротком замыкании.

Тогда $\xi_{ГЕН} = \frac{R_i R_н}{\left(R_i + R_н\right)^2}$.

Ответ: $\xi_{ГЕН} = \frac{R_i R_н}{\left(R_i + R_н\right)^2}$.

73. Имеется объект измерения или ИП параметрического типа с внутренним сопротивлением R_i. Сопротивление нагрузки $R_н$. Найти коэффициент $\xi_{пар}$ эффективности преобразования энергии сигнала.

Решение. Нарисуем измерительную цепь (рис. 24).

Примечание: ΔR изменение внутреннего сопротивления генератора параметрического типа, возникающего при изменении полезного сигнала.

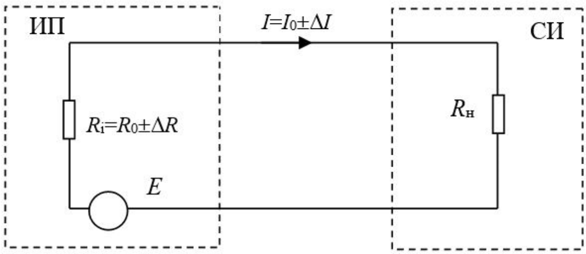


Рис. 24

Рассчитаем условия согласования сопротивления параметрического ИП с СИ. Мощность сигнала, выделяемого в нагрузке:

$$P_{\text{сигн}} = (\Delta I)^2 \cdot R_{\text{н}} = \frac{(\Delta E)^2}{R_0} \cdot \frac{R_0 R_{\text{н}}}{\left(R_0 + R_{\text{н}}\right)^2} = P_{\text{кз сигн}} \cdot \frac{a}{(1+a)^2},$$

где $a = \dfrac{R_{\text{н}}}{R_0}$.

Мощность, выделяемая при коротком замыкании преобразователя ИП при наличии только сигнала

$$P_{\text{кз сигн}} = \frac{(\Delta E)^2}{R_0} = \frac{(\Delta R)^2 I_0^2}{R_0} = \varepsilon_R^2 \cdot P_{\text{кз ип}} \frac{1}{(1+a)^2},$$

где $\varepsilon_R = \dfrac{\Delta R}{R_0}$ – относительное изменение выходного сопротивления (или относительная чувствительность) преобразователя ИП;

$P_{\text{кз ип}}$ – мощность, выделяемая при коротком замыкании источника возбуждения преобразователя ИП.

Окончательно: $P_{\text{сигн}} = P_{\text{кзип}} \cdot \varepsilon_R^2 \cdot \xi_{\text{пар}}$, где $\xi_{\text{пар}} = \dfrac{a}{(1+a)^4}$ – коэффициент эффективности преобразования энергии сигнала.

Ответ: $\xi_{\text{пар}} = \dfrac{a}{(1+a)^4}$, где $a = \dfrac{R_{\text{н}}}{R_0}$.

74. Пусть $P_{\text{кз}}$ – мощность, выделяемая в параметрическом ИП при его коротком замыкании ($R_{\text{н}}$ = 0), $\varepsilon_R = \dfrac{\Delta R}{R_0}$ – относительная чувствительность ИП, $P_{\text{сиг}}$ – мощность сигнала, выделяемая в нагрузке. Найти $\xi_{\text{пар}}$ – коэффициент преобразования энергии сигнала для ИП.

Решение. Коэффициент $\xi_{\text{пар}}$ эффективности преобразования энергии сигнала определяется из соотношения $P_{\text{сигн}} = P_{\text{кзип}} \cdot \varepsilon_R^2 \cdot \xi_{\text{пар}}$.

Ответ: $\xi_{\text{пар}} = \dfrac{P_{\text{сиг}}}{P_{\text{кзип}}} \dfrac{1}{\varepsilon_R^2}$.

75. Пусть E – ЭДС источника возбуждения параметрического ИП, согласованного с нагрузкой. Найти напряжение U на выходе этого источника.

Решение. Мощность сигнала, выделяемая в нагрузке параметрического преобразователя определяется:

1) допустимой мощностью рассеивания энергии источника возбуждения этого преобразователя ($P_{\text{кз ип}}$);

2) его относительной чувствительностью $\varepsilon_R = \dfrac{\Delta R}{R_0}$;

3) эффективностью преобразования $\xi_{\text{пар}}$.

Известно, что $\xi_{\text{пар мах}} = 27/256 \approx 0{,}105$ при $a = 1/3$, т. е. при $R_0 = 3R_{\text{н}}$.

$$U = \frac{E \cdot R_0}{R_0 + R_{\text{н}}} = \frac{E \cdot 3R_{\text{н}}}{4R_{\text{н}}} = \frac{3}{4}E.$$

Ответ: $U = \dfrac{3}{4}E$.

76. Пусть $P_{\text{расс}} = \dfrac{U^2}{R_0}$, где $P_{\text{расс}}$ – допустимая мощность рассеяния параметрического ИП, согласованного с нагрузкой, $P_{\text{кз ип}}$ – мощность, выделяемая в параметрическом ИП, при его коротком замыкании. Найти отношение $\dfrac{P_{\text{расс}}}{P_{\text{кзип}}}$ для ИП, согласованного с нагрузкой.

Решение: Мощность, выделяемая в параметрическом ИП, при его коротком замыкании $P_{\text{кзип}} = \dfrac{E^2}{R_0}$. Для ИП, согласованного с нагрузкой (см. задача № 75) $U = \dfrac{3}{4}E$.

$$P_{\text{расс}} = \frac{U^2}{R_0} = \frac{9}{16} \cdot \frac{E^2}{R_0} \quad \to \quad \frac{P_{\text{расс}}}{P_{\text{кзип}}} = \frac{9}{16}.$$

77. Пусть $P_{\text{расс}} = \dfrac{U^2}{R_0}$ – допустимая мощность рассеяния параметрического ИП, согласованного с нагрузкой, $\varepsilon_R = \dfrac{\Delta R}{R}$ – относительная чувствительность ИП, $P_{\text{сиг}}$ – мощность сигнала, выделяемая в нагрузке параметрического ИП. Найти отношение $\dfrac{P_{\text{сиг}}}{P_{\text{расс}}}$.

Решение. $P_{\text{сигн}} = P_{\text{кзип}} \cdot \varepsilon_R^2 \cdot \xi_{\text{пар}} = P_{\text{кзип}} \cdot \varepsilon_R^2 \cdot \dfrac{1}{16}$;

$$P_{\text{кзип}} = \frac{E^2}{R_0} = \frac{16}{9} \cdot \frac{U^2}{R_0} \quad \to \quad \frac{P_{\text{сиг}}}{P_{\text{расс}}} = \frac{\varepsilon_R^2}{9}.$$

78. Имеется объект измерения параметрического типа с внутренним сопротивлением R_i. В измерительную цепь включают согласующий трансформатор с n_1 витков в первичной обмотке и n_2 витков во вторичной обмотке. Найти сопротивление нагрузки.

Решение. Условие оптимального согласования параметрического ИП с СИ имеет вид $R_i = 3R_{\text{н}}$. Подключение СИ через измерительный трансформатор с коэффициентом трансформации $n = \dfrac{n_1}{n_2}$ эквивалентно подключению к ИП резистора с сопротивлением $R_{\text{н экв}} = n^2 R_{\text{н}}$. Из равенства $R_i = 3R_{\text{н экв}} = 3\,n^2 R_{\text{н}}$ найдем $R_{\text{н}} = \dfrac{R_i}{3n^2}$.

Ответ: $R_{\text{н}} = \dfrac{R_i}{3n^2}$.

79. Имеется объект измерения генераторного типа. При этом внутреннее сопротивление нагрузки равно $R_н$. Какой согласующий трансформатор с n_1 витков в первичной обмотке и n_2 витков во вторичной обмотке необходимо использовать, если внутреннее сопротивление объекта измерения равно R_i.

Решение. Условие оптимального согласования генераторного ИП с СИ имеет вид $R_i = R_н$. Подключение СИ через измерительный трансформатор с коэффициентом трансформации $n = \dfrac{n_1}{n_2}$ эквивалентно подключению к ИП резистора с сопротивлением $R_{н\ экв} = n^2 R_н$. Из равенства $R_i = R_{н\ экв} = n^2 R_н$ найдем $\dfrac{n_1}{n_2} = \sqrt{\dfrac{R_i}{R_н}}$.

80. Имеется согласованный измерительный преобразователь параметрического типа. Найти его внутреннее сопротивление, если сопротивление нагрузки $R_н$.

Решение. Условие оптимального согласования параметрического ИП с СИ имеет вид $R_i = 3R_н$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

81. Определите условие, при котором ток источника ЭДС меняется на 1 % при изменении сопротивления нагрузки на 300 %.

82. Определите условие, при котором напряжение на выходе источника ЭДС меняется на 1 % при изменении сопротивления нагрузки на 300 %.

83. Найти максимум коэффициента эффективности преобразования энергии сигнала объекта параметрического типа.

84. Пусть $P_{кз}$ – мощность, выделяемая в параметрическом ИП согласованного с нагрузкой, при его коротком замыкании ($R_н = 0$), $\varepsilon = \dfrac{\Delta R}{R}$ – относительная чувствительность ИП, $P_{сиг}$ – мощность сигнала, выделяемая в нагрузке. Найти отношение $\dfrac{P_{сиг}}{P_{кз}}$.

85. Найти условие, при котором коэффициенты преобразования энергии сигнала объектов параметрического и генераторного типа отличаются между собой не более, чем на 10 %.

86. Вычислить в общем случае ток через измерительную диагональ измерительного моста, если известны сопротивления резисторов в плечах моста и сопротивление нагрузки в измерительной диагонали моста.

87. Найти условия оптимального по энергии сигнала согласования с измерительным прибором симметричного измерительного моста постоянного тока, представленного на рис. 25.

88. Найти условия оптимального по энергии сигнала согласования с измерительным прибором симметричного измерительного моста постоянного тока, представленного на рис. 26.

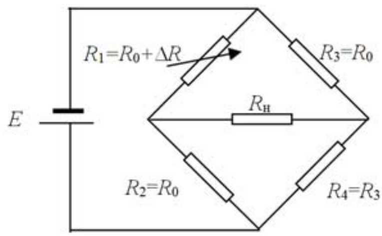


Рис. 25

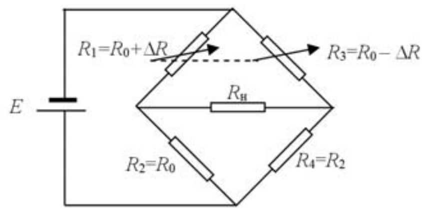


Рис. 26

89. Найти условия оптимального по энергии сигнала согласования с измерительным прибором симметричного измерительного моста постоянного тока, представленного на рис. 27.

90. Найти условия оптимального по энергии сигнала согласования с измерительным прибором симметричного измерительного моста постоянного тока, представленного на рис. 28.

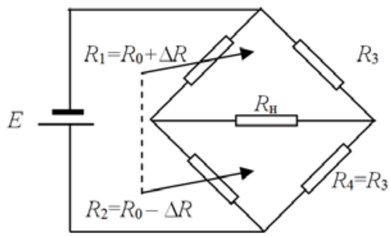


Рис. 27

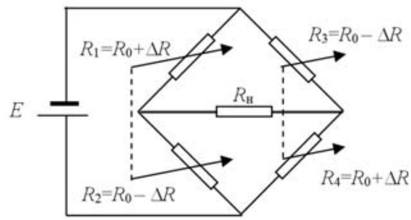


Рис. 28

4. ШУМЫ И ПОМЕХИ

91. Паразитная емкость между проводниками 1 и 2 C_2 = 50 пФ (рис. 29). Каждый проводник имеет емкость относительно земли $C_1 = C_3$ = 150 пФ. На проводник 1 поступает шумовой сигнал переменного напряжения $U_{сиг}$ = 10 В частотой f = 100 кГц. Какой величины напряжение шумов наводится на проводник 2, если подключенный к его концу резистор R: а) имеет бесконечное сопротивление? б) имеет сопротивление 1кОм?

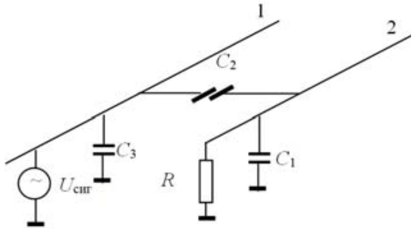


Рис. 29

Решение. Составим эквивалентные схемы путем последовательных преобразований. Они показаны на рис. 30.

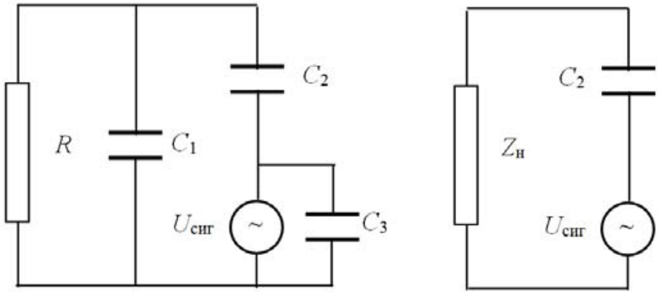


Рис. 30

Напряжение шумов, наводимое на проводнике 2, равно напряжению на резисторе $Z_н = \dfrac{R / j\omega C_1}{R + 1 / j\omega C_1} = \dfrac{R}{1 + j\omega RC_1}$, образованном параллельным соединением резистора R и конденсатора C_1. Это напряжение равно $U_ш = U_с \dfrac{Z_н}{Z_н + 1 / j\omega C_2} = U_c \dfrac{j\omega RC_2}{1 + j\omega R(C_1 + C_2)}$.

Модуль этого напряжения $U_ш = U_с \dfrac{\omega RC_2}{\sqrt{1 + \left[\omega R(C_1 + C_2)\right]^2}}$.

Если $R = \infty$, $U_ш = U_с \dfrac{C_2}{C_1 + C_2}$.

Ответ: а) $U_ш = U_с \dfrac{C_2}{C_1 + C_2}$, при $R = \infty$.

б) $U_ш = U_с \dfrac{\omega R C_2}{\sqrt{1 + \left[\omega R (C_1 + C_2)\right]^2}} = 0{,}2 В.$

92. На рис. 31 проводник 2 заключен в заземленный экран. Емкость между этим проводником и экраном составляет C_2 = 100 пФ. Емкость между проводниками 1 и 2 C_3 = 2 пФ, а между проводником 2 и землей C_1 = 5 пФ. Емкость между проводником 1 и землей C_4 = 5 пФ. На проводник 1 подается сигнал $U_{сиг}$ = 10 В частотой f = 100 кГц. Какое напряжение шумов наводится на проводник 2, если с одного конца к нему подключен резистор R: а) с бесконечным сопротивлением? б) с сопротивлением 1кОм?

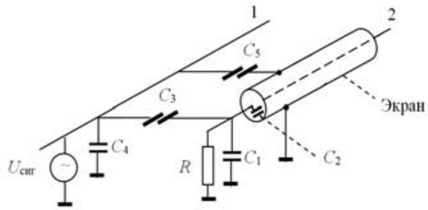


Рис. 31

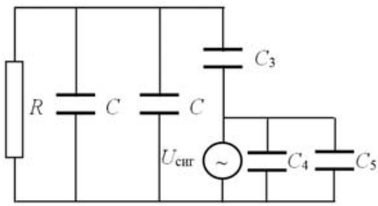


Рис. 32

Решение. Составим эквивалентную схему (рис. 32).

Напряжение шумов, наводимое на проводнике 2 равно напряжению на резисторе, образованном параллельным соединением резистора R и двух конденсаторов C_1 и C_2. Это напряжение равно

$$U_ш = U_с \frac{\omega R C_3}{\sqrt{\left[\omega R (C_1 + C_2 + C_3)\right]^2 + 1}}.$$

Если $R = \infty$, $U_ш = U_с \dfrac{C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$.

Ответ: а) 187 мВ; б) 12,6 мВ.

93. Два проводника длиной по l см, отстоящие друг от друга на расстояние h, образуют замкнутую цепь. Эта цепь расположена в магнитном поле с индукцией B, изменяющемся с частотой f Гц. Чему равно максимальное напряжение шумов, наводимое на цепь в результате воздействия на нее магнитного поля.

Решение. Напряжение шумов, наводимое в данной цепи, определяется законом электромагнитной индукции Фарадея: $E = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$, где поток вектора магнитной индукции $\vec{B}$ через замкнутую цепь $\Phi = (B \cdot S)\cos\alpha$, где S – площадь, охватываемая цепью, α – угол между нормалью к площадке и вектором $\vec{B}$. Максимальное напряжение шумов будет достигнуто при $\alpha = \pi/2$. Считая, что $\vec{B}$ меняется по гармоническому закону, т. е. $B = B_0 \sin\omega t$ и $S = \mathrm{const}$, найдем, что максимальное напряжение шумов $E = 2\pi flhB_0$.

Ответ: $E = 2\pi flhB_0$.

94. Выразите через сопротивление и индуктивность экрана степень экранирования $K_э$ коаксиального проводника для случая связи через магнитное поле (экран заземлен с обоих концов).

Решение. Изобразим электрическую цепь, моделирующую связь центрального проводника и экрана в коаксиальном кабеле (рис. 33). Считаем, что центральный проводник разомкнут, а экран замкнут через цепь заземления. Пусть экран имеет индуктивность $L_э$, сопротивление $R_э$. Коэффициент взаимной индукции между двумя этими проводниками равен M. Коэффициент экранирования центрального проводника определяется по формуле $K = \frac{U_Э - U_ш}{U_Э}$, где $U_э$ – напряжение шумов, наводимое на экране, $U_ш$ – напряжение, наводимое в центральном проводнике.

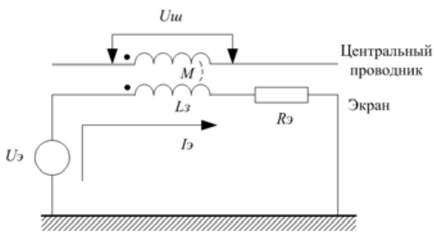


Рис. 33

Вычислим напряжение, индуцированное в центральном проводнике вследствие прохождения по экрану переменного тока $I_э$ и наличия магнитной (индуктивной) связи между экраном и проводником. Считая, что ток в экране меняется по гармоническому закону, имеем $U_ш = M\dfrac{dI_э}{dt} = j\omega MI_э$. Ток $I_э = \dfrac{U_э}{j\omega L_э + R_э}$. Доказано, что $L_э \approx M$, поэтому $U_ш = \dfrac{j\omega}{j\omega + R_э / L_э}U_э$. Из выражения для коэффициента экранирования получим $K_Э = \dfrac{U_Э - U_ш}{U_Э} = \dfrac{R_Э}{R_Э + j\omega L_Э}$. $\left|K_Э\right| = \dfrac{R_Э}{\sqrt{R_Э^2 + \left(\omega L_Э\right)^2}}$.

Ответ: $\left|K_Э\right| = \dfrac{R_Э}{\sqrt{R_Э^2 + \left(\omega L_Э\right)^2}}$.

95. Магнитное поле наводит на схему (рис. 34) напряжение шумов. Чему равно напряжение шумов на входных зажимах усилителя, если площадь, охватываемая проводами связи, равна S и вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости проводов и почему полное сопротивление цепи-приемника не влияет на величину наводок?

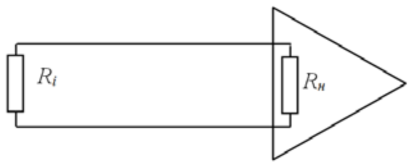


Рис. 34

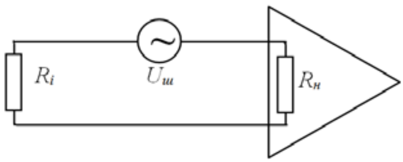


Рис. 35

Решение. Составим эквивалентную схему (рис. 35).

Напряжение шумов, наводимое в данной цепи, определяется законом электромагнитной индукции Фарадея: $E = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$, где поток вектора магнитной индукции $\vec{B}$ через замкнутую цепь $\Phi = (B \cdot S)\cos\alpha$, S – площадь, охватываемая цепью, α – угол между нормалью к площадке и вектором $\vec{B}$. Считая, что $\vec{B}$ изменяется по гармоническому закону, т. е. $B = B_0 \sin\omega t$ и S = const, найдем, что максимальное напряжение шумов $U_{ш} = B_0 S \cos\alpha$. Это напряжение не зависит от проводимости цепи.

Так как $\alpha = 0°$, $U_{ш} = B_0 S$.

Ответ: $U_{ш} = B_0 S$.

96. Какое ограничение в показанной на рис. 36 схеме должно налагаться на величину $R_{вх}$ с тем, чтобы на вход дифференциального усилителя поступало напряжение земли величиной не более $\gamma << 1$ от напряжения сигнала $U_г$?

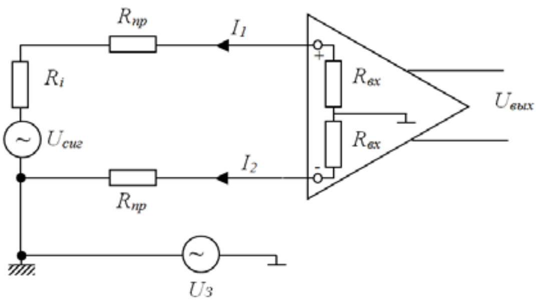


Рис. 36

Решение. Рассмотрим работу схемы в режиме действия полезного сигнала и в режиме действия помехи. В режиме полезного сигнала направление тока сигнала показано на рис. 37.

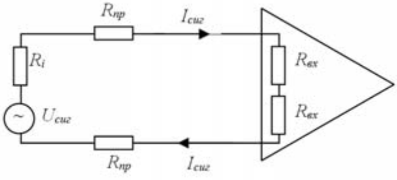


Рис. 37

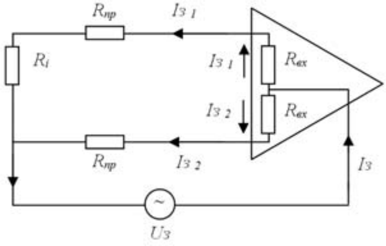


Рис. 38

В режиме помехи направление тока показано на рис. 38.

Из первого рисунка видно, что на входе усилителя действует напряжение $U_{\text{пол}} = U_{\text{сиг}} \dfrac{2R_{\text{вх}}}{R_i + 2R_{\text{пр}} + 2R_{\text{вх}}}$. Из рис. 38 видно, что на входе усилителя действует паразитное напряжение

$$U_{\text{параз}} = U_З \left(\frac{R_{\text{вх}}}{R_{\text{пр}} + R_{\text{вх}}} - \frac{R_{\text{вх}}}{R_{\text{пр}} + R_{\text{вх}} + R_i} \right) = U_З \frac{R_{\text{вх}} R_i}{\left(R_{\text{пр}} + R_{\text{вх}}\right)\left(R_E + R_{\text{вх}} + R_i\right)}.$$

Отношение $\dfrac{U_{\text{параз}}}{U_{\text{пол}}} = \dfrac{U_З}{U_{\text{сиг}}} \dfrac{R_i\left(R_i + 2R_{\text{пр}} + 2R_{\text{вх}}\right)}{2\left(R_{\text{пр}} + R_{\text{вх}}\right)\left(R_{\text{пр}} + R_{\text{вх}} + R_i\right)}$. Если $R_i \ll R_{\text{вх}}$ и $R_{\text{пр}} \ll R_{\text{вх}}$, то $\dfrac{U_{\text{параз}}}{U_{\text{пол}}} = \dfrac{U_З}{U_{\text{сиг}}} \dfrac{R_i}{R_{\text{вх}}} = \gamma$. Отсюда $R_{\text{вх}} \le \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{U_З}{U_{\text{сиг}}} R_i$.

Ответ: $R_{\text{вх}} \le \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{U_З}{U_{\text{сиг}}} R_i$.

97. Вычислите напряжение тепловых шумов, отнесенных к корню квадратному из полосы пропускания, для схемы на рис. 39 при температуре T.

Решение. Все три резистора имеют одинаковую температуру. Поэтому их можно заменить одним резистором с сопротивлением $R = r_1 + \dfrac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}$. Ответ следует из формулы Найквиста:

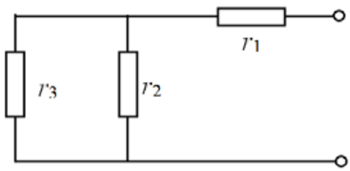


Рис. 39

$$U = \sqrt{4kTR\Delta f} = \sqrt{4kT\left(r_1 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}\right)\Delta f}.$$

Ответ: $U = \sqrt{4kT\left(r_1 + \dfrac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}\right)\Delta f}$.

98. Определите напряжение тепловых шумов при температуре T на выходе усилителя в схеме на рис. 40.

Предполагается, что усилитель имеет частотную характеристику, эквивалентную:

а) идеальному фильтру нижних частот с частотой среза 2 кГц;

б) идеальному полосовому фильтру с частотами среза 99 и 101 кГц.

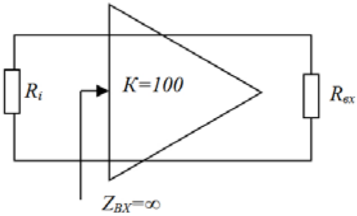


Рис. 40

Решение. На входе усилителя действует напряжение теплового шума, генерируемого в левом резисторе. Это напряжение можно представить как наличие генератора напряжения с ЭДС, определяемой по формуле Найквиста $U_{\text{ш вх}} = \sqrt{4kTR\Delta f}$. Если коэффициент усиления равен K, то напряжение теплового шума на выходе усилителя $U_{\text{ш вых}} = K\sqrt{4kTR\Delta f}$. В обоих случаях ширина полосы пропускания усилителя $\Delta f = 2$ кГц.

Ответ: $U_{\text{ш вых}} = K\sqrt{4kTR\Delta f}$.

99. Найти среднее квадратическое значение случайных отклонений свободно висящего математического маятника с массой m и длиной l при температуре окружающей среды T и значении $g = 10$ м/с^2.

Решение. $\sigma_\varphi = \sqrt{\dfrac{kT}{mgl}} = \sqrt{\dfrac{kT}{10ml}}$.

100. Найти среднее квадратическое значение тока и среднее квадратическое значение напряжения на конденсаторе в замкнутом колебательном контуре, при известных значениях емкости C и индуктивности L.

Решение. $\sigma_I = \sqrt{\dfrac{kT}{L}}$, $\sigma_U = \sqrt{\dfrac{kT}{C}}$.

101. Имеется резистор R. Найти спектральную плотность мощности напряжения на его концах при температуре T.

Решение следует из формулы Найквиста: $S^2(f) = 4kTR$.

102. Имеется резистор с сопротивлением R. Найти среднее квадратическое значение напряжения на концах резистора, имеющего температуру T в полосе частот Δf.

Решение следует из формулы Найквиста: $U = \sqrt{4kTR\Delta f}$.

103. Найти дисперсию тепловых шумов напряжения на емкости в колебательном контуре.

Решение. Используем основную формулу для расчета дисперсии тепловых флуктуаций $D_x = \dfrac{x^2 kT}{2 \cdot A(x)}$. Если $x = U$ – напряжение на конденсаторе, тогда $A(x) = A(U)$ – работа, которую нужно совершить, чтобы создать флуктуацию напряжения величиной U. Эта работа равна энергии, запасаемой в конденсаторе, т. е. $A(U) = \dfrac{CU^2}{2}$.

Тогда $D_U = \dfrac{kT}{C}$.

Ответ: $D_U = \dfrac{kT}{C}$.

104. Найти полную энергию тепловых флуктуаций в емкости колебательного контура.

Решение. Энергия электрического поля конденсатора $W = \dfrac{CU^2}{2}$. В случае тепловых флуктуаций электрического поля под U^2 следует понимать дисперсию D_U. Поскольку $U^2 = D_U = \dfrac{kT}{C}$, то $W = \dfrac{kT}{2}$.

Ответ: $W = \dfrac{kT}{2}$.

105. Найти спектральную плотность мощности равновесных флуктуаций тока в колебательном контуре на циклической частоте ω при заданных значениях параметров контура R, L, C.

Решение. В колебательном контуре (рис. 41) единственным элементом, в котором генерируется тепловой шум, является резистор.

Представим, что шум генерируется в отдельном генераторе шумового напряжения E, в то время как резистор не генерирует шум. Для определения спектральной плотности мощности шума сначала будем считать, что генератор напряжения – обычный генератор переменного напряжения. Тогда ток в контуре $I(f)=$ $=\dfrac{E}{R+j\omega L+\dfrac{1}{j\omega C}}$. Найдем квадрат модуля тока: $|I(f)|^2=I(f)I^*(f)=\dfrac{EE^*}{\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2+R^2}$.

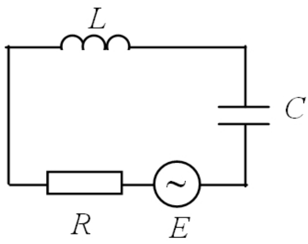


Рис. 41

Доказано, что в случае стационарных случайных процессов, если две случайные величины $x(\omega)$ и $y(\omega)$ связаны соотношением $|x(\omega)|^2=|a(\omega)|^2|y(\omega)|^2$, где $|a(\omega)|^2$ – некая детерминированная функция частоты ω, то спектральные плотности мощности этих случайных величин связаны между собой такой же зависимостью, т. е. $S_x^2(\omega)=|a(\omega)|^2 S_y^2(\omega)$. Поскольку для резистора при не очень больших частотах $S_E^2(f)=4kTR=\text{const}$, то $S_I^2(f)=\dfrac{4kTR}{\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2+R^2}$.

Ответ: $S_I^2(f)=\dfrac{4kTR}{\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2+R^2}$.

106. Найти значение спектральной плотности мощности помехи, действующей на емкости колебательного контура с параметрами R, C, L, если в контуре на циклической частоте ω действует индуктивная наводка в виде ЭДС, спектральная плотность мощности которой равна $S_{\text{вх}}^2$.

Решение. В колебательном контуре индуктивная наводка действует как генератор напряжения. Поэтому эквивалентная схема такого контура совпадает со схемой на рис. 41. Напряжение помехи на емкости $U_C=IZ_C=-j\dfrac{I}{\omega C}$. Как и в задаче № 108, $|U_C(f)|^2=$

$$=\frac{|I^2(f)|}{\omega^2C^2}=\frac{|E|^2}{\left(\omega^2LC-1\right)^2+(\omega RC)^2}.$$

С другой стороны, $\left|U_C(f)\right|^2 = S^2_{\text{вых}}(f)\Delta f$ и $|E|^2 = S^2_{\text{вх}}(f)\Delta f$. Тогда, окончательно, $S^2_{\text{вых}} = \dfrac{1}{\left(\omega^2 LC - 1\right)^2 + (\omega RC)^2} S^2_{\text{вх}}$.

Ответ: $S^2_{\text{вых}} = \dfrac{1}{\left(\omega^2 LC - 1\right)^2 + (\omega RC)^2} S^2_{\text{вх}}$.

107. В колебательном контуре с постоянными параметрами на частоте f действует наводка с амплитудным значением ЭДС, равным E. Значения каких параметров контура необходимо знать, чтобы найти отношение тока наводки к среднему квадратическому значению тока теплового шума, сосредоточенного в полосе частот пропускания контура? Как зависит это отношение от частоты f?

Решение. Ширина полосы пропускания контура $\Delta f = \dfrac{f_0}{Q}$, где Q – добротность контура, f_0 – собственная частота контура. Амплитуда тока наводки в контуре $I_{\text{нав}} = H(f)_{U-I} E$, где $H(f)_{U-I}$ – ЧХ контура преобразования ЭДС в ток. Спектральная плотность шумового тока в цепи контура $S_I^2(f) = \left|H(f)_{U-I}\right|^2 S_U^2(f)$, где $S_U^2(f) = 4kTR$ – спектральная плотность мощности ЭДС теплового шума. Среднее квадратическое значение тока тепловых шумов $I_{\text{кв}} = \sqrt{S_I^2(f)\Delta f} =$
$= \sqrt{4kTR\left|H(f)_{U-I}\right|^2 \Delta f}$.

Отношение $\dfrac{I_{\text{нав}}}{I_{\text{кв}}} = \dfrac{E}{2\sqrt{kTR\Delta f}} = \dfrac{E}{2\sqrt{kTR\dfrac{f_0}{Q}}}$. По определению, $Q = \dfrac{\omega_0}{2\delta} = \dfrac{2\pi f_0}{2\delta}$, $2\delta = \dfrac{R}{L}$. Используя эти формулы, найдем $\dfrac{I_{\text{нав}}}{I_{\text{кв}}} = \dfrac{E}{2\sqrt{kTR\Delta f}} = \dfrac{E}{R\sqrt{\dfrac{2kT}{\pi L}}}$. Видно, что данное отношение зависит от R и L и не зависит от f.

Ответ: $\dfrac{I_{\text{нав}}}{I_{\text{кв}}} = \dfrac{E}{2\sqrt{kTR\Delta f}} = \dfrac{E}{R\sqrt{\dfrac{2kT}{\pi L}}}$. Данное отношение зависит от R и L и не зависит от f.

108. Имеется измерительная цепь, в которой действует помеха, обусловленная емкостной связью. От чего сильнее уменьшится помеха, от уменьшения емкости $C_{\text{п}}$ связи в n раз или от уменьшения входного сопротивления СИ в то же число раз?

Решение. Модель измерительной цепи показана на рис. 42.

Здесь $U_{\text{по}}$ напряжения источника помехи, $U_{\text{ш}}$ – напряжение источника полезного сигнала.

Преобразуем эту схему, учитывая только сигнал помехи. Это преобразование выполнено в два этапа, как показано на рис. 43 и 44.

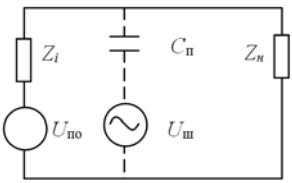


Рис. 42

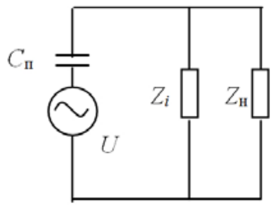


Рис. 43

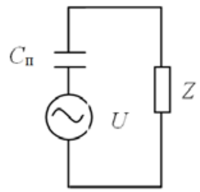


Рис. 44

Из последнего рисунка видно, что сигнал помехи, наведенный на измерительную цепь

$$U_{\text{нав}} = \frac{Z}{Z_C + Z} \cdot U_{\text{ш}},$$

где $Z_{\text{с}} = \dfrac{1}{j\omega C_n}$ – емкостное сопротивление паразитного конденсатора (емкостной связи);

$Z = \dfrac{Z_i Z_{\text{н}}}{Z_i + Z_{\text{н}}}$ – сопротивление нагрузки для источника помехи.

Так как $C_{\text{п}}$ – малая величина, то $Z_{\text{с}} \gg Z$. Отсюда следует, что $U_{\text{нав}} = \dfrac{Z}{Z_c} \cdot U_{\text{ш}} = j\omega C_{\text{п}} \cdot \dfrac{Z_i Z_{\text{н}}}{Z_i + Z_{\text{н}}} \cdot U_{\text{ш}}$. При уменьшении паразитной емкости в n раз напряжение $U_{\text{нав}} = U_1 = j\omega \frac{C_n}{n} \cdot \frac{Z_i Z_{\text{н}}}{Z_i + Z_{\text{н}}} \cdot U_{\text{ш}}$. При уменьшении сопротивления $Z_{\text{н}}$ напряжение $U_{\text{нав}} = U_2 = j\omega C_n \times$ $\times \frac{Z_i Z_{\text{н}}}{nZ_i + Z_{\text{н}}} \cdot U_{\text{ш}}$. Отношение $\frac{U_1}{U_2} = \frac{nZ_i + Z_{\text{н}}}{n(Z_i + Z_{\text{н}})} < 1$. Следовательно, уменьшение паразитной емкости более эффективно, чем уменьшение сопротивления $Z_{\text{н}}$.

Ответ: уменьшение паразитной емкости $C_{\text{п}}$ более эффективно, чем уменьшение сопротивления $Z_{\text{н}}$

109. Имеется измерительная цепь, в которой действует помеха, обусловленная индуктивной связью. Паразитная ЭДС равна $E_{\text{инд}}^{\text{пар}}$, измеряемый сигнал равен $U_{\text{сигн вх}}$. Найдите значение помехи на выходе, если полезный выходной сигнал имеет напряжение $U_{\text{сигн вых}}$.

Решение. В случае индуктивной наводки помеха преобразуется в измерительной цепи так же, как и полезный сигнал. Поэтому $U_{\text{пар вых}} = E_{\text{инд}}^{\text{пар}} \frac{U_{\text{сигн вых}}}{U_{\text{сигн вх}}}$.

Ответ: $U_{\text{пар вых}} = E_{\text{инд}}^{\text{пар}} \frac{U_{\text{сигн вых}}}{U_{\text{сигн вх}}}$.

110. Эквивалентная полоса пропускания белого шума RC – цепочки равна Δf. Найти значение R, если известно значение C.

Решение. Эквивалентная полоса пропускания белого шума для RC – цепочки определяется по формуле $\Delta f_{\text{экв}} = 0{,}25 / \tau$, где $\tau = RC$. Отсюда следует, что $R = \frac{1}{4C\Delta f_{\text{экв}}}$.

111. Найти среднее квадратическое значение шума $U_{\text{кв}}$ на выходе RC – цепочки, если спектральная плотность мощности белого шума на ее входе равна P.

Решение. Если шум – белый со спектральной плотностью мощности P, то дисперсия шума на входе цепочки $D_{\text{ш}} = P\Delta f$. На выходе RC – цепочки дисперсия шума определяется по формуле

$$D_{\text{ш вых}} = \frac{D_{\text{ш}}}{2\Delta f\tau},$$

где Δf – ширина полосы шума.

Тогда дисперсия шума на выходе RC – цепочки $D_{\text{ш вых}} = \frac{P}{2\tau}$. Среднее квадратическое значение этого шума $U_{\text{кв}} = \sqrt{D_{\text{ш вых}}} =$ $= \sqrt{P/(2RC)}$.

Ответ: $U_{\text{кв}} = \sqrt{D_{\text{ш вых}}} = \sqrt{P/(2RC)}$.

112. Среднее квадратическое значение помехи при однократном измерении полезного сигнала равно σ. Какое число измерений N нужно провести, чтобы уменьшить помеху в k раз.

Решение. Ширина полосы измерения сигнала (и, естественно, шума) Δf и время измерения T в самом общем виде связаны между собой соотношением неопределенности $\Delta f\, T \geq 1$. При измерениях периодических сигналов Δf можно уменьшить, увеличив время измерения или, что то же самое, увеличив количество наблюдаемых периодов. Непериодические процессы можно формально рассматривать как периодические, повторяя опыты и полагая время протекания каждого процесса периодом. Тогда количество опытов можно считать числом периодов.

Если число периодов равно N, то дисперсия оценки среднего значения шума (случайного сигнала) уменьшается в N раз и равно $D_{\text{ш}}/N$, где $D_{\text{ш}}$ – дисперсия шума при измерении в течение одного периода, а средняя квадратичная погрешность оценки среднего значения шума равна $\sqrt{D_{\text{ш}}/N}$. По определению, $\sigma = \sqrt{D}$. По условию задачи $\frac{\sigma}{\sigma'} = k$, кроме того, $\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$. Отсюда следует, что $N = k^2$.

Ответ: $N = k^2$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

113. Время усреднения интегрирующего преобразователя равно τ. Нарисуйте АЧХ этого преобразователя. Определите частоты помех, которые не смогут пройти через этот преобразователь.

114. Перечислите естественные факторы, определяющие минимально достижимый порог чувствительности СИ.

115. В чем состоит принципиальное различие между равновесными и неравновесными шумами?

116. Как влияет сопротивление резистора в колебательном контуре на среднюю интенсивность теплового шумового напряжения, снимаемого с емкости?

117. Как влияет сопротивление резистора в колебательном контуре на среднюю интенсивность теплового шумового напряжения, снимаемого с катушки?

118. Чему равна полная энергия тепловых шумов в электрическом колебательном контуре?

119. Как влияет сопротивление резистора в колебательном контуре на спектральную плотность теплового шумового тока?

120. Вычислите напряжение тепловых шумов, отнесенных к корню квадратному из полосы пропускания, для схемы, показанной на рис. 45 .

121. Вычислите напряжение тепловых шумов, отнесенных к корню квадратному из полосы пропускания, для схемы, показанной на рис. 46.

122. Вычислите напряжение тепловых шумов, отнесенных к корню квадратному из полосы пропускания, для схемы, показанной на рис. 47.

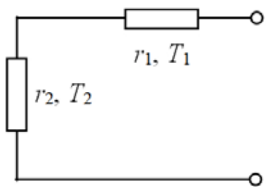


Рис. 45

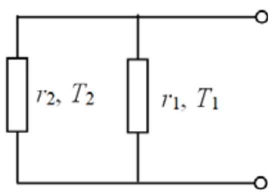


Рис. 46

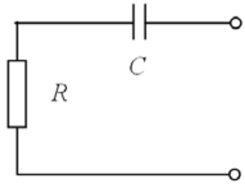


Рис. 47

123. Вычислите напряжение тепловых шумов, отнесенных к корню квадратному из полосы пропускания, для схемы, показанной на рис. 48.

124. Вычислите напряжение тепловых шумов, отнесенных к корню квадратному из полосы пропускания, для схемы, показанной на рис. 49.

125. Вычислите напряжение тепловых шумов, отнесенных к корню квадратному из полосы пропускания, для схемы, показанной на рис. 50.

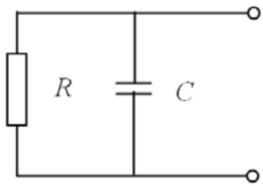


Рис. 48

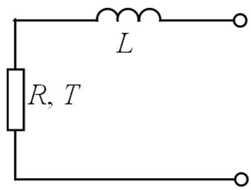


Рис. 49

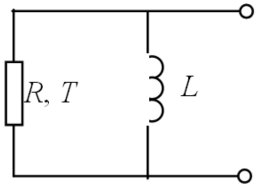


Рис. 50

126. Определите дисперсию тепловых колебаний тока в катушке электрического колебательного контура.

127. Определите полную энергию тепловых флуктуаций в катушке электрического колебательного контура.

128. Как влияет сопротивление резистора на полную энергию тепловых флуктуаций в электрическом колебательном контуре?

129. Определите полную энергию тепловых флуктуаций в колебательном контуре.

130. Укажите связь между спектральной плотностью флуктуаций физической величины и дисперсией этих флуктуаций.

131. Паразитная индуктивная связь между цепью 1 и цепью 2 равна M (рис. 51). В цепи 1 действует источник шумовой ЭДС со спектральной плотностью мощностью $S_u^2(\omega)$. Найти спектральную плотность мощности напряжения шумов на резисторе R_2.

132. Найти среднее квадратическое значение тока теплового шума, сосредоточенного в полосе частот пропускания колебательного контура с постоянными параметрами.

133. Математический маятник с массой m и длиной l совершает малые колебания с амплитудой $\alpha << 1$. Найти эквивалентную температуру этих колебаний.

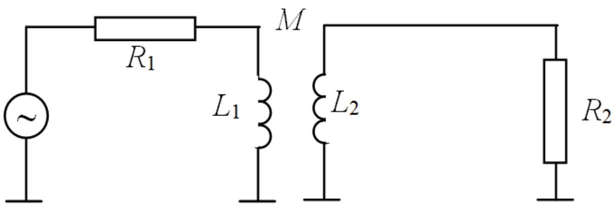


Рис. 51

134. Пружинный маятник с массой m и жесткостью пружины k совершает гармонические колебания вдоль вертикали с амплитудой x_0. Найти эквивалентную температуру этих колебаний.

Рекомендации преподавателям по составлению вариантов контрольных работ

Варианты контрольных работ можно составлять из задач, рекомендованных для самостоятельного решения. Для того, чтобы в варианте не встречались однотипные задачи, можно в каждом из четырех разделов разбить соответствующие задачи на однотипные и выбрать по одной задаче из каждого подраздела.

Один из способов такого разбиения представлен в таблице.

№ п/п	Номера задач в подразделе	Количество задач в подразделе	Число задач, рекомендуемых для включения в вариант	Число вариантов выбора задач
1	29–45	17	3	680
2	56–62	7	1	7
3	63–64	2	1	2
4	65–70	6	1	6
5	81–85	5	1	5
6	86–90	5	1	5
7	113–115	3	1	3
8	116–125	10	2	45
9	126–130	5	1	5
10	131–134	4	1	4
Всего	–	64	13	$\approx 3\cdot10^9$

Учебное издание

ДЖИЛАВДАРИ Игорь Захарович
РИЗНООКАЯ Наталия Николаевна

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗМЕРЕНИЙ
(сборник задач)

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей
1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника»;
1-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности»;
1-54 01 02 «Методы и приборы контроля качества
и диагностики состояния объектов»

Редактор *В. И. Акуленок*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 16.05.2020. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,37. Уч.-изд. л. 2,64. Тираж 100. Заказ 245.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.