

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Кафедра «Строительная механика»**

Е.П. Довнар

Л.Б. Климова

# **РАСЧЕТ РАМ**

## **НА СТАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ**

Учебное пособие  
для студентов строительных специальностей  
высших учебных заведений

Минск 2004

УДК 624.072.33.04 (075.8)  
ББК 38.112 я73  
Д 58

Рецензенты:

Довнар Е.П.

Д 58 Расчет рам на статические и динамические нагрузки: Учеб. пособие /Е.П. Довнар, Л.Б. Климова. –Мн.: БНТУ, 2004. – 186 С.

В пособии кратко изложена теория основных методов расчета стержневых систем на статические и динамические нагрузки. Рассмотрены методы определения внутренних сил в расчетах на прочность, критических сил в расчетах на устойчивость и методы решения задач при действии динамических нагрузок. Приведены примеры численного решения задач.

Пособие ориентировано на студентов-заочников специальности «Промышленное и гражданское строительство», может быть полезным для студентов других строительных специальностей вузов и специалистов, занимающихся расчетом конструкций.

УДК 624.072.33.04 (075.8)  
ББК 38.112 я73  
Д 58

© Довнар Е.П.,  
Климова Л.Б., 2004

## Предисловие

Данное пособие написано сотрудниками кафедры строительной механики на основе опыта преподавания курса в течении многих лет в Белорусском национальном техническом университете. В процессе работы над окончанием рукописи один из авторов, доцент Довнар Евгений Петрович, умер от неизлечимой болезни. Кафедра взяла на себя труд закончить редактирование рукописи и сдать ее в печать. Эту работу выполнили проф. Босаков С.В. и ассистент Зданович Т.П. Они старались сохранить стиль автора, и это им удалось.

Авторы стремились создать такое пособие, которое в разной мере было бы одинаково полезным для студентов всех строительных специальностей вузов. В книге отражены три основных темы: расчеты статически неопределимых систем, устойчивость и динамика сооружений в традиционном классическом изложении для линейно деформируемых систем, причем основной упор сделан на две последние темы. В пособии много графического и иллюстративного материала, по каждой теме приводятся примеры с детальными пояснениями, имеются таблицы для расчетов, используется несложный математический аппарат, доступный рядовому студенту.

Перу доцента Довнара Е.П. также принадлежит учебник по строительной механике для студентов вузов, обучающихся по специальности «Строительство», изданный в 1986г. в соавторстве с профессором Л.И. Коршуном. Отдавая дань светлой памяти Довнара Е.П., кафедра считает, что издание этого пособия вместе с ранее выпущенным учебником является достойным памятником старейшему сотруднику кафедры.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Глава 1. Введение</b>	7
1.1. Развитие методов расчета стержневых систем	7
1.2. Общие указания и методические рекомендации	11
1.3. Основная литература по курсу. Краткая информация по содержанию источников	13
<b>Глава 2. Статическая неопределимость стержневой системы</b>	18
2.1. Понятие о статической неопределимости	18
2.2. Свойства статически неопределимых систем	22
2.3. Методы расчета статически неопределимых систем	25
<b>Глава 3. Расчет стержневых систем методом сил</b>	27
3.1. Сущность метода сил. Канонические уравнения	27
3.2. Определение и проверки правильности вычисления коэффициентов при неизвестных и свободных членах уравнений метода сил	33
3.3. Построение и проверки правильности окончательных эпюр $M$ , $Q$ и $N$	36
3.4. Пример расчета рамы методом сил.	38
<b>Глава 4. Расчет стержневых систем методом перемещений</b>	47
4.1. Общие положения	47
4.2. Кинематическая неопределимость упругой стержневой системы	47
4.3. Сущность метода перемещений. Канонические уравнения	50
4.4. Определение и проверки правильности вычисления коэффициентов при неизвестных и свободных членах уравнений метода перемещений	54
4.5. Построение и проверки правильности окончательных эпюр $M$ , $Q$ и $N$	58
4.6. Пример расчета рамы методом перемещений	60

<b>Глава 5. Основы устойчивости стержневых систем</b>	69
5.1. К истории вопроса	69
5.2. Формы потери устойчивости. Критическая нагрузка	70
5.3. Число степеней свободы и формы равновесия	77
5.4. Уравнение устойчивости упругого сжато-изогнутого стержня	78
5.5. Методы решения задач устойчивости	80
5.6. Устойчивость стержней постоянного сечения с жесткими опорами	89
5.7. Устойчивость стержней постоянного сечения с упругими опорами	91
5.8. Устойчивость плоских рам	104
5.9. Пример расчета рамы на устойчивость	112
<b>Глава 6. Основы динамики сооружений</b>	132
6.1. Основные положения	132
6.2. Свободные колебания систем с одной степенью свободы без учета сил сопротивления	136
6.3. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы без учета сил сопротивления. Явление резонанса	141
6.4. Свободные колебания систем с одной степенью свободы при учете сил сопротивления	143
6.5. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы при учете сил сопротивления	147
6.6. Свободные колебания систем со многими степенями свободы	149
6.7. Определение внутренних сил и перемещений при действии динамической нагрузки	151
6.8. Канонические уравнения для определения максимальных значений инерционных сил	153
6.9. Примеры расчета рам на динамическую нагрузку	157

## **Глава 7. Приближенные методы и способы определения**

<b>частот свободных колебаний</b>	. . . . .	169
7.1. Назначение приближенных методов	. . . . .	169
7.2. Энергетический метод	. . . . .	170
7.3. Упрощения расчетной схемы системы	. . . . .	177
7.4. Использование свойств симметрии системы	. . . . .	180

## *Глава 1*

### **Введение**

#### **1.1. Развитие методов расчета стержневых систем**

В строительной механике изучаются принципы и методы расчета сооружений на прочность, устойчивость и жесткость. На основании этих расчетов выполняются проектирование новых и реконструкция существующих зданий и сооружений.

Расчетом на прочность определяют необходимые размеры поперечных сечений элементов, при которых обеспечивается восприятие заданных внешних нагрузок внутренними силами материала системы.

Расчетом на устойчивость отыскивают наибольшие значения нагрузок, при которых система еще способна сохранять заданную форму равновесия в деформированном состоянии.

Расчетом на жесткость устанавливают, находятся ли перемещения системы (например, прогибы) в пределах, допускаемых нормами для данного класса сооружений при действии заданных нагрузок в период эксплуатации сооружения.

Расчеты на устойчивость и жесткость дополняют расчеты на прочность и позволяют всесторонне охарактеризовать систему с точки зрения ее надежности в эксплуатации.

Основой для изучения строительной механики являются высшая математика, физика, теоретическая механика и сопротивление материалов, которые предварительно должны быть освоены.

В широкой трактовке строительная механика включает такие дисциплины, как сопротивление материалов, строительная механика стержневых систем, теория упругости, теория пластичности и теория ползучести, которые в совокупности служат теоретической базой для освоения расчетов строительных конструкций, зданий и инженерных сооружений. В отличие от сопротивления материалов, где рассматриваются преимущественно вопросы

расчета отдельных элементов сооружений (в виде брусьев, стержней), строительная механика занимается расчетом систем стержней, образующих сооружение.

Значение строительной механики в решении практических задач строительства очень велико. На основании расчетов, выполняемых методами строительной механики, инженерам предоставляется возможность рационально распределять материал в элементах конструкции, создавать конструкции легкие, но в то же время прочные и надежные в эксплуатации. Кроме того, расчеты позволяют инженеру, еще на стадии проектирования рассматривать различные варианты соединения элементов в конструкциях и конструкций в сооружении. Это дает возможность отыскать приемлемый вариант сооружения по экономическим показателям, обеспечивая при этом требования прочности сооружения и его надежности в эксплуатации.

Несмотря на усложненную физико-математическую основу методов строительной механики, она не может быть отнесена к чисто теоретическим дисциплинам. В строительной механике рассматриваются сооружения, выполняемые из реальных материалов, обладающих свойствами, определяемыми экспериментальным путем. В своих разработках строительная механика должна учитывать физико-механические свойства строительных материалов и в значительной степени опираться на данные опытов. На всех этапах развития строительной механики ее теоретические разработки проверялись экспериментально путем испытания моделей или натурными испытаниями реальных конструкций и сооружений. Новые теоретические предпосылки и новые методы строительной механики получали право на их практическое использование, как правило, только после экспериментального подтверждения своей достоверности. Иногда данные опытов предшествовали теоретическим разработкам и являлись основой для создания или совершенствования теории методов расчета сооружений. Таким образом, строительную механику можно также считать экспериментально-теоретической дисциплиной.

Формирование строительной механики, как науки, принято связывать с



именем великого итальянского ученого Галилео Галилея (1564-1642 гг.). Будучи вначале чисто эмпирической, она развивалась вместе с физикой и математикой, приобретая теоретическую базу и практический опыт. Долгое время, расчеты были возможны лишь для самых простых систем ввиду ограниченности теоретических разработок, методов расчета и примитивности вычислительных средств.

Возведение мостов на интенсивно строящихся со второй половины XIX столетия железных дорогах потребовало от строительной механики решения ряда сложнейших задач. Нужно было отыскать, по возможности, рациональные формы внедряемых в практику строительства стальных конструкций. Наряду с проблемами устойчивости и динамики сооружений, возникла необходимость максимального удешевления мостовых переходов и обострилась проблема поиска конструкций наименьшего веса. Это дало мощный толчок развитию теории строительной механики. В это время российскими учеными были созданы новые виды металлических ферм и разработана теория их расчета. Значительно расширилось применение метода сил и метода перемещений в расчетах строительных конструкций, особенно в расчетах рам. Будучи, как правило, более рациональными по удовлетворению технологических требований и по расходу материала, рамные конструкции начали широко использоваться в промышленном и гражданском строительстве, в мостостроении. Во второй половине XIX столетия метод сил получил существенное развитие, и уже в начале XX столетия этим методом можно было воспользоваться для расчета сложных статически неопределимых стержневых систем любого вида.

Первые разработки метода перемещений относятся так же ко второй половине XIX столетия, а в начале XX столетия метод перемещений уже полностью сформировался, как эффективный самостоятельный метод для расчета любых стержневых систем.

В 20-30 годах XX столетия профессором А.А. Гвоздевым был разработан и предложен к использованию в расчетной практике смешанный метод,

впитавший в себя идеи метода сил и метода перемещений. Для определенного класса рамных систем совместное применение методов сил и перемещений в форме смешанного метода оказалось более эффективным, чем применение этих методов в отдельности.

Метод сил, метод перемещений и смешанный метод с учетом принимаемых допущений относятся к точным, классическим методам и являются основными методами, используемыми в расчетах статически неопределимых стержневых систем.

Внедрение в расчетную практику ЭВМ существенно расширило возможности строительной механики. Появилась возможность уточнять подходы в решениях задач классическими методами. На базе классических методов появились способы расчета сооружений, основанные на новых идеях. Предпочтение стали отдавать универсальным методам, допускающим максимальную формализацию процедуры расчета и полную ее автоматизацию. Одним из таких методов явился метод конечных элементов, широко используемый в настоящее время в расчетной практике. Вследствие этого появились более благоприятные условия для решения такой сложной проблемы как отыскание оптимальных конструкций, удовлетворяющих заранее заданным условиям.

Значимость получения оптимальных конструкций, с точки зрения их экономичности по расходу материала и другим показателям, возросла по мере роста интенсивности строительства. И в наше время, при непрерывно возрастающих масштабах капитального строительства, применение оптимальных конструкций и оптимальных сооружений в целом имеет большое значение. Поэтому одним из актуальных направлений развития строительной механики являются разработки новых методов расчета, которые позволяли бы получать оптимальные конструкции, удовлетворяющие всем заданным условиям и требованиям экономичности.

## 1.2. Общие указания и методические рекомендации

Полный курс строительной механики стержневых систем состоит из трех частей. По действующему учебному плану он изучается, например, студентами специальности «Промышленное и гражданское строительство» (ПГС) в течении трех семестров. В первой части изучаются статически определимые системы. Вторая часть курса охватывает статически неопределимые системы, а третья часть – вопросы устойчивости и динамики сооружений.

Основной формой работы студентов-заочников является самостоятельная работа. Она включает изучение по учебникам и учебным пособиям теоретического материала, а также его практическое закрепление решением примеров и задач. Для успешного освоения курса строительной механики студент должен хорошо усвоить теоретические основы изучаемого материала, иметь ясное понимание физического смысла и законов распределения внутренних сил и деформаций в рассматриваемых системах. Ему также нужно освоить методы расчета и приобрести необходимые практические навыки расчетов рассматриваемых систем.

Учебными планами также предусмотрено выполнение студентами индивидуальных расчетно-проектировочных работ (РПР) и курсовых работ (КР), охватывающих основные темы изучаемого материала.

Индивидуальные РПР и КР являются важным звеном в освоении студентом курса строительной механики и приобретении практических навыков в расчетах конкретных систем. К выполнению РПР или КР следует приступать после проработки соответствующего теоретического материала, закрепив его решением примеров по изучаемой теме. Выполненную РПР или КР следует сразу же направить на проверку. В случае имеющихся замечаний или рекомендаций рецензента своевременно внести необходимые исправления и дополнения. Если работа не допущена к защите и требуется переработка ее части или работы в целом, то на повторную рецензию должны быть представлены предыдущая работа с сохранением замечаний рецензента и вновь

выполненная работа или ее часть с исправлениями.

Завершающим этапом изучения разделов курса являются защита РПР или КР, зачеты и экзамены. К сдаче зачета по теоретическому курсу или экзамена допускаются студенты, защитившие РПР или КР. При защите расчетно-проектировочной или курсовой работы студент должен показать самостоятельность их выполнения, понимание физической сущности рассмотренных вопросов.

В предлагаемом пособии рассматриваются плоские стержневые системы. Изложены теоретические положения основных методов расчета стержневых систем на статические и динамические нагрузки, приведены примеры расчета рам, даны методические указания и разъяснения по выполнению расчетов.

В пособии уделено внимание вопросам устойчивости и динамики сооружений, так как для студентов эта часть строительной механики является более трудной в усвоении.

Пособие ориентировано на студентов заочной формы обучения специальности «Промышленное и гражданское строительство» (ПГС). Оно может быть полезным для студентов дневной формы обучения специальности ПГС, а так же для студентов, изучающих строительную механику на других специальностях.

Пособие подготовили:

Довнар Е.П. – Введение, теоретический материал, общее редактирование.

Климова Л.Б. – Примеры расчетов (с. 35–43; 58–65; 110–116; 158–170).

### 1.3. Основная литература по курсу.

#### Краткая информация по содержанию источников

1. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1986. –607с.

*Учебник рекомендован для студентов строительных специальностей вузов. Изложены методы расчета статически определимых и неопределимых стержневых систем в обычной и матричной форме при действии статических и динамических нагрузок. Даны сведения из вычислительной математики, используемые в строительной механике, рассмотрены расчеты стержневых систем с использованием ЭВМ. По содержанию материала учебник близок к программе курса строительной механики для студентов специальности ПГС.*

2. Дарков А.В., Клейн Г.К., Кузнецов В.И. и др. Строительная механика. /Под ред. Даркова А.В. – М.: Высшая школа, 1976. –600с.

*Учебник рекомендован для студентов строительных специальностей вузов. Изложены методы расчета статически определимых и неопределимых стержневых систем. Изложены расчеты на устойчивость и действие динамических нагрузок в обычной и матричной форме. По содержанию материала учебник близок к программе курса строительной механики для студентов специальности ПГС.*

3. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы. /Под ред. Смирнова А.Ф. – М.: Стройиздат, 1981. – 512с.

*Учебник рекомендован для студентов строительных специальностей вузов. Изложены методы определения усилий и перемещений в статически определимых и неопределимых стержневых системах. Широко использован матричный аппарат. По содержанию материала учебник близок к программе курса строительной механики для студентов специальности ПГС.*

4. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н.

Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. /Под ред. Смирнова А.Ф. – М.: Стройиздат, 1984. – 415с.

*Учебник предназначен для студентов строительных специальностей вузов. Широко использован матричный аппарат. Может быть рекомендован для студентов любых строительных специальностей, изучающих полный курс строительной механики.*

5. Киселев В.А. Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1976. – 511с.

*Учебник предназначен для студентов вузов, обучающихся по специальностям: «Автомобильные дороги», «Мосты и тоннели» и «Строительство аэродромов». Изложены методы расчета статически определимых и неопределимых стержневых систем. Приведены решения отдельных задач в обычной и матричной форме. Значительное внимание уделено расчетам на подвижные нагрузки.*

6. Киселев В.А. Строительная механика. Специальный курс. (Динамика и устойчивость сооружений). – М.: Стройиздат, 1969. – 431с.

*Учебник предназначен для студентов вузов, обучающихся по специальностям: «Автомобильные дороги», «Мосты и тоннели», и «Строительство аэродромов». Изложенный материал по динамике и устойчивости сооружений охватывают весь объем этих разделов полного курса строительной механики. Учебник может быть рекомендован также студентам специальности ПГС.*

7. Рабинович И.М. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Госстройиздат, 1960. – 520с.

*Учебник рекомендован для студентов строительных специальностей вузов. Основное внимание уделено методам расчета статически определимых и неопределимых стержневых систем. Рассмотрены основные положения теории расчетов при действии динамических нагрузок. Дано понятие о расчетах на устойчивость. По содержанию материала учебник близок к программе курса строительной механики для студентов специальности ПГС.*

8. Ржаницын А.Р. Строительная механика. –М.: Высшая школа, 1982. – 400с.

*Учебное пособие для студентов строительных специальностей вузов. В сокращенном виде рассмотрены методы расчета статически определимых и неопределимых стержневых систем в традиционной постановке. Широко использована матричная форма в расчетах статически неопределимых систем, рассмотрены вопросы устойчивости и динамики сооружений. Может быть полезным для студентов любых строительных специальностей, изучающих полный курс строительной механики.*

9. Снитко Н.К. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1972. –488с.

*Учебник предназначен для студентов строительных специальностей вузов. Изложены основные методы расчета статически определимых и неопределимых стержневых систем, рассмотрены вопросы устойчивости и динамики сооружений, а также методы расчета пластинок и оболочек. Изложение материала иллюстрируется примерами расчета. По содержанию материала учебник близок к программе курса строительной механики для студентов специальности ПГС. Может быть полезным студентам других строительных специальностей.*

10. Довнар Е.П., Коршун Л.И. Строительная механика. – Мн.: Вышэйшая школа, 1986. – 310с.

*Учебник предназначен для студентов вузов, обучающихся по специальности «Строительство». Изложены методы расчета статически определимых и неопределимых стержневых систем. Параллельно с обычной формой, даны расчеты систем в матричной форме. Рассмотрены основы устойчивости и динамически сооружений.. Изложение материала сопровождается примерами численных решений задач. По содержанию материала учебник близок к программе полного курса строительной механики для студентов специальности ПГС.*

11. Раевский А.Н. Основы расчета сооружений на устойчивость. – М.: Высшая школа, 1962. – 160с.

*Учебное пособие предназначено для студентов строительных и авто-*

дорожных вузов. Изложены общие сведения об устойчивости стержневых систем и основные методы их расчета. Изложение материала иллюстрируется большим количеством решения задач. Может быть полезным для студентов любых строительных специальностей, изучающих этот раздел строительной механики.

12. Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1987. – 264с.

*Пособие предназначено для студентов строительных специальностей вузов. Даны краткие сведения по теории устойчивости и динамике сооружений. Приведены примеры решения типовых задач и большое число задач для самостоятельных упражнений студентов. Пособие ориентировано на студентов строительных вузов и факультетов мостов транспортных вузов.*

13. Клейн Г.К., Леонтьев Н.Н., Ванюшенков М.Г., и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем. /Под ред. Клейна Г.К. – М.: Высшая школа, 1980. – 384с.

*Пособие предназначено для студентов строительных специальностей вузов. Изложены расчеты статически определимых и неопределимых стержневых систем. Даны краткие сведения из теории по каждому рассмотренному разделу строительной механики, приведены методические указания и подробные решения типовых задач. Пособие окажет существенную помощь студентам любых строительных специальностей.*

14. Клейн Г.К., Рекач В.Г., Розенблат Г.И. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. (Основы теории устойчивости, динамики сооружений и расчета пространственных систем). – М.: Высшая школа, 1972. – 320с.

*Пособие предназначено для студентов строительных специальностей вузов. Даны краткие сведения из теории устойчивости, динамики сооружений и расчета пространственных систем. Приведены подробные решения типовых задач, сопровождаемые методическими указаниями. Пособие ори-*



ентрировано на специальность ПГС и может быть полезным для студентов других специальностей, изучающих устойчивость и динамику сооружений.

15. Селюков В.М. Расчетно-проектировочные работы по строительной механике. – Мн.: Вышэйшая школа, 1989. – 205с.

*Пособие предназначено для студентов строительных специальностей вузов. Изложен теоретический материал, охватывающий выполнение расчетно-проектировочных работ статически определимых и неопределимых стержневых систем, устойчивости и динамически сооружений. Приведены подробные примеры расчета в объеме РПР в обычной и матричной форме. Может быть полезным для студентов любых строительных специальностей.*

16. Кузьмин Н.Л., Рекач В.Г., Розенблат Г.И. /Под ред. Рабиновича И.М. Сборник задач по курсу строительной механики. – М.: Госстройиздат, 1962. – 332с.

*Пособие предназначено для студентов строительных специальностей вузов. Приведены примеры расчета статически определимых и неопределимых стержневых систем на действие статических и динамических нагрузок. Особенность пособия в том, что в первой его части даны условия задач, а во второй – приведены решения, ответы или методические указания к их решению. Может быть полезным для студентов любых специальностей, изучающих курс строительной механики.*

17. Киселев В.А., Афанасьев А.М., Ермоленко В.А. и др. Строительная механика в примерах и задачах. /Под ред. Киселева В.А. – М.: Стройиздат, 1968. – 387с.

*Пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по специальностям: «Мосты и тоннели», «Строительство аэродромов» и «Автомобильные дороги». Приведены примеры на прочность статически определимых и неопределимых стержневых систем в обычной и матричной форме, даны методические указания по выполнению расчетов. Может быть полезным и студентам специальности ПГС.*

Статическая неопределимость стержневой системы

2.1. Понятие о статической неопределимости

Статически неопределимыми называют системы, в которых для определения всех усилий (изгибающих моментов, поперечных и продольных сил) во всех сечениях всех элементов недостаточно уравнений равновесия твердого тела или системы твердых тел. Чтобы рассчитать такую систему, необходимо составить дополнительные уравнения, включающие перемещения, обусловленные упругими свойствами материала системы. Статически неопределимые системы содержат избыточные или, называемые условно, «лишние» связи. Под «лишними» не следует понимать ненужные связи. С точки зрения геометрической неизменяемости системы, это избыточные связи сверх минимально необходимых, обеспечивающих геометрическую неизменность системы и ее неподвижность относительно основания.

Наибольшее количество связей, которое можно удалить одновременно из системы, не нарушая геометрической неизменяемости ее структуры и неподвижности относительно основания, называют *степенью статической неопределимости системы*. Например, на рис. 2.1а изображена балка с пятью опорными стержнями. Минимальное число опорных стержней для закрепле-

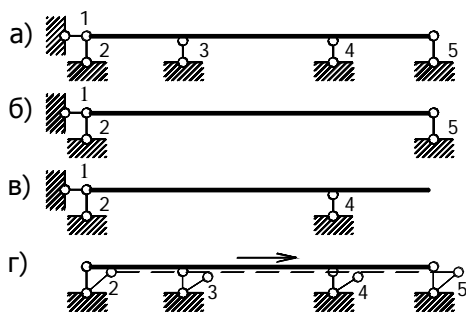


Рис. 2.1

ния тела в плоскости равно трем и, следовательно, система содержит два избыточных («лишних») опорных стержня, т.е. степень ее статической неопределимости равна двум.

Можно отбрасывать любых два стержня из четырех вертикальных, и мы получаем обычную неподвижную однопролетную балку, способную воспринимать действующие на нее нагрузки (рис. 2.1б,в). Если отбросить один горизон-

тальный стержень (1), сохранив при этом даже все вертикальные (2, 3, 4 и 5), то получаем изменяемую систему (рис. 2.1г), которая не способна воспринимать горизонтальные нагрузки. Поэтому, следует различать связи условно необходимые, без которых система остается неизменяемой и способной выполнять свои функции, и абсолютно необходимые, потеря которых приводит к изменямости и непригодности системы. В нашем случае все вертикальные опорные связи (2, 3, 4 и 5) являются условно необходимыми, а горизонтальная связь (1) – абсолютно необходимой. Обратим на это внимание, так как в дальнейшем при выполнении расчетов нужно будет отбрасывать избыточные связи в системах и эту операцию необходимо выполнять, обеспечивая неизменяемость системы.

В одной и той же системе могут быть отброшены любые условно необходимые связи. Например, в нашем случае в каких-либо сечениях балки можно было ввести два сквозных шарнира, превратив заданную неразрезную балку в трехпролетную шарнирную.

Число лишних связей в системе может быть найдено по известной из первой части курса формуле:

$$L = 2Ш + C_{on} - 3Д, \quad (2.1)$$

где:  $L$  – число избыточных (лишних) связей;

$Ш$  – количество шарниров, соединяющих диски, с учетом их кратности;

$C_{on}$  и  $Д$  – соответственно количество опорных стержней и дисков в системе.

Пользуясь формулой (2.1) нужно учитывать только те шарниры, которые соединяют между собой диски системы. Шарниры в опорных креплениях уменьшают количество связей в опорах и учитываются в формуле (2.1) слагаемым  $C_{on}$ .

Шарниры, соединяющие более двух дисков, являются сложными, а их кратность (эквивалентность простым шарнирам) равна числу соединяемых дисков за вычетом единицы.

По формуле (2.1) удобно определять число лишних связей в тех случаях, когда ни один из дисков системы в свою очередь не содержит лишних

связей. Если диски содержат лишние связи (замкнутые контуры), то необходимо учитывать статическую неопределимость замкнутых контуров.

На основании формулы (2.1) легко показать, что бесшарнирный замкнутый контур любой конфигурации содержит три лишние связи. Исходя из этого, число лишних связей в рамных системах также удобно определять по формуле:

$$L = 3K - \text{III}, \quad (2.2)$$

где  $K$ ,  $\text{III}$  – количество соответственно замкнутых контуров, считая вначале их бесшарнирными в системе, и количество шарниров с учетом их кратности.

Определяя количество лишних связей по формуле (2.2) необходимо учитывать все шарниры в системе, включая опорные крепления. При этом на шарнирно неподвижной опоре принимается простой шарнир, на шарнирно подвижной опоре – сложный шарнир, кратность которого равна двум. Для примера рассмотрим рамы, изображенные на рис. 2.2.

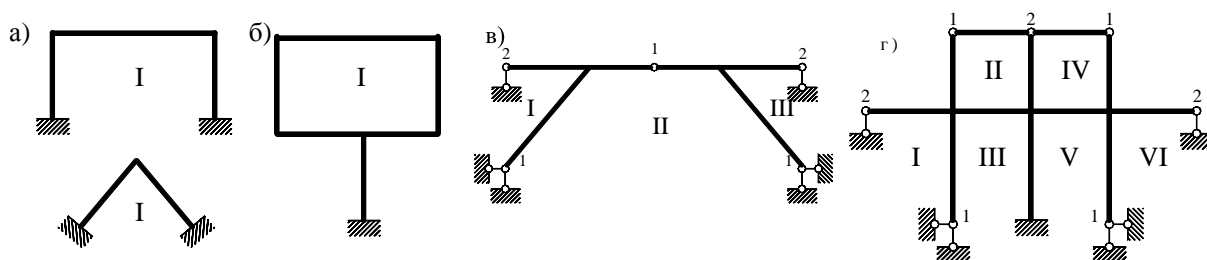


Рис. 2.2

Определим в этих рамах число лишних связей по формулам (2.1) и (2.2). На схемах рис. 2.2 цифрами I, II, ..., VI обозначены номера контуров, а цифрами 1, 2, – кратности шарниров.

На рис. 2.2а приведены рамы, каждая из которых имеет вид бесшарнирного замкнутого контура. Число лишних связей в этих рамах по формуле (2.1)

$$L = 2\text{III} + C_{on} - 3D = 2 \cdot 0 + 6 - 3 \cdot 1 = 3 \quad \text{и по формуле} \quad (2.2)$$

$$L = 3K - \text{III} = 3 \cdot 1 - 0 = 3.$$

Число лишних связей в раме изображенной на рис. 2.2б по формуле (2.1)  $L = 2 \cdot 0 + 3 - 3 \cdot 1 = 0$ . По полученному результату мы имеем статически

определимую систему, что не соответствует действительности. Это тот случай, когда сам диск статически неопределим, т.е. содержит лишние связи. Мы не можем определить усилия в стержнях, ограничивающих замкнутый контур с помощью уравнений статики. Пользуясь, например, способом сечений и отсекая часть контура сквозным сечением 1-1, (рис. 2.2б) мы неизбежно перерезаем два стержня, а в сечении каждого из этих стержней будут три неизвестных усилия ( $M$ ,  $Q$  и  $N$ ). Эти неизвестные шесть усилий невозможно найти с помощью трех уравнений статического равновесия, используемых для расчетов статически определимых плоских систем, поэтому рама на рис. 2.2б трижды статически неопределима. Убедимся в этом, определим число лишних связей в этой раме по формуле (2.2), т.е.:  $L = 3K - III = 3 \cdot 1 - 0 = 3$ .

Степень статической неопределимости рам, изображенных на рис. 2.2в, г по формуле (2.1) соответственно равна:

$$L = 2 \cdot 1 + 6 - 3 \cdot 2 = 2 ; L = 2 \cdot 4 + 9 - 3 \cdot 3 = 8,$$

$$\text{и по формуле (2.2) } L = 3 \cdot 3 - 7 = 2 \text{ и } L = 3 \cdot 6 - 10 = 8.$$

В шарнирно-стержневых системах (фермах) число лишних связей можно находить по формуле (2.1), но удобнее пользоваться по известной из первой части курса формулой

$$L = C + C_{on} - 2U, \quad (2.3)$$

где:

$C$  и  $U$  – количество стержней и узлов в структуре системы,

$C_{on}$  – соответственно число опорных стержней и узлов.

Последнее слагаемое в формуле (2.3) соответствует двум степеням свободы каждого узла как точки в плоскости.

В неразрезных балках число лишних связей удобно находить по формуле

$$L = C_{on} - 3, \quad (2.4)$$

т.е. из общего числа опорных связей необходимо вычесть три связи, минимально необходимые для закрепления тела в плоскости.

Степень статической неопределимости системы является важным ее показателем, от которого зависит весь дальнейший расчет методом сил. Поэтому необхо-

димому научиться правильно пользоваться приведенными выше формулами.

## 2.2. Свойства статически неопределимых систем

Лишние связи накладывают отпечаток на характер работы системы. Они изменяют ее напряженно-деформированное состояние по качественному и количественному признакам. В этом легко убедиться на примере простой системы – двухпролетной неразрезной балки, изображенной на рис. 2.3а, содержащей одну лишнюю связь.

В заданной системе по формуле

(2.4) имеем:

$$L = C_{on} - 3 = 4 - 3 = 1,$$

т.е., балка один раз статически неопределима. Рассмотрим два напряженно-деформированных состояния этой балки: в первом состоянии удалим лишнюю связь, отбросив опорный стержень на опоре  $B$  (балка стала статически определимой), и построим эпюру изгибающих моментов ( $M$ ) в этой системе от заданной нагрузки  $q$  (рис. 2.3б).

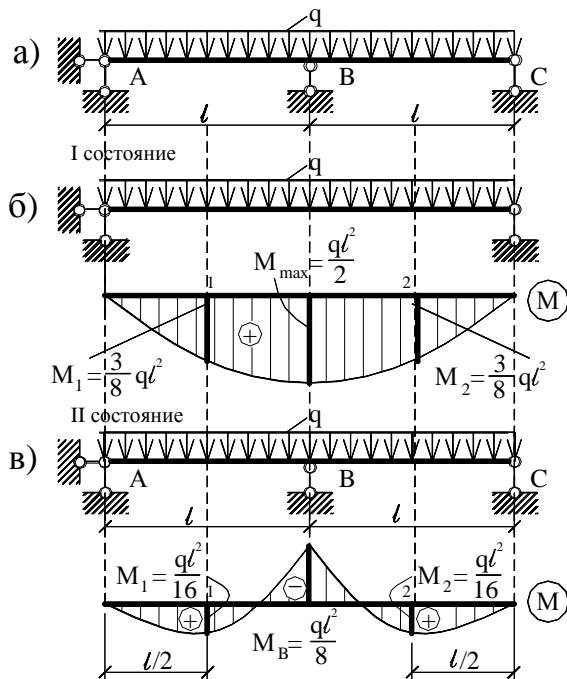


Рис. 2.3

Максимальный изгибающий момент будет  $M_{\max} = \frac{q(2\ell)^2}{8} = \frac{q\ell^2}{2}$ .

В этом состоянии сечение балки, совпадающее с опорой  $B$ , будет иметь линейное перемещение по вертикали.

Во втором состоянии (рис. 2.3в) рассмотрим балку статически неопределимой, сохранив опору  $B$ , как указано на рис. 2.3а. Эпюра изгибающих моментов в этом случае от действия одной и той же нагрузки имеет совершенно

иной вид. Изгибающий момент на опоре  $B$  равен  $M_B = -\frac{q\ell^2}{8}$  (изменился да-

же его знак), а в серединах пролетов значения изгибающих моментов равны

$M_1 = M_2 = \frac{ql^2}{16}$ , что существенно меньше изгибающих моментов в этих сече-

ниях в однопролетной балке, равных  $\frac{3}{8}ql^2$ .

В этом состоянии (рис. 2.3в) перемещение по вертикали на опоре  $B$  отсутствует, так как в указанном направлении имеется связь.

Как видим, избыточная связь оказала существенное влияние на характер распределения изгибающих моментов в балке и ее перемещения. Аналогичным образом можно показать изменение распределения, например, поперечных сил в сечениях этой балки.

Отметим основные общие свойства, присущие статически неопределимым системам:

1. Усилия в элементах статически неопределимых систем зависят, в общем случае, от размеров поперечных сечений и модулей упругости материала этих элементов (от соотношения жесткостей элементов).

Это вытекает из определения статически неопределимых систем (п.2.1.). Так как в дополнительных уравнениях отыскиваются перемещения, то эта операция может быть выполнена, например, с помощью формулы Мора, которая при действии внешних нагрузок имеет вид:

$$\Delta_{ip} = \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^{\ell} \frac{\overline{M}_i M_p dx}{EI} + \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^{\ell} \frac{\mu \overline{Q}_i Q_p dx}{GF} + \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^{\ell} \frac{\overline{N}_i N_p dx}{EF}. \quad (2.5)$$

Из формулы (2.5) следует, что мы не можем определять перемещения не учитывая жесткости элементов системы, и поэтому не сможем рассчитать статически неопределимую систему.

2. В элементах статически неопределимых систем при отсутствии внешней нагрузки могут возникать усилия, вызываемые неравномерным смещением опор, изменением температуры окружающей среды, или неточностью сборки. На рис. 2.4 приведена неразрезная балка ( $J=4$ ), третья опора которой сместилась на величину  $C_3$  и произошел изгиб балки по всей

ее длине по некоторой кривой  $y(x)$ . На основании известной зависимости  $EIy''(x) = M_x$  можно утверждать, что во всех сечениях балки возникнут изгибающие моменты, а также поперечные силы, ввиду взаимосвязи

$$Q_x = \frac{dM}{dx}.$$

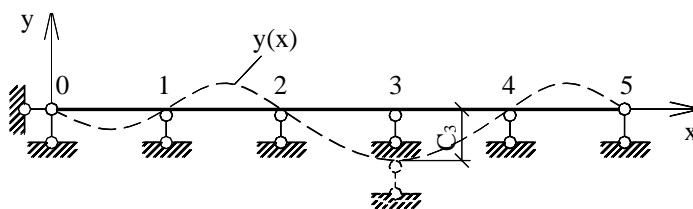


Рис. 2.4

Однопролетная балка с обоими защемленными концами ( $L=3$ ), изображенная на рис. 2.5, неизбежно выпучится при одностороннем увеличении температуры от  $t$  до  $t_1 > t$ .

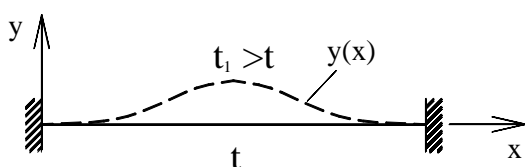


Рис. 2.5

Возникнут изгибающие моменты, поперечные и продольные силы в ее сечениях при отсутствии внешней нагрузки.

3. Статически неопределимые системы можно рассматривать как усложненные в сравнении со статически определимыми, послужившими основой для образования соответствующих статически неопределимых систем. Поэтому, выход из строя даже всех избыточных связей (кроме абсолютно необходимых), не приведет к изменчивости системы. Произойдет перераспределение усилий в элементах системы, но система, как таковая, останется неизменяемой и в определенной мере пригодной по своему назначению. Выход из строя хотя бы одного элемента в статически определимой системе приводит к ее изменчивости. Поэтому статически неопределимые системы обладают большей «живучестью» в буквальном смысле этого слова.

4. Усилия и перемещения в статически неопределимых системах, как правило, меньше в сравнении с их значениями в исходных статически определимых системах. Это обусловлено большей взаимосвязанностью элементов статически неопределимой системы, большей возможностью пере-



распределения усилий между ее элементами (см. рис. 2.3).

5. При заданных внешних воздействиях статически неопределимая система допускает бесконечное множество состояний статического равновесия. В этом можно убедиться на примере неразрезной балки с одной лишней связью, нагруженной внешними нагрузками (рис. 2.6а). Отбросим любую условно необходимую связь, например, обозначенную цифрой 3, и усилие в этой

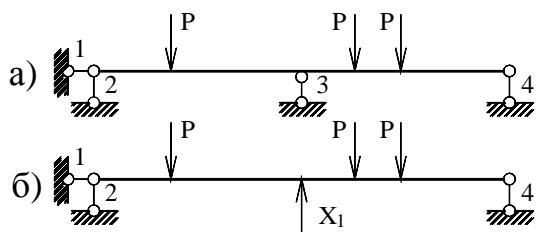


Рис. 2.6

связи обозначим через  $X_1$  (рис. 2.6б).

Причисляя силу  $X_1$  к внешним нагрузкам, можно принимать любые ее значения и будут соблюдаться условия равновесия системы под действием

совокупной нагрузки, включающей заданные внешние нагрузки и силу  $X_1$ . Это особенность статически неопределимых систем в отличие от статически определимых, в которых заданному загрузению нагрузками соответствует одно единственное условие статического равновесия и оно является истинным.

Расчет статически неопределимой системы состоит в том, чтобы из множества возможных равновесных состояний системы отыскать то единственное (истинное), которое удовлетворяло бы условиям статического равновесия и остальным условиям напряженно-деформированного состояния системы, например, перемещениям выбранных сечений по известным направлениям.

### 2.3. Методы расчета статически неопределимых систем

Выше (п. 2.2) приведено одно из свойств статически неопределимых систем, согласно которому усилия в элементах системы зависят от жесткости этих элементов. Поэтому, прежде чем рассчитывать такую систему, необходимо назначить сечения ее элементов. Жесткости этих элементов будут учитываться в процессе расчета. Эта операция неизбежна независимо от того, каким методом рассчитывается система. По существу, выполняется повероч-

ный расчет: по заданной геометрической схеме, нагрузкам и принятым сечениям определяются усилия в элементах системы, по которым вновь подбираются сечения элементов. Если полученные по усилиям сечения элементов отличаются от ранее принятых более, чем на 20%, то расчет повторяют, приняв за исходные найденные сечения первого приближения.

Метод расчета статически неопределимых систем определяется выбором основных неизвестных. Если в качестве основных неизвестных принимаются усилия в лишних связях системы, то метод расчета условилось называть методом сил, а если основными неизвестными являются перемещения узлов системы, то – метод перемещений. Если основными неизвестными в рассчитываемой системе приняты одновременно усилия и перемещения, то метод называется смешанным.

Основными классическими методами расчета статически неопределимых систем являются названные методы, которые с учетом принимаемых допущений относятся к точным методам.

Ниже рассмотрены метод сил и метод перемещений, дано их теоретическое обоснование и приведены примеры численного решения конкретных задач.

## Глава 3

### Расчет стержневых систем методом сил

#### 3.1. Сущность метода сил. Канонические уравнения

Метод сил исторически был первым методом, которым рассчитывали статически неопределимые системы. Он применим к любым статически неопределимым системам, является хорошей основой для создания и совершенствования других точных и приближенных методов. Особенность метода сил состоит в том, что ход расчета этим методом зависит от степени статической неопределимости заданной системы, т.е. от числа лишних связей в этой системе. Чем больше в заданной системе избыточных (лишних) связей, тем более трудоемок ее расчет.

В расчете систем методом сил можно выделить следующие основные этапы:

1. Устанавливают степень статической неопределимости системы (по формулам (2.1) ÷ (2.4) в зависимости от типа заданной системы).
2. Выбирают так называемую основную систему (О.С.), отбрасывая избыточные связи. Связи могут быть отброшены любые, но полученная основная система должна оставаться геометрически неизменяемой в целом и в отдельных своих частях.

Основная система может быть принята статически определимой (отброшены все лишние связи), или же статически неопределимой (отброшено часть связей). Мы будем пользоваться статически определимой основной системой, как более простой и удобной в выполнении расчета.

Для одной и той же заданной системы может быть найдено много вариантов статически определимых систем. Нужно стремиться отыскать такую основную систему, которая позволяет более просто выполнять расчет.

3. Отброшенные в основной системе лишние связи заменяются усилиями в этих связях, которые принимают за основные неизвестные.
4. Значения основных неизвестных находят из условий, что сум-

марные перемещения по направлениям отброшенных лишних связей в основной и заданной системе должны быть одинаковы. Если к основной системе приложены те же внешние нагрузки, что и в заданной системе, а отброшенные связи заменены усилиями в этих связях, то заданная и основная система будут эквивалентны по напряженно-деформированному состоянию. Усилия во всех сечениях всех элементов в обоих случаях останутся одинаковыми, а так же одинаковы будут все перемещения этих систем.

5. Определив основные неизвестные, заданную статически неопределимую систему можно заменить статически определимой основной системой, для которой в качестве нагрузок будут заданные внешние силы и усилия в отброшенных связях. Усилия и перемещения в основной системе уже могут быть найдены методами расчета статически определимых систем, изученными в первой части курса.

Как видим, определить усилия в лишних связях статически неопределимой системы – это значит раскрыть ее статическую неопределимость.

Ход расчета статически неопределимой системы методом сил рассмотрим на примере рамы, изображенной на рис. 3.1а. Заданная система содержит две лишние связи. Возможный вариант основной системы показан на рис. 3.1б, где неизвестными приняты опорная реакция ( $X_1$ ) и изгибающий момент в сечении ригеля справа от стойки ( $X_2$ ).

Заданная система и принятая основная система должны быть эквивалентны. Усилия во всех сечениях элементов и перемещения этих сечений в обоих случаях должны быть одинаковы. Принятая нами основная система отличается от заданной тем, что допускает перемещения по направлениям отброшенных связей. Если обеспечить условия, при которых полные перемещения в основной системе по направлениям отброшенных связей равны нулю, то это соответствует заданной системе и поэтому исчезает различие между заданной и основной системой. Найдем полные перемещения по направлениям отброшенных связей и, выполняя необходимые условия, примем эти перемещения равными нулю.

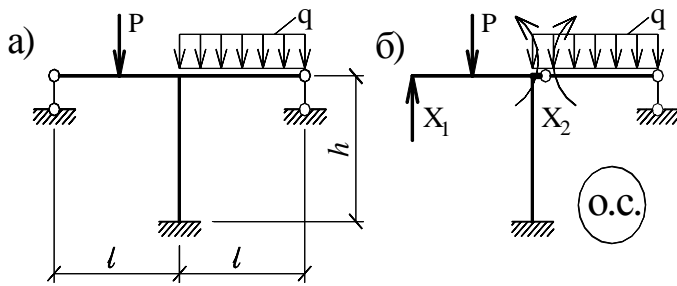


Рис. 3.1

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0, \end{cases} \quad (a)$$

где первое уравнение системы (а) выражает суммарное перемещение (линейное) точки приложения силы  $X_1$  по направлению отброшенной вертикальной связи, а второе – суммарное перемещение (взаимный угол поворота) сечений, примыкающих к введенному шарниру. Выясним смысл слагаемых этих уравнений.

В первом уравнении  $\delta_{11}$  – перемещение точки приложения силы  $X_1$  по направлению силы  $X_1$ , вызванное этой же силой  $X_1 = 1$ , а  $\delta_{11} X_1$  – перемещение той же точки по тому же направлению, вызванное фактическим значением силы  $X_1$  в основной системе. Второе слагаемое этого уравнения  $\delta_{12} X_2$  выражает перемещение точки приложения силы  $X_1$  в основной системе по направлению этой силы, вызванное силой (моментом)  $X_2$ , а  $\Delta_{1p}$  – перемещение той же точки в основной системе по тому же направлению, вызванное заданными нагрузками. Суммарное перемещение точки приложения силы  $X_1$  по направлению этой силы должно быть равно нулю, так как в заданной системе по этому направлению имеется связь и перемещение невозможно. Слагаемые второго уравнения выражают взаимный угол поворота сечений, примыкающих к сквозному шарниру в основной системе. Суммарный взаимный угол поворота сечений должен быть равен нулю, так как в заданной системе в этом месте нет разреза ригеля и перелом упругой линии невозможен.

Пользуясь принципом независимости действия сил, (рассматривается линейно-деформируемая система) полные перемещения по направлению отброшенных связей можно записать в виде:

В случае « $n$ » неизвестных канонические уравнения метода сил принимают вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} = 0; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Каждое уравнение системы (3.1) выражает суммарное перемещение по направлению отбрасываемой связи, и канонические уравнения метода сил являются кинематическими уравнениями. Таков механический смысл уравнений метода сил.

Перемещения в системе уравнений (3.1) обладают следующими свойствами:  $\delta_{ii}$ , расположенные на главной диагонали (на прямой слева вниз направо), не могут быть отрицательными или равными нулю; побочные коэффициенты  $\delta_{ik}$  обладают свойством взаимности ( $\delta_{ik} = \delta_{ki}$  на основании теоремы о взаимности перемещений) и могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Свободные члены уравнений  $\Delta_{ip}$  могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

Выше показано, что каждое каноническое уравнение метода сил выражает суммарное перемещение определенного вида по направлению отбрасываемой связи. Характер этого суммарного перемещения зависит от типа принятого в основной системе неизвестного  $X_i$ . Например, для рамы, изображенной на рис. 3.2а, обладающей семью избыточными связями, может быть принята основная система, как показано на рис. 3.2б.

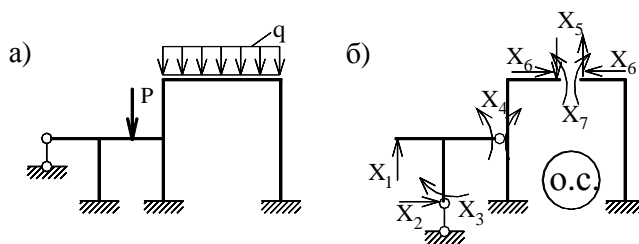


Рис. 3.2

В данном примере имеем семь канонических уравнений. Каждое из

этих уравнений будет выражать суммарное перемещение по направлению отбрасываемой связи, но в то же время каждое уравнение имеет свой, ему присущий механический смысл, определяемый типом действующего неизвестного. Например, первое и второе уравнения будут выражать линейные перемещения точек приложения сил  $X_1$  и  $X_2$  соответственно в вертикальном и горизонтальном направлениях. Третье и четвертое уравнения выражают соответственно угол поворота по направлению неизвестного  $X_3$  и взаимный угол поворота сечений, примыкающих к шарниру по направлению неизвестного  $X_4$ . Пятое уравнение отражает взаимный сдвиг бесконечно близко расположенных двух точек, принадлежащих одному и тому же сечению (на левой и правой стороне этого сечения). Шестое каноническое уравнение будет выражать взаимное сближение (при обратном направлении неизвестных – взаимное удаление) двух бесконечно близко расположенных точек. Это суммарное перемещение так же будет равно нулю, так как обе точки принадлежат одному и тому же сечению и их взаимное перемещение невозможно. Седьмое уравнение отражает взаимный угол поворота двух, бесконечно близко расположенных сечений, принадлежащих одной и той же плоскости. При изгибе стержня его сечения (оставаясь плоскими) могут поворачиваться на некоторые углы, но одно и то же сечение не может иметь двух углов поворота, и в этом смысл седьмого канонического уравнения.

Этот смысл канонических уравнений метода сил, определяемый типом принятого неизвестного, остается неизменным независимо от того, вызваны усилия действием внешних нагрузок, изменением температуры или другими факторами.

При выполнении расчетов методом сил на действие температуры канонические уравнения (3.1) по структуре и смыслу остаются обычными. Отличие в том, что свободные члены уравнений  $\Delta_{1p}, \Delta_{2p}, \dots, \Delta_{np}$  заменяются соответственно на  $\Delta_{1t}, \Delta_{2t}, \dots, \Delta_{nt}$ . Из теории перемещений читателю известно, что перемещения  $\Delta_{it}$  для плоских упругих стержневых систем определяются

слагаемыми формулы Мора и в общем случае имеют вид:

$$\Delta_{it} = \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^l \frac{\alpha t' \bar{M}_i dx}{h} + \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^l \alpha t_{cp} \bar{N}_i dx,$$

где:  $n, l$  – соответственно количество стержней (участков) в системе и их длины;  $\alpha$  – коэффициент температурного линейного расширения;

$h$  – высота сечения элемента;

$t', t_{cp}$  – соответственно разность температур крайних волокон и средняя температура по нейтральной оси стержня;

$\bar{M}_i, \bar{N}_i$  – соответственно изгибающий момент и продольная сила, вызванные неизвестным  $X_i = 1$  на участке  $dx$  рассматриваемого элемента.

Если перепад температур ( $t'$ ) по длине стержня (участка) может быть принят постоянным и постоянно сечение стержня по высоте ( $h$ ) в пределах рассматриваемого элемента, то выражение  $\Delta_{it}$  можно записать:

$$\Delta_{it} = \sum \frac{\alpha t' \omega_M}{h} + \sum \alpha t_{cp} \omega_N,$$

где  $\omega_M, \omega_N$  – соответственно площади эпюр изгибающих моментов и продольных сил на рассматриваемых участках.

Напомним, что слагаемое  $\alpha t' \bar{M}_i / h$  ( $\alpha t' \omega_M$ ) /  $h$  принимается положительным, если температура и изгибающий момент, вызываемый неизвестным  $X_i = 1$ , изгибают элемент в одну и ту же сторону. Слагаемые  $\alpha t_{cp} \bar{N}_i$  ( $\alpha t_{cp} \omega_N$ ) принимаются положительными, если температура и продольная сила от неизвестного  $X_i = 1$  на рассматриваемом участке вызывают продольные деформации в элементе (на участке) одного и того же знака.

При выполнении расчетов методом сил на неравномерную осадку опор, свободные члены канонических уравнений (3.1)  $\Delta_{ip}$  заменяются на  $\Delta_{ic}$ , где  $\Delta_{ic}$  – перемещение в основной системе по направлению отбрасываемой  $i$ -ой связи, вызванное неравномерной осадкой опор. Численные значения перемещений  $\Delta_{ic}$  могут быть найдены, например, по формуле Мора. В



последнем случае выражение  $\Delta_{ic}$  имеет вид:

$$\Delta_{ic} = - \sum_{i=1}^{i=n} R_i c_i,$$

где:  $n$  – количество сместившихся опор;

$R_i, c_i$  – соответственно реакция и смещение  $i$ -ой опоры.

Произведение  $R_i, c_i$  принимается положительным, если реакция в  $i$ -ой опоре, вызванная неизвестным  $X_k = 1$ , совпадает по направлению с направлением заданного смещения этой опоры.

Расчет статически неопределимых систем на действие температуры и осадку опор выполняется в такой же последовательности, как и в случае действия внешних нагрузок.

### 3.2. Определение и проверки правильности коэффициентов при неизвестных и свободных членах уравнений метода сил

Перемещения стержневых систем, вызываемые внешними нагрузками, могут быть найдены с помощью формулы Мора. Для плоских стержневых систем с учетом изгибающих моментов, поперечных и продольных сил она имеет вид:

$$\Delta_{ip} = \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_p dx}{EI} + \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^l \frac{\mu \bar{Q}_i Q_p dx}{GF} + \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^l \frac{\bar{N}_i N_p dx}{EF}, \quad (a)$$

где:  $\int_0^l$  охватывает отдельные стержни или участки стержней, а  $\sum_1^n$  – все элементы системы.

Формула (а) является точной формулой, в которой одна группа усилий  $(\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i)$  вызвана единичной нагрузкой  $X_i = 1$  (сосредоточенной силой, сосредоточенным моментом и т.д.), а вторая группа усилий  $(M_p, Q_p, N_p)$  – заданной нагрузкой. При выполнении расчетов конкретных систем некоторые члены формулы (а) можно не учитывать, ввиду их малости. Например, при расчете ферм по шарнирной расчетной схеме и с узловой нагрузкой обраща-

ются в нуль первые два члена формулы (а), так как во всех элементах фермы изгибающие моменты и поперечные силы равны нулю. В случае стержневых систем, элементы которых работают преимущественно на изгиб (балки, рамы и при определенных исходных данных арки), близкие к действительным значения перемещений системы уравнений (3.1) могут быть найдены по приближенным формулам, пренебрегая влиянием поперечных и продольных сил:

$$\delta_{ii} = \sum \int_0^{\ell} \frac{\overline{M}_i^2 dx}{EI}; \quad \delta_{ik} = \delta_{ki} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_k dx}{EI}; \quad \Delta_{ip} = \sum \int \frac{\overline{M}_i M_p dx}{EI}. \quad (3.2)$$

Численные значения этих перемещений обычно находят способом перемножения эпюр, построенных в основной системе при последовательном нагружении ее силами  $X_i = 1$  ( $\overline{M}_i$ ) и заданной внешней нагрузкой ( $M_p$ ).

Проверки правильности вычисленных значений перемещений  $\delta_{ik}$  и  $\Delta_{ip}$  могут быть выполнены с помощью зависимостей:

$$\sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_s dx}{EI} = \sum \delta_{is} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \text{ – построчные проверки, т.е. результат}$$

перемножения любой единичной эпюры  $\overline{M}_i$  на суммарную единичную эпюру  $\overline{M}_s$  должен быть равен алгебраической сумме коэффициентов при неизвестных  $i$ -ой строки системы канонических уравнений;

универсальные проверки по формулам:

$$\sum \int_0^{\ell} \frac{\overline{M}_s^2 dx}{EI} = \sum \delta_{ik} \begin{pmatrix} i = 1, & 2, & \dots, & n; \\ k = 1, & 2, & \dots, & n \end{pmatrix}; \quad (3.3)$$

$$\sum \int_0^{\ell} \frac{\overline{M}_s M_p dx}{EI} = \sum \Delta_{ip} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $\overline{M}_s$  – суммарная эпюра изгибающих моментов, получаемая по условию

$$\overline{M}_s = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n.$$

Равенства (3.3) выражают условие, что результат перемножения суммарной эпюры ( $\overline{M}_s$ ) на саму себя должен быть равен алгебраической сумме коэффициентов при неизвестных всех рассматриваемых канонических урав-

нений, а результат перемножения этой эпюры на эпюру от заданных нагрузок ( $M_p$ ) должен быть равен алгебраической сумме свободных членов уравнений ( $\Delta_{ip}$ ).

Если в решаемой задаче перемещения находят с помощью формул (3.2), то эти же перемещения могут быть определены по формуле Симпсона, которая для отдельного стержня (участка) имеет вид:

$$\Delta_{sp} = \frac{l_n}{6EI_n} [\bar{M}_i M_i^p + 4\bar{M}_k M_k^p + \bar{M}_m M_m^p] + \dots, \quad (6)$$

где  $\Delta_{sp}$  – перемещение точки  $S$  по направлению силового фактора  $X_s = 1$ ;

$l_n, EI_n$  – соответственно длина стержня (участка) и его изгибная жесткость;

$\bar{M}_i, \bar{M}_m$  – изгибающие моменты в крайних сечениях участка  $i$  и  $m$ , вызванные силой  $X_s = 1$ , а  $\bar{M}_k$  – изгибающий момент от этого воздействия в середине участка (сечение «к»);

$M_i^p, M_k^p, M_m^p$  – изгибающие моменты в указанных сечениях, вызванные действием заданных нагрузок.

Слагаемые в формуле (6) принимаются положительными, если изгибающие моменты в рассматриваемом сечении в обоих состояниях расположены с одной и той же стороны от оси стержня. При использовании формулы (6) нужно помнить, что она дает точное значение, если произведение  $M_i M_p$  или  $M_i M_k$  дает уравнение не выше параболы третьей степени.

Если способ перемножения эпюр применить невозможно (например, стержень большой кривизны или же жесткость  $EI$  переменна по длине стержня), то перемещения с достаточной степенью точности могут быть вычислены путем численного суммирования конечного числа слагаемых. Этот прием часто используется в расчетах статически неопределимых арок.

### 3.3. Построение и проверки правильности

#### окончательных эпюр $M$ , $Q$ и $N$

Решив систему уравнений (3.1), найдем фактические значения принятых в основной системе неизвестных усилий  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Загрузив основную систему внешними нагрузками и силами  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , в статически неопределимой системе с помощью уравнений статики можно найти изгибающие моменты, поперечные и продольные силы во всех элементах системы. Но этот прием может оказаться слишком громоздким, если рассматриваемая система содержит более двух лишних связей.

Окончательную эпюру изгибающих моментов в заданной системе обычно получают пользуясь принципом независимости действия сил по формуле:

$$M = M_p + \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + \dots + \bar{M}_n \cdot X_n, \quad (3.4)$$

где:  $M_p$  – эпюра изгибающих моментов в основной системе от заданных нагрузок;  $\bar{M}_i X_i$  – скорректированные единичные эпюры с учетом фактического численного значения и знака усилия  $X_i$ .

С помощью окончательной эпюры изгибающих моментов ( $M$ ), рассматривая отдельные стержни или участки стержней, строят эпюру поперечных сил ( $Q$ ), а затем эпюру продольных сил ( $N$ ). Построение окончательных эпюр  $M$ ,  $Q$  и  $N$  обычно выполняется в указанной последовательности. Эпюра изгибающих моментов является исходной, и прежде чем строить эпюры поперечных и продольных сил, необходимо выполнить статическую и кинематическую проверки правильности эпюры моментов.

Статическая проверка состоит в том, что проверяют равновесие узлов системы под действием изгибающих моментов, приложенных к примыкающим к узлу отсеченным стержням ( $\sum M_{\text{узн}} = 0$ ).

В кинематической (основной) проверке отыскиваются перемещения в заданной системе по направлениям имеющихся связей. В заданной системе эти перемещения должны быть равны нулю и должны соблюдаться условия:

$$\sum_0^{\ell} \int \frac{\overline{M}_i M dx}{EI} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{или} \quad \sum_0^{\ell} \int \frac{\overline{M}_s M dx}{EI} = 0. \quad (3.5)$$

Для стержневых систем средней сложности относительная погрешность вычислений, должна составлять не более 3%.

Поперечные силы в стержнях можно получить с помощью эпюры изгибающих моментов, рассматривая равновесие отдельных стержней или участков стержней, или же по формуле

$$Q_x = Q_x^o + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}, \quad (3.6)$$

где  $Q_x^o$  – значение поперечной силы в сечениях простой шарнирно опертой балки;  $M_n$ ,  $M_{n-1}$  – значения изгибающих моментов в сечениях на концах стержня или участка;  $l_n$  – длина стержня (участка).

Пользуясь формулой (3.6), изгибающие моменты  $M_n$  и  $M_{n-1}$  следует принимать с одним знаком, если на эпюре моментов они расположены с одной стороны от оси стержня; и с разными знаками – если с разных сторон от его оси.

С помощью эпюры поперечных сил, рассматривая равновесие вырезанных узлов, находят продольные силы в стержнях системы. Вырезать узлы следует в такой последовательности, чтобы в рассматриваемом узле было не более двух неизвестных продольных сил и эти силы не должны быть параллельны друг другу.

С помощью эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил могут быть найдены опорные реакции системы. Проверки равновесия системы в целом выполняют, пользуясь уравнениями равновесия:

$$\sum X = 0; \sum Y = 0 \text{ и } \sum M_k = 0 \quad (3.7)$$

В эти уравнения должны быть включены все внешние нагрузки и опорные реакции системы. По этим же уравнениям проверяют равновесие любой отсеченной части системы.

### 3.4. Пример расчета плоской рамы методом сил

На рис. 3.3 приведена заданная рама и действующие на нее статические нагрузки. Требуется определить изгибающие моменты, поперечные и продольные силы в элементах рамы и построить эпюры этих усилий.

Степень статической неопределимости (количество лишних связей) системы определим по формулам (2.1) и (2.2):

$$L = 2Ш + C_0 - 3Д = 2 \cdot 3 + 9 - 3 \cdot 4 = 3;$$

$$L = 3К - Ш = 3 \cdot 3 - 6 = 3.$$

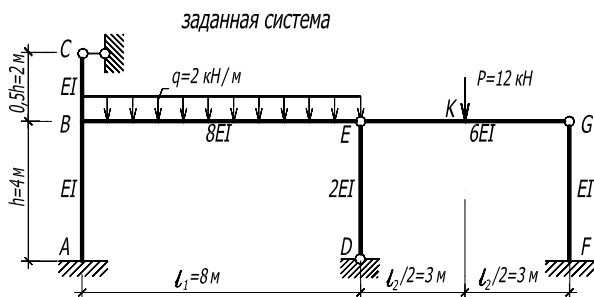
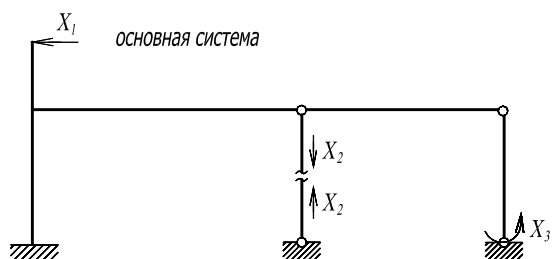


Рис. 3.3

Основную систему (О.С.) примем, как показано на рис. 3.4.



Система канонических уравнений

имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2p} = 0; \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3p} = 0. \end{cases} \quad (a)$$

Рис. 3.4

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены канонических уравнений (а) определим по формулам (3.2), пренебрегая влиянием поперечных и продольных сил. Эпюры изгибающих моментов при последовательном нагружении основной системы силами  $X_i = 1$  и заданной нагрузкой приведены на рис. 3.5.

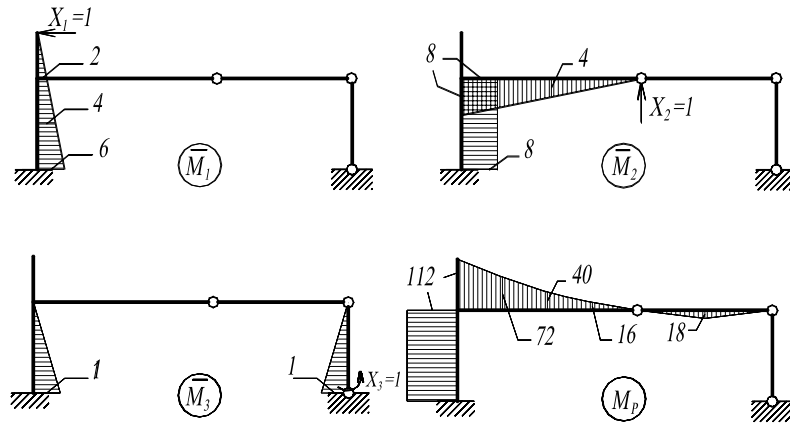


Рис. 3.5

Численные значения коэффициентов при неизвестных и свободных членах уравнений (а) найдем способом перемножения эпюр, а именно:

$$EI\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2 dx \cdot EI}{EI} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = 72;$$

$$EI\delta_{22} = \sum \int \bar{M}_2^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 + 8 \cdot 4 \cdot 8 = \frac{64}{3} + 256 = \frac{832}{3};$$

$$EI\delta_{33} = \sum \int \bar{M}_3^2 dx = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{8}{3};$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \sum \int \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2 \cdot dx = \frac{2+6}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 128;$$

$$EI\delta_{13} = EI\delta_{31} = \sum \int \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_3 \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 4\right) = \frac{28}{3};$$

$$EI\delta_{23} = EI\delta_{32} = \sum \int \bar{M}_2 \cdot \bar{M}_3 \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 8 = 16;$$

$$EI\Delta_{1p} = \sum \int \bar{M}_1 \cdot M_p \cdot dx = -\left(\frac{2+6}{2} \cdot 4 \cdot 112\right) = -1792;$$

$$EI\Delta_{2p} = \sum \int \bar{M}_2 \cdot M_p \cdot dx = \frac{8}{6 \cdot 8} (-112 \cdot 8 - 4 \cdot 4 \cdot 40 + 0) - 8 \cdot 4 \cdot 112 = -256 - 3584 = -3840;$$

$$EI\Delta_{3p} = \sum \int \bar{M}_3 \cdot M_p \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 112 = -224.$$

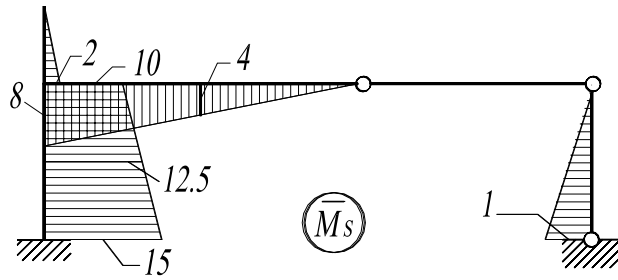


Рис. 3.6

Выполним построчные проверки правильности коэффициентов при неизвестных, пользуясь условием

$$\sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_s dx}{EI} = \sum \delta_{ij} (i=1, 2, 3),$$

где  $\overline{M}_s$  – суммарная единичная эпюра изгибающих моментов, получаемая по зависимости  $\overline{M}_s = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3$ , приведена на рис. 3.6.

Перемножение эпюр  $\overline{M}_i$  и  $\overline{M}_s$  выполним по формуле Симпсона или пользуясь правилом Верещагина.

$$EI \sum \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_s dx}{EI} = \left( \frac{11}{12} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{4}{6 \cdot 1} (2 \cdot 10 + 4 \cdot 4 \cdot 12,5 + 6 \cdot 15) \right) = \frac{8}{3} + \frac{620}{3} = \frac{628}{3}.$$

$$EI(\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13}) = 72 + 128 + \frac{28}{3} = \frac{628}{3}.$$

$$EI \sum \int \frac{\overline{M}_2 \overline{M}_s dx}{EI} = \frac{11}{8 \cdot 2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{1}{1} \cdot \frac{10+15}{2} \cdot 4 \cdot 8 = \frac{64}{3} + \frac{1200}{3} = \frac{1264}{3}.$$

$$EI(\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23}) = 128 + \frac{832}{3} + 16 = \frac{1264}{3}.$$

$$EI \sum \int \frac{\overline{M}_3 \overline{M}_s dx}{EI} = \frac{11}{12} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \left( 10 + \frac{2}{3} \cdot 5 \right) = \frac{4}{3} + \frac{80}{3} = \frac{84}{3}.$$

$$EI(\delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33}) = \frac{28}{3} + 16 + \frac{8}{3} = \frac{84}{3}.$$

Проверки правильности коэффициентов при неизвестных ( $\delta_{ik}$ ) могут быть также выполнены, пользуясь универсальной проверкой, по условию

$$(3.3), \text{ т.е. } \sum \int \frac{\overline{M}_s^2 dx}{EI} = \sum \delta_{ik} \begin{pmatrix} i=1,2,\dots,n; \\ k=1,2,\dots,n \end{pmatrix}.$$



Проверим правильность вычисления свободных членов уравнений (а)

$$EI \sum \int \frac{\overline{M}_p \overline{M}_s dx}{EI} = -\frac{8}{6 \cdot 8} (112 \cdot 8 + 4 \cdot 4 \cdot 40 + 0) - \frac{110 + 15}{1 \cdot 2} 4 \cdot 112 =$$

$$= -256 - 5600 = -5856.$$

$$EI(\Delta_{1P} + \Delta_{2P} + \Delta_{3P}) = (-1792) + (-3840) + (-224) = -5856.$$

Следовательно, перемещения  $\delta$  и  $\Delta$  в уравнениях (а) определены правильно.

Подставив значения вычисленных перемещений в исходные уравнения (а), имеем:

$$\begin{cases} 72 X_1 + 128 X_2 + \frac{28}{3} X_3 - 1792 = 0; \\ 128 X_1 + \frac{832}{3} X_2 + 16 X_3 - 3840 = 0; \\ \frac{28}{3} X_1 + 16 X_2 + \frac{8}{3} X_3 - 224 = 0, \end{cases}$$

откуда  $X_1 = 1,57665 \text{ кН}$ ,  $X_2 = 13,1387 \text{ кН}$ ,  $X_3 = -0,350366 \text{ кНм}$ .

Проверка правильности решения системы уравнений производится путем подстановки полученных значений  $X_i$  в исходные уравнения, например: первое уравнение

$$72 \cdot 1,57665 + 128 \cdot 13,1387 + \frac{28}{3}(-0,350366) - 1792 =$$

$$= 113,519 + 1681,75 - 3,27008 - 1792 = -1795,27 + 1795,27 = 0 \text{ и т.д.}$$

Аналогично должны быть выполнены подстановки  $X_i$  во все остальные исходные уравнения.

Окончательная эпюра изгибающих моментов может быть получена по условию (3.4), т.е.  $M = M_p + \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \overline{M}_3 X_3$ .

Эпюры изгибающих моментов от фактических значений  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  приведены на рис. 3.7, а результирующая эпюра – на рис. 3.8.

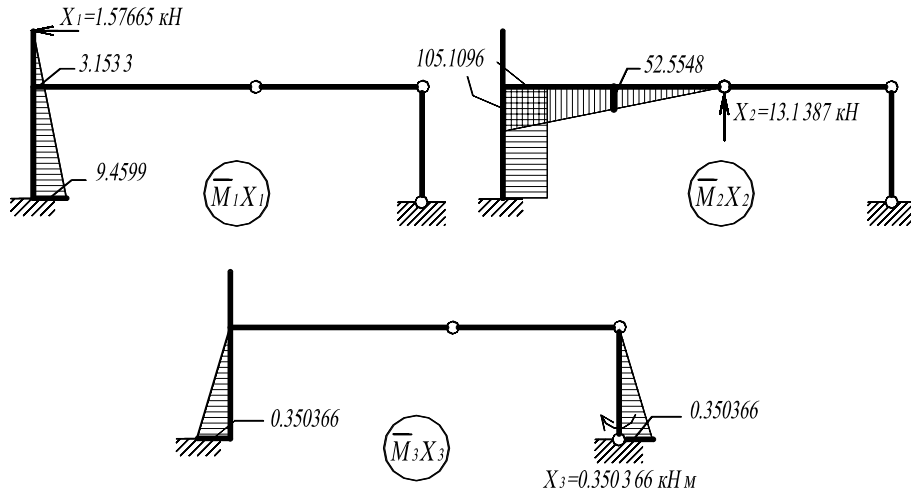


Рис. 3.7

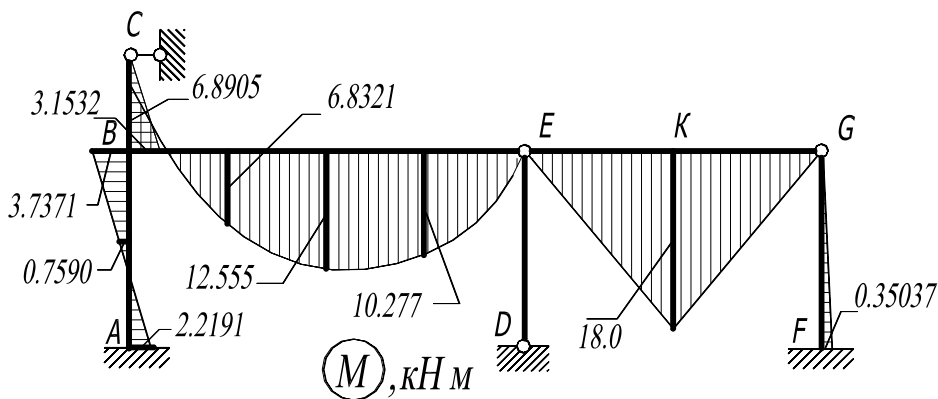


Рис. 3.8

Проверки правильности окончательной эпюры изгибающих моментов:

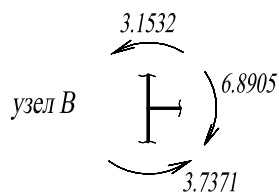


Рис. 3.9

статическая проверка (см. рис. 3.9):

$$\begin{aligned} \sum M_{\text{узла "B"}} &= 6,8905 - 3,1532 - 3,7371 \\ &= 6,8905 - 6,8903 = 0; \end{aligned}$$

кинематические проверки выполняются по условию (3.5):

$$\begin{aligned} EI \sum \int \frac{M \bar{M}_1 dx}{EI} &= \frac{1}{12} 3,1533 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{4}{6 \cdot 1} \times \\ &\times (-3,7371 \cdot 2 - 4 \cdot 0,7590 \cdot 4 + 6 \cdot 2,2191) = 4,2044 - 4,2024 = 0,002; \end{aligned}$$

$$\text{относительная погрешность вычислений } \mu = \frac{0,002 \cdot 100\%}{4,2024} = 0,05\% ;$$

$$EI \sum \int \frac{M \bar{M}_2 dx}{EI} = \frac{8}{6 \cdot 8} (-6,8904 \cdot 8 + 4 \cdot 12,5548 \cdot 4 + 0) -$$

$$-\frac{1}{1} \cdot 8 \cdot 4 \cdot 0,7590 = 24,2923 - 24,2880 = 0,0043, \quad \mu = 0,02\%;$$

$$EI \sum \int \frac{M \bar{M}_3 dx}{EI} = \frac{4}{6 \cdot 1} (3,7371 \cdot 0 - 4 \cdot 0,7590 \cdot 0,5 + 2,2191 \cdot 1) -$$

$$-\frac{1}{12} \cdot 0,35037 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 0,4674 - 0,46716 = 0,00024, \quad \mu = 0,05\%.$$

Статическая и кинематические проверки выполняются и, следовательно, окончательная эпюра изгибающих моментов построена верно.

Для построения эпюры поперечных сил воспользуемся окончательной эпюрой изгибающих моментов ( $M$ ).

На участках, где эпюра  $M$  имеет прямолинейное очертание, поперечная сила численно равна

$$Q = \frac{dM}{dx} = \pm \operatorname{tg} \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол наклона эпюры  $M$  к оси стержня. Если для совмещения с эпюрой изгибающих моментов стержень нужно поворачивать по ходу часовой стрелки, то поперечная сила принимается положительной. Например, на участке  $AB$  (рис. 3.10) имеем

$$Q_{AB} = \operatorname{tg} \alpha_{AB} = -\left(\frac{3,7371 + 2,2191}{4}\right) = -1,48905 \text{ кН}.$$

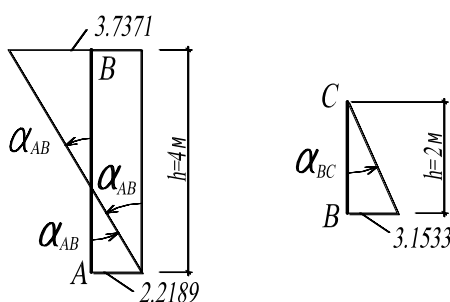


Рис. 3.10

Аналогично получаем значения поперечных сил на участках  $BC$ ,  $GR$ ,  $EK$  и  $KG$ :

$$Q_{BC} = -\frac{3,1532}{2} = -1,5766 \text{ кН};$$

$$Q_{GF} = -\frac{0,35037}{4} = -0,0876 \text{ кН};$$

$$Q_{EK} = +\frac{18}{3} = +6 \text{ кН}; \quad Q_{KG} = -\frac{18}{3} = -6 \text{ кН}.$$

Отдельные элементы системы с действующими на них внешними нагрузками можно рассматривать как однопролетные шарнирно опертые балки в эквивалентном состоянии. При этом должны быть учтены опорные моменты (если таковые имеются) с учетом их знаков. Найденные значения суммарных опорных реакций на концах элемента будут равны соответствующим поперечным силам. Поперечные силы таких элементов могут быть так же найдены по формуле (3.6).

Например, на участке  $BE$ , где эпюра  $M$  – криволинейна (рис 3.11), значения поперечной силы по формуле (3.6) имеем:

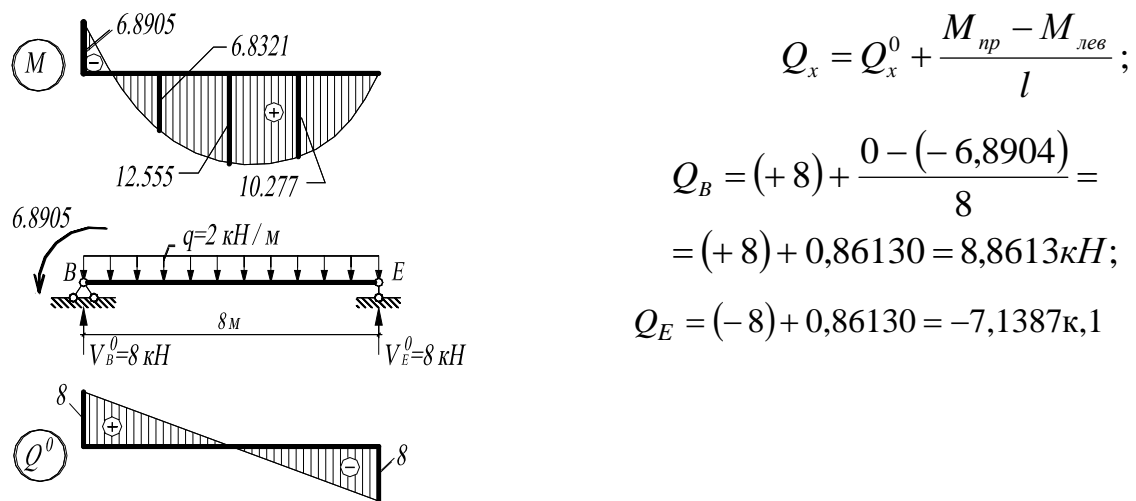


Рис. 3.11

Окончательная эпюра поперечных сил приведена на рис. 3.12.

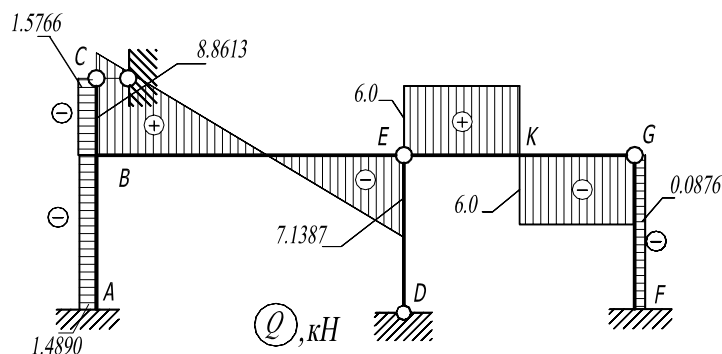
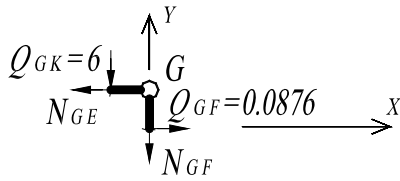


Рис. 3.12

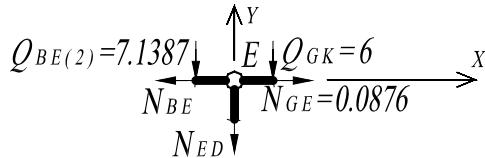
Эпюру продольных сил ( $N$ ) построим по эпюре поперечных сил  $Q$ , рассматривая равновесие узлов. Узлы рамы вырезаем в такой последовательности, чтобы каждый рассматриваемый узел содержал не более двух стержней с неизвестными продольными силами. При составлении уравнений рав-

новесия (например,  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$ ) вначале полагается, что все неизвестные продольные силы являются растягивающими (положительными). Отсеченные узлы рассматриваемой рамы приведены на рис. 3.13.

узел G



узел E



узел B

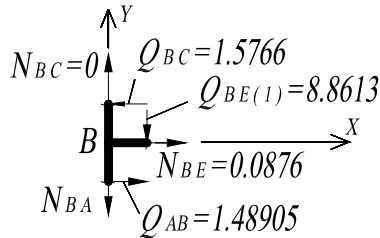


Рис. 3.13

Узел G:

$$\sum X = 0; \quad N_{GE} - 0,0876 = 0;$$

$$N_{GE} = 0,0876 \text{ кН}$$

(стержень GE растянут).

$$\sum Y = 0; \quad -N_{GF} - 6,0 = 0;$$

$$N_{GF} = -6,0 \text{ кН}$$

(стержень GF сжат).

Узел E:

$$\sum X = 0; \quad 0,0876 - N_{BE} = 0;$$

$$N_{BE} = 0,0876 \text{ кН}.$$

$$\sum Y = 0; \quad N_{ED} + 6 + 7,1387 = 0;$$

$$N_{ED} = -13,1387 \text{ кН}.$$

Узел B:

$$\sum X = 0; \quad 0,0876 - 1,5766 + 1,4890 = -1,5766 + 1,5766 = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad N_{BA} + 8,8613 = 0;$$

$$N_{BA} = -8,8613 \text{ кН}.$$

Окончательная эпюра продольных сил ( $N$ ) приведена на рис. 3.14.

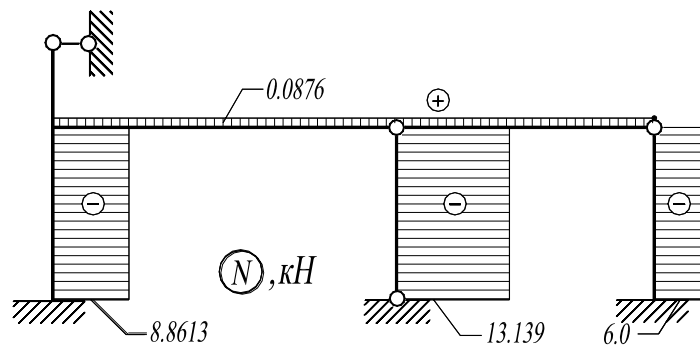


Рис. 3.14

Проверим равновесие системы в целом. По эюграм  $Q$ ,  $N$  и  $\dot{I}$  из условий равновесия опорных узлов получены опорные реакции (рис. 3.15).

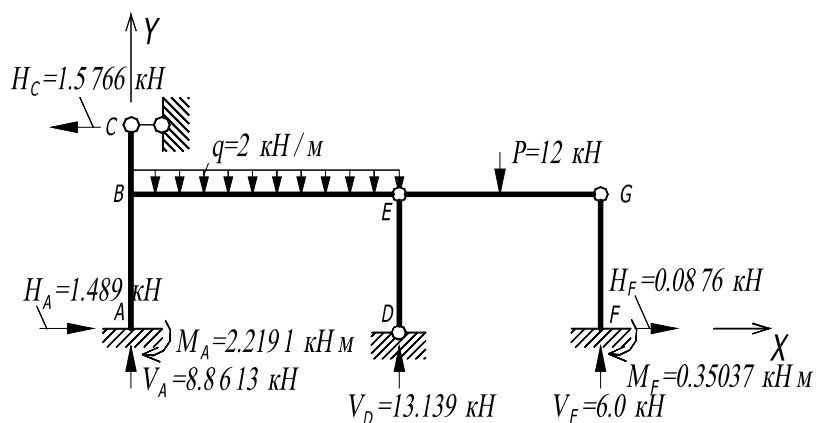


Рис. 3.15

По формулам (3.7) имеем:

$$\sum X = 0; \quad 1,4890 - 1,5766 + 0,0876 = 1,5766 - 1,5766 = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad 8,8613 + 13,1397 + 6 - 2 \cdot 8 - 12 = 28 - 28 = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad & -1,5766 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \cdot 4 + 12 \cdot 11 + 0,35037 + 2,2191 - \\ & - 13,139 \cdot 8 - 6 \cdot 14 = +198,57 - 198,57 = 0. \end{aligned}$$

## Глава 4

### Расчет стержневых систем методом перемещений

#### 4.1. Общие положения

Метод перемещений (деформаций), широко применяется в расчетах сложных рамных каркасов, ферм с жесткими узлами и многих других статически неопределимых стержневых систем. Он оказался эффективным методом для решения задач устойчивости и динамики сооружений, явился хорошей основой для разработки многих приближенных способов расчета рам и других стержневых систем.

В методе сил основными неизвестными являются усилия в избыточных связях и для отыскания этих усилий используются кинематические уравнения, выражающие условие отсутствия перемещения по направлению отбрасываемых связей. В методе перемещений за основные неизвестные принимаются угловые и линейные перемещения узлов, и отыскивают эти перемещения с помощью уравнений равновесия.

Мы рассмотрим применение метода перемещений в расчетах плоских статически неопределимых рам. Приведенные сведения могут быть использованы в расчетах этим методом и других стержневых систем.

#### 4.2. Кинематическая неопределимость упругой стержневой системы

Под действием нагрузок элементы системы, выполненной из реальных материалов, будут деформироваться и происходят перемещения ее узлов. Количество возможных перемещений узлов системы служит показателем сложности расчета методом перемещений. Чем большим количеством перемещений узлов обладает система, тем более трудоемок ее расчет. На рис. 4.1 изображена рама под действием нагрузки  $P$ . Ввиду деформаций ее элементов жесткий узел 1 повернется на некоторый угол ( $Z_1$ ), переместится по горизонтали ( $Z_2$ ) и по вертикали ( $Z_3$ ). Таким образом, каждый жесткий вне-

опорный узел системы в общем случае обладает тремя возможными перемещениями.

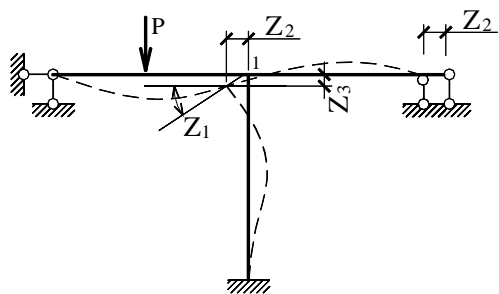


Рис. 4.1

С целью упрощения расчета в методе перемещений принимаются следующие основные допущения: 1) В системах, элементы которых работают преимущественно на изгиб, пренебрегают перемещениями узлов, вызванными продольными деформациями стержней, ввиду малости этих перемещений в сравнении с переме-

щениями от изгиба этих стержней.

2) Пренебрегают сближением концов стержней при их изгибе, т. е. длины стержней принимаются постоянными, численно равными своим значениям в начальном недеформированном состоянии.

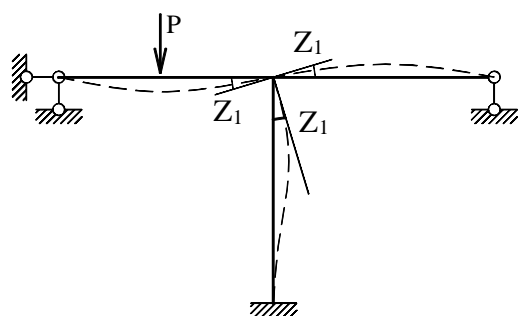


Рис. 4.2

Если учесть принятые допущения, то в раме, приведенной на рис. 4.1 следует принять  $Z_2 = 0, Z_3 = 0$  и узел 1 будет обладать одним перемещением – углом поворота  $Z_1$  (рис. 4.2). При этом все стержни, примыкающие к

узлу 1, повернутся на один и тот же угол  $Z_1$ , так как должно обеспечиваться условие неразрывности деформаций.

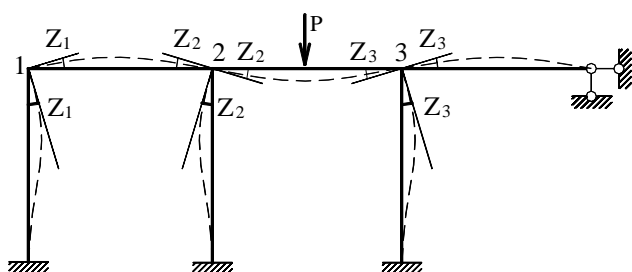


Рис. 4.3

С учетом принятых допущений, установим подвижность узлов рамы, изображенной на рис. 4.3. Вертикальными и горизонтальными смещениями узлов 1, 2 и 3, вызванными продольными деформациями



стержней и сближением концов этих стержней при изгибе пренебрегаем.

Нагрузка  $P$  вызовет изгиб ригеля в пролете 2-3. Жесткие узлы 2 и 3 повернутся на некоторые углы, произойдет изгиб остальных стержней системы и поворот узла 1, как показано на рис 4.3. При этом в каждом узле все стержни повернутся на один и тот же угол ( $Z_1, Z_2$  и  $Z_3$ ). Таким образом, под действием внешней нагрузки все жесткие внеопорные узлы системы могут иметь угловые перемещения, количество которых обозначим через  $n_y$ . В нашем случае  $n_y = 3$ .

При изгибе стержней узлы системы (жесткие и шарнирные) могут перемещаться линейно. В рассмотренном примере (рис. 4.3) можно принять, что перемещения ригеля рамы и ее внеопорных узлов 1, 2 и 3 в горизонтальном направлении отсутствуют, так как этому препятствует горизонтальный опорный стержень на крайней правой опоре, а взаимными перемещениями узлов пренебрегаем в силу принятого допущения. Перемещением этих узлов по вертикали пренебрегаем на основании принятого допущения о малости перемещений, обусловленных продольными деформациями.

Рассмотрим раму, изображенную на рис. 4.4а.

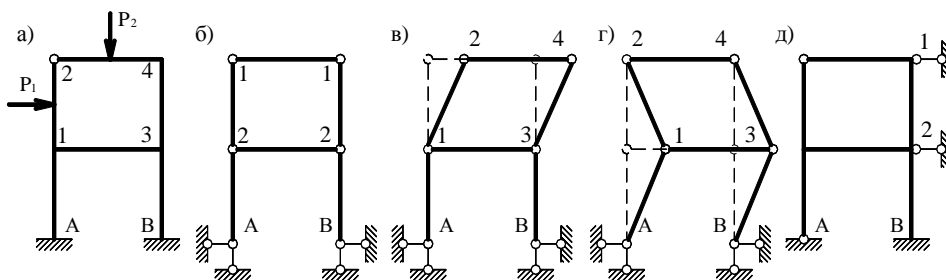


Рис. 4.4

Количество угловых перемещений равно числу жестких узлов, т.е.  $n_y = 3$ . Перемещениями узлов по вертикали и их взаимным сближением пренебрегаем по принятым выше допущениям. По горизонтали рама в целом может перемещаться, так как при изгибе стоек сместятся ее узлы. При этом узлы одного этажа переместятся по горизонтали на одну и ту же величину. Для определения линейных перемещений узлов рамы можно воспользоваться ее шарнирной схемой, получаемой путем введения шарниров в жесткие про-

межуточные узлы и опорные заземления заданной системы. Число степеней свободы полученного механизма равно числу возможных линейных перемещений узлов системы. В нашем случае шарнирная схема рамы показана на рис. 4.4б и число линейных перемещений узлов  $n_d = 3D - 2Ш - C_{on} = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 6 - 4 = 2$  (на рис. 4.4б цифрами 1, 2 обозначена кратность шарниров). Найденное выше число линейных перемещений узлов системы является количественным показателем. Направления этих перемещений узлов выявляются путем анализа изменения структуры шарнирной схемы системы. Например, в нашем случае в горизонтальном направлении могут сместиться на одну и ту же величину узлы 2 и 4 независимо от остальной части рамы (рис. 4.4в), или же узлы 1, 3 независимо от узлов 2 и 4 (рис. 4.4г). Чтобы воспрепятствовать этим линейным перемещениям, в заданной системе следует поставить две связи (рис. 4.4д).

Таким образом, общее число возможных угловых и линейных перемещений узлов рассматриваемой рамы будет:

$$n = n_y + n_d = 3 + 2 = 5.$$

Количество независимых угловых и линейных перемещений всех узлов системы называют *степенью ее кинематической неопределимости*.

### 4.3. Сущность метода перемещений. Канонические уравнения

Метод перемещений основан на том, что в качестве основных неизвестных принимаются угловые и линейные перемещения узлов системы. Зная эти перемещения, можно определить усилия в элементах системы.

Последовательность расчета методом перемещений остается по существу такой же, как и в методе сил. Расчет методом перемещений выполняется также с использованием вспомогательной системы, называемой основной системой (О.С.). Основную систему принимают путем введения дополнительных связей, препятствующих всем возможным угловым (защемляющие связи) и линейным (отдельные стержни) перемещениям узлов системы. При

этом вводимые заземляющие связи препятствуют только повороту закрепляемых узлов, но не препятствуют их линейным смещениям при изгибе стержней. Добавляемые заземляющие связи в промежуточных жестких узлах системы допускают возникновение только одной реакции – момента и существенно отличаются по статическим свойствам от опорных заземлений стержней, так как опорные заземления стержней допускают возникновение трех опорных реакций.

В основной системе метода сил удаляют связи, и снижается степень статической неопределимости заданной системы. В основную систему метода перемещений вводят дополнительные связи, и степень статической неопределимости системы возрастает.

Основные неизвестные метода перемещений (угловые и линейные перемещения узлов) находят из условия эквивалентности по деформациям заданной и принятой основной системы. При этом условии заданная и основная система в деформированном состоянии должны быть одинаковы и должны быть одинаковы углы поворота и линейные перемещения одних и тех же узлов. При этом в О.С. это будут угловые и линейные перемещения узлов вместе с добавленными в этих узлах связями.

Для выявления зависимостей между перемещениями узлов и реакциями во введенных связях сопоставим заданную систему с основной системой метода перемещений (рис. 4.5).

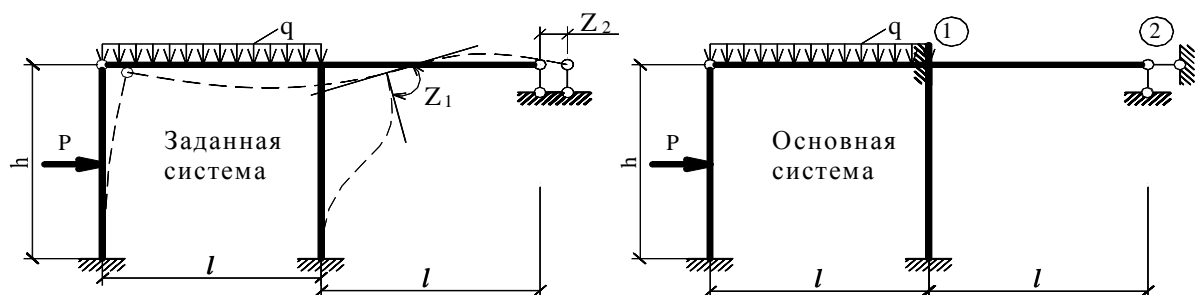


Рис. 4.5

Основная система отличается от заданной системы наличием связей 1 и 2. Первая связь препятствует углу поворота жесткого узла, а вторая – линей-

ному смещению узлов ригеля по горизонтали. Под действием нагрузок в заданной системе неизбежны деформации элементов, поворот жесткого узла на угол  $Z_1$  и линейное смещение узлов ригеля на величину  $Z_2$ . В основной системе перемещениям  $Z_1$  и  $Z_2$  препятствуют связи 1, 2 и в первой из них возникнет реактивный момент, а во второй – реактивная сила по направлению связи 2. Чтобы устранить различие между основной и заданной системой нужно отыскать такие перемещения  $Z_1$  и  $Z_2$ , при которых суммарные реакции во введенных связях 1 и 2 были бы равны нулю. В этом случае связи 1 и 2 не окажут влияния на деформации и усилия в элементах основной системы, она не будет иметь никакого отличия от заданной системы.

Таким образом, нужно выполнить условия:

$$R_1 = 0; \quad R_2 = 0, \quad (4.1)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – реакции в дополнительно введенных связях 1 и 2.

В развернутой форме равенства (4.1) можно представить:

$$\begin{cases} R_1 = R_{11} + R_{12} + R_{1p} = 0; \\ R_2 = R_{21} + R_{22} + R_{2p} = 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

где первый индекс при  $R$  в равенстве (4.2) указывает порядковый номер связи, в которой возникает реакция, а второй индекс – номер воздействия, явившегося причиной появления реакции.

Например:  $R_1$  – суммарная реакция в дополнительно введенной первой связи (суммарный реактивный момент);  $R_{11}$  – реактивный момент в защемляющей связи 1, вызванный поворотом этой связи вместе с жестким узлом на угол  $Z_1$ ;  $R_{12}$  – реактивный момент в этой же связи, вызванный линейным смещением узлов ригеля на величину  $Z_2$ ;  $R_{1p}$  – реактивный момент в этой же связи, вызванный совокупностью заданных нагрузок.

Аналогично расшифровывается второе уравнение равенства (4.2). Отличие в том, что приравнивается нулю суммарная горизонтальная реакция, возникающая во второй дополнительно введенной связи основной системы.

Равенства (4.2) можно записать в виде:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

где  $r_{11}$  – реактивный момент в первой (защемляющей) связи, вызванный поворотом этой же связи на угол  $Z_1$ , равный единице;  $r_{12}$  – реактивный момент в первой связи, вызванный линейным смещением связи 2 на единицу;  $r_{21}$  и  $r_{22}$  – реакции в связи 2, вызванные соответственно поворотом связи 1 на угол равный единице и линейным смещением связи 2 на единицу.  $R_{1p}, R_{2p}$  – соответственно реактивный момент в связи 1 и горизонтальная реакция в связи 2, вызванные заданными внешними нагрузками;  $Z_1$  и  $Z_2$  – фактические значения перемещений (углового и линейного).

В случае  $n$  неизвестных условия (4.1) должны быть выполнены для всех дополнительно введенных в основной системе связей и система уравнений метода перемещений в канонической форме принимает вид:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1p} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2p} = 0; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + r_{n3}Z_3 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{np} = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

При решении конкретных задач количество уравнений в системе (4.4) определяется степенью кинематической неопределимости заданной системы.

Каждое уравнение системы (4.4) выражает суммарную реакцию в определенной связи. Физический смысл каждого уравнения состоит в том, что суммарная реакция в дополнительно введенной связи, вызванная фактическими значениями перемещений  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  и внешней нагрузкой, должна быть равна нулю.

Если суммарные реакции во всех дополнительно введенных связях равны нулю, то эти связи не оказывают влияния на распределение усилий в элементах системы и на перемещения сечений этих элементов. Основная и заданная системы будут полностью совпадать по усилиям в сечениях элементов и перемещениям сечений, и нет различия между заданной и основной сис-

темами.

Уравнения метода перемещений выражают условия равновесия и являются *статическими уравнениями* в отличие от кинематических уравнений метода сил, выражающих условия для перемещений.

Коэффициенты  $r_{ii}$ , расположенные на главной диагонали уравнений (4.4), не могут быть отрицательными или равными нулю. Побочные коэффициенты обладают свойством взаимности, т.е.  $r_{ik} = r_{ki}$  (на основании теоремы о взаимности реакций) и могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Свободные члены этих уравнений  $R_{ip}$  также могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

#### **4.4. Определение и проверки правильности коэффициентов при неизвестных и свободных членах уравнений метода перемещений**

Реакции  $r_{ii}$ ,  $r_{ik}$ ,  $R_{ip}$  могут быть найдены статическим методом. Реакции в заземляющих связях находят из равновесия узлов ( $\sum M_{\text{узел}} = 0$ ), а в связях препятствующих линейным смещениям – из уравнений проекций  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$ , проецируя все силы, приложенные к отсеченной части системы, на соответствующую ось.

Напомним, что в уравнениях метода перемещений коэффициенты при неизвестных выражают реакции в дополнительно введенных связях основной системы, вызванные последовательными перемещениями этих связей на единицу, а свободные члены уравнений – реакции в этих же связях от внешней нагрузки.

Вернемся к основной системе, изображенной на рис. 4.5 и на примере этой системы проследим определение реакций  $r_{ii}$ ,  $r_{ik}$  и  $R_{ip}$ . На рис. 4.6а приведена основная система и обозначены узлы стержней, включая опорные. Этой О.С. соответствуют канонические уравнения (4.3), т.е.

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0. \end{cases}$$

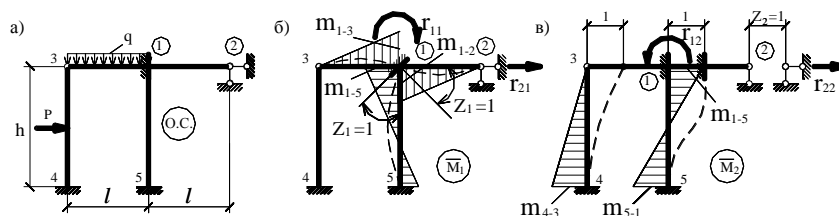


Рис. 4.6

Заметим, что в О.С. метода перемещений все стержни рамы представляют собой однопролетные статически неопределимые балки с разными опорными закреплениями. Количество типов таких балок будет не более трех: оба конца защемлены; один конец защемлен, а второй шарнирно опертый; обе опоры шарнирные. Напряженно-деформированные состояния таких стержней при различных воздействиях, включая действие внешних нагрузок и единичные перемещения их концевых сечений, хорошо изучены, и в общем виде получены решения методом сил, позволяющие получать значения изгибающих моментов и реакций на концах стержней. Эти решения имеются в справочной и учебной литературе и сведены в таблицы (см. табл. 4.1).

На рис. 4.6б изображены в общем виде эпюры изгибающих моментов на стержнях, примыкающих к узлу 1 при повороте по часовой стрелке заземляющей связи (в этом узле вместе с узлом) на угол  $Z_1 = 1$ . Эти эпюры взяты по табл. 4.1. Там же взяты численные значения моментов на концах стержней. Реактивный момент  $r_{11}$  в дополнительно введенной связи первого узла найдем из условия равновесия узла 1, отсекая примыкающие к узлу стержни бесконечно близко от узла и прикладывая действующие на них моменты с учетом растянутых волокон на стержнях (рис. 4.7а). Обозначим положительное направление реактивного момента  $r_{11}$  (по часовой стрелке). Реакция в связи от любого воздействия считается положительной, если она по направлению совпадает с направлением единичного перемещения этой связи.

Из условия равновесия узла 1 имеем:

$$\sum M_{\text{узл.}} = 0; \quad -m_{1-2} - m_{1-3} - m_{1-5} + r_{11} = 0, \quad \rightarrow r_{11} = m_{1-2} + m_{1-3} + m_{1-5}.$$

От поворота узла 1 на угол  $Z_1 = 1$  в дополнительно введенной связи 2

возникнет горизонтальная реакция, которую находим, рассматривая равновесие отсеченной части рамы и пользуясь уравнением проекций  $\sum X = 0$  (рис. 4.7б). По эпюре изгибающих моментов на стойке 1-5 поперечная сила

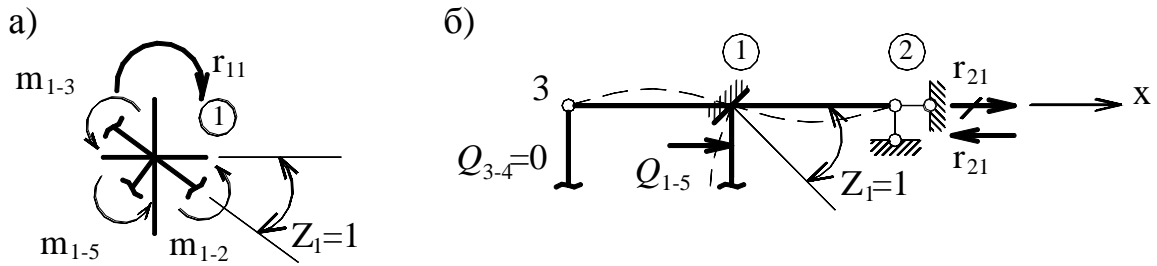


Рис. 4.7

$Q_{1-5}$  будет отрицательной по знаку и должна вращать узел 1 против часовой стрелки, как показано на рис. 4.7б. Численное значение поперечной силы  $Q_{1-5}$  можно взять по таблице (оно равно реакции на конце стержня). Примем положительной по знаку реакцию  $r_{21}$ , т.е. совпадающую по направлению с направлением линейного перемещения  $Z_2 = 1$  (см. рис. 4.6в) и этого же направления примем ось  $x$ . Из условия равновесия  $\sum X = 0$  имеем:

$$Q_{1-5} + r_{21} = 0 \rightarrow r_{21} = -Q_{1-5},$$

т.е. реакция  $r_{21}$  численно равна поперечной силе  $Q_{1-5}$ , но противоположна ей по знаку. Эта реакция (на рис. 4.7б показана ниже) не совпадает с направлением единичного перемещения  $Z_2$  в основной системе (рис. 4.6в) и в каноническое уравнение должна быть введена со знаком минус.

Эпюры изгибающих моментов в элементах основной системы от горизонтального перемещения связи 2 на  $Z_2 = 1$ , показаны на рис. 4.6в. Рассматривая равновесие узла 1 в этом состоянии системы (из условия  $\sum M_{узн.} = 0$ ), получим численное значение реактивного момента  $r_{12}$ , который направлен против часовой стрелки и должен быть принят со знаком минус, так как направление этого момента не совпадает с направлением (по часовой стрелке) перемещения  $Z_1 = 1$ .

Реакцию  $r_{22}$  получим из условия равновесия отсеченной части систе-



мы, пользуясь уравнением  $\sum X = 0$  (рис. 4.8).

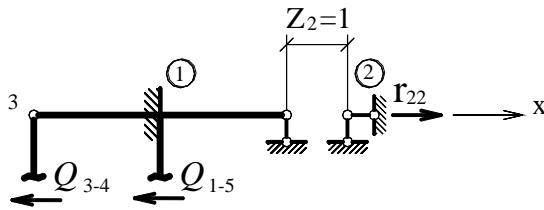


Рис. 4.8

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \\ -Q_{3-4} - Q_{1-5} + Z_{22} &= 0; \\ r_{22} &= Q_{3-4} + Q_{1-5} \end{aligned}$$

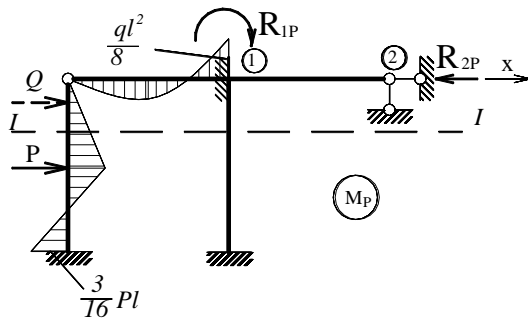


Рис. 4.9

На рис. 4.9 показан общий вид эпюр изгибающих моментов на стержнях в О.С. от действия заданных нагрузок. Аналогично предыдущему, рассматривая равновесие узла 1, получим значение реактивного момента

$R_{1p}$  (со знаком плюс), а из условия  $\sum X = 0$  для отсеченной по I-I верхней части рамы – значение  $R_{2p}$  (со знаком минус). На рис. 4.9 показаны фактические направления поперечной силы и реакций  $R_{1p}$ ,  $R_{2p}$  в дополнительных введенных связях.

Кроме изложенного выше статического метода коэффициенты при неизвестных и свободные члены канонических уравнений метода перемещений могут быть найдены кинематическим методом путем перемножения эпюр, а именно:

$$r_{ii} = \sum \int_0^{\ell} \frac{\overline{M}_i^2 dx}{EJ}; \quad r_{ik} = r_{ki} = \sum \int_0^{\ell} \frac{\overline{M}_i \overline{M}_k dx}{EJ}; \quad R_{ip} = -\sum \int_0^{\ell} \frac{\overline{M}_i M_p^* dx}{EJ},$$

где  $\overline{M}_i$ ,  $\overline{M}_k$  – эпюры изгибающих моментов в основной системе метода перемещений, полученные при перемещении на единицу связей  $i, k$ ;  $M_p^*$  – эпюра изгибающих моментов от заданных нагрузок в любой основной системе метода сил при обязательном отсутствии связей, вводимых в основной системе метода перемещений.

Способ перемножения эпюр применяется, как правило, в тех случаях, когда воспользоваться готовыми решениями бывает затруднительно (например, рама содержит наклонные стойки).

Проверки правильности найденных значений коэффициентов при неизвестных и свободных членах уравнений метода перемещений могут быть выполнены с помощью суммарной единичной эпюры, как это делается в методе сил, а именно:

$$\begin{cases} \sum_0^{\ell} \frac{\overline{M}_s^2 dx}{EI} = \sum r_{ik} \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots, n \\ k=1, 2, \dots, n \end{pmatrix}; \\ \sum_0^{\ell} \frac{\overline{M}_s M_p^* dx}{EJ} = - \sum_{i=1}^{i=n} R_{ip}, \end{cases} \quad (4.5)$$

где  $\overline{M}_s = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n$  – суммарная эпюра изгибающих моментов в основной системе метода перемещений.

Смысл проверок по формулам (4.5) следующий.

Результат перемножения суммарной эпюры изгибающих моментов на саму себя должен быть равен алгебраической сумме коэффициентов при неизвестных всех используемых в решении канонических уравнений.

Результат перемножения суммарной эпюры изгибающих моментов на эпюру изгибающих моментов от заданных нагрузок (в любой основной системе метода сил) должен быть равен алгебраической сумме свободных членов рассматриваемых уравнений, взятой с обратным знаком.

#### 4.5. Построение и проверки правильности окончательных эпюр $M$ , $Q$ и $N$

Решив систему канонических уравнений метода перемещений, находим действительные значения перемещений  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ .

Окончательную эпюру изгибающих моментов получим по формуле:

$$M = M_p + \overline{M}_1 \cdot Z_1 + \overline{M}_2 \cdot Z_2 + \dots + \overline{M}_n Z_n,$$

где  $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \dots, \overline{M}_n$  – единичные эпюры изгибающих моментов метода пе-

ремецений, построенные при поочередном перемещении в основной системе дополнительных связей на единицу;  $M_p$  – эпюра изгибающих моментов в основной системе метода перемещений от заданной внешней нагрузки.

Проверки правильности построения окончательной эпюры моментов по смыслу те же, что и в методе сил, а именно:

статическая ( $\sum M_{\text{узн.}} = 0$ ) – проверяется равновесие узлов;

кинематическая  $\left( \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i M dx}{EJ} = 0; \right)$  – отыскивается перемещение по на-

правлению любой отбрасываемой лишней связи в основной системе метода сил, и это перемещение (теоретически) должно быть равно нулю. Для рам средней сложности относительная погрешность вычислений должна составлять не более 3%.

Построение эпюры поперечных ( $Q$ ) и продольных ( $N$ ) сил выполняется теми же приемами, что и в методе сил. Рассматривая отдельные стержни системы под действием заданных внешних нагрузок и опорных моментов, определяют поперечные силы в стержнях, а продольные силы находят из условий равновесия узлов, учитывая поперечные силы и внешние сосредоточенные нагрузки, если эти нагрузки приложены в узлах.

Проверки правильности решения задачи остаются такими же, как и в методе сил. Для систем средней сложности можно ограничиться проверкой равновесия системы в целом, воспользовавшись уравнениями равновесия (3.7):  $\sum X = 0$ ;  $\sum Y = 0$  и  $\sum M_K = 0$ . В уравнения проекций быть включены проекции всех заданных внешних нагрузок и реакций опор. Уравнением  $\sum M_K = 0$  проверяется равновесие отсеченной части рамы или рамы в целом. Подробно эти проверки рассмотрены в п. 4.6.

#### 4.6. Пример расчета рамы методом перемещений

Для рамы, приведенной на рис. 4.10, требуется построить эпюры изгибающих моментов ( $M$ ), поперечных ( $Q$ ) и продольных ( $N$ ) сил.

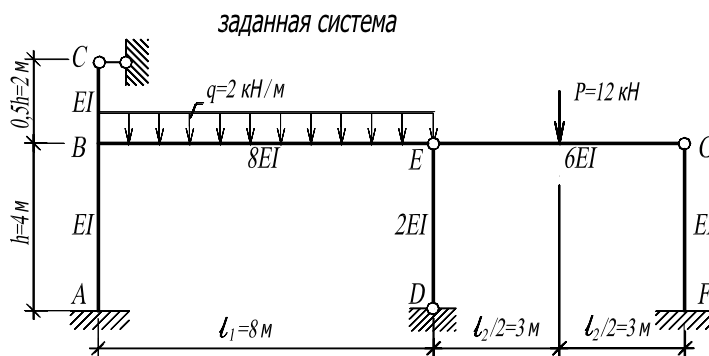


Рис. 4.10

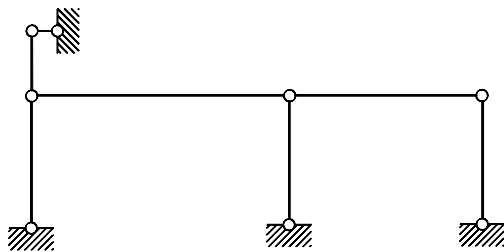


Рис. 4.11

Степень кинематической неопределимости системы находим по формуле  $n = n_y + n_{лин}$  (см. п. 4.2). В заданной раме имеется один жесткий узел  $B$  и поэтому  $n_y = 1$ .

Число степеней свободы шарнирной схемы заданной системы будет (рис. 4.11):

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 5 - 7 = 18 - 17 = 1.$$

Так как количество линейных смещений узлов рамы совпадает с числом степеней свободы ее шарнирной схемы, то  $n_{лин}$  так же равно единице и для заданной рамы степень ее кинематической неопределимости будет:

$$n = 1 + 1 = 2.$$

Основную систему формируем введением дополнительных связей, препятствующих угловому и линейному перемещению узлов рамы (рис. 4.12). В жесткий узел  $B$  вводим защемляющую связь, препятствующую углу поворота узла, а в узел  $G$  – связь, препятствующую горизонтальному смещению узлов  $B, E, G$ . Других перемещений узлов не будет, ввиду принятых допущений (см. п.4.2). Неизвестными при расчете этой рамы будут: угол поворота  $Z_1$  жесткого узла  $B$  и линейное горизонтальное перемещение  $Z_2$  узлов

$B$ ,  $E$ ,  $G$ . Направления смещений введенных связей при построении единичных эпюр указаны в основной системе стрелками. Там же цифрами 1, 2, ..., 6 указаны порядковые номера стержней.

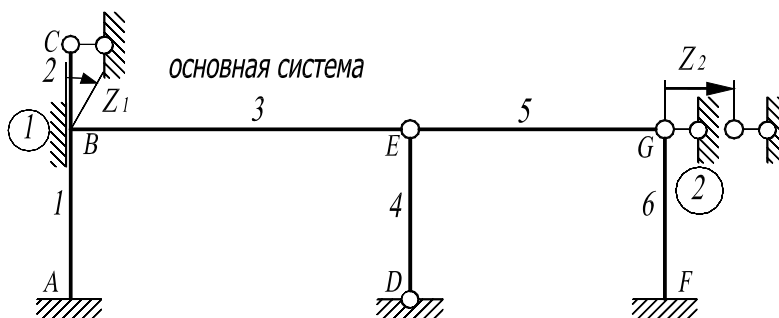


Рис. 4.12

Вычислим погонные жесткости ( $i$ ) стержней:  $i_n = \frac{EI_n}{l_n}$ , где  $EI_n$  – жесткость  $n$ -го стержня,  $l_n$  – его длина. Так как погонные жесткости всех стержней выражены через  $EI$ , то численное значение  $EI$  может быть принято любым (не равным нулю) числом, и соотношение жесткостей стержней в системе будет соблюдаться. Примем  $EI = 8$ :

$$\begin{aligned}
 i_1 &= \frac{EI_1}{l_1} = \frac{EI}{l_1} = \frac{8}{4} = 2; & i_2 &= \frac{EI_2}{l_2} = \frac{EI}{l_2} = \frac{8}{2} = 4; \\
 i_3 &= \frac{EI_3}{l_3} = \frac{8EI}{l_3} = \frac{8 \cdot 8}{8} = 8; & i_4 &= \frac{EI_4}{l_4} = \frac{2EI}{l_4} = \frac{2 \cdot 8}{4} = 4; \\
 i_5 &= \frac{EI_5}{l_5} = \frac{6 \cdot 8}{6} = 8; & i_6 &= \frac{EI_6}{l_6} = \frac{EI}{4} = \frac{8}{4} = 2.
 \end{aligned}$$

В нашем случае канонические уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0. \end{cases}$$

Для вычисления коэффициентов при неизвестных и свободных членов канонических уравнений построим в основной системе эпюры изгибающих моментов от поочередного смещения добавленных связей на единицу и действия заданной нагрузки.

Повернем дополнительно введенную (защемляющую) связь на угол

$Z_1 = 1$ . На рис. 4.13а показаны изогнутые оси стержней от этого воздействия. Изогнулись только те стержни, которые примыкают к узлу 1, а остальные стержни остались прямолинейными. Изгибающие моменты, возникающие при изгибе стержней, и эпюры изгибающих моментов на стержнях приведены на рис. 4.13б (см. табл. 4.1. готовых решений).

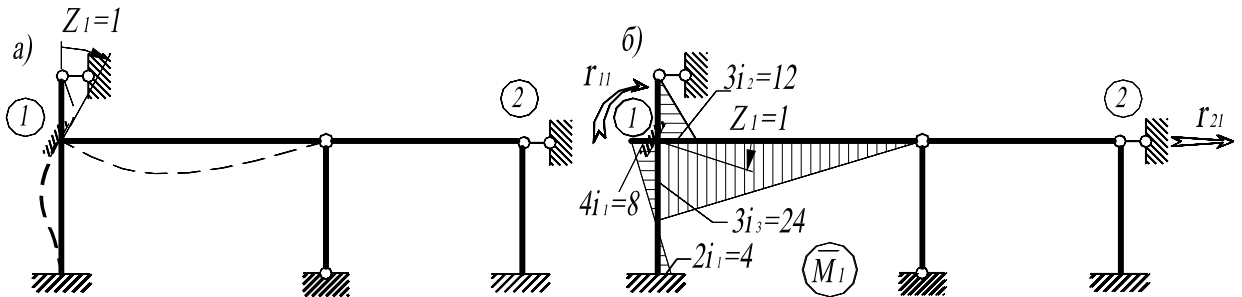


Рис. 4.13

Изогнутые оси стержней в основной системе при линейном перемещении связи 2 в горизонтальном направлении связи 2 показаны на рис. 4.14а. Изогнутся стержни  $AB$ ,  $BC$  и  $FG$ . Стержень  $DE$  повернется, не изгибаясь, стержни  $BE$  и  $EG$  – сместятся вправо, тоже не изгибаясь. Эпюры изгибающих моментов на стержнях от этого воздействия приведены на рис. 4.14б.

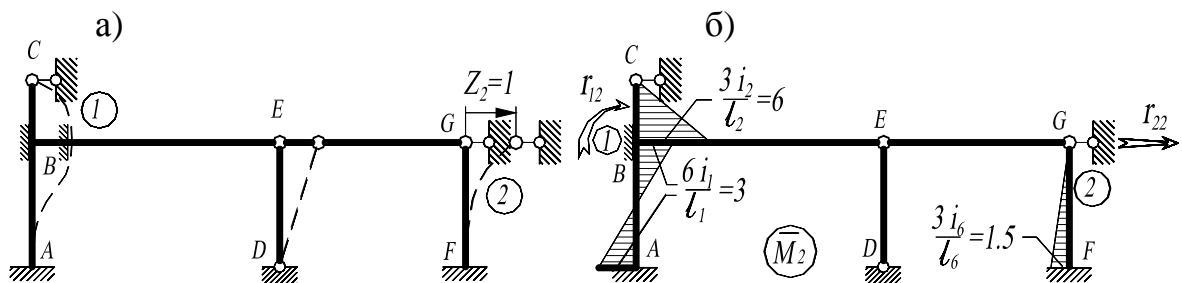


Рис. 4.14

От действия заданной нагрузки изгибаться будут стержни  $BE$  и  $EG$ , к которым непосредственно приложена нагрузка. Остальные стержни не изгибаются и изгибающие моменты в них не возникают. Эпюры изгибающих моментов в стержнях от этого воздействия приведены на рис. 4.15.

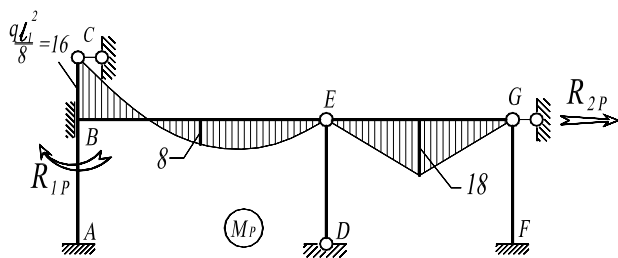


Рис. 4.15

На эпюрах от единичных смещений ( $\bar{M}_1, \bar{M}_2$ ) и от действия заданной нагрузки ( $M_p$ ) стрелками указаны положительные направления реакций, совпадающие с направлением соответствующих перемещений.

Вычислим реактивные моменты в дополнительно введенной защемляющей первой связи, рассматривая равновесие узла. На рис. 4.16а обозначены значения моментов в отсекаемых стержнях при повороте этой связи на угол  $Z_1 = 1$  и показано вычисление реактивного момента  $r_{11}$ . На рис. 4.16б, приведено вычисление реактивного момента  $r_{12}$ , а на рис. 4.16в – вычисление реактивного момента  $R_{1P}$  от заданной нагрузки.

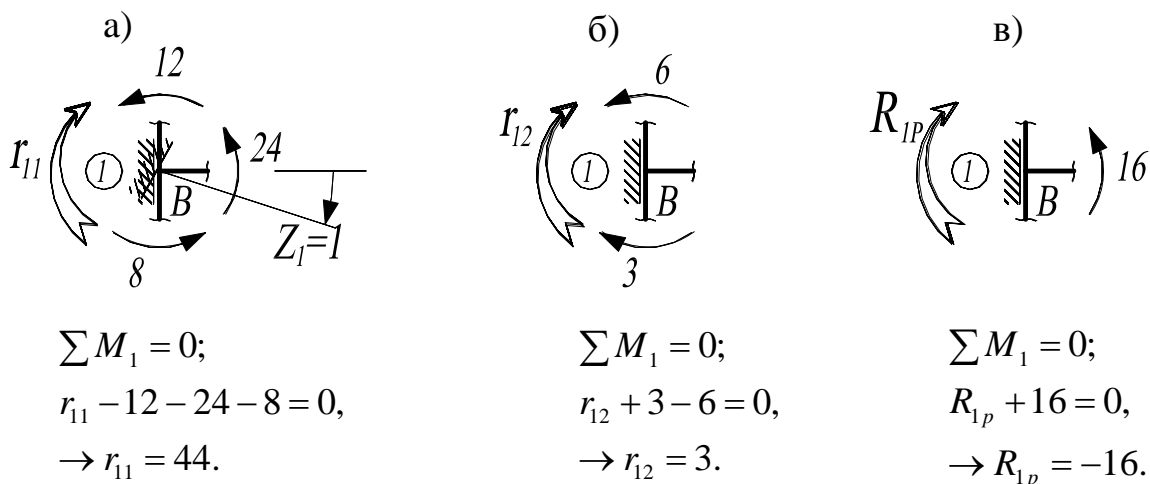


Рис. 4.16

Реакцию в дополнительно введенной связи, препятствующей линейному смещению узлов рамы в горизонтальном направлении, определим, рассматривая равновесие отсеченной части рамы (рис. 4.17).

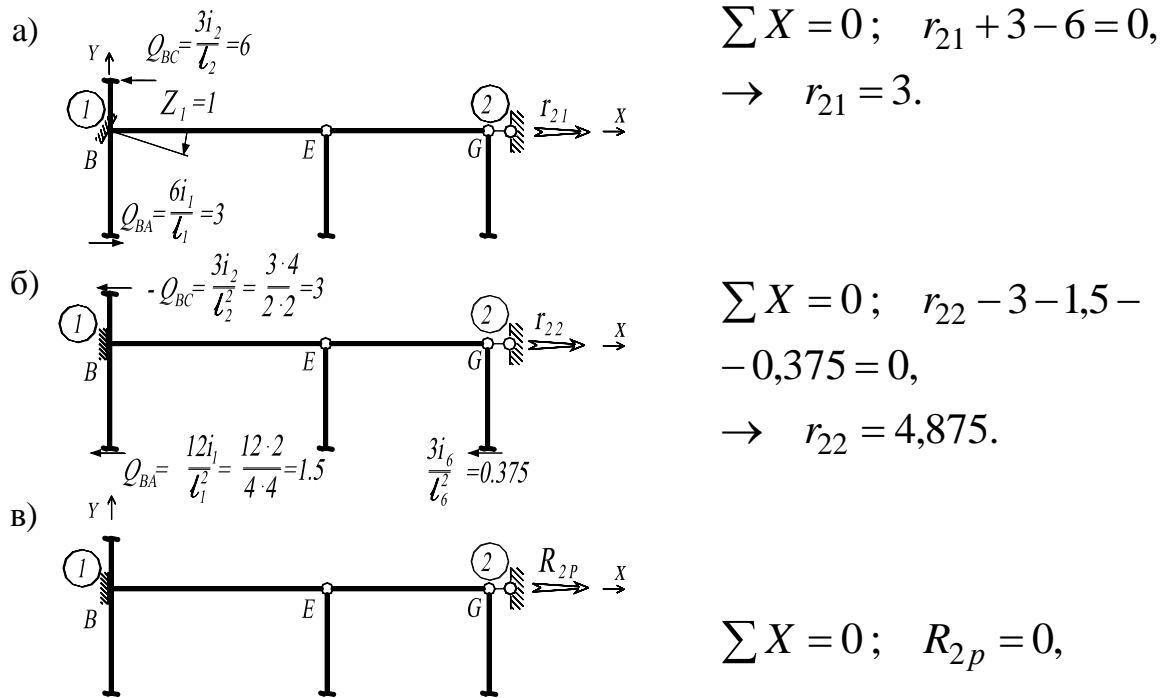


Рис. 4.17

Проверим достоверность вычисленных значений коэффициентов при неизвестных и свободных членов канонических уравнений. Для этого строим суммарную единичную эпюру по условию  $\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$  (рис. 4.18) и проверим соблюдение условия (4.5):

$$\sum_0^l \int \frac{\bar{M}_s^2 dx}{EI} = \frac{1}{8} \frac{1}{2} 18 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 18 + \frac{4}{6 \cdot 8} (5 \cdot 5 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1) +$$

$$+ \frac{1}{8} \frac{1}{2} 24 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} 24 + \frac{1}{8} \frac{1}{2} 1.5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} 1.5 = 27 + 3.5 + 24 + 0.375 = 54.875.$$

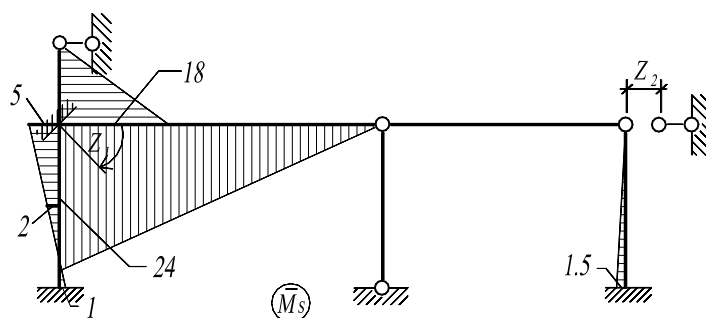


Рис. 4.18

Алгебраическая сумма коэффициентов при неизвестных

$$\sum r_{ik} = r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22} = 44 + 3 + 3 + 4.875 = 54.875.$$



Следовательно, реакции  $r_{ik}$  найдены верно.

Для проверки свободных членов уравнений суммарную единичную эпюру ( $\overline{M}_S$ ) умножаем на грузовую эпюру ( $M_p^*$ ), построенную в О.С. метода сил. На рис. 4.19а показана основная система метода сил, а на рис. 4.19б – эпюра изгибающих моментов в этой системе от заданных нагрузок.

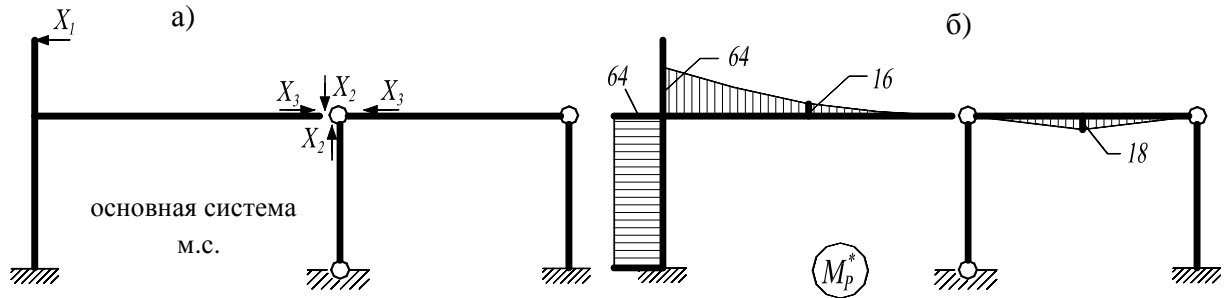


Рис. 4.19

$$\sum \int \frac{\overline{M}_S M_p^* dx}{EI} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot 64 \cdot 8 \cdot \frac{3}{4} \cdot 24 + \frac{1}{8} \cdot 64 \cdot 4 \cdot 2 = -48 + 64 = 16$$

$$\sum R_{ip} = R_{1p} + R_{2p} = -16 + 0 = -16,$$

т.е.  $\sum \int \frac{\overline{M}_S M_p^* dx}{EI} = -\sum R_{ip}$ , что подтверждает правильность полученных значений  $R_{ip}$ .

Система канонических уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} 44Z_1 + 3Z_2 - 16 = 0; & \text{откуда} & Z_1 = 0,379562; \\ 3Z_1 + 4,875Z_2 + 0 = 0, & & Z_2 = -0,233577. \end{cases}$$

Проверка правильности решения системы уравнений остается обычной (приведена в методе сил п. 3.4).

Окончательную эпюру изгибающих моментов получаем по условию

$$M = M_p + \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2.$$

Эпюры изгибающих моментов от фактических значений перемещений и результирующая эпюра моментов приведены на рис. 4.20а,б,в.

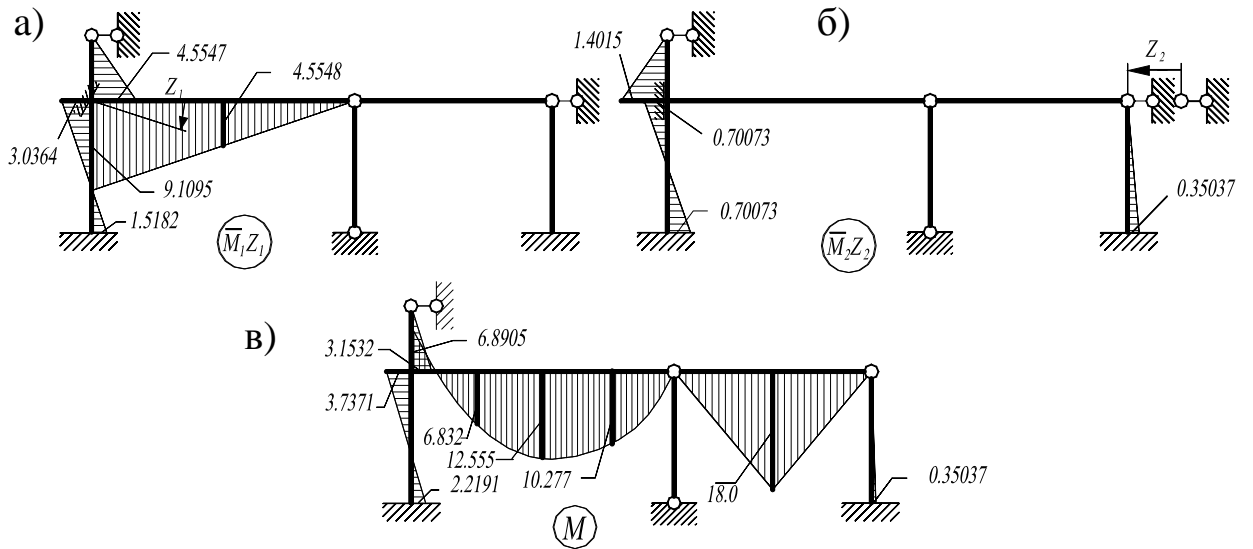


Рис. 4.20

Выполним проверки правильности окончательной эпюры изгибающих моментов (см. п.4.5).

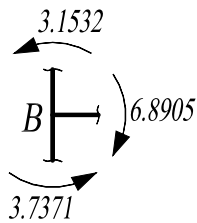


Рис. 4.21

В статической проверке проверяют равновесие узлов ( $\sum M_{\text{узн.}} = 0$ ).

В нашем случае проверяем равновесие узла *B*. (Рис. 4.21).

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 6,8905 - 3,1532 - 3,7371 = \\ &= 6,8905 - 6,8903 = 0,0002 \approx 0. \end{aligned}$$

В кинематической проверке находят перемещение в заданной системе по направлению любого неизвестного  $X_i$  по формуле:

$$\sum \int \frac{\bar{M}_i M dx}{EI} = 0,$$

где  $\bar{M}_i$  – любая единичная эпюра в любой О.С. метода сил.

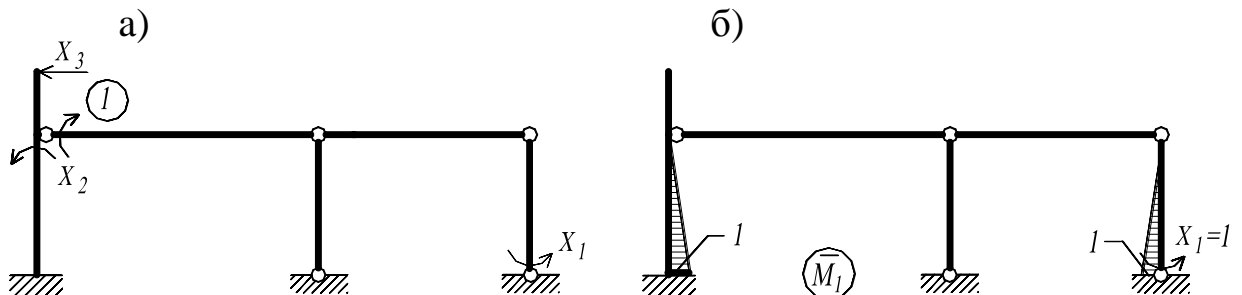


Рис. 4.22

Примем основную систему метода сил, как показано на рис. 4.22а.

Единичная эпюра  $\bar{M}_1$  приведена на рис. 4.22б. Тогда

$$\sum \int \frac{\bar{M}_1 M dx}{EI} = \frac{1}{8} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 2,2189 - \frac{1}{3} \cdot 3,7371 \right) - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,35037 =$$

$$= 0,0583920 - 0,058395; \quad \mu = 0,005\%.$$

Эпюра поперечных ( $Q$ ) и продольных ( $N$ ) сил, а также схема рамы с указанными значениями внешних нагрузок и реакций опор приведены на рис. 4.23а,б,в.

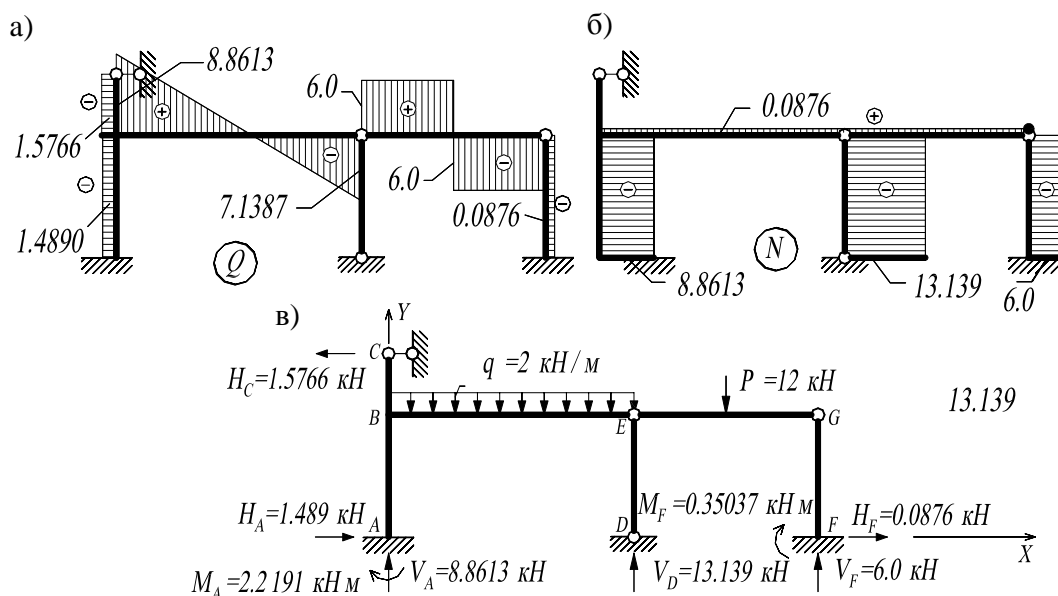


Рис. 4.23

Построение этих эпюр и проверки их правильности выполняются теми же способами, что и в методе сил.

Выполним проверки равновесия системы в целом, пользуясь уравнениями (3.7).

$$\sum X = 0; \quad -1,5766 + 1,489 + 0,0876 = -1,5766 + 1,5766 = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad 8,8613 + 13,139 + 6,0 - 12,0 - 2,0 \cdot 8,0 = 28,0 - 28,0 = 0.$$

$$\sum M_G = 0; \quad 2,2191 + 8,8613 \cdot 14 - 1,489 \cdot 4 - 1,5766 \cdot 2 -$$

$$- 2 \cdot 8 \cdot 10 + 13,139 \cdot 6 - 12 \cdot 3 + 0,35037 - 0,0876 \cdot 4 =$$

$$= 205,46 - 205,46 = 0$$

Полученные результаты свидетельствуют о правильности построения эпюр и о правильности решения задачи.

Таблица реактивных моментов и сил в однопролетных балках

Таблица 4.1

№№ П/П	Схемы	Эпюры изгибающих моментов и реакции	Реактивные моменты	Опорные реакции
1			$M_A = \frac{Pl}{3} v(1-v^2)$ $M_C = \frac{Pl}{2} u^2 v(3-u)$	$R_A = \frac{Pv}{2}(3-u^2)$ $R_B = \frac{Pu^2}{2}(3-u)$
2			$M_A = -\frac{3}{16}Pl$ $M_C = \frac{5}{32}Pl$	$R_A = \frac{11}{16}P$ $R_B = \frac{5}{16}P$
3			$M_A = -\frac{ql^2}{8}$ $M_{max} = \frac{ql^2}{128}$	$R_A = \frac{5}{8}ql$ $R_B = \frac{3}{8}ql$
4			$M_A = +3iz$	$R_A = R_B = \frac{3i}{l}z$
5			$M_A = -\frac{3i}{l}\delta$	$R_A = R_B = \frac{3i}{l^2}\delta$
6			$M_A = -uv^2Pl$ $M_B = +u^2vPl$ $M_C = 2u^2v^2Pl$	$R_A = v^2(1+2u)P$ $R_B = u^2(1+2v)P$
7			$M_A = -\frac{Pl}{8}$ $M_B = +\frac{Pl}{8}$	$R_A = \frac{P}{2}$ $R_B = \frac{P}{2}$
8			$M_A = -\frac{ql^2}{12}$ $M_B = +\frac{ql^2}{12}$ $M_C = +\frac{ql^2}{24}$	$R_A = \frac{ql}{2}$ $R_B = \frac{ql}{2}$
9			$M_A = +4iz$ $M_B = +2iz$	$R_A = R_B = \frac{6i}{l}z$
10			$M_A = M_B = -\frac{6i}{l}\delta$	$R_A = R_B = \frac{12i}{l^2}\delta$
11			$M_A = -\frac{2}{9}Pl$ $M_B = +\frac{2}{9}Pl$	$R_A = P$ $R_B = P$

## *Глава 5*

### **Основы устойчивости стержневых систем**

#### **5.1. К истории вопроса**

В первой и второй частях курса строительной механики изучаются методы определения усилий и перемещений в статически определимых и неопределимых стержневых системах. Практика эксплуатации сооружений, имеющих в своей структуре сжатые элементы определенной гибкости, показала, что во многих случаях расчетов на прочность недостаточно для полной оценки надежности сооружения. Если расчетом на прочность установлено, что напряжения в сечениях элементов не превышают допускаемых нормами расчетных сопротивлений материала, то это еще не значит, что конструкция в период эксплуатации будет находиться в безопасном состоянии. Крушения крупных инженерных сооружений (например, мостов) часто происходили при напряжениях в сечениях элементов меньше допускаемых. Аварии сооружений во многих случаях происходили вследствие потери устойчивости сжатых элементов системы или же потери устойчивости сооружением своего положения.

В 1744 году Л. Эйлер впервые получил формулу критической нагрузки для центрально сжатого гибкого стержня. Почти 100 лет формула Л. Эйлера не находила практического применения, так как в эксплуатируемых сооружениях того времени вопросы устойчивости не были определяющими. В то время не строились большепролетные конструкции, высотные сооружения и принятых из расчета на прочность сечений в массивных каменных и деревянных конструкциях было достаточно для обеспечения устойчивости их элементов.

Интенсивное строительство железных дорог со второй половины IX столетия потребовало возведения железнодорожных мостов, путепроводов с использованием стальных конструкций с более гибкими элементами, чем в применявшихся до этого времени конструкциях. В процессе возведения и в

период эксплуатации произошли крушения значительного числа железнодорожных металлических мостов с основными несущими стальными конструкциями. Одной из основных причин этих разрушений было несовершенство расчетов. В конструкциях были заложены предпосылки потери устойчивости сжатых стальных элементов.

Практика эксплуатации строительных конструкций, включающих гибкие сжатые элементы, показала, что без расчетов на устойчивость нельзя гарантировать безопасное состояние этих конструкций. Была востребована и получила дальнейшее развитие теория Л. Эйлера. Выделилась в самостоятельную науку и начала интенсивно развиваться теория расчета сооружений на устойчивость.

## **5.2. Формы потери устойчивости. Критическая нагрузка**

Системы под действием нагрузок должны находиться в состоянии устойчивого равновесия. Каждому виду загрузки сооружения нагрузками соответствует своя особая форма деформаций его элементов, соответствующие этим нагрузкам форма равновесия и положение системы.

Устойчивостью называют способность сооружения сохранять в деформированном состоянии соответствующие заданной нагрузке первоначальное положение и первоначальную форму равновесия при любых малых внешних или внутренних дополнительных возмущениях. Это означает, что если каким-то малым возмущением на систему будет нарушено ее равновесное состояние, то после удаления причины возмущения система должна вернуться в первоначальное положение, т.е. сохранить свою первоначальную форму равновесия. В период возведения и эксплуатации сооружений возмущающие воздействия всегда имеют место. Это непредвиденные толчки сооружения (внешние возмущения), дефекты при изготовлении конструкции (внутренние возмущения).

Понятие «устойчивость» охватывает две разновидности этого явления: потерю устойчивости сооружением своего положения и потерю устойчиво-

сти формы его равновесия (деформаций). В первом случае система переходит в новое положение, сохраняя неизменной свою структуру по геометрическим параметрам, а во втором изменение формы равновесия сопровождается количественным, а в определенных случаях и качественным изменением деформаций в элементах системы. Эти формы потери устойчивости могут происходить одновременно или в отдельности в зависимости от типа сооружения и характера действующих на него нагрузок.

Ниже рассматривается потеря системой устойчивости формы равновесия в деформированном состоянии.

Возможность системы сохранять устойчивое положение в деформированном состоянии зависит от величины действующей на нее нагрузки. С увеличением нагрузки может наступать такое положение системы, которое становится неустойчивым состоянием равновесия. При наличии какого-либо сколь угодно малого возмущения происходит нарушение формы равновесия и система переходит в новое равновесное деформированное состояние.

Переход системы в качественно новое деформированное состояние принято называть потерей устойчивости ее равновесия или потерей устойчивости предыдущей формы деформаций. При этом деформации могут существенно возрасти при незначительном увеличении внешней нагрузки или даже без ее увеличения. Рассматриваемый вид потери устойчивости обычно характеризуется деформациями системы, но это явление неразрывно связано с нарушением равновесия между внешними нагрузками и внутренними силами системы. Равновесие между внешними и внутренними силами упругой системы может быть устойчивым или неустойчивым. Граничное состояние системы между устойчивым и неустойчивым ее положением принято называть безразличным состоянием системы. Проследим это явление на примере центрально сжатого идеально упругого стержня (рис. 5.1,а). Если при некотором значении монотонно возрастающей нагрузки  $P$  дать свободному концу стержня весьма малое отклонение от вертикального положения и убрать возмущающее воздействие, внешняя нагрузка будет стремиться удержать стержень в

деформированном изогнутом состоянии, а внутренние силы – вернуть его в исходное прямолинейное положение.

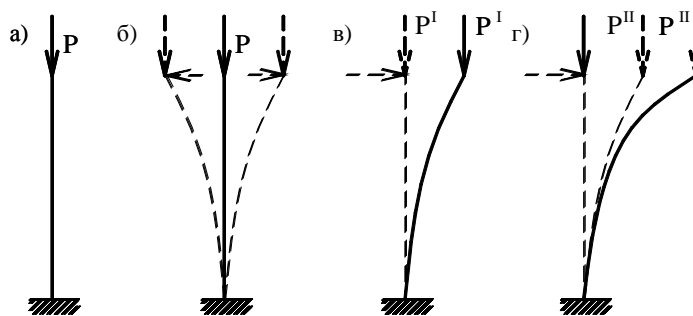


Рис. 5.1

При устойчивом равновесии стержень, совершая колебания относительно вертикального своего положения, вернется в первоначальное состояние деформации центрального сжатия (рис. 5.1б). На рис. 5.1в показано безразличное состояние стержня, когда нагрузка возросла до  $P' > P$ . Под действием некоторого возмущения стержень перешел в новое равновесное деформированное состояние. При удалении постороннего возмущения форма равновесия стержня не изменяется. Упругие внутренние силы уже не способны вернуть стержень в исходное прямолинейное положение, а внешняя нагрузка еще не достигла такого значения при котором происходил бы дальнейший его изгиб. Дальнейшее увеличение нагрузки до некоторого значения  $P'' > P'$  создает условие неустойчивого равновесия стержня. Любое сколь угодно малое возмущение или увеличение нагрузки вызовет переход стержня в новое состояние, характеризуемое интенсивным ростом деформаций изгиба и дальнейшим отклонением его от начального положения (рис. 5.1г). Таким образом, произойдет потеря устойчивости первоначальной формы равновесия центрально сжатого стержня.

Наибольшую нагрузку, при которой деформированная система еще находится в устойчивом положении, принято называть критической нагрузкой ( $P_{кр}$ ), а состояние системы под действием критической нагрузки – критическим ее состоянием.



При потере устойчивости переход системы в новое деформированное состояние происходит практически мгновенно с резким нарастанием деформаций и перераспределением усилий в элементах системы. В результате, как правило, конструкция переходит в аварийное состояние.

Существуют и высшие формы потери устойчивости, когда каждому значению критической нагрузки соответствует своя форма изогнутой оси сжимаемого элемента. Для одного и того же упругого стержня теоретически может быть найдено множество значений критических сил, каждой из которых соответствует своя форма изогнутой оси этого стержня. На рис. 5.2а-в показано, как с увеличением нагрузки изменяются формы потери устойчивости шарнирно опертой центрально сжатой стойки.

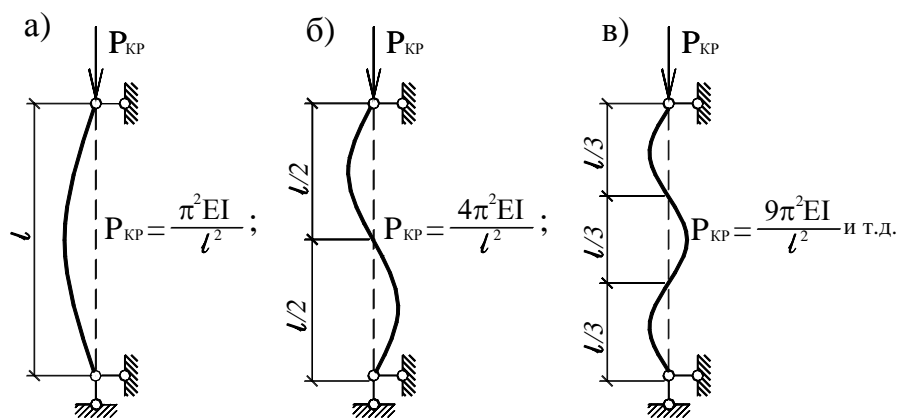


Рис. 5.2

Второй и третьей критическим силам (рис. 5.2б,в) соответствуют более сложные (высшие) формы изогнутой оси сжимаемой стойки, которые возможны теоретически, не являются устойчивыми и мгновенно переходят к простейшей форме деформации стержня (рис. 5.2а).

При решении практических задач отыскиваются значения критических нагрузок, которым соответствуют наиболее простые формы потери устойчивости.

Ниже рассмотрены наиболее часто используемые в расчетной практике методы определения критических сил в отдельных стойках и рамах при самой простой форме деформации сжимаемых элементов.

В зависимости от вида начальных деформаций и деформаций в момент

потери устойчивости различают (условно) потерю устойчивости первого и второго рода. Потеря устойчивости первого рода характерна тем, что в момент потери устойчивости появляются и сильно развиваются новые деформации. Эти новые деформации качественно отличаются от тех, которые возникают в начале нагружения. Указанный вид потери устойчивости иначе называют потерей устойчивости по Эйлеру. К потере устойчивости первого рода относятся:

- потеря устойчивости центрального сжатия;
- потеря устойчивости плоской формы изгиба;
- потеря устойчивости симметричной формы деформации.

Приведем примеры потери устойчивости первого рода. Наиболее простым случаем этого явления может быть потеря устойчивости центрально-сжатой стойки (рис. 5.1). Если нагрузка меньше ее критического значения, стойка остается прямолинейной, находится в состоянии центрального сжатия, в ее сечениях возникают продольные деформации. Если нагрузка достигает своего значения равного  $P_{кр}$ , то прямолинейная форма равновесия стойки становится неустойчивой и малейшее возмущение может вызвать переход стойки в новое деформированное состояние – криволинейное, которое будет для нее устойчивым. При этом возникают и интенсивно нарастают деформации нового вида – деформации изгиба.

На рис. 5.3 изображена ферма, элементы верхнего пояса которой при нагрузках  $P < P_{кр}$  будут испытывать деформации центрального сжатия.

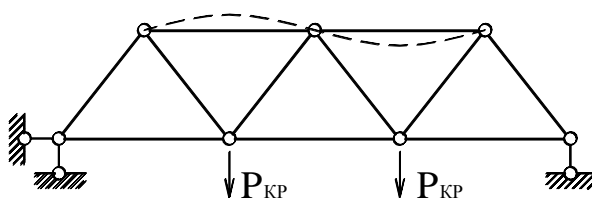


Рис. 5.3

При возрастании значений нагрузок, становится возможной потеря устойчивости первоначальной формы равновесия системы, элементы верхнего пояса могут выпучиться, их новая форма равновесия будет криволинейной с

появлением и развитием деформаций изгиба.

В трехшарнирной арке параболического очертания под действием сплошной равномерно распределенной нагрузки, меньшей критической, все сечения будут испытывать деформации центрального сжатия (рис. 5.4). При увеличении нагрузки до  $q_{кр}$ , состояние системы становится неустойчивым, и любое малое возмущение может спровоцировать переход системы в новое деформированное состояние с появлением деформаций нового вида – деформаций изгиба.

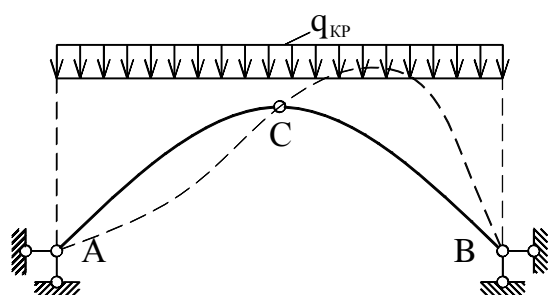


Рис. 5.4

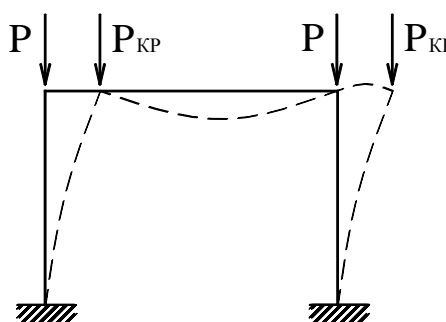


Рис. 5.5

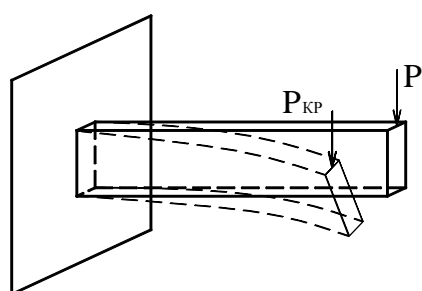


Рис. 5.6

Стойки рамы (рис. 5.5) при нагрузках  $P < P_{кр}$  испытывают только центральное сжатие. При нагрузках  $P = P_{кр}$  потеря устойчивости стоек рамы будет характеризоваться появлением нового вида деформаций (изгиба).

Защемленная тонкая полоса при определенном значении внешней нагрузки отклонится от вертикального положения, произойдет дополнительный ее изгиб в горизонтальной плоскости и закручивание (рис. 5.6). До потери устойчивости балка испытывала только изгиб в вертикальной плоскости действия нагрузки. При потере устойчивости возникают и развиваются качественно новые деформации – деформации кручения.

При потере устойчивости второго рода деформации качественно остаются теми же, что и в начале загрузки, но они интенсивно развиваются.

Примерами могут служить: внецентренно нагруженная стойка (рис. 5.7а); трехшарнирная арка, на которую действует сосредоточенная нагрузка (рис. 5.7б). В обоих случаях, в начале загрузки и в момент потери устойчивости, сечения элементов системы испытывают внецентренное сжатие, и деформации качественно не изменяются.

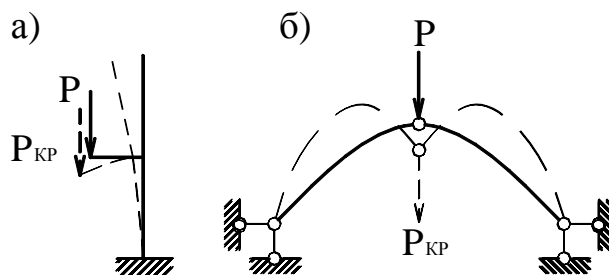


Рис. 5.7

В реальных конструкциях преобладает, как правило, потеря устойчивости второго рода ввиду неизбежного отклонения нагрузок от проектного положения (эксцентриситеты), неоднородности материала и др. В результате сжимаемые элементы стержневых систем еще до потери устойчивости испытывают внецентренное сжатие. Выход из строя такого типа элементов обычно происходит вследствие потери ими несущей способности (потери устойчивости второго рода) при нагрузках, численно меньших критических нагрузок первого рода. Тем не менее, при определении несущей способности сжато-изогнутых элементов сооружений необходимо знать их расчетные длины и гибкости, которые определяются с помощью критических сил первого рода. Поэтому изучение потери устойчивости первого рода имеет не только теоретическое, но и большое практическое значение.

Потеря устойчивости может происходить как в упругой, так и в упруго-пластической стадии работы материала конструкции. Ниже рассмотрены некоторые простые задачи потери устойчивости первого рода плоских упругих стержневых систем.

### 5.3. Число степеней свободы и формы равновесия

В первой и второй частях курса строительной механики используется понятие «число степеней свободы системы», которое позволяет выявить пригодность системы в качестве инженерного сооружения и принадлежность ее к определенному классу сооружений ( $W = 3D - 2Ш - C_{on}$ ). При этом полагается, что все диски, составляющие систему, являются абсолютно жесткими и недеформируемыми.

В теории устойчивости рассматриваются системы в деформированном состоянии. Число степеней свободы характеризует (отражает) это состояние, а именно: *числом степеней свободы называют количество независимых геометрических параметров, определяющих положение всех точек системы в деформированном ее состоянии*. Из этого следует, что число степеней свободы любой стержневой системы (балка, рама и т.д.) равно бесконечности. Количество возможных форм равновесия и соответствующих этим формам критических сил характеризуется числом степеней свободы системы. Реальная упругая система обладает бесконечным числом степеней свободы, бесконечным множеством форм равновесия и соответствующих этим формам критических нагрузок. В практических расчетах отыскивается наименьшее (не равное нулю) значение критической нагрузки. Этой нагрузке будет соответствовать наиболее простая форма деформации элементов системы.

С целью упрощения расчета упругая система может быть заменена более простой, имеющей конечное число степеней свободы, если это допускает заданная система, а также удовлетворяются требования к конечному результату. Это позволяет дифференциальные уравнения изгиба заменить алгебраическими и упростить решение задачи. Например, если в раме, изображенной на рис. 5.8а жесткость нагруженного стержня  $AB$  на изгиб ( $EI$ ) велика, а жесткость стержня  $CD$  на изгиб ( $EI_1$ ) мала, то расчетную схему системы можно принять, как показано на рис. 5.8б. Пренебрегая изгибом нагруженной стойки  $AB$ , горизонтальные перемещения всех ее точек можно выразить через параметр  $d\varphi$ , т.е.  $y(x) = x \operatorname{tg} d\varphi$  и мы получаем систему с одной степенью

свободы. Величина  $P_{кр}$  будет зависеть от линейного перемещения упругой опоры (конкретное решение такой задачи будет показано ниже).

Отметим, что с увеличением числа степеней свободы системы сложность решения задач устойчивости существенно возрастает.

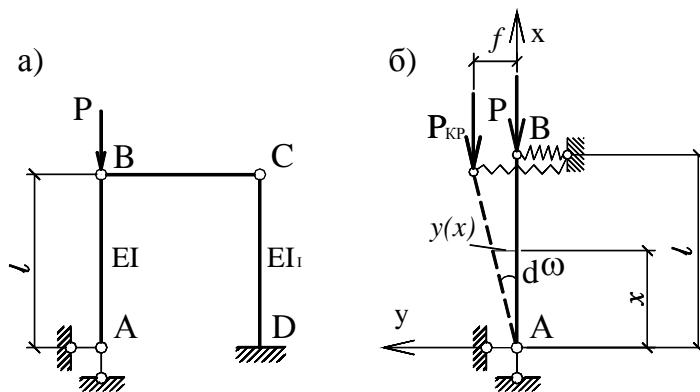


Рис. 5.8

#### 5.4. Уравнение устойчивости упругого сжато-изогнутого стержня

Рассмотрим некоторое поперечное сечение упругого сжато-изогнутого стержня, защемленного одним концом. Пусть от нагрузки, приложенной выше рассматриваемого сечения, будут вертикальная  $P$  и горизонтальная  $\bar{Q}$  составляющие (рис. 5.9). Определим поперечную силу в этом сечении из условия  $\sum n = 0$ .

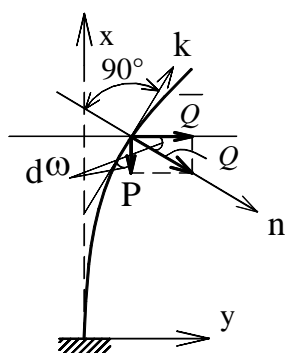


Рис. 5.9

Поперечная сила в указанном сечении с учетом величин первого порядка малости (прогибов и их производных по длине стержня) будет

$$Q = \bar{Q} \cos d\varphi + P \sin d\varphi.$$

Ввиду малости перемещения  $d\varphi$  имеем:

$$Q = \bar{Q} \cos d\varphi + P \operatorname{tg} d\varphi = \bar{Q} \cdot 1 + P y',$$

т.е.

$$Q = \bar{Q} + P y' \quad (a)$$

Как известно из сопротивления материалов

$$-EIy'' = M_x, \quad \text{а} \quad Q = \frac{dM}{dx}.$$

Тогда  $Q = M' = (-EIy'')$

Подставляя последнее выражение в уравнение (а), получаем:

$$(-EIy'')' - Py' = \bar{Q}.$$

Дифференцируя еще раз по  $x$ , и учитывая, что  $\bar{Q}' = -q$  (где  $q$  – поперечная нагрузка на стержень), получаем окончательное уравнение равновесного состояния упругого сжато-изогнутого стержня:

$$(EIy'')'' + (Py')' = q,$$

т.е.  $EIy^{IV} + Py'' = q.$  (5.1)

Полное решение линейного дифференциального уравнения (5.1) с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y = C_1 \sin(nx) + C_2 \cos(nx) + C_3 x + C_4 + y^0,$$

где  $n = \sqrt{\frac{P_{кр}}{EI}}$ ,  $C_1, C_2, C_3$  и  $C_4$  – произвольные постоянные интегрирования, а  $y^0$  – частное решение, которое может быть найдено, например, методом неопределенных коэффициентов или другими приемами.

Для определения постоянных интегрирования  $C_1, C_2, C_3$  и  $C_4$  используются граничные условия (нужно иметь четыре независимых друг от друга условия). Практическое использование граничных условий будет показано ниже при решении конкретных задач.

При отсутствии внешней поперечной нагрузки  $q$  уравнение (5.1) превращается в однородное дифференциальное уравнение

$$EIy^{IV} + Py'' = 0. \quad (5.2)$$

Решение уравнения (5.2) аналогично приведенному выше общему решению уравнения (5.1) с тем отличием, что отсутствует частное решение  $y^0$ .

При решении многих задач устойчивости отдельных стержней и стержневых систем (в случае малых деформаций в момент потери устойчивости) можно воспользоваться более простым дифференциальным уравнением второго порядка:  $\pm EIy'' = M_x$ , применение которого будет показано также ниже на конкретных примерах.

### 5.5. Методы решения задач устойчивости

Решения задач устойчивости может выполняться точными (с учетом принимаемых допущений), или же приближенными методами. Ниже мы рассмотрим те методы, которые наиболее часто используются в расчетной практике.

Статический метод. При использовании этого точного метода упругую систему рассматривают в таком деформированном состоянии, которое отличается от заданного бесконечно малыми перемещениями, обеспечивающими появление деформаций нового вида, качественно отличающихся от начальных. Для элементов системы в деформированном состоянии составляют дифференциальные уравнения равновесия и путем их интегрирования отыскивают решение. Используя граничные условия, формируют систему однородных линейных уравнений, количество которых равно числу неизвестных постоянных после интегрирования уравнений равновесия. Новое деформированное состояние системы будет иметь место, если все постоянные в системе однородных линейных уравнений одновременно не равны нулю. В этом случае определитель, составленный из коэффициентов при постоянных, должен быть равным нулю, т.е.

$$D(n) = 0. \quad (5.3)$$

Равенство (5.3) называется характеристическим уравнением (уравнением устойчивости), решая которое, находят критические силы или же критические параметры, через которые затем отыскивают критические силы.

Применение статического метода рассмотрим на примере упругого центрально сжатого стержня постоянного сечения (рис. 5.10).



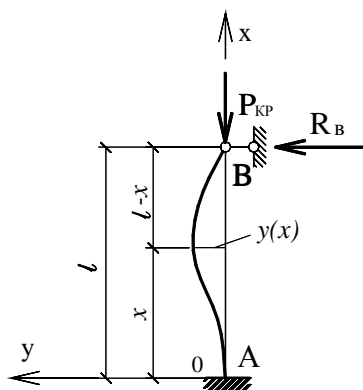


Рис. 5.10

При бесконечно малых перемещениях можно принять, что положение изогнутой оси стержня описывается приближенно дифференциальным уравнением:

$$-EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M_x \quad (5.4)$$

вместо точного

$$-EI \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = M_x. \quad (5.4,a)$$

Изгибающий момент в произвольном сечении стержня

$$M_x = P_{кр} y - R_B (\ell - x).$$

С учетом принятого направления координатных осей дифференциальное уравнение изгиба по условию (5.4) получаем в виде:

$$EI y'' + P_{кр} y = R_B (\ell - x).$$

Разделив все слагаемые на  $EI$  и обозначив

$$n = \sqrt{P_{кр} / EI}, \quad (a)$$

получаем:

$$y'' + n^2 y = \frac{R_B}{EI} (\ell - x).$$

Решение этого неоднородного дифференциального уравнения будет:

$$y = A \sin(nx) + B \cos(nx) + C(\ell - x), \quad (5.5)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  – постоянные интегрирования.

Так как по условию (a)

$$P_{кр} = n^2 EI, \quad (5.6)$$

то критическая нагрузка может быть найдена, если известен параметр « $n$ ».

Для определения постоянных  $A$ ,  $B$  и  $C$  в уравнении (5.5) воспользуемся кинематическими граничными условиями:

- 1) При  $x = 0$ ,  $y = 0$ ;
- 2) При  $x = 0$ ,  $y' = 0$ ;
- 3) При  $x = \ell$ ,  $y = 0$ .

По первому условию  $y = A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot l = 0.$  (1)

По второму условию  $y' = A \cdot n \cdot \cos(nx) - B \cdot n \cdot \sin(nx) - C = 0.$

При  $x = 0$   $y' = A \cdot n \cdot 1 - B \cdot 0 - C \cdot 1 = 0.$  (2)

По третьему условию  $y = A \cdot \sin(nl) + B \cdot \cos(nl) + C \cdot 0 = 0.$  (3)

Система однородных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot l = 0; \\ A \cdot n - B \cdot 0 - C \cdot 1 = 0; \\ A \cdot \sin(nl) + B \cdot \cos(nl) + C \cdot 0 = 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

Уравнения (5.7) удовлетворяются, если  $A = B = C = 0$ , но это условие соответствует недеформированному состоянию системы. Если  $A$ ,  $B$  и  $C$  отличны от нуля, то должно выполняться условие (5.3). Этому случаю соответствуют неопределенные значения постоянных, что характеризует безразличное состояние системы. Таким образом, уравнение устойчивости имеет вид:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & l \\ n & 0 & -1 \\ \sin(nl) & \cos(nl) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, имеем

$$nl \cdot \cos(nl) - 1 \cdot \sin(nl) = 0,$$

или  $tg(nl) = nl.$  (5.8)

Чтобы найти наименьшее (отличное от нуля) значение критической силы, нужно отыскать наименьший положительный корень уравнения (5.8). В общем случае такого типа уравнения решаются способом последовательных приближений. Путем подбора находим  $nl = 4,493$  и по формуле (5.6)

$$P_{кр} = n^2 EI = \frac{20,19EI}{l^2}.$$

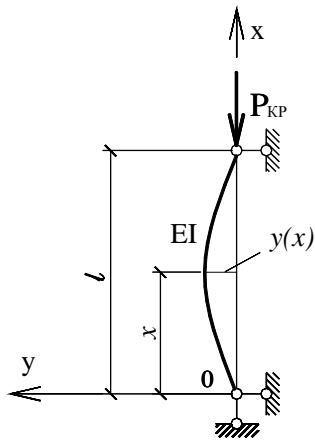


Рис. 5.11

Для упругой центрально нагруженной шарнирно опертой стойки постоянного сечения (рис. 5.11) определение критической нагрузки статическим методом повторит предыдущий расчет. Приняв дифференциальное уравнение по зависимости (5.4),  $M_x = P_{кр} y$ ,  $EIy'' + P_{кр} y = 0$ .

и однородное дифференциальное уравнение изгиба получаем в виде:

$$y'' + n^2 y = 0, \quad (5.9)$$

где 
$$n = \sqrt{\frac{P_{кр}}{EI}}. \quad (5.10)$$

Решение уравнения (5.9) имеет вид:

$$y = A \cdot \sin(nx) + B \cdot \cos(nx),$$

где  $A, B$  – постоянные интегрирования, определяемые по кинематическим граничным условиям: при  $x = 0$ ,  $y = 0$ ; при  $x = l$ ,  $y = 0$ .

По первому условию  $B = 0$  и изогнутая ось стержня является синусоидой, определяемой уравнением

$$y = A \cdot \sin(nx). \quad (5.11)$$

По второму условию  $A \cdot \sin(nl) = 0$ , и так как  $A \neq 0$ , то  $\sin(nl) = 0$ .

Наименьшее значение положительного корня (отличного от нуля) этого уравнения  $nl = \pi$  и по формуле (5.6)

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad (5.12)$$

т.е. получена известная формула Л. Эйлера.

Установим физический смысл постоянной  $A$  в формуле (5.11), так как она осталась неопределенной.

Подставив в уравнение (5.11) значение  $n = \frac{\pi}{l}$  и  $x = \frac{l}{2}$ , имеем:

$$y = A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot \frac{l}{2}\right) = A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = A \cdot 1,$$

т.е.  $A = y_{\max} = y_0$  – максимальное отклонение стержня от начального его положения в середине пролета стойки.

Изогнутую ось стержня в деформированном состоянии можно представить в виде:

$$y = y_0 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (5.13)$$

Полученное выше (по второму граничному условию) равенство  $\sin(nl) = 0$  удовлетворяется, если  $nl = \pi$ ,  $nl = 2\pi$ ,  $nl = 3\pi$  и т.д., что подтверждает зависимость формы деформации элемента (рис. 5.2) от значений критических сил.

Заметим, что приведенные выше решения статическим методом будут справедливы при малых перемещениях (потеря устойчивости в малом), так как использовалось приближенное дифференциальное уравнение изгиба (5.4), справедливое при малых деформациях.

Статический метод имеет разновидности в зависимости от способа нахождения уравнения устойчивости (5.3):

- метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси стержня;
- использование метода сил и метода перемещений;
- интегрирование уравнений в конечных разностях;
- приближенные способы, основанные преимущественно на методе перемещений.

Энергетический метод. Этот метод используется в расчетной практике для приближенного определения критических нагрузок для стоек сложного и в том числе переменного сечения, а так же для плоских и пространственных рам, ферм, комбинированных систем. В основу его положен энергетический признак равновесия, согласно которому полная потенциальная энергия системы  $\Pi$  в состоянии устойчивого равновесия имеет минимальное значение, в

состоянии неустойчивого равновесия – максимальное, а в случае безразличного состояния системы приращение потенциальной энергии  $\Delta\Pi$  должно быть равно нулю. Этот принцип наглядно прослеживается на примере абсолютно твердого шарика, помещаемого на различных поверхностях (рис 5.12).

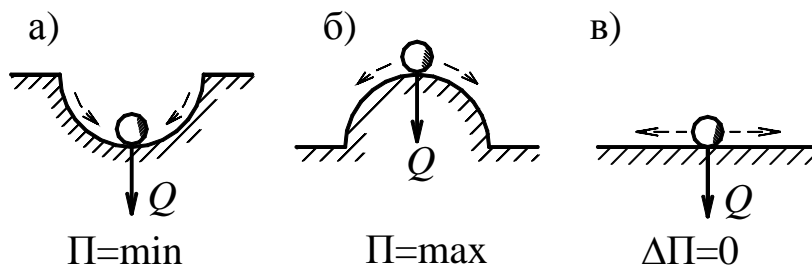


Рис. 5.12

Шарик, находящийся на вогнутой сферической поверхности, располагается в самой низкой ее точке (рис. 5.12а) и при любом отклонении его от этого положения он под действием собственного веса  $Q$ , будет возвращаться в начальное положение. Располагаясь в самой низкой точке сферы, шарик обладает минимальной потенциальной энергией и находится в состоянии устойчивого равновесия. Находясь в верхней точке выпуклой сферической поверхности (рис. 5.12б), шарик находится в состоянии неустойчивого равновесия и обладает максимальной потенциальной энергией. При любом на него воздействии он будет перемещаться в более низкие точки сферы, занимая устойчивое положение. Если шарик находится на горизонтальной плоскости (рис. 5.12в), то при любых горизонтальных перемещениях его потенциальная энергия не изменяется. Приращение потенциальной энергии  $\Delta\Pi = 0$ , что соответствует безразличному состоянию системы.

Полная потенциальная энергия упругой системы численно равна работе внешних и внутренних сил, совершаемой ими при переводе системы из деформированного состояния в начальное, недеформированное. Изменение потенциальной энергии определяется равенством:

$$\Delta\Pi = U - T, \quad (5.14)$$

где  $U, T$  – изменения работы соответственно внутренних и внешних сил системы при небольшом отклонении ее от состояния равновесия.

Расчет систем на устойчивость энергетическим методом состоит в следующем. При бесконечно малом отклонении системы от начальной формы равновесия в ее элементах возникнут дополнительные внутренние силы  $\bar{M}, \bar{Q}$  и  $\bar{N}$ . Эти внутренние силы  $\bar{M}, \bar{Q}$  и  $\bar{N}$  и внешние нагрузки  $(q, P)$  совершат некоторую работу. Если окажется, что  $U > T, (\Delta\Pi > 0)$ , то система устойчива, а если  $U < T, (\Delta\Pi < 0)$  – система неустойчива. Равенство  $U = T$  дает значения нагрузок, при которых становится возможной потеря устойчивости первоначальной формы равновесия системы.

В случае безразличного состояния системы будем иметь  $\Delta\Pi = U - T = 0$ , откуда

$$U = T. \quad (5.15)$$

Как известно, потенциальная энергия внутренних сил определяется выражением:

$$U = \sum_1^m \int_0^l \frac{\bar{M}^2 dx}{2EI} + \sum_1^m \int_0^l \frac{\mu \bar{Q}^2 dx}{2GF} + \sum_1^m \int_0^l \frac{\bar{N}^2 dx}{2EF}, \quad (5.16)$$

где  $\bar{M}, \bar{Q}$  и  $\bar{N}$  – дополнительные усилия в элементах системы, возникающие при отклонении ее от начального положения равновесия;

$m$  – количество элементов в системе;

$\mu$  – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений в сечениях элементов.

Для систем из элементов сплошного сечения, пренебрегая влиянием поперечных и продольных сил, имеем:

$$U = \frac{1}{2} \sum_1^m \int_0^l \frac{\bar{M}^2 dx}{EI}, \quad (5.17)$$

или, учитывая зависимость  $-EIy'' = M_x$ :

$$U = \frac{1}{2} \sum_1^m \int_0^l EI[y''(x)]^2 dx. \quad (5.18)$$

Работу вертикально приложенных узловых нагрузок можно определить:

$$T = \sum_{i=1}^n P_i \delta_i, \quad (15.19)$$

где  $\delta_i$  – перемещение точки приложения внешней силы по ее направлению, вызванное изгибом сжимаемого стержня.

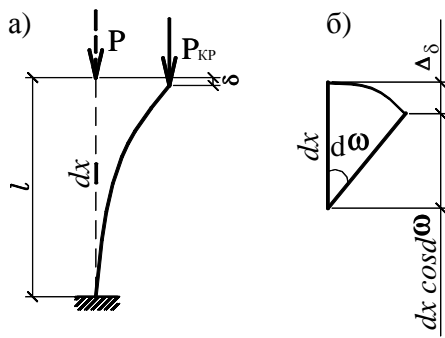


Рис. 5.13

Например, перемещение силы  $P$  по ее направлению при изгибе стержня, изображенного на рис. 5.13а, примем равным  $\delta$ . Для определения  $\delta$  выделим из стержня бесконечно малый элемент  $dx$  и определим вертикальное смещение его конца  $\Delta_\delta$

при повороте элемента  $dx$  на некоторый малый угол  $d\varphi$  (рис. 5.13б):

$$\Delta_\delta = dx - dx \cos \varphi = (1 - \cos \varphi) dx = 2 \sin^2 \frac{d\varphi}{2} dx.$$

Ввиду малости угла  $d\varphi$  можно принять

$$\sin^2 \frac{d\varphi}{2} = \left( \frac{d\varphi}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 d\varphi = \frac{1}{4} (y')^2.$$

Тогда  $\Delta_\delta = 2 \frac{1}{4} (y')^2 dx = \frac{1}{2} (y')^2 dx$  и полное перемещение при изгибе стержня:

$$\delta = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx. \quad (5.20)$$

Работа внешней силы для рассматриваемого стержня

$$T = P_{кр} \delta = P_{кр} \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx. \quad (5.21)$$

Приравнивая правые части равенств (5.18) и (5.21), из полученного уравнения имеем:

$$P_{кр} = \frac{\int_0^l EI [y''(x)]^2 dx}{\int_0^l [y'(x)]^2 dx}. \quad (5.22)$$

Формула (5.22) справедлива при любых закреплениях концов стержня.

Для системы с несколькими сжатыми стержнями критические нагрузки

для них находятся приравниванием правых частей равенств (5.18) и (5.19). При этом внешние узловые нагрузки целесообразно выразить через одну из них с поправочными множителями  $k_i$  и формула (5.22) примет вид:

$$P_{кр} = - \frac{\sum_{i=1}^m \int_0^l EI [y''(x)]^2 dx}{\sum_{i=1}^n k_i \sum_{j=1}^n \int_0^l [y'(x)]^2 dx}, \quad (5.23)$$

где  $n$  – число загруженных стержней системы.

Критические нагрузки получаем по условию:

$$(P_{кр})_i = k_i P_{кр}.$$

Применение энергетического метода рассмотрим на примере упругого шарнирно опертого стержня постоянного сечения (рис. 5.11), приняв уравнение упругой линии в деформированном его состоянии по формуле (5.13), т.е.

$$y = y_0 \sin \frac{\pi x}{l},$$

где  $y_0$  – прогиб стержня в середине пролета.

В нашем случае  $y' = y_0 \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}$  и  $y'' = -y_0 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}$ .

Числитель в выражении (5.22)

$$\int_0^l EI [y''(x)]^2 dx = EI y_0^2 \frac{\pi^4}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = EI y_0^2 \frac{\pi^4}{l^4} \frac{l}{2} = EI y_0^2 \frac{\pi^4}{2l^3}.$$

Знаменатель в выражении (5.22)

$$\int_0^l [y'(x)]^2 dx = y_0^2 \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = y_0^2 \frac{\pi^2}{l^2} \frac{l}{2} = y_0^2 \frac{\pi^2}{2l}.$$

Критическая нагрузка по формуле (5.22)

$$P_{кр} = EI y_0^2 \frac{\pi^4}{2l^3} \cdot \frac{2l}{y_0^2 \pi^2} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Получено точное решение, так как изогнутая ось стойки принята по той кривой, которая соответствует действительному изгибу стойки в момент потери ею устойчивости (5.13).



Недостатком энергетического метода является то, что необходимо задаваться уравнениями упругих линий изогнутых стержней в момент потери устойчивости. Отсюда и приближенность получаемого решения этим методом. Чем ближе принятые уравнения изогнутых осей стержней к действительной их форме деформации в момент потери устойчивости, тем точнее получаемый результат. Кроме того, для вычисленной критической нагрузки неизвестна степень точности ее значения. В общем случае энергетический метод дает завышенные значения критических сил.

Динамический метод. В общем случае решение динамическим методом сводится к отыскиванию уравнений движения масс системы и определению частот собственных колебаний этих масс. Равновесие системы будет устойчивым, если колебания ее масс будут затухающими или просто восстанавливаются первоначальное состояние системы. Значение критической нагрузки находят по частотам собственных колебаний. Если эта частота положительна, то равновесие устойчиво; если она равна нулю – система в критическом (безразличном) состоянии, а мнимое значение наименьшей частоты соответствует неустойчивому состоянию системы.

В расчетной практике решение задач устойчивости упругих стержневых систем выполняется, как правило, статическим или энергетическим методами, которыми мы воспользуемся в дальнейшем.

## **5.6. Устойчивость стержней постоянного сечения с жесткими опорами**

Формула Л.Эйлера для определения наименьшей критической сжимающей нагрузки, действующей на упругий стержень постоянного сечения с шарнирно опертыми концами, имеет вид (5.12):

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Для стержней постоянного сечения с различными опорными закрепле-

ниями критическая нагрузка может быть определена по общей формуле:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}, \quad (5.24)$$

где  $l_0$  – приведенная (расчетная) длина сжатого стержня (это понятие впервые введено Ф.С. Ясинским в конце XIX века и лежит в основе практических методов расчета сжатых и сжато-изогнутых элементов конструкций согласно действующих норм);

$\mu$  – коэффициент расчетной длины, определяемый

$$\mu = \frac{l_0}{l}, \quad (5.25)$$

$l$  – геометрическая длина сжатого стержня.

Из равенства (5.24) получаем формулу для определения расчетной длины сжатого стержня:

$$l_0 = \pi \sqrt{\frac{EI}{P_{кр}}}, \quad (5.26)$$

где  $P_{кр}$  – значение критической нагрузки для данного стержня.

В таблице 5.1 приведены формулы для определения критических сил для центрально нагруженных упругих стержней постоянного сечения с различными опорными закреплениями, расчетные длины этих стержней и значения коэффициента расчетной длины  $\mu$ .

Таблица 5.1

Схема стержня					
$P_{кр}$	$\frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{4l^2}$	$\frac{4\pi^2 EI}{l^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$\frac{20.19EI}{l^2}$
$l_0$	$l$	$2l$	$0.5l$	$l$	$0.7l$
$\mu$	1	2	0.5	1	0.7

Все формулы критических нагрузок, приведенные в таблице 5.1, получены статическим методом и позволяют получить точные значения критических сил.

### 5.7. Устойчивость стержней постоянного сечения с упругими опорами

На рис. 5.14а приведена стержневая система, в состав которой входит стойка АВ с обоими шарнирными концами, нагруженная силой  $P$ .

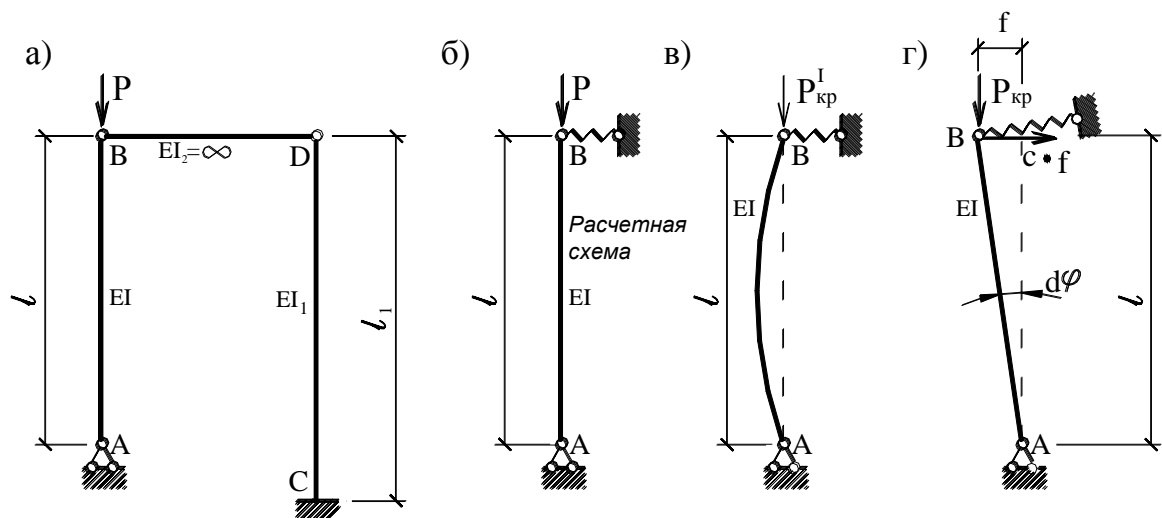


Рис. 5.14

Нижняя опора стойки АВ шарнирно неподвижная, а верхним шарни-

ром  $B$  она соединена с остальной системой. Верхняя опора этой стойки может перемещаться в горизонтальном направлении ввиду податливости системы в целом. Если пренебречь продольными деформациями стержня  $BD$  ввиду их малости в сравнении с деформациями изгиба стержня  $CD$  (условно принято  $EI_2 = \infty$ ), то перемещение верхней опоры  $B$  будет определяться упругим изгибом стержня  $CD$ . Опорные закрепления такого характера принято называть упруго податливыми, и обозначаются они условно в виде пружины (рис. 5.14б), обеспечивающей упругое линейное смещение опоры.

В рассматриваемом случае мы имеем упругую линейно податливую опору и возможная форма потери устойчивости, соответствующая меньшему значению критической нагрузки, зависит от жесткости при изгибе  $EI$  нагруженного стержня  $AB$  и жесткости упругой опоры, роль которой играет стержень  $CD$ . При решении конкретных задач отыскивается наименьшее значение критической нагрузки, которое принимается в качестве расчетного.

При большой жесткости упругой опоры (пружины) и малой жесткости сжимаемого стержня  $AB$ , потеря устойчивости может произойти в форме изгиба этого стержня без горизонтального перемещения его верхней опоры (рис. 5.14 в). В этом случае критическая сила определяется по формуле Л. Эйлера (5.12).

При малой жесткости (большой податливости) упругой опоры и большой жесткости нагруженного стержня  $AB$  он может потерять устойчивость, поворачиваясь на некоторый угол  $d\varphi$ , оставаясь прямолинейным (рис. 5.14г). Рассмотрим эту форму потери устойчивости и для определения критической нагрузки воспользуемся энергетическим методом. Пусть при потере устойчивости стержень  $AB$  повернулся на некоторый угол  $d\varphi$ , как показано на рис. 5.14г и опора  $B$  переместилась по горизонтали на величину  $f$ . Определим работу внутренних и внешних сил, выполненную ими при переходе системы в новое деформированное состояние. Обозначим  $C$  – жесткость упругой опоры, определяемая силой, необходимой для перемещения этой опоры

на единицу. К шарниру  $B$  приложены две силы:  $P_{кр}$  – по вертикали и  $C \cdot f$  – по горизонтали.

Работа внутренних сил

$$U = \frac{1}{2} C \cdot f \cdot f = \frac{1}{2} C \cdot f^2,$$

где  $C \cdot f$  – сила, необходимая для смещения опоры на величину  $f$ .

Работа, выполненная внешней нагрузкой (формула 5.21),  $T = P_{кр} \delta$ .

На основании зависимости (5.20)

$$\delta = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l t g^2 d\varphi dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{f}{l} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{f^2}{l^2} l = \frac{f^2}{2l}.$$

Тогда  $T = P_{кр} \frac{f^2}{2l}$ .

По условию (5.15)  $\frac{Cf^2}{2} = P_{кр} \frac{f^2}{2l}$ , откуда

$$P_{кр} = Cl. \quad (5.27)$$

Поскольку действительная форма потери устойчивости заранее неизвестна, то для стержней с расчетной схемой, изображенной на (рис. 5.14б), критические силы определяют по формулам (5.12) и (5.27), а в качестве расчетного принимают меньшее значение из этих нагрузок.

Для определения критической нагрузки по формуле (5.27) необходимо отыскать жесткость упругой опоры, значение силы  $C$ , при которой перемещение этой опоры будет равно единице. Это перемещение может быть найдено по формуле Мора, а именно:

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_p dx}{EI}. \quad (5.28)$$

Например, в нашем случае эпюры изгибающих моментов от силы  $C$  в заданном состоянии и от  $P=1$  во вспомогательном состоянии показаны соответственно на рис. 5.15а, б.

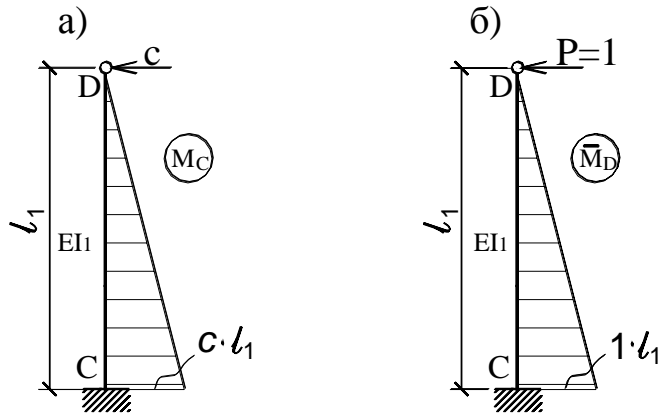


Рис. 5.15

Перемещение шарнира  $D$ , и такое же будет перемещение шарнира  $B$ , ( $EI_2 = \infty$ ) в горизонтальном направлении

$$f_D = \sum \int \frac{\bar{M}_D M_C dx}{EI_1} = \frac{1}{EI_1} \frac{1}{2} Cl_1 l_1 \frac{2}{3} l_1 = \frac{Cl_1^3}{3EI_1}.$$

Из условия  $\frac{Cl_1^3}{3EI_1} = 1$  получаем  $C = \frac{3EI_1}{l_1^3}$  и по формуле (5.27) находим:

$$P_{кр} = Cl = \frac{3EI_1}{l_1^3} l. \quad (5.29)$$

Если в рассмотренной задаче конкретизировать решение и принять, например,  $EI_1 = 2EI$ , а  $l_1 = l$ , то

$$P_{кр} = Cl = \frac{3 \cdot 2EI}{l^3} l = \frac{6EI}{l^2} < \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{9,86EI}{l^2} \quad (\text{по формуле (5.12)}).$$

При принятых значениях  $EI_1$  и  $l_1$  расчетной будет критическая нагруз-

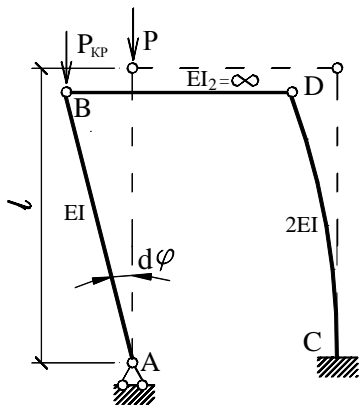


Рис. 5.16

ка, найденная по формуле (5.27), а возможная форма потери устойчивости показана на рис. 5.16. Формулу (5.27) можно представить в ином виде. Если учесть принятое определение жесткости упругой опоры, то можно записать

$$C\delta_{11} = 1, \quad (5.30)$$

где  $\delta_{11}$  – перемещение упруго податливой опоры в горизонтальном направлении, вызванное силой  $P=1$ . Тогда:

$$C = \frac{1}{\delta_{11}} \quad \text{и} \quad P_{кр} = Cl = \frac{l}{\delta_{11}}. \quad (5.31)$$

При определении критической силы по формуле (5.31) достаточно построить эпюру от силы  $P=1$ , приложенной в направлении возможного перемещения упругой опоры и определить перемещение по формуле

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EI}, \text{ что упрощает расчет.}$$

Упругой опорой может быть один стержень, несколько взаимосвязанных одиночных стержней или же часть статически определимой или неопределимой системы, к которой примыкает нагруженный стержень. В последнем случае при определении жесткости упругой опоры эпюра грузового состояния  $M_c$  должна быть построена в заданной статически неопределимой системе. Эпюра вспомогательного состояния  $M_i$  может быть взята в любой статически определимой основной системе метода сил. Если используется формула (5.31), то эпюру изгибающих моментов от силы  $P=1$  необходимо построить в заданной статически неопределимой системе.

На рис. 5.17а приведена стержневая система, в которой нагруженная стойка  $AB$  постоянного сечения имеет одну заземленную опору, а вторая опора линейно податливая, допускающая упругое перемещение в горизонтальном направлении. Расчетная схема нагруженной стойки  $AB$  показана на рис. 5.17б.

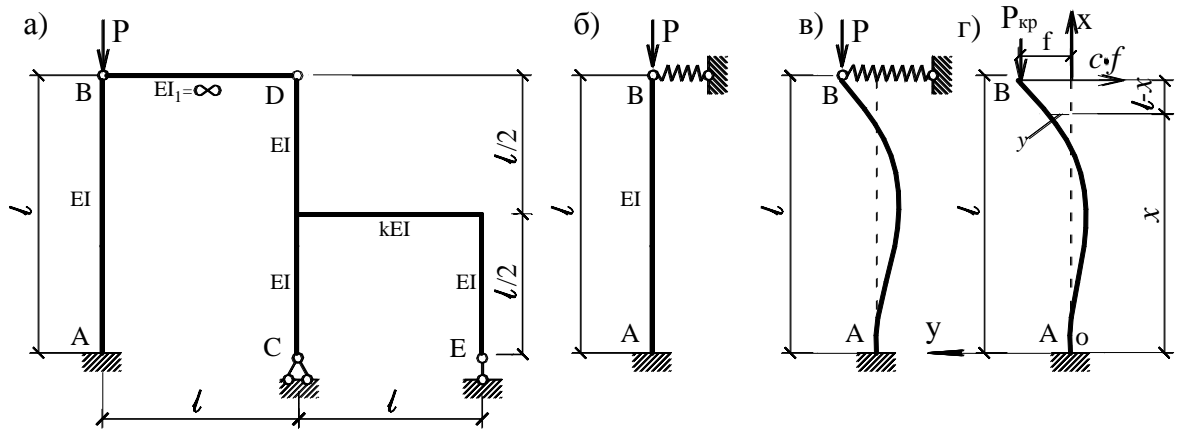


Рис. 5.17

В этом случае стержень  $AB$  не может перейти в новое деформированное состояние (новое положение равновесия), оставаясь прямолинейным, так как защемляющая опора не допускает свободного угла поворота. При линейном перемещении опоры  $B$  стержень будет изгибаться (рис. 5.17в). Рассмотрим деформированное состояние стержня под действием критической нагрузки и определим эту нагрузку статическим методом, пользуясь дифференциальным уравнением равновесия  $-EIy'' = M_x$  (5.4). В деформированном состоянии на стержень действует критическая нагрузка  $P_{кр}$ , стремящаяся увеличивать деформации его изгиба и сила со стороны упругой опоры  $C \cdot f$ , препятствующая его отклонению от начального положения равновесия (рис. 5.17г).

Изгибающий момент в произвольном сечении стержня

$$M_x = -P_{кр}(f - y) + C \cdot f(l - x).$$

Тогда  $EIy'' = P_{кр}(f - y) - C \cdot f(l - x)$ ,

или  $EIy'' + P_{кр}y = P_{кр}f - C \cdot f(l - x)$ .

Разделив слагаемые последнего равенства на  $EI$  и обозначив

$$n = \sqrt{\frac{P_{кр}}{EI}}, \quad (5.32)$$

дифференциальное уравнение принимает вид:

$$y'' + n^2 y = f \left[ n^2 - \frac{C}{EI}(l - x) \right].$$

Решение этого уравнения



$$y = A \sin(nx) + B \cos(nx) + f \left[ 1 - \frac{C}{n^2 EI} (l - x) \right].$$

Для определения  $A$ ,  $B$  и  $f$  используем граничные условия:

$$1) \text{ при } x=0, \quad y=0; \quad 2) \text{ при } x=l, \quad y=f; \quad 3) \text{ при } x=0, \quad y'=0.$$

$$\text{По первому условию} \quad y = A \cdot 0 + B \cdot 1 + f \cdot \left( 1 - \frac{Cl}{n^2 EI} \right) = 0.$$

$$\text{По второму условию} \quad y = A \cdot \sin(nl) + B \cdot \cos(nl) + f = f.$$

$$\text{По третьему условию} \quad y' = A \cdot n \cos(nx) - B \cdot n \sin(nx) + f \frac{C}{n^2 EI}.$$

$$\text{При } x=0 \quad y' = A \cdot n \cdot 1 - B \cdot n \cdot 0 + f \frac{C}{n^2 EI} = 0.$$

Система однородных линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} A \cdot 0 + B \cdot 1 + f \cdot \left( 1 - \frac{Cl}{n^2 EI} \right) = 0; \\ A \cdot \sin(nl) + B \cdot \cos(nl) + C \cdot 0 = 0; \\ A \cdot n + B \cdot 0 + f \cdot \frac{C}{n^2 EI} = 0. \end{cases}$$

По условию (5.3) получаем характеристическое уравнение:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \left( 1 - \frac{Cl}{n^2 EI} \right) \\ \sin(nl) & \cos(nl) & 0 \\ n & 0 & \frac{C}{n^2 EI} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, имеем:

$$-n \cdot \cos(nl) \left( 1 - \frac{Cl}{n^2 EI} \right) - \frac{C}{n^2 EI} \sin(nl) = 0.$$

Разделив слагаемые последнего равенства на  $\cos(nl)$ , раскрыв скобки и преобразовав, получаем уравнение устойчивости в следующем виде:

$$\operatorname{tg}(nl) = nl - \frac{(nl)^3 EI}{Cl^3}. \quad (5.33)$$

Уравнение (5.33) решается путем подбора такого значения параметра

$nl$ , при котором выполняется равенство. Если такое значение  $nl$  найдено, то по условию (5.32)

$$P_{кр} = n^2 EI. \quad (5.34)$$

Выявим границы, в пределах которых могут находиться значения параметра  $nl$  и  $P_{кр}$ .

$$\text{Если } C = 0, \quad tg(nl) = -\infty, \quad nl = -\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \quad (\text{случай, когда}$$

нижний конец стойки защемлен, а верхний свободный).

$$\text{Если } C = \infty, \quad tg(nl) = nl, \quad nl = 4,493 \quad \text{и} \quad P_{кр} = \frac{20,19EI}{l^2}, \quad \text{что соответствует}$$

условию, когда нижний конец стойки защемлен, а верхний шарнирно оперт. Оба эти граничные значения критических сил соответствуют формулам Л. Эйлера (табл. 5.1). В рассматриваемом примере предельные значения параметра  $nl$  и критической нагрузки определяются условиями:

$$\begin{cases} 1,57 \leq nl \leq 4,493; \\ \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \leq P_{кр} \leq \frac{20,19EI}{l^2}. \end{cases} \quad 5.34a$$

Проследим ход решения такого типа задач на примере рассмотренной выше системы (5.17а). Роль упругой опоры играет рама  $CDE$ . Расчетная схема нагруженной стойки приведена на рис. 5.17б. Построив эпюру изгибающих моментов при действии силы  $P=1$  (рис. 5.18), горизонтальное перемещение узла  $C$  (такое же перемещение будет и опоры  $B$ ) найдем по формуле

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EI} \quad \text{способом перемножения эпюр. Пользуясь зависимостью}$$

$$(5.30), \quad \text{определим характеристику упругой опоры } C = \frac{1}{\delta_{11}}.$$

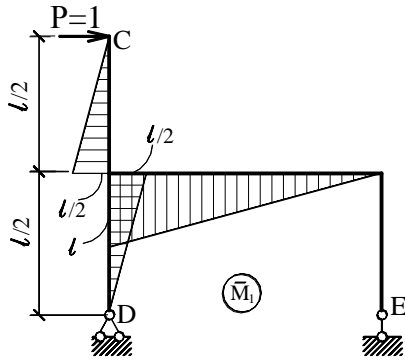


Рис. 5.18

Подставив выражение характеристики упругой опоры (C) в уравнение (5.33), отыскиваем (пользуясь 5.34а) значение  $nl$ , при котором удовлетворяется уравнение (5.33), а затем по формуле (5.34) находим значение критической силы.

На рис. 5.19а изображен центрально нагруженный стержень с верхним свободным и нижним упруго защемленными концами. Предполагается, что в упруго-защемляющей опоре средний узел B остается линейно неподвижным, в то время как узлы A и C могут перемещаться в вертикальном направлении, ввиду упругой податливости опорных частей этих узлов.

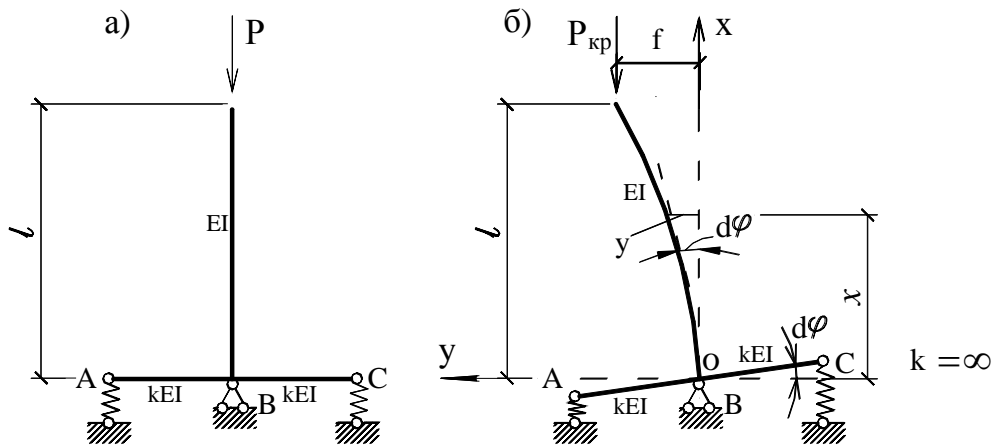


Рис. 5.19

Рассмотрим этот стержень в деформированном состоянии под действием критической нагрузки. Решение задачи выполним статическим методом. Обозначим через C жесткость упруго защемленной опоры B, определяемую моментом, необходимым для поворота этой опоры на угол, равный единице. Дифференциальное уравнение равновесия примем в виде:

$$-EIy'' = M_x.$$

Изгибающий момент в произвольном сечении

$$M_x = -P_{кр}(f - y) \text{ и } EIy'' + P_{кр}y = P_{кр}f.$$

Разделив все слагаемые последнего равенства на EI и обозначив

$$n = \sqrt{\frac{P_{кр}}{EI}}, \text{ получаем } y'' + n^2 y = n^2 f.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$y = A \cdot \sin(nx) + B \cdot \cos(nx) + f. \quad (5.35)$$

Для определения постоянных в уравнении (5.35) воспользуемся граничными условиями:

$$1) \text{ при } x=0, \quad y=0; \quad 2) \text{ при } x=l, \quad y=f; \quad 3) \text{ при } x=0, \quad y' = \frac{M_3}{C},$$

где  $M_3$  – момент в защемляющей опоре, равный  $P_{кр} \cdot f$ .

$$\text{По первому условию} \quad y = A \cdot 0 + B \cdot 1 + f \cdot 1 = 0.$$

$$\text{По второму условию} \quad y = A \cdot \sin(nl) + B \cdot \cos(nl) + f = f.$$

$$\text{По третьему условию} \quad y' = A \cdot n \cos(nx) - B \cdot n \sin(nx).$$

$$\text{При } x=0, \quad y' = A \cdot n \cdot 1 - B \cdot 0 = \frac{P_{кр} f}{C},$$

$$\text{или} \quad y' = A \cdot n - B \cdot 0 - f \cdot \frac{n^2 EI}{C} = 0, \quad \left( n = \sqrt{\frac{P_{кр}}{EI}} \right).$$

Линейные уравнения

$$\begin{cases} A \cdot 0 + B \cdot 1 + f \cdot 1 = 0; \\ A \cdot \sin(nl) + B \cdot \cos(nl) + f \cdot 0 = 0; \\ A \cdot n - B \cdot 0 - f \cdot \frac{n^2 EI}{C} = 0. \end{cases}$$

По условию (5.3) получаем характеристическое уравнение в виде:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sin(nl) & \cos(nl) & 0 \\ n & 0 & -\frac{n^2 EI}{C} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{откуда} \quad -n \cos(nl) + \sin(nl) \frac{n^2 EI}{C} = 0,$$

или 
$$\frac{nEI}{C} \operatorname{tg}(nl) - 1 = 0 \text{ и } \operatorname{tg}(nl) = \frac{C}{nEI}.$$

Умножая числитель и знаменатель правой части последнего равенства на  $l$ , имеем:

$$\operatorname{tg}(nl) = \frac{Cl}{(nl)EI}. \quad (5.36)$$

Как и в предыдущем случае, уравнение (5.36) решается подбором такого значения  $nl$ , при котором удовлетворяется равенство, а затем по формуле (5.34) находят значение критической силы.

Установим предельные значения  $nl$  и  $P_{кр}$  для решаемой задачи.

1) При  $C = 0$ ,  $\operatorname{tg}(nl) = 0$  и значения  $(nl)$  могут быть:

$$nl = 0; \quad nl = \pi; \quad nl = 2\pi \quad \text{и т.д.}$$

В рассматриваемом случае все значения  $nl > 0$  не могут быть реализованы, так как значение  $C = 0$  соответствует наличию шарнира в упруго защемленной опоре и заданная система становится геометрически изменяемой. Поэтому, приняв  $nl = 0$ , получаем  $n = \frac{0}{l}$  и  $P_{кр} = n^2 EI = 0$ .

2) При  $C = \infty$ ,  $\operatorname{tg}(nl) = \infty$ . Этому условию соответствует наименьший корень равный  $nl = \frac{\pi}{2}$  и  $P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$  и наличие защемления в точке  $\hat{A}$ .

Итак, предельные значения  $nl$  и  $P_{кр}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq nl \leq 1,57; \\ 0 \leq P_{кр} \leq \frac{\pi^2 EI}{4l^2}. \end{array} \right.$$

На рис. 5.20а приведен пример центрально нагруженной стойки, верхняя шарнирная опора которой не может смещаться по горизонтали, а нижняя опора – упруго защемленная. Решение этой задачи статическим методом с использованием зависимости  $-EIy'' = M_x$  аналогично предыдущему (рис 5.20,б):

$$M_x = P_{кр} y + R(l - x).$$

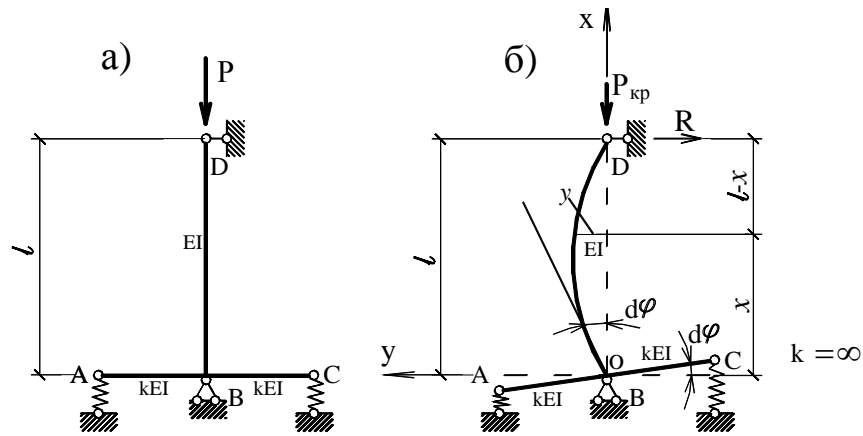


Рис. 5.20.

Тогда  $EI y'' = -P_{кр} y - R(l - x),$

или  $EI y'' + P_{кр} y = -R(l - x).$

Разделив слагаемые последнего равенства на  $EI$  и обозначив  $n = \sqrt{\frac{P_{кр}}{EI}},$

имеем:

$$y'' + n^2 y = -\frac{R}{EI}(l - x).$$

Решение этого неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = A \cdot \sin(nx) + B \cdot \cos(nx) - \frac{R}{n^2 EI}(l - x).$$

При граничных условиях:  $x = 0, y = 0; x = l, y = 0; x = 0, y' = \frac{M}{C}$

получаем три линейных уравнения, а именно:

по первому условию  $y = A \cdot 0 + B \cdot 1 - R \frac{l}{n^2 EI} = 0;$

по второму условию  $y = A \cdot \sin(nl) + B \cdot \cos(nl) - 0 = 0;$

по третьему условию  $y' = A \cdot n \cos(nx) - B \cdot n \sin(nx) + \frac{R}{n^2 EI}.$

При  $x = 0$   $y' = A \cdot n \cdot 1 - B \cdot n \cdot 0 + \frac{R}{n^2 EI} = \frac{M}{C}.$

При принятых исходных данных  $M = -R \cdot l$  и последнее равенство можно записать:

$$A \cdot n - B \cdot 0 + R \left( \frac{l}{n^2 EI} + \frac{l}{C} \right) = 0.$$

По условию (5.3) уравнение устойчивости будет:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\frac{l}{n^2 EI} \\ \sin(nl) & \cos(nl) & 0 \\ n & 0 & \left( \frac{1}{n^2 EI} + \frac{l}{C} \right) \end{vmatrix} = 0,$$

откуда 
$$n \cdot \cos(nl) \left( \frac{l}{n^2 EI} \right) - \sin(nl) \left( \frac{1}{n^2 EI} + \frac{l}{C} \right) = 0.$$

Разделив на  $\cos(nl)$ , имеем:

$$n \frac{l}{n^2 EI} - \operatorname{tg}(nl) \left( \frac{1}{n^2 EI} + \frac{l}{C} \right) = 0.$$

Тогда 
$$\operatorname{tg}(nl) = \frac{l}{nEI} \cdot \frac{1}{\left( \frac{1}{n^2 EI} + \frac{l}{C} \right)} = \frac{nl}{n^2 EI \left( \frac{1}{n^2 EI} + \frac{l}{C} \right)},$$

или 
$$\operatorname{tg}(nl) = \frac{nl}{1 + (nl)^2 \frac{EI}{Cl}}. \quad (5.37)$$

Уравнение (5.37) решается путем подбора. Предельные значения  $(nl)$  и  $P_{кр}$  находим из условий:

1)  $C = 0$ ,  $\operatorname{tg}(nl) = 0$ ; наименьший отличный от нуля корень  $(nl) = \pi$  и  $P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$  (шарнирно опертая стойка).

2)  $C = \infty$ ,  $\operatorname{tg}(nl) = nl$ ;  $nl = 4,493$  (путем подбора) и  $P_{кр} = \frac{20,19EI}{l^2}$

(стойка с верхним шарнирно опертым и нижним защемленным концами).

Тогда граничные значения  $(nl)$  и  $P_{кр}$  будут:

$$\begin{cases} 3,14 \leq nl \leq 4,493; \\ \frac{\pi^2 EI}{l^2} \leq P_{кр} \leq \frac{20,19EI}{l^2}. \end{cases}$$

## 5.8. Устойчивость плоских рам

### Общие положения

Рассмотренные выше (5.5) методы решения задач устойчивости являются общими и используются для определения критических сил как в отдельных стержнях, так и в любых стержневых системах, в том числе в рамах. Основными являются статический и энергетический методы. Ниже рассматривается применение статического метода в расчетах на устойчивость рам.

С целью упрощения расчета рам на устойчивость принимаются следующие допущения:

- рассматривается только узловая нагрузка, не вызывающая поперечного изгиба стержней рамы;
- предполагается, что критическое состояние рамы достигается при одновременном и пропорциональном возрастании всех узловых нагрузок;
- стержни рамы принимаются несжимаемыми и нерастягиваемыми (пренебрегают изменениями длин стержней, вызванными продольными деформациями в этих стержнях);
- пренебрегают сближением концов стержня при его изгибе;
- не учитываются изменения продольных и поперечных сил в стержнях при их изгибе в момент потери устойчивости.

Первое допущение: узловая нагрузка принимается на том основании, что рассматривается потеря устойчивости первого рода, а остальные – ввиду малости деформаций в момент потери устойчивости при бесконечно малых перемещениях заданной системы.

Такой подход в исследовании устойчивости рам применяется при действии на них любых (в том числе внеузловых) нагрузок. Для определения узловых нагрузок выполняется расчет системы на прочность. Найденные значения продольных сил в элементах системы играют роль узловых нагрузок в расчете ее на устойчивость.

На рис. 5.21а приведена рама, в которой сосредоточенная нагрузка



приложена только в одном узле. Критическую нагрузку можно было бы нахо-

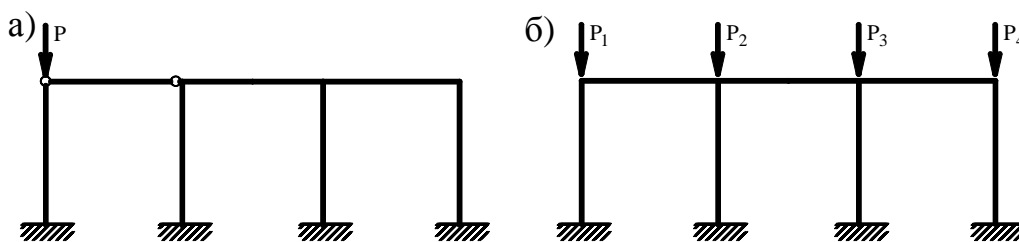


Рис. 5.21

дять для нагруженной стойки с упругой опорой. Но этот прием в данном случае неэффективен. Критическая сила зависит от линейного смещения этой упругой опоры. Определение характеристики упругой опоры окажется более громоздким, чем исследование устойчивости системы в целом. Кроме того, в реальных конструкциях нагрузки будут приложены во всех узлах рамы и условия задачи требуют исследования устойчивости системы с нагруженными (сжимаемыми) элементами.

Расчет на устойчивость рам чаще всего выполняется методом сил или методом перемещений. Выбор рационального метода зависит от конкретной системы и диктуется количеством основных неизвестных. В расчетной практике чаще используется метод перемещений.

Метод перемещений. Ход расчета на устойчивость методом перемещений тот же, что и при расчете на прочность.

Устанавливается степень кинематической неопределимости системы и принимается основная система путем введения дополнительных связей, препятствующих возможным угловым и линейным смещениям узлов заданной системы. Содержание этого этапа расчета остается обычным.

Формируется система канонических уравнений, построение которых и их физический смысл остаются обычными. Отличие будет в том, что основные неизвестные  $Z_i$  – малые перемещения, возникающие в момент потери устойчивости. Так как на раму действует узловая центрально приложенная нагрузка, то в нагруженных элементах возникают только продольные усилия и реакции в дополнительно введенных связях от внешней нагрузки ( $R_{ip}$ ) до

момента потери устойчивости равны нулю. Канонические уравнения метода перемещений превращаются в однородные линейные уравнения вида:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n = 0; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n = 0. \end{cases} \quad (5.38)$$

Коэффициенты при неизвестных уравнений (5.38) выражают реакции в дополнительно введенных связях, возникающие в основной системе при поочередном перемещении узлов системы на единицу по направлениям возможных смещений этих связей. В расчетах на прочность коэффициенты  $r_{ik}$  при неизвестных  $Z_i$  в обычных уравнениях метода перемещений не зависят от внешних нагрузок. В системе же уравнений (5.38) эти коэффициенты определяются с учетом продольных сил в стержнях, зависящих от внешних узловых нагрузок. В этом заключается основная особенность использования классических методов (например, метода сил и метода перемещений) в расчетах на устойчивость. Для коэффициентов системы уравнений (5.38) остается справедливой теорема о взаимности реакций  $r_{ik} = r_{ki}$ .

Реакции в дополнительно введенных связях основной системы с учетом продольных сил в сжатых стержнях от единичных угловых и линейных смещений могут быть получены различными способами. Рассмотрим стержень постоянного сечения с одним защемленным и вторым шарнирным концами в деформированном состоянии и определим опорный момент в защемлении и поперечные силы на концах стержня при повороте защемляющей опоры на угол равный единице. Для решения задачи воспользуемся статическим методом и дифференциальным уравнением изгиба (5.4)

$$-EI y'' = M_x.$$

В силу принятых допущений из условия равновесия системы вертикальная реакция  $V_A$  может быть принята равной критической силе ( $V_A = P_{кр}$ ), а горизонтальные реакции на концах стержня – поперечным силам

$$(H_A = H_B = Q).$$

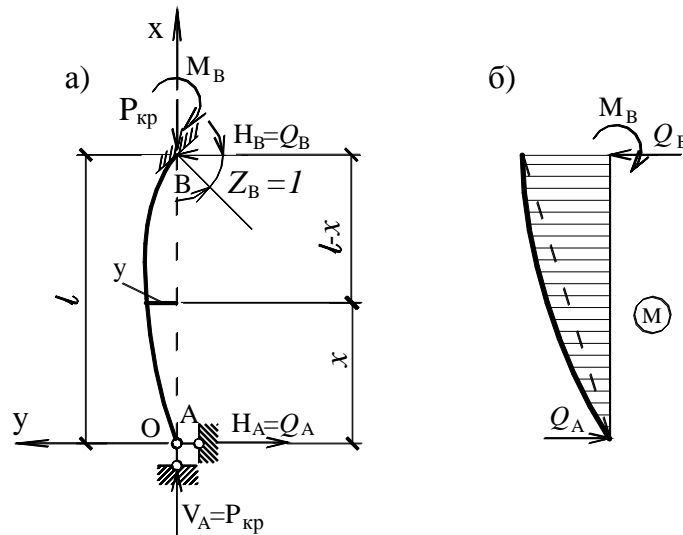


Рис. 5.22

Изгибающий момент в произвольном сечении  $x$  равен:

$$M_x = P_{kp} y + Q \cdot x,$$

или по условию (5.4)

$$EI y'' + P_{kp} y = -Q \cdot x. \quad (5.39)$$

Разделив слагаемые уравнения (5.39) на  $EI$ , и, обозначив

$$\nu = l \sqrt{\frac{P_{kp}}{EI}}, \quad \left( P_{kp} = \nu^2 \frac{EI}{l^2} \right), \quad (5.40)$$

имеем:

$$y'' + \frac{\nu^2}{l^2} y = -\frac{Q}{EI} x. \quad (5.41)$$

Решение уравнения (5.41) имеет вид:

$$y = A \sin\left(\frac{\nu x}{l}\right) + B \cos\left(\frac{\nu x}{l}\right) - \frac{Qx}{\nu^2 EI} l^2 \quad (5.42)$$

Для определения постоянных  $A$  и  $B$  воспользуемся граничными условиями:

- 1) при  $x = 0$ ,  $y = 0$ ;
- 2) при  $x = l$ ,  $y = 0$ .

По первому условию  $B = 0$ , а по второму условию  $y = A \sin \nu - \frac{Ql^3}{\nu^2 EI} = 0$ , от-

куда  $A = \frac{Q l^3}{\nu^2 EI} \cdot \frac{1}{\sin \nu}$  и уравнение изогнутой оси принимает вид:

$$y = \frac{Q l^3}{\nu^2 EI} \cdot \left[ \frac{\sin\left(\frac{\nu x}{l}\right)}{\sin \nu} - \frac{x}{l} \right]. \quad (5.43)$$

Воспользуемся условием: при  $x = l$ ,  $y' = z_B = -1$  (рис. 5.22).

$$y' = \frac{Q l^3}{\nu^2 EI} \left[ \frac{\frac{\nu}{l} \cos\left(\frac{\nu x}{l}\right)}{\sin \nu} - \frac{1}{l} \right] = \frac{Q l^3}{\nu^2 EI} \frac{\nu}{l} \left[ \frac{\cos\left(\frac{\nu x}{l}\right)}{\sin \nu} - \frac{1}{\nu} \right] = \frac{Q l^2}{\nu EI} \left[ \frac{\cos\left(\frac{\nu x}{l}\right)}{\sin \nu} - \frac{1}{\nu} \right].$$

$$y' = \frac{Q l^2}{\nu^2 EI} \frac{\nu}{l} \left[ \frac{\cos\left(\frac{\nu x}{l}\right)}{\sin \nu} - \frac{1}{\nu} \right].$$

При  $x = l$ :  $y' = \frac{Q l^2}{\nu EI} \left[ \frac{\cos \nu}{\sin \nu} - \frac{1}{\nu} \right] = -1,$

или  $y' = \frac{Q l^2}{\nu EI} \left[ \frac{1}{\operatorname{tg} \nu} - \frac{1}{\nu} \right] = -1 .$

Это равенство можно записать:

$$\frac{Q l^2}{\nu EI} \left[ \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\operatorname{tg} \nu} \right] = 1 ,$$

или  $\frac{Q l^2}{\nu EI} \left[ \frac{\operatorname{tg} \nu - \nu}{\nu \operatorname{tg} \nu} \right] = 1 .$

Из последнего равенства получаем значение поперечной силы:

$$Q = \frac{\nu EI}{l^2} \left[ \frac{\nu \cdot \operatorname{tg} \nu}{\operatorname{tg} \nu - \nu} \right] = \frac{EI}{l^2} \left[ \frac{\nu^2 \operatorname{tg} \nu}{\operatorname{tg} \nu - \nu} \right]. \quad (5.44)$$

В расчетах на прочность получено

$$Q = \frac{3i}{l}, \quad \text{где } i = \frac{EI}{l}.$$

Тогда выражение (5.44) можно записать

$$Q = \frac{3i}{l} \varphi_1(\nu), \quad (5.45)$$

где

$$\varphi_1(\nu) = \frac{\nu^2 \operatorname{tg} \nu}{3(\operatorname{tg} \nu - \nu)}. \quad (5.46)$$

При  $x = l$  изгибающий момент в защемляющей опоре (рис. 5.22) будет

$$M_B = Ql = 3i\varphi_1(\nu) \quad (5.47)$$

Первые сомножители в формулах (5.45) и (5.47) выражают соответственно поперечную силу  $\left(\frac{3i}{l}\right)$  и изгибающий момент  $(3i)$  в защемляющей связи при повороте ее на угол равный единице без учета продольного изгиба сжимаемого стержня. Они известны из расчета рам методом перемещений на прочность. Влияние продольной силы на величину поперечной силы ( $Q$ ) и изгибающего момента ( $M$ ) учитывается функцией  $\varphi_1(\nu)$  (5.46). Общий вид эпюры изгибающего момента и поперечные силы в рассмотренном случае с учетом продольного изгиба стержня показаны на рис. 5.22б.

Выполняя аналогичные операции, получим выражения поправочных множителей для учета влияния продольного изгиба в стержнях с другими опорными закреплениями при различных единичных смещениях узлов.

Единичные эпюры изгибающих моментов для ненагруженных продольными силами стержней строятся с использованием таблицы метода перемещений, применяемой в расчетах на прочность (табл. 4.1). Эпюры изгибающих моментов в нагруженных стержнях имеют криволинейное очертание. Влияние сжимающих сил учитывается (как показано выше) введением поправочных множителей.

В таблице 5.2 показаны эпюры изгибающих моментов, значения этих моментов и поперечных сил на концах сжатых стержней с различными опорными закреплениями при единичных угловых и линейных перемещениях опор этих стержней. Там же приведены выражения поправочных множителей, учитывающих продольный изгиб сжатого стержня.

Числовые значения функций типа  $\varphi_i(\nu)$  и  $\eta_i(\nu)$  приведены в таблице

5.3, которые используются при решении конкретных задач. Система однородных уравнений (5.38) допускает следующие решения. Если принять все перемещения  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  одновременно равными нулю, то уравнения (5.38) будут тождественно удовлетворяться, но это условие соответствует недеформированному состоянию стержневой системы, отсутствует изгиб ее стержней. Поскольку при решении задач устойчивости рассматривается деформированное состояние системы, отличное от начального ее состояния, то все  $Z_i$  не могут быть одновременно равными нулю и уравнение (5.38) будет удовлетворяться при условии, когда определитель из коэффициентов при неизвестных равен нулю, т.е.:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.48)$$

Раскрывая определитель (5.48), получаем уравнение устойчивости метода перемещений в развернутом виде (характеристическое уравнение). По наименьшему значению положительного корня характеристического уравнения, пользуясь условием (5.40), находим критическую нагрузку. В общем случае после раскрытия определителя (5.48) получаем одно уравнение с несколькими неизвестными  $\nu_i$  для загруженных стержней. Решаются такие уравнения путем пробных попыток. С целью упрощения расчета целесообразно все  $\nu_i$ , фигурирующие в расчете, выразить через один параметр  $\nu$  и упростить исходное уравнение. Прежде чем задаваться каким-либо конкретным значением  $\nu$  при решении уравнения устойчивости, полезно установить нижнюю и верхнюю пределы (условные) этого параметра. Выполнение этих процедур будет показано ниже на конкретном примере.

Таблица 5.2.

Схема стержня	Изгибающие моменты и поперечные силы	Значения опорных моментов и поперечных сил	Поправочные множители
		$Q_A = Q_B = \frac{3i}{l} \varphi_1(\nu)$ $M_A = 3i \varphi_1(\nu)$ <p>Здесь и ниже:</p> $i = \frac{EI}{l}; \nu = l \sqrt{\frac{P_{KP}}{EI}}$	$\varphi_1(\nu) = \frac{\nu^2 \operatorname{tg} \nu}{3(\operatorname{tg} \nu - \nu)}$
		$Q_A = Q_B = \frac{6i}{l} \varphi_2(\nu)$ $M_A = 4i \varphi_2(\nu)$ $M_B = 2i \varphi_3(\nu)$	$\varphi_2(\nu) = \frac{\nu (\operatorname{tg} \nu - \nu)}{8 \operatorname{tg} \nu (\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2})}$
		$Q_A = Q_B = \frac{3i}{l^2} \eta_1(\nu)$ $M_A = \frac{3i}{l} \varphi_1(\nu)$	$\varphi_3(\nu) = \frac{(\nu - \sin \nu)}{4 \sin \nu (\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2})}$ $\varphi_4(\nu) = \varphi_1(\frac{\nu}{2})$
		$Q_A = Q_B = \frac{12i}{l^2} \eta_2(\nu)$ $M_A = \frac{6i}{l} \varphi_4(\nu)$ $M_B = \frac{6i}{l} \varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu) = \frac{\nu^3}{3(\operatorname{tg} \nu - \nu)}$
		$Q_A = \frac{i}{l^2} \nu^2$ $Q_B = \frac{i}{l^2} \nu^2$	$\eta_2(\nu) = \eta_1(\frac{\nu}{2})$

## 5.9. Пример расчета рамы на устойчивость

Выполним расчет на устойчивость той же рамы, которая ранее (п. 4.6) рассчитана методом перемещений. Продольные силы в стойках рамы (рис. 4.23) будут играть роль узловых нагрузок (рис. 5.23). Для удобства расчета выразим все внешние нагрузки в узлах рамы через одну нагрузку  $P_3$  и расчетную схему на устойчивость примем, как показано на рис. 5.24.

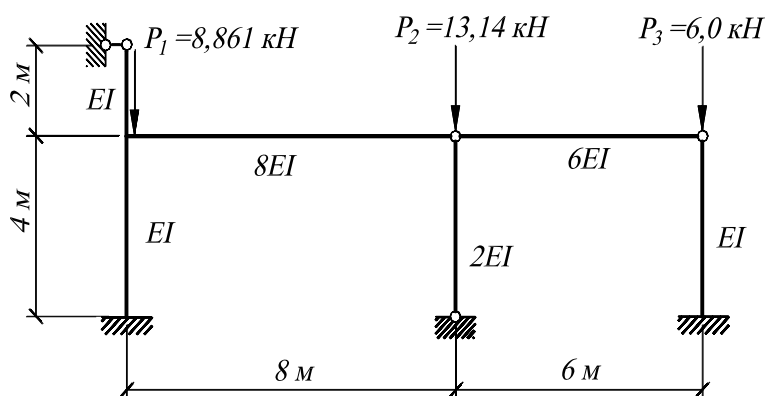


Рис. 5.23

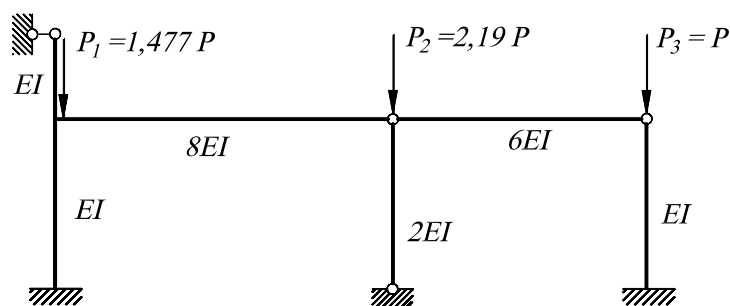


Рис. 5.24

В расчете этой рамы методом перемещений (4.6) показано, что степень ее кинематической неопределимости  $n = 2$ . Расчет на устойчивость выполним методом перемещений, как более рациональным по сравнению с методом сил ( $L = 3$ ). Основную систему формируем введением дополнительных связей, препятствующих угловому и линейному смещению узлов рамы (рис. 5.25). Там же цифрами 1, 2, ..., 6 обозначены порядковые номера стержней.



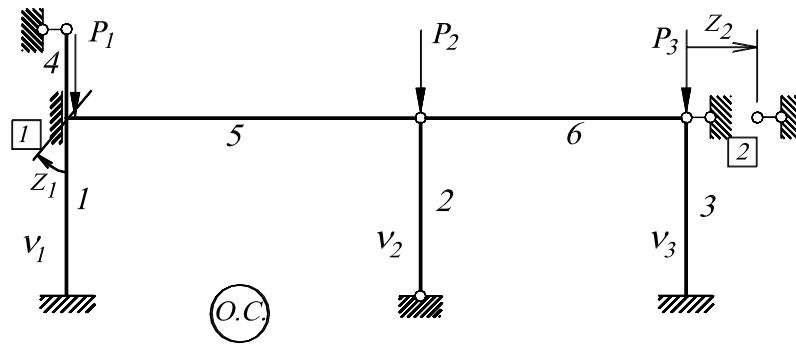


Рис. 5.25

Так как на раму действует узловая нагрузка (сосредоточенные силы), то система канонических уравнений будет:

$$\begin{cases} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 = 0; \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 = 0. \end{cases} \quad (5.49)$$

По условию (5.48) имеем

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (5.50)$$

или, раскрывая определитель (5.50), получаем

$$r_{11} \cdot r_{22} - r_{12}^2 = 0. \quad (5.51)$$

Коэффициенты  $r_{ii}$  и  $r_{ik}$  найдем, пользуясь таблицей 5.2.

Погонные жесткости стержней определим по условию  $i_n = \frac{EI_n}{l_n}$ .

Приняв  $EI = 4$ , имеем:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{EI_1}{l_1} = \frac{4}{4} = 1; & i_2 &= \frac{EI_2}{l_2} = \frac{2 \cdot 4}{4} = 2; & i_3 &= \frac{EI_3}{l_3} = \frac{4}{4} = 1; \\ i_4 &= \frac{EI_4}{l_4} = \frac{4}{2} = 2; & i_5 &= \frac{EI_5}{l_5} = \frac{8 \cdot 4}{8} = 4; & i_6 &= \frac{EI_6}{l_6} = \frac{6 \cdot 4}{6} = 4. \end{aligned}$$

Находим соотношения между параметрами  $v_1, v_2, v_3$ :

$$v_1 = l_1 \sqrt{\frac{P_1}{EI_1}} = 4 \sqrt{\frac{1,477P}{EI}} = 4 \cdot 1,215 \sqrt{\frac{P}{EI}} = 4,861 \sqrt{\frac{P}{EI}};$$

$$v_2 = l_2 \sqrt{\frac{P_2}{EI_2}} = 4 \sqrt{\frac{2,19P}{2EI}} = 4 \cdot 1,046 \sqrt{\frac{P}{EI}} = 4,186 \sqrt{\frac{P}{EI}};$$

$$v_3 = l_3 \sqrt{\frac{P_3}{EI}} = 4 \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{4,186 \sqrt{\frac{P}{EI}}}{4,861 \sqrt{\frac{P}{EI}}} = 0,8611, \rightarrow v_2 = 0,8611 v_1;$$

$$\frac{v_3}{v_1} = \frac{4 \sqrt{\frac{P}{EI}}}{4,861 \sqrt{\frac{P}{EI}}} = 0,8229, \rightarrow v_3 = 0,8229 v_1.$$

Эпюра изгибающих моментов от поворота первой дополнительно введенной связи на угол  $z_1 = 1$  приведена на рис. 5.26.

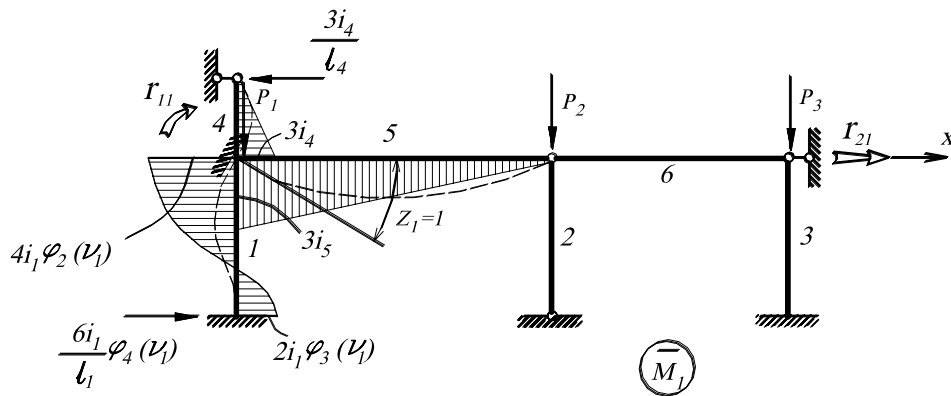


Рис. 5.26

В ненагруженных узловыми нагрузками стержнях 4 и 5 возникают изгибающие моменты только от их изгиба при повороте первой добавленной связи. Эпюры изгибающих моментов в этих стержнях строятся с использованием таблицы готовых решений метода перемещений (табл. 4.1). В стержне 1 изгибающие моменты возникают от поворота первой добавленной связи и от действия продольной силы  $P_1$ . Влияние продольной силы учитывается функциями  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  параметра  $v_1$ . Эпюры изгибающих моментов для этого стерж-

ня имеет криволинейное очертание. Строится она так же с использованием таблицы готовых решений (табл. 5.2).

Горизонтальное смещение второй дополнительно введенной связи на единицу ( $z_2 = 1$ ) вызовет изгиб стержней 1, 3 и 4. Эпюра изгибающих моментов приведена на рис 5.27. В стержне 4 эпюра изгибающих моментов имеет прямолинейное очертание, т.к. он не загружен нагрузкой вдоль его оси. В стержнях 1, 3, нагруженных силами  $P_1$  и  $P_3$ , эпюры изгибающих моментов имеют криволинейные очертания. Влияния продольных сил  $P_1$  и  $P_3$  учитываются поправочными множителями  $\varphi_i(v_i)$  и  $\eta_i(v_i)$ .

Вторая стойка повернется на некоторый угол, оставаясь прямолинейной. Под действием сжимающей силы  $P_2$  в ее опорах возникают горизонтальные реакции, равные  $\frac{i_2 v_2^2}{l_2^2}$  (см. табл. 5.2).

тальные реакции, равные  $\frac{i_2 v_2^2}{l_2^2}$  (см. табл. 5.2).

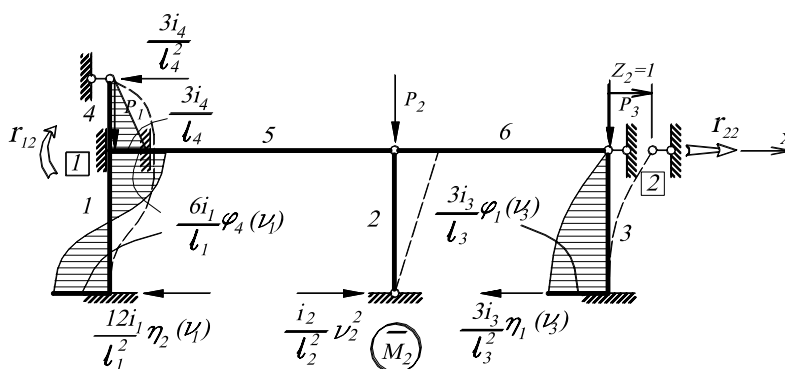
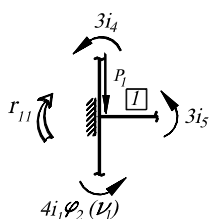


Рис. 5.27

Реакции в дополнительно введенных связях 1 и 2 определим, пользуясь эпюрами  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$ .

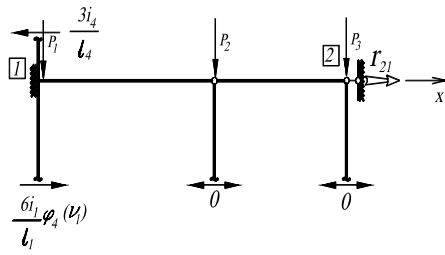
По эпюре  $\bar{M}_1$ :



$$\sum M_1 = -3i_4 - 3i_5 - 4i_1\varphi_2(v_1) + r_{11} = 0, \text{ откуда}$$

$$r_{11} = 3i_4 + 3i_5 + 4i_1\varphi_2(v_1) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \cdot \varphi_2(v_1) = 18 + 4 \cdot \varphi_2(v_1).$$

Коэффициент  $r_{21}$  (реакцию в связи 2) определим из условия равновесия отсеченной части рамы (рис. 5.28)

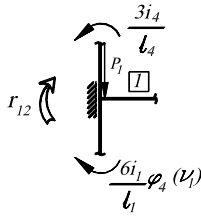


$$\sum X = 0; \quad r_{21} - \frac{3i_4}{l_4} + \frac{6i_1}{l_1} \varphi_4(v_1) = 0,$$

Рис. 5.28.

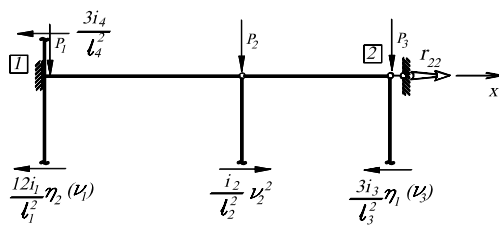
откуда 
$$r_{21} = \frac{3i_4}{l_4} - \frac{6i_1}{l_1} \varphi_4(v_1) = \frac{3 \cdot 2}{2} - \frac{6 \cdot 1}{4} \varphi_4(v_1) = 3 - 1,5\varphi_4(v_1).$$

По эпюре  $\bar{M}_2$ :



$$\sum M_1 = 0; \quad -\frac{3i_4}{l_4} + \frac{6i_1}{l_1} \varphi_4(v_1) + r_{12} = 0, \text{ откуда}$$

$$r_{12} = \frac{3i_4}{l_4} - \frac{6i_1}{l_1} \varphi_4(v_1) = \frac{3 \cdot 2}{2} - \frac{6 \cdot 1}{4} \varphi_4(v_1) = 3 - 1,5\varphi_4(v_1).$$



$$\sum X = 0; \quad r_{22} - \frac{3i_4}{l_4} + \frac{12i_1}{l_1^2} \eta_2(v_1) + \frac{i_2}{l_2^2} v_2^2 - \frac{3i_3}{l_3^2} \eta_1(v_3) = 0,$$

Рис. 5.29

откуда 
$$r_{22} = \frac{3i_4}{l_4} + \frac{12i_1}{l_1^2} \eta_2(v_1) - \frac{i_2}{l_2^2} v_2^2 + \frac{3i_3}{l_3^2} \eta_1(v_3) = \frac{3 \cdot 2}{2^2} + \frac{12 \cdot 1}{4^2} \eta_2(v_1) - \frac{2}{4^2} (0,8611v_1)^2 + \frac{3 \cdot 1}{4^2} \eta_1(0,8229v_1).$$

Или 
$$r_{22} = 1,5 + 0,75\eta_2(v_1) - 0,125(0,8611v_1)^2 + 0,1875\eta_1(0,8229v_1).$$

Подставив значения коэффициентов  $r_{ii}$  и  $r_{ik}$  в уравнение (5.51), имеем:

$$(18 + 4\varphi_2(v_1)) \cdot (1,5 + 0,75\eta_2(v_1) - 0,125(0,8611v_1)^2 + 0,1875\eta_1(0,8229v_1)) - (3 - 1,5\varphi_4(v_1))^2 = 0 \quad (5.52)$$

Для решения равенства (5.52) следует отыскать такое значение  $v_1$ , при

котором это равенство удовлетворяется.

Для сокращения числа попыток найдем нижнюю и верхнюю (условные) границы возможных значений  $\nu_1$ , рассматривая два случая нагружения стойки 1 (рис. 5.30).

Нижняя граница (рис. 5.30а):

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_1}{4l_1^2} = \nu_1^2 \frac{EI_1}{l_1^2},$$

откуда  $\nu_1 = \frac{\pi}{2} = 1,57.$

Верхняя граница (рис. 5.30б):

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 EI_1}{l_1^2} = \nu_1^2 \frac{EI_1}{l_1^2},$$

откуда  $\nu_1 = 2\pi = 6,28.$

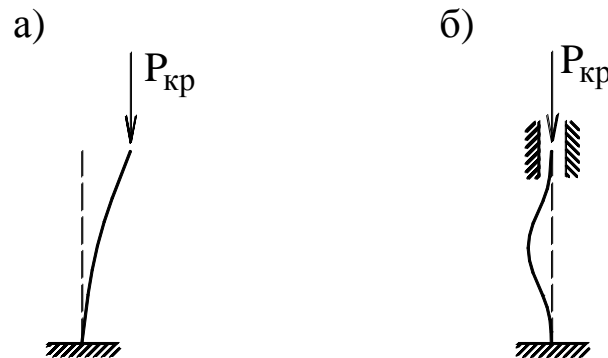


Рис. 5.30

После ряда попыток находим  $\nu_1 = 3,2065$ . По таблице (5.3) находим:

$$\eta_2(3,2065) = -0,04229; \quad \eta_1(0,8229 \cdot 3,2065) = \eta_1(2,639) = -1,9212;$$

$$\varphi_2(3,2065) = 0,59775; \quad \varphi_4(3,2065) = 0,81446.$$

Подставляя в уравнение (5.52), имеем:

$$(18 + 4 \cdot 0,59775) \left( 1,5 + 0,75(-0,04229) - 0,125(0,8611 \cdot 3,2065)^2 + 0,1875 \cdot (-1,9212) \right) - (3 - 1,5 \cdot 0,81446)^2 = 0,00002 \approx 0.$$

Таким образом, уравнение (5.52) удовлетворяется при  $\nu_1 = 3,2065$  и значения критических сил в стойках рамы будут:

$$P_1^{кр} = \nu_1^2 \frac{EI_1}{l_1^2} = \frac{3,2065^2}{4^2} EI = 0,6426 EI;$$

$$P_2^{kp} = \nu_2^2 \frac{EI_2}{l_2^2} = \frac{(0,8611 \cdot 3,2065)^2}{4^2} 2EI = 0,9530EI;$$

$$P_3^{kp} = \nu_3^2 \frac{EI_3}{l_3^2} = \frac{(0,8229 \cdot 3,2065)^2}{4^2} EI = 0,4351EI.$$

Для проверки найдем соотношения между найденными критическими силами:

$$\frac{P_1^{kp}}{P_3^{kp}} = \frac{0,6426EI}{0,4351EI} = 1,477; \quad \frac{P_2^{kp}}{P_3^{kp}} = \frac{0,9530EI}{0,4351EI} = 2,19,$$

что соответствует условию задачи.

Таблица 5.3  
Значение функций метода перемещений для сжато-изогнутых стержней

$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
0,00	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,01	0,99999	1,00000	1,00000	1,00000	0,99996	0,99999
0,02	0,99997	0,99999	1,00001	0,99999	0,99984	0,99996
0,03	0,99994	0,99997	1,00001	0,99998	0,99964	0,99991
0,04	0,99989	0,99995	1,00003	0,99997	0,99936	0,99984
0,05	0,99983	0,99992	1,00004	0,99996	0,99900	0,99975
0,06	0,99976	0,99988	1,00006	0,99994	0,99856	0,99964
0,07	0,99967	0,99984	1,00008	0,99992	0,99804	0,99951
0,08	0,99957	0,99979	1,00011	0,99989	0,99744	0,99936
0,09	0,99946	0,99973	1,00014	0,99986	0,99676	0,99919
0,10	0,99933	0,99967	1,00017	0,99983	0,99600	0,99900
0,11	0,99919	0,99960	1,00020	0,99980	0,99516	0,99879
0,12	0,99904	0,99952	1,00024	0,99976	0,99424	0,99856
0,13	0,99887	0,99944	1,00028	0,99972	0,99324	0,99831
0,14	0,99869	0,99935	1,00033	0,99967	0,99216	0,99804
0,15	0,99850	0,99925	1,00038	0,00062	0,99100	0,99775
0,16	0,99829	0,99915	1,00043	0,99957	0,98976	0,99744
0,17	0,99807	0,99904	1,00048	0,99952	0,98844	0,99711
0,18	0,99784	0,99892	1,00054	0,99946	0,98704	0,99676
0,19	0,99759	0,99880	1,00060	0,99940	0,98556	0,99639
0,20	0,99733	0,99867	1,00067	0,99933	0,98400	0,99600
0,21	0,99706	0,99853	1,00074	0,99926	0,98236	0,99559
0,22	0,99677	0,99839	1,00081	0,99919	0,98064	0,99516
0,23	0,99647	0,99824	1,00088	0,99912	0,97883	0,99471
0,24	0,99615	0,99808	1,00096	0,99904	0,97695	0,99424
0,25	0,99583	0,99791	1,00104	0,99896	0,97499	0,99375
0,26	0,99548	0,99774	1,00113	0,99887	0,97295	0,99324
0,27	0,99513	0,99757	1,00122	0,99878	0,97083	0,99271
0,28	0,99476	0,99738	1,00131	0,99869	0,96863	0,99216
0,29	0,99438	0,99719	1,00141	0,99860	0,96635	0,99159
0,30	0,99398	0,99700	1,00150	0,99850	0,96398	0,99100
0,31	0,99358	0,99679	1,00161	0,99840	0,96154	0,99039
0,32	0,99315	0,99658	1,00171	0,99829	0,95902	0,98976
0,33	0,99272	0,99636	1,00182	0,99818	0,95642	0,98911
0,34	0,99227	0,99614	1,00193	0,99807	0,95373	0,98844
0,35	0,99180	0,99591	1,00205	0,99796	0,95097	0,98775
0,36	0,99133	0,99567	1,00217	0,99784	0,94813	0,98704
0,37	0,99084	0,99543	1,00229	0,99772	0,94520	0,98631
0,38	0,99034	0,99518	1,00242	0,99759	0,94220	0,98556
0,39	0,98982	0,99492	1,00255	0,99746	0,93912	0,98479
0,40	0,98928	0,99466	1,00268	0,99733	0,93595	0,98400
0,41	0,98874	0,99438	1,00282	0,99719	0,93271	0,98319
0,42	0,98818	0,99411	1,00296	0,99706	0,92938	0,98236
0,43	0,98761	0,99382	1,00310	0,99691	0,92597	0,98151
0,44	0,98702	0,99353	1,00325	0,99677	0,92249	0,98064
0,45	0,98642	0,99323	1,00340	0,99662	0,91892	0,97975

$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
0,46	0,98581	0,99293	1,00355	0,99647	0,91527	0,97883
0,47	0,98518	0,99262	1,00371	0,99631	0,91155	0,97790
0,48	0,98454	0,99230	1,00387	0,99615	0,90774	0,97695
0,49	0,98388	0,99197	1,00403	0,99599	0,90385	0,97598
0,50	0,98321	0,99164	1,00420	0,99583	0,89988	0,97499
0,51	0,98253	0,99130	1,00437	0,99566	0,89583	0,97398
0,52	0,98183	0,99095	1,00454	0,99548	0,89170	0,97295
0,53	0,98112	0,99060	1,00472	0,99531	0,88749	0,97190
0,54	0,98040	0,99024	1,00490	0,99513	0,88320	0,97083
0,55	0,97966	0,98988	1,00509	0,99495	0,87882	0,96974
0,56	0,97890	0,98950	1,00528	0,99476	0,87437	0,96863
0,57	0,97814	0,98912	1,00547	0,99457	0,86984	0,96750
0,58	0,97735	0,98874	1,00567	0,99438	0,86522	0,96635
0,59	0,97656	0,98834	1,00586	0,99418	0,86053	0,96518
0,60	0,97575	0,98794	1,00607	0,99398	0,85575	0,96398
0,61	0,97493	0,98754	1,00627	0,99378	0,85089	0,96277
0,62	0,97409	0,98712	1,00648	0,99358	0,84595	0,96154
0,63	0,97323	0,98670	1,00670	0,99337	0,84093	0,96029
0,64	0,97237	0,98627	1,00691	0,99315	0,83583	0,95902
0,65	0,97149	0,98584	1,00713	0,99294	0,83065	0,95773
0,66	0,97059	0,98540	1,00736	0,99272	0,82539	0,95642
0,67	0,96968	0,98495	1,00759	0,99249	0,82005	0,95509
0,68	0,96876	0,98449	1,00782	0,99227	0,81462	0,95373
0,69	0,96782	0,98403	1,00805	0,99204	0,80912	0,95236
0,70	0,96687	0,98356	1,00829	0,99180	0,80353	0,95097
0,71	0,96590	0,98308	1,00853	0,99157	0,79786	0,94956
0,72	0,96492	0,98260	1,00878	0,99133	0,79212	0,94813
0,73	0,96392	0,98211	1,00903	0,99108	0,78629	0,94668
0,74	0,96291	0,98161	1,00928	0,99084	0,78037	0,94520
0,75	0,96188	0,98111	1,00954	0,99059	0,77438	0,94371
0,76	0,96084	0,98060	1,00980	0,99033	0,76831	0,94220
0,77	0,95979	0,98008	1,01007	0,99008	0,76215	0,94067
0,78	0,95872	0,97956	1,01033	0,98982	0,75592	0,93912
0,79	0,95763	0,97902	1,01061	0,98955	0,74960	0,93754
0,80	0,95653	0,97849	1,01088	0,98928	0,74320	0,93595
0,81	0,95542	0,97794	1,01116	0,98901	0,73672	0,93434
0,82	0,95429	0,97739	1,01144	0,98874	0,73015	0,93271
0,83	0,95314	0,97683	1,01173	0,98846	0,72351	0,93105
0,84	0,95198	0,97626	1,01202	0,98818	0,71678	0,92938
0,85	0,95081	0,97569	1,01232	0,98790	0,70997	0,92769
0,86	0,94962	0,97510	1,01261	0,98761	0,70308	0,92597
0,87	0,94841	0,97452	1,01292	0,98732	0,69611	0,92424
0,88	0,94719	0,97392	1,01322	0,98702	0,68906	0,92249
0,89	0,94595	0,97332	1,01353	0,98672	0,68192	0,92071
0,90	0,94470	0,97271	1,01385	0,98642	0,67470	0,91892
0,91	0,94344	0,97209	1,01416	0,98612	0,66740	0,91711
0,92	0,94216	0,97147	1,01449	0,98581	0,66002	0,91527
0,93	0,94086	0,97084	1,01481	0,98550	0,65256	0,91342
0,94	0,93955	0,97020	1,01514	0,98518	0,64501	0,91155



$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
0,95	0,93822	0,96955	1,01547	0,98486	0,63738	0,90965
0,96	0,93687	0,96890	1,01581	0,98454	0,62967	0,90774
0,97	0,93551	0,96824	1,01615	0,98421	0,62188	0,90580
0,98	0,93414	0,96758	1,01650	0,98388	0,61400	0,90385
0,99	0,93275	0,96690	1,01684	0,98355	0,60605	0,90187
1,00	0,93134	0,96622	1,01720	0,98321	0,59801	0,89988
1,01	0,92992	0,96553	1,01755	0,98287	0,58988	0,89786
1,02	0,92848	0,96484	1,01792	0,98253	0,58168	0,89583
1,03	0,92702	0,96413	1,01828	0,98218	0,57339	0,89377
1,04	0,92555	0,96342	1,01865	0,98183	0,56502	0,89170
1,05	0,92406	0,96271	1,01902	0,98148	0,55656	0,88960
1,06	0,92256	0,96198	1,01940	0,98112	0,54803	0,88749
1,07	0,92104	0,96125	1,01978	0,98076	0,53941	0,88535
1,08	0,91951	0,96051	1,02017	0,98040	0,53071	0,88320
1,09	0,91795	0,95976	1,02056	0,98003	0,52192	0,88102
1,10	0,91639	0,95901	1,02095	0,97966	0,51305	0,87882
1,11	0,91480	0,95825	1,02135	0,97928	0,50410	0,87661
1,12	0,91320	0,95748	1,02175	0,97890	0,49506	0,87437
1,13	0,91158	0,95671	1,02215	0,97852	0,48595	0,87211
1,14	0,90994	0,95592	1,02256	0,97814	0,47674	0,86984
1,15	0,90829	0,95513	1,02298	0,97775	0,46746	0,86754
1,16	0,90662	0,95433	1,02340	0,97735	0,45809	0,86522
1,17	0,90494	0,95353	1,02382	0,97696	0,44864	0,86288
1,18	0,90324	0,95271	1,02425	0,97656	0,43910	0,86053
1,19	0,90152	0,95189	1,02468	0,97616	0,42948	0,85815
1,20	0,89978	0,95107	1,02511	0,97575	0,41978	0,85575
1,21	0,89802	0,95023	1,02556	0,97534	0,40999	0,85333
1,22	0,89625	0,94939	1,02600	0,97493	0,40012	0,85089
1,23	0,89446	0,94854	1,02645	0,97451	0,39016	0,84843
1,24	0,89266	0,94768	1,02690	0,97409	0,38012	0,84595
1,25	0,89083	0,94681	1,02736	0,97366	0,37000	0,84345
1,26	0,88899	0,94594	1,02782	0,97323	0,35979	0,84093
1,27	0,88713	0,94506	1,02829	0,97280	0,34950	0,83839
1,28	0,88526	0,94417	1,02876	0,97237	0,33912	0,83583
1,29	0,88336	0,94328	1,02923	0,97193	0,32866	0,83325
1,30	0,88145	0,94237	1,02971	0,97149	0,31812	0,83065
1,31	0,87952	0,94146	1,03020	0,97104	0,30748	0,82803
1,32	0,87757	0,94054	1,03069	0,97059	0,29677	0,82539
1,33	0,87560	0,93962	1,03118	0,97014	0,28597	0,82273
1,34	0,87362	0,93868	1,03168	0,96968	0,27508	0,82005
1,35	0,87161	0,93774	1,03218	0,96922	0,26411	0,81735
1,36	0,86959	0,93679	1,03269	0,96876	0,25306	0,81462
1,37	0,86755	0,93583	1,03320	0,96829	0,24191	0,81188
1,38	0,86549	0,93487	1,03372	0,96782	0,23069	0,80912
1,39	0,86341	0,93390	1,03424	0,96734	0,21938	0,80634
1,40	0,86131	0,93292	1,03476	0,96687	0,20798	0,80353
1,41	0,85920	0,93193	1,03529	0,96638	0,19650	0,80071
1,42	0,85706	0,93093	1,03583	0,96590	0,18493	0,79786
1,43	0,85491	0,92993	1,03637	0,96541	0,17327	0,79500

$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
1,44	0,85273	0,92892	1,03692	0,96492	0,16153	0,79212
1,45	0,85054	0,92790	1,03747	0,96442	0,14970	0,78921
1,46	0,84832	0,92687	1,03802	0,96392	0,13779	0,78629
1,47	0,84609	0,92583	1,03858	0,96342	0,12579	0,78334
1,48	0,84384	0,92479	1,03914	0,96291	0,11371	0,78037
1,49	0,84157	0,92374	1,03971	0,96240	0,10153	0,77739
1,50	0,83928	0,92268	1,04029	0,96188	0,08928	0,77438
1,51	0,83696	0,92161	1,04087	0,96136	0,07693	0,77135
1,52	0,83463	0,92054	1,04145	0,96084	0,06450	0,76831
1,53	0,83228	0,91945	1,04204	0,96032	0,05198	0,76524
1,54	0,82991	0,91836	1,04264	0,95979	0,03937	0,76215
1,55	0,82751	0,91726	1,04323	0,95925	0,02668	0,75904
1,56	0,82510	0,91615	1,04384	0,95872	0,01390	0,75592
1,57	0,82266	0,91504	1,04445	0,95817	0,00103	0,75277
1,58	0,82021	0,91391	1,04506	0,95763	-0,01193	0,74960
1,59	0,81773	0,91278	1,04568	0,95708	-0,02497	0,74641
1,60	0,81523	0,91164	1,04631	0,95653	-0,03810	0,74320
1,61	0,81271	0,91049	1,04694	0,95597	-0,05132	0,73997
1,62	0,81017	0,90934	1,04758	0,95542	-0,06463	0,73672
1,63	0,80761	0,90817	1,04822	0,95485	-0,07803	0,73344
1,64	0,80502	0,90700	1,04886	0,95429	-0,09151	0,73015
1,65	0,80242	0,90581	1,04952	0,95372	-0,10508	0,72684
1,66	0,79979	0,90462	1,05017	0,95314	-0,11875	0,72351
1,67	0,79714	0,90343	1,05084	0,95256	-0,13250	0,72015
1,68	0,79446	0,90222	1,05150	0,95198	-0,14634	0,71678
1,69	0,79177	0,90100	1,05218	0,95140	-0,16026	0,71339
1,70	0,78905	0,89978	1,05286	0,95081	-0,17428	0,70997
1,71	0,78631	0,89855	1,05354	0,95021	-0,18839	0,70654
1,72	0,78355	0,89731	1,05423	0,94962	-0,20259	0,70308
1,73	0,78076	0,89606	1,05493	0,94902	-0,21678	0,69961
1,74	0,77795	0,89480	1,05563	0,94841	-0,23125	0,69611
1,75	0,77512	0,89354	1,05634	0,94780	-0,24572	0,69259
1,76	0,77226	0,89226	1,05705	0,94719	-0,26027	0,68906
1,77	0,76938	0,89098	1,05777	0,94657	-0,27492	0,68550
1,78	0,76647	0,88969	1,05849	0,94595	-0,28966	0,68192
1,79	0,76355	0,88839	1,05922	0,94533	-0,30449	0,67832
1,80	0,76059	0,88708	1,05996	0,94470	-0,31941	0,67470
1,81	0,75761	0,88576	1,06070	0,94407	-0,33442	0,67106
1,82	0,75461	0,88443	1,06145	0,94344	-0,34952	0,66740
1,83	0,75159	0,88310	1,06220	0,94280	-0,36471	0,66372
1,84	0,74853	0,88175	1,06296	0,94216	-0,38000	0,66002
1,85	0,74564	0,88040	1,06373	0,94151	-0,39538	0,65630
1,86	0,74235	0,87904	1,06450	0,94086	-0,41085	0,65256
1,87	0,73923	0,87767	1,06528	0,94020	-0,42641	0,64880
1,88	0,73607	0,87629	1,06606	0,93955	-0,44206	0,64501
1,89	0,73289	0,87490	1,06685	0,93888	-0,45781	0,64121
1,90	0,72969	0,87350	1,06765	0,93822	-0,47365	0,63738
1,91	0,72646	0,87210	1,06845	0,93755	-0,48958	0,63354
1,92	0,72320	0,87068	1,06926	0,93687	-0,50560	0,62967

$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
1,93	0,71991	0,86926	1,07007	0,93619	-0,52172	0,62579
1,94	0,71660	0,86782	1,07090	0,93551	-0,53793	0,62188
1,95	0,71326	0,86638	1,07172	0,93483	-0,55424	0,61795
1,96	0,70989	0,86493	1,07256	0,93414	-0,57064	0,61400
1,97	0,70650	0,86347	1,07340	0,93344	-0,58714	0,61004
1,98	0,70307	0,86200	1,07425	0,94275	-0,60373	0,60605
1,99	0,69962	0,86052	1,07510	0,93205	-0,62041	0,60204
2,00	0,69614	0,85903	1,07596	0,93134	-0,63719	0,59801
2,01	0,69263	0,85753	1,07683	0,93063	-0,65407	0,59396
2,02	0,68910	0,85602	1,07771	0,92992	-0,67104	0,58988
2,03	0,68553	0,85451	1,07859	0,92920	-0,68810	0,58579
2,04	0,68194	0,85298	1,07947	0,92848	-0,70526	0,58168
2,05	0,67831	0,85144	1,08037	0,92775	-0,72252	0,57754
2,06	0,67466	0,84990	1,08127	0,92702	-0,73988	0,57339
2,07	0,67097	0,84834	1,08218	0,92629	-0,75733	0,56921
2,08	0,66726	0,846678	1,08309	0,92555	-0,77488	0,56502
2,09	0,66351	0,84521	1,08402	0,92481	-0,79252	0,56080
2,10	0,65973	0,84362	1,08495	0,92406	-0,81027	0,55656
2,11	0,65592	0,84203	1,08588	0,92332	-0,82811	0,55231
2,12	0,65208	0,84043	1,08683	0,92256	-0,84605	-,54803
2,13	0,64821	0,83882	1,08778	0,92180	-0,86409	0,54373
2,14	0,64431	0,83719	1,08874	0,92104	-0,88223	0,53941
2,15	0,64037	0,83556	1,08970	0,92028	-0,90046	0,53507
2,16	0,63640	0,83392	1,09068	0,91951	-0,91880	0,53071
2,17	0,63240	0,83227	1,09166	0,91873	-0,93724	0,52632
2,18	0,62836	0,83061	1,09265	0,91795	-0,95577	0,52192
2,19	0,62429	0,82894	1,09364	0,91717	-0,97441	0,51750
2,20	0,62019	0,82726	1,09465	0,91639	-0,99315	0,51305
2,21	0,61605	0,82556	1,09566	0,91559	-1,01199	0,50859
2,22	0,61187	0,82386	1,09668	0,91480	-1,03093	0,50410
2,23	0,60767	0,82215	1,09770	0,91400	-1,04997	0,49959
2,24	0,60342	0,82043	1,09874	0,91320	-1,06911	0,49506
2,25	0,59914	0,81870	1,09978	0,91239	-1,08836	0,49052
2,26	0,59483	0,81696	1,10083	0,91158	-1,10771	0,48595
2,27	0,59047	0,81520	1,10189	0,91076	-1,12716	0,48136
2,28	0,58608	0,81344	1,10295	0,90994	-1,14672	0,47674
2,29	0,58166	0,81167	1,10403	0,90912	-1,16638	0,47211
2,30	0,57719	0,80988	1,10511	0,90829	-1,18614	0,46746
2,31	0,57269	0,80809	1,10620	0,90746	-1,20601	0,46279
2,32	0,56815	0,80629	1,10730	0,90662	-1,22598	0,45809
2,33	0,56357	0,80447	1,10841	0,90578	-1,24606	0,45337
2,34	0,55895	0,80265	1,0952	0,90494	-1,26625	0,44864
2,35	0,55429	0,80081	1,11065	0,90409	-1,28654	0,44388
2,36	0,54959	0,79896	1,11178	0,90324	-1,30694	0,43910
2,37	0,54485	0,79711	1,11292	0,90238	-1,32745	0,43430
2,38	0,54007	0,79524	1,11407	0,90152	-1,34806	0,42948
2,39	0,53525	0,79336	1,11523	0,90065	-1,36879	0,42464
2,40	0,53038	0,79147	1,11640	0,89978	-1,38962	0,41978
2,41	0,52547	0,78957	1,11758	0,89890	-1,41056	0,41490

$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
2,42	0,52052	0,78766	1,11876	0,89802	-1,43161	0,40999
2,43	0,51553	0,78573	1,11996	0,89714	-1,45277	0,40507
2,44	0,51049	0,78380	1,12116	0,89625	-1,47405	0,40012
2,45	0,50540	0,78185	1,12237	0,89536	-1,49543	0,39515
2,46	0,50028	0,77990	1,12360	0,89446	-1,51692	0,39016
2,47	0,49510	0,77793	1,12483	0,89356	-1,53853	0,38515
2,48	0,48988	0,77595	1,12607	0,89266	-1,56025	0,38012
2,49	0,48461	0,77396	1,12732	0,89175	-1,58209	0,37507
2,50	0,47930	0,77196	1,12858	0,89083	-1,60403	0,37000
2,51	0,47394	0,76995	1,12985	0,88992	-1,62610	0,36491
2,52	0,46853	0,76792	1,13113	0,88899	-1,64827	0,35979
2,53	0,46307	0,76589	1,13242	0,88806	-1,67057	0,35466
2,54	0,45756	0,76384	1,13372	0,88713	-1,69298	0,34950
2,55	0,45200	0,76178	1,13503	0,88620	-1,71550	0,34432
2,56	0,44638	0,75971	1,13634	0,88526	-1,73815	0,33912
2,57	0,44072	0,75763	1,13767	0,88431	-1,76091	0,33390
2,58	0,43500	0,75554	1,13901	0,88336	-1,78380	0,32866
2,59	0,42924	0,75343	1,14036	0,88241	-1,80680	0,32340
2,60	0,42341	0,75131	1,14172	0,88145	-1,82992	0,31812
2,61	0,41754	0,74918	1,14309	0,88049	-1,85316	0,31281
2,62	0,41160	0,74704	1,14447	0,87952	-1,87653	0,30748
2,63	0,40562	0,74489	1,14586	0,87855	-1,90002	0,30214
2,64	0,39957	0,74272	1,14727	0,87757	-1,92363	0,29677
2,65	0,39347	0,74054	1,14868	0,87659	-1,94737	0,29138
2,66	0,38731	0,73835	1,15010	0,87560	-1,97123	0,28597
2,67	0,38109	0,73615	1,15154	0,87461	-1,99521	0,28054
2,68	0,37481	0,73393	1,15298	0,87362	-2,01933	0,27508
2,69	0,36847	0,73170	1,15444	0,87262	-2,04357	0,26961
2,70	0,36206	0,72946	1,15591	0,87161	-2,06794	0,26411
2,71	0,35560	0,72721	1,15739	0,87060	-2,09244	0,25859
2,72	0,34907	0,72494	1,15888	0,86959	-2,11706	0,25306
2,73	0,34248	0,72266	1,16038	0,86857	-2,14182	0,24750
2,74	0,33582	0,72037	1,16190	0,86755	-2,16671	0,24191
2,75	0,32909	0,71807	1,16342	0,86652	-2,19174	0,23631
2,76	0,32230	0,71575	1,16496	0,86549	-2,21690	0,23069
2,77	0,31544	0,71342	1,16651	0,86445	-2,24219	0,22504
2,78	0,30851	0,71108	1,16807	0,86341	-2,26762	0,21938
2,79	0,30151	0,70872	1,16965	0,86236	-2,29319	0,21369
2,80	0,29444	0,70635	1,17123	0,86131	-2,31889	0,20798
2,81	0,28730	0,70397	1,17283	0,86026	-2,34474	0,20225
2,82	0,28008	0,70157	1,17444	0,85920	-2,37072	0,19650
2,83	0,27279	0,69916	1,17607	0,85813	-2,39685	0,19072
2,84	0,26542	0,69674	1,17771	0,85706	-2,42312	0,18493
2,85	0,25797	0,69430	1,17936	0,85599	-2,44953	0,17911
2,86	0,25045	0,69185	1,18102	0,85491	-2,47609	0,17327
2,87	0,24284	0,68938	1,18269	0,85382	-2,50279	0,16741
2,88	0,23516	0,68691	1,18438	0,85273	-2,52964	0,16153
2,89	0,22739	0,68441	1,18609	0,85164	-2,55664	0,15563
2,90	0,21954	0,68191	1,18780	0,85054	-2,58380	0,14970

$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
2,91	0,21160	0,67939	1,18953	0,84943	-2,61110	0,14376
2,92	0,20358	0,67685	1,19127	0,84832	-2,63856	0,13779
2,93	0,19547	0,67430	1,19303	0,84721	-2,66617	0,13180
2,94	0,18726	0,67174	1,19480	0,84609	-2,69394	0,12579
2,95	0,17897	0,66916	1,19659	0,84497	-2,72186	0,11976
2,96	0,17059	0,66657	1,19839	0,84384	-2,74995	0,11371
2,97	0,16211	0,66396	1,20020	0,84271	-2,74995	0,10763
2,98	0,15353	0,66134	1,20203	0,84157	-2,77819	0,10153
2,99	0,14485	0,65870	1,20387	0,84042	-2,80660	0,09542
3,00	0,13608	0,65605	1,20573	0,83928	-2,83518	0,08928
3,01	0,12721	0,65338	1,20760	0,83812	-2,89283	0,08311
3,02	0,11823	0,65070	1,20949	0,83696	-2,92191	0,07693
3,03	0,10914	0,64800	1,21139	0,83580	-2,95116	0,07072
3,04	0,09995	0,64529	1,21331	0,83463	-2,98058	0,06450
3,05	0,09065	0,64256	1,21524	0,83346	-3,01018	0,05825
3,06	0,08124	0,63982	1,21719	0,83228	-3,03996	0,05198
3,07	0,07171	0,63706	1,21916	0,83109	-3,06992	0,04569
3,08	0,06207	0,63429	1,22114	0,82991	-3,10006	0,03937
3,09	0,05231	0,63150	1,22313	0,82871	-3,13039	0,03304
3,10	0,04243	0,62869	1,22515	0,82751	-3,16090	0,02668
3,11	0,03243	0,62587	1,22718	0,82631	-3,19160	0,02030
3,12	0,02231	0,62303	1,22922	0,82510	-3,22249	0,01390
3,13	0,01205	0,62018	1,23129	0,82388	-3,25258	0,00747
3,14	0,00167	0,61731	1,23337	0,82266	-3,28487	0,00103
3,15	-0,00885	0,61442	1,23547	0,82144	-3,31635	-0,00544
3,16	-0,01950	0,61152	1,23758	0,82021	-3,34804	-0,01193
3,17	-0,03030	0,60860	1,23971	0,81897	-3,37993	-0,01844
3,18	-0,04123	0,60566	1,24186	0,81773	-3,41203	-0,02497
3,19	-0,05231	0,60271	1,24403	0,81648	-3,44434	-0,03153
3,20	-0,06353	0,59974	1,24621	0,81523	-3,47687	-0,03810
3,21	-0,07491	0,59675	1,24842	0,81397	-3,50961	-0,04470
3,22	-0,08644	0,59375	1,25064	0,81271	-3,54257	-0,05132
3,23	-0,09813	0,59072	1,25288	0,81144	-3,57576	-0,05797
3,24	-0,10998	0,58768	1,25514	0,81017	-3,60918	-0,06463
3,25	-0,12199	0,58463	1,25742	0,80889	-3,64282	-0,07132
3,26	-0,13417	0,58155	1,25972	0,80761	-3,67670	-0,07803
3,27	-0,14652	0,57846	1,26203	0,80632	-3,71082	-0,08476
3,28	-0,15905	0,57535	1,26437	0,80502	-3,74519	-0,09151
3,29	-0,17176	0,57222	1,26673	0,80372	-3,77980	-0,09829
3,30	-0,18466	0,56907	1,26910	0,80242	-3,81466	-0,10508
3,31	-0,19774	0,56591	1,27150	0,80110	-3,84978	-0,11190
3,32	-0,21102	0,56272	1,27392	0,79979	-3,88515	-0,11875
3,33	-0,22450	0,55952	1,27635	0,79846	-3,92080	-0,12561
3,34	-0,23818	0,55630	1,27881	0,79714	-3,95671	-0,13250
3,35	-0,25206	0,55306	1,28129	0,79580	-3,99290	-0,13941
3,36	-0,26616	0,54980	1,28379	0,79446	-4,02936	-0,14634
3,37	-0,28048	0,54652	1,28632	0,79312	-4,06612	-0,15329
3,38	-0,29503	0,54322	1,28886	0,79177	-4,10316	-0,16026
3,39	-0,30980	0,53991	1,29143	0,79041	-4,14050	-0,16726

$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
3,40	-0,32481	0,53657	1,29401	0,78905	-4,17814	-0,17428
3,41	-0,34006	0,53321	1,29662	0,78768	-4,21610	-0,18133
3,42	-0,35556	0,52984	1,29926	0,78631	-4,25436	-0,18839
3,43	-0,37132	0,52644	1,30192	0,78493	-4,29295	-0,19548
3,44	-0,38734	0,52302	1,30460	0,78355	-4,33187	-0,20259
3,45	-0,40363	0,51958	1,30730	0,78216	-4,37113	-0,20972
3,46	-0,42020	0,51613	1,31003	0,78076	-4,41073	-0,21687
3,47	-0,43705	0,51265	1,31278	0,77936	-1,45068	-0,22405
3,48	-0,45419	0,50915	1,31555	0,77795	-4,49099	-0,23125
3,49	-0,47164	0,50563	1,31835	0,77654	-4,53167	-0,23847
3,50	-0,48939	0,50209	1,32118	0,77512	-4,57273	-0,24572
3,51	-0,50747	0,49852	1,32403	0,77369	-4,61417	-0,25298
3,52	-0,52587	0,49494	1,32690	0,77226	-4,65601	-0,26027
3,53	-0,54462	0,49133	1,32980	0,77082	-4,69825	-0,26759
3,54	-0,56371	0,48770	1,33273	0,76938	-4,74091	-0,27492
3,55	-0,58316	0,48405	1,33569	0,76793	-4,78399	-0,28228
3,56	-0,60298	0,48038	1,33867	0,76647	-4,82752	-0,28966
3,57	-0,62319	0,47668	1,34167	0,76501	-4,87149	-0,29706
3,58	-0,64379	0,47296	1,34471	0,76355	-4,91592	-0,30449
3,59	-0,66480	0,46922	1,34777	0,76207	-4,96083	-0,31194
3,60	-0,68622	0,46546	1,35086	0,76059	-5,00622	-0,31941
3,61	-0,70809	0,46167	1,35398	0,75911	-5,05212	-0,32690
3,62	-0,73040	0,45786	1,35713	0,75761	-5,09853	-0,33442
3,63	-0,75317	0,45402	1,36030	0,75612	-5,14547	-0,34196
3,64	-0,77643	0,45016	1,36351	0,75461	-5,19296	-0,34952
3,65	-0,80018	0,44628	1,36674	0,75310	-5,24101	-0,35711
3,66	-0,82445	0,44237	1,37001	0,75159	-5,28965	-0,36471
3,67	-0,84924	0,43844	1,37330	0,75006	-5,33888	-0,37235
3,68	-0,87459	0,43449	1,37663	0,74853	-5,38873	-0,38000
3,69	-0,90052	0,43050	1,37999	0,74700	-5,43922	0,38768
3,70	-0,92703	0,42650	1,38338	0,74546	-5,49036	-0,39538
3,71	-0,95416	0,42247	1,38680	0,74391	-5,54219	-0,40310
3,72	-0,98193	0,41841	1,39025	0,74235	-5,59473	-0,41085
3,73	-1,01036	0,41432	1,39374	0,74079	-5,64799	-0,41861
3,74	-1,03948	0,41021	1,39725	0,73923	-5,70201	-0,42641
3,75	-1,06931	0,40608	1,40081	0,73765	-5,75681	-0,43422
3,76	-1,09989	0,40191	1,40439	0,73607	-5,81242	-0,44206
3,77	-1,13124	0,39772	1,40801	0,73449	-5,86888	-0,44992
3,78	-1,16340	0,39351	1,41167	0,73289	-5,92620	-0,45781
3,79	-1,19641	0,38926	1,41536	0,73129	-5,98444	-0,46571
3,80	-1,23028	0,38499	1,41909	0,72969	-6,04362	-0,47365
3,81	-1,26508	0,38069	1,42285	0,72807	-6,10378	-0,48160
3,82	-1,30082	0,37636	1,42665	0,72646	-6,16496	-0,48958
3,83	-1,33757	0,37200	1,43048	0,72483	-6,22720	-0,49758
3,84	-1,37535	0,36762	1,43436	0,72320	-6,29055	-0,50560
3,85	-1,41423	0,36320	1,43827	0,72156	-6,35506	-0,51365
3,86	-1,45425	0,35876	1,44222	0,71991	-6,42078	-0,52172
3,87	-1,49546	0,35428	1,44621	0,71826	-6,48776	-0,52982
3,88	-1,53793	0,34978	1,45024	0,71660	-6,55606	-0,53793

$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
3,89	-1,58171	0,34525	1,45431	0,71493	-6,62574	-0,54608
3,90	-1,62687	0,34068	1,45842	0,71326	-6,69687	-0,55424
3,91	-1,67348	0,33608	1,46257	0,71158	-6,76951	-0,56243
3,92	-1,72161	0,33146	1,46676	0,70989	-6,84375	-0,57064
3,93	-1,77136	0,32680	1,47099	0,70820	-6,91966	-0,57888
3,94	-1,82279	0,32211	1,47527	0,70650	-6,99732	-0,58714
3,95	-1,87601	0,31739	1,47959	0,70479	-7,07684	-0,59542
3,96	-1,93111	0,31263	1,48396	0,70307	-7,15831	-0,60373
3,97	-1,98821	0,30784	1,48837	0,70135	-7,24184	-0,61206
3,98	-2,04741	0,30302	1,49282	0,69962	-7,32754	-0,62041
3,99	-2,10885	0,29817	1,49732	0,69787	-7,41555	-0,62879
4,00	-2,17265	0,29328	1,50187	0,69614	-7,50598	-0,63719
4,01	-2,23896	0,28836	1,50647	0,69439	-7,59899	-0,64562
4,02	-2,30794	0,28340	1,51111	0,69263	-7,69474	-0,65407
4,03	-2,37977	0,27840	1,51580	0,69087	-7,79340	-0,66254
4,04	-2,45462	0,27338	1,52054	0,68910	-7,89515	-0,67104
4,05	-2,53271	0,26831	1,52533	0,68732	-8,00021	-0,67956
4,06	-2,61425	0,26321	1,53017	0,68553	-8,10878	-0,66810
4,07	-2,69949	0,25807	1,53506	0,68374	-8,22113	-0,69667
4,08	-2,78870	0,25290	1,54001	0,68194	-8,33750	-0,70526
4,09	-2,88217	0,24769	1,54501	0,68013	-8,45820	-0,71388
4,10	2,98023	0,24244	1,55006	0,67831	-8,58356	-0,72252
4,11	-3,08322	0,23715	1,55516	0,67649	-8,71392	-0,73119
4,12	-3,19155	0,23182	1,56032	0,67466	-8,84968	-0,73968
4,13	-3,30566	0,22646	1,56554	0,67282	-8,99129	-0,74859
4,14	-3,42603	0,22105	1,57081	0,67097	-9,13923	-0,75733
4,15	-3,55322	0,21561	1,57614	0,66912	-9,29405	-0,76609
4,16	-3,68782	0,21012	1,58153	0,66726	-9,45635	-0,77488
4,17	-3,83054	0,20459	1,58698	0,66539	-9,62684	-0,78369
4,18	-3,98213	0,19902	1,59249	0,66351	-9,80627	-0,79252
4,19	-4,14349	0,19341	1,59806	0,66162	-9,99552	-0,80138
4,20	-4,31560	0,18775	1,60369	0,65973	-10,19560	-0,81027
4,21	-4,49961	0,18206	1,60938	0,65783	-10,40764	-0,81918
4,22	-4,69681	0,17631	1,61514	0,65592	-10,63295	-0,82811
4,23	-4,90871	0,17053	1,62096	0,65401	-10,87301	-0,83707
4,24	-5,13704	0,16470	1,62685	0,65208	-11,12958	-0,84605
4,25	-5,38383	0,15882	1,63281	0,65015	-11,40466	-0,85506
4,26	-5,65145	0,15290	1,63884	0,64821	-11,70065	-0,86409
4,27	-5,94265	0,14693	1,64493	0,64626	-12,02032	-0,87315
4,28	-6,26086	0,14091	1,65109	0,64431	-12,36699	-0,88223
4,29	-6,60994	0,13485	1,65733	0,64234	-12,74464	-0,89133
4,30	-6,99473	0,12873	1,66364	0,64037	-13,15806	-0,90046
4,31	-7,42105	0,12257	1,67002	0,63839	-13,61308	-0,90962
4,32	-7,89609	0,11636	1,67647	0,63640	-14,11689	-0,91880
4,33	-8,42879	0,11010	1,68301	0,63440	-14,67842	-0,92801
4,34	-9,03042	0,10379	1,68961	0,63240	-15,30895	-0,93724
4,35	-9,71539	0,09742	1,69630	0,63038	-16,02289	-0,94649
4,36	-10,50245	0,09100	1,70307	0,62836	-16,83899	-0,95577
4,37	-11,41641	0,08453	1,70992	0,62633	-17,78204	-0,96508

$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
4,38	-12,49082	0,07801	1,71685	0,62429	-18,88562	-0,97441
4,39	-13,77224	0,07143	1,72386	0,62224	-20,19627	-0,98377
4,40	-15,32713	0,06480	1,73096	0,62019	-21,78046	-0,99315
4,41	-17,25385	0,05811	1,73815	0,61812	-23,73655	-1,00255
4,42	-19,70434	0,05136	1,74543	0,61605	-26,21647	-1,01199
4,43	-22,92640	0,04455	1,75279	0,61397	-29,46804	-1,02144
4,44	-27,35342	0,03769	1,76024	0,91187	-33,92462	-1,03093
4,45	-33,81810	0,03077	1,76779	0,60977	-40,41893	-1,04043
4,46	-44,15015	0,02378	1,77543	0,60767	-50,78068	-1,04997
4,47	-63,30569	0,01674	1,78317	0,60555	-69,96599	-1,05953
4,48	-111,02484	0,00963	1,79101	0,60342	-117,71497	-1,06911
4,49	-438,64008	0,00246	1,79894	0,60129	-445,36011	-1,07872
4,50	227,92925	-0,00477	1,80698	0,59914	221,17925	-1,08836
4,51	90,93972	-0,01207	1,81511	0,59699	84,15968	-1,09802
4,52	56,98304	-0,01944	1,82336	0,59483	50,17291	-1,10771
4,53	41,58421	-0,02687	1,83171	0,59265	34,74391	-1,11742
4,54	3279368	-0,03437	1,84016	0,59047	25,92314	-1,12716
4,55	27,10821	-0,04194	1,84873	0,58828	20,20738	-1,13692
4,56	23,12892	-0,04958	1,85741	0,58608	16,19772	-1,14672
4,57	20,18750	-0,05729	1,86621	0,58388	13,22587	-1,15653
4,58	17,92436	-0,06507	1,87512	0,58166	10,93223	-1,16638
4,59	16,12883	-0,07293	1,88415	0,57943	9,10613	-1,17624
4,60	14,66930	-0,08086	1,89330	0,57719	7,61596	-1,18614
4,61	13,45929	-0,08887	1,90257	0,57495	6,37526	-1,19606
4,62	12,43967	-0,09695	1,91197	0,57269	5,32487	-1,20601
4,63	11,56862	-0,10511	1,92150	0,57042	4,42299	-1,21598
4,64	10,81573	-0,11335	1,93115	0,56815	3,63920	-1,22598
4,65	10,15836	-0,12167	1,94094	0,56586	2,95086	-1,23601
4,66	9,57929	-0,13008	1,95087	0,56357	2,34076	-1,24606
4,67	9,06523	-0,13857	1,96093	0,56126	1,79560	-1,25614
4,68	8,60571	-0,14714	1,97113	0,55895	1,30491	-1,26625
4,69	8,19242	-0,15580	1,98148	0,55662	0,86038	-1,27638
4,70	7,81862	-0,16455	1,99197	0,55429	0,45529	-1,28654
4,71	7,47885	-0,17339	2,00261	0,55195	0,08415	-1,29673
4,72	7,16860	-0,18231	2,01340	0,54959	-0,25753	-1,30694
4,73	6,88413	-0,19134	2,02435	0,54723	-0,57351	-1,31718
4,74	6,62228	-0,20045	2,03545	0,54485	-0,86692	-1,32745
4,75	6,38042	-0,20966	2,04672	0,54246	-1,14041	-1,33774
4,76	6,15629	-0,21897	2,05815	0,54007	-1,39625	-1,34806
4,77	5,94796	-0,22838	2,06975	0,53766	-1,63634	-1,35841
4,78	5,75378	-0,23789	2,08152	0,53525	-1,86235	-1,36879
4,79	5,57232	-0,24751	2,09347	0,53282	-2,07572	-1,37919
4,80	5,40232	-0,25723	2,10559	0,53038	-2,27768	-1,38962
4,81	5,24269	-0,26705	2,11790	0,52793	-2,46934	-1,40008
4,82	5,09249	-0,27699	2,13039	0,52547	-2,65164	-1,41056
4,83	4,95087	-0,28704	2,14308	0,52300	-2,82543	-1,42107
4,84	4,81707	-0,29720	2,15595	0,52052	-2,99146	-1,43161
4,85	4,69045	-0,30747	2,16903	0,51803	-3,15038	-1,44218
4,86	4,57041	-0,31786	2,18231	0,51553	-3,30279	-1,45277



$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
4,87	4,45643	-0,32838	2,19580	0,51301	-3,44921	-1,46340
4,88	4,34802	-0,33902	2,20949	0,51049	-3,59011	-1,47405
4,89	4,24478	-0,34978	2,22341	0,50795	-3,72592	-1,48472
4,90	4,14630	-0,36067	2,23754	0,50540	-3,85703	-1,49543
4,91	4,05226	-0,37168	2,25191	0,50285	-3,98378	-1,50616
4,92	3,96233	-0,38284	2,26650	0,50028	-4,10647	-1,51692
4,93	3,87622	-0,39412	2,28133	0,49769	-4,22541	-1,52771
4,94	3,79369	-0,40555	2,29641	0,49510	-4,34084	-1,53853
4,95	3,71449	-0,41712	2,31173	0,49250	-4,45301	-1,54938
4,96	3,63840	-0,42883	2,32730	0,48988	-4,56213	-1,56025
4,97	3,56524	-0,44069	2,34314	0,48725	-4,66840	-1,57115
4,98	3,49480	-0,45270	2,35924	0,48461	-4,77200	-1,58209
4,99	3,42694	-0,46486	2,37561	0,48196	-4,87310	-1,59305
5,00	3,36148	-0,47718	2,39226	0,47930	-4,97185	-1,60403
5,01	3,29830	-0,48966	2,40920	0,47662	-5,06840	-1,61505
5,02	3,23726	-0,50231	2,42642	0,47394	-5,16288	-1,62610
5,03	3,17823	0,51512	2,44395	0,47124	-5,25540	-1,63717
5,04	3,12111	-0,52811	2,46179	0,46853	-5,34609	-1,64827
5,05	3,06578	-0,54127	2,47994	0,46580	-5,43505	-1,65941
5,06	3,01216	-0,55461	2,49841	0,46307	-5,52237	-1,67057
5,07	2,96015	-0,56813	2,51722	0,46032	-5,60815	-1,68176
5,08	2,90967	-0,58185	2,53636	0,45756	-5,69246	-1,69298
5,09	2,86063	-0,59575	2,55585	0,45478	-5,77540	-1,70423
5,10	2,81297	-0,60986	2,57570	0,45200	-5,85703	-1,71550
5,11	2,76661	-0,62416	2,59591	0,44920	-5,93742	-1,72681
5,12	2,72149	-0,63867	2,61650	0,44638	-6,01664	-1,73815
5,13	2,67756	-0,65340	2,63748	0,44356	-6,09474	-1,74952
5,14	2,63474	-0,66834	2,65885	0,44072	-6,17179	-1,76091
5,15	2,59300	-0,68351	2,68063	0,43787	-6,24784	-1,77234
5,16	2,55227	-0,69891	2,70283	0,43500	-6,32293	-1,78380
5,17	2,51251	-0,71454	2,72545	0,43213	-6,39712	-1,79528
5,18	2,47368	-0,73041	2,74852	0,42924	-6,47045	-1,80680
5,19	2,43574	-0,74653	2,77205	0,42633	-6,54296	-1,81834
5,20	2,39864	-0,76290	2,79604	0,42341	-6,61469	-1,82992
5,21	2,36235	-0,77953	2,82051	0,42048	-6,68568	-1,84153
5,22	2,32683	-0,79643	2,84547	0,41754	-6,75597	-1,85316
5,23	2,29205	-0,81362	2,87094	0,41458	-6,82558	-1,86483
5,24	2,25798	-0,83106	2,89694	0,41160	-6,89455	-1,87653
5,25	2,22459	-0,84881	2,92348	0,40862	-6,96291	-1,88826
5,26	2,19184	-0,86686	2,95057	0,40562	-7,03069	-1,90002
5,27	2,15971	-0,88521	2,97823	0,40260	-7,09792	-1,91181
5,28	2,12818	-0,90388	3,00648	0,39957	-7,16462	-1,92363
5,29	2,09722	-0,92288	3,03534	0,39653	-7,23081	-1,93548
5,30	2,06681	-0,94221	3,06482	0,39347	-7,29653	-1,94737
5,31	2,03692	-0,96188	3,09495	0,39039	-7,36178	-1,95928
5,32	2,00753	-0,98191	3,12575	0,38731	-7,42660	-1,97123
5,33	1,97863	-1,00231	3,15723	0,38420	-7,49100	-1,98320
5,34	1,95020	-1,02308	3,18943	0,38109	-7,55500	-1,99521
5,35	1,92221	-1,04424	3,22235	0,37795	-7,61863	-2,00725

$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
5,36	1,89464	-1,06581	3,25603	0,37481	-7,68189	-2,01933
5,37	1,86749	-1,08778	3,29250	0,37164	-7,74481	-2,03143
5,38	1,84074	-1,11019	3,32578	0,36847	-7,80739	-2,04357
5,39	1,81436	-1,13303	3,36189	0,36527	-7,86976	-2,05574
5,40	1,78835	-1,15634	3,39886	0,36206	-7,93165	-2,06794
5,41	1,76269	-1,18011	3,43673	0,35884	-7,99334	-2,08017
5,42	1,73737	-1,20437	3,47553	0,35560	-8,05476	-2,09244
5,43	1,71237	-1,22913	3,51529	0,35234	-8,11593	-2,10473
5,44	1,68769	-1,25442	3,55604	0,34907	-8,17684	-2,11706
5,45	1,66330	-1,28024	3,59782	0,34578	-8,23753	-2,12943
5,46	1,63921	-1,30662	3,64068	0,34248	-8,29799	-2,14182
5,47	1,61538	-1,33358	3,68464	0,33916	-8,35825	-2,15425
5,48	1,59183	-1,36115	3,72975	0,33582	-8,41830	-2,16671
5,49	1,56853	-1,38933	3,77605	0,33246	-8,47817	-2,17921
5,50	1,54548	-1,41816	3,82360	0,32909	-8,53785	-2,19174
5,51	1,52267	-1,44766	3,87244	0,32571	-8,59737	-2,20430
5,52	1,50008	-1,47785	3,92261	0,32230	-8,65672	-2,21690
5,53	1,47771	-1,50877	3,97419	0,31888	-8,71592	-2,22953
5,54	1,45555	-1,54044	4,02721	0,31544	-8,77498	-2,24219
5,55	1,43359	-1,57289	4,08175	0,31199	-8,83391	-2,25489
5,56	1,41183	-1,60616	4,13786	0,30851	-8,89271	-2,26762
5,57	1,39025	-1,64027	4,19561	0,30502	-8,95138	-2,28039
5,58	1,36885	-1,67527	4,25507	0,30151	-9,00995	-2,29319
5,59	1,34762	-1,71118	4,31633	0,29799	-9,06842	-2,30602
5,60	1,32655	-1,74806	4,37945	0,29444	-9,12678	-2,31889
5,61	1,30564	-1,78594	4,44452	0,29088	-9,18506	-2,33180
5,62	1,28488	-1,82487	4,51163	0,28730	-9,24325	-2,34474
5,63	1,26426	-1,86489	4,58087	0,28370	-9,30137	-2,35771
5,64	1,24378	-1,90605	4,65235	0,28008	-9,35942	-2,37072
5,65	1,22344	-1,94842	4,72617	0,27644	-9,41740	-2,38377
5,66	1,20321	-1,99204	4,80244	0,27279	-9,47532	-2,39685
5,67	1,18311	-2,03697	4,88129	0,26911	-9,53319	-2,40996
5,68	1,16312	-2,08329	4,96284	0,26542	-9,59101	-2,42312
5,69	1,14324	-2,13106	5,04723	0,26171	-9,64880	-2,43630
5,70	1,12346	-2,18035	5,13461	0,25797	-9,70654	-2,44953
5,71	1,10377	-2,23124	5,22514	0,25422	-9,76426	-2,46279
5,72	1,08418	-2,28382	5,31899	0,25045	-9,82195	-2,47609
5,73	1,06468	-2,33818	5,41633	0,24666	-9,87962	-2,48942
5,74	1,04526	-2,39441	5,51736	0,24284	-9,93727	-2,50279
5,75	1,02592	-2,45265	5,62229	0,23901	-9,99491	-2,51620
5,76	1,00665	-2,51293	5,73134	0,23516	-10,05255	-2,52964
5,77	0,98745	-2,57545	5,84475	0,23128	-10,11019	-2,54312
5,78	0,96831	-2,64031	5,96280	0,22739	-10,16782	-2,55664
5,79	0,94923	-2,70766	5,08575	0,22347	-10,22547	-2,57020
5,80	0,93021	-2,77765	6,21392	0,21954	-10,28312	-2,58380
5,81	0,91124	-2,850045	6,34763	0,21558	-10,34080	-2,59743
5,82	0,89231	-2,92623	6,48726	0,21160	-10,39849	-2,61110
5,83	0,87342	-3,00519	6,63318	0,20760	-10,45621	-2,62481
5,84	0,85458	-3,08755	6,78584	0,20358	-10,51395	-2,63856

$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
5,85	0,83577	-3,17354	6,94568	0,19953	-10,57173	-2,65234
5,86	0,81699	-3,26342	7,11324	0,19547	-10,62955	-2,66617
5,87	0,79823	-3,35747	7,28907	0,19138	-10,68740	-2,68003
5,88	0,77950	-3,45599	7,47378	0,18726	-10,74530	-2,69394
5,89	0,76078	-3,55933	7,66806	0,18313	-10,80325	-2,70788
5,90	0,74208	-3,66787	7,87265	0,17897	-10,86125	-2,72186
5,91	0,72339	-3,78201	8,08839	0,17479	-10,91931	-2,73589
5,92	0,70471	-3,90222	8,31620	0,17059	-10,97742	-2,74995
5,93	0,68604	-4,02902	8,55711	0,16636	-11,03560	-2,76405
5,94	0,66736	-4,16298	8,81227	0,16211	-11,09384	-2,77819
5,95	0,64868	-4,30473	9,08295	0,15783	-11,15216	-2,79238
5,96	0,62999	-4,45501	9,37061	0,15353	-11,21055	-2,80660
5,97	0,61129	-4,61463	9,67687	0,14920	-11,26901	-2,82087
5,98	0,59257	-4,78451	10,00358	0,14485	-11,32756	-2,83518
5,99	0,57384	-4,96569	10,35282	0,14048	-11,38619	-2,84953
6,00	0,55509	-5,15938	10,72700	0,13608	-11,44491	-2,86392
6,01	0,53631	-5,36694	11,12885	0,13166	-11,50372	-2,87835
6,02	0,51750	-5,58995	11,56152	0,12721	-11,56263	-2,89283
6,03	0,49867	5,83025	12,02869	0,12273	-11,62163	-2,90735
6,04	0,47979	-6,08996	12,53459	0,11823	-11,68074	-2,92191
6,05	0,46088	-6,37157	13,08423	0,11370	-11,73996	-2,93651
6,06	0,44192	-6,67802	13,68347	0,10914	-11,79928	-2,95116
6,07	0,42292	-7,01282	14,33932	0,10456	-11,85872	-2,96585
6,08	0,40387	-7,38014	15,06013	0,09995	-11,91827	-2,98058
6,09	0,38476	-7,78502	15,85599	0,09531	-11,97794	-2,99536
6,10	0,36560	-8,23362	16,73920	0,09065	-12,03774	-3,01018
6,11	0,34637	-8,73351	17,72489	0,08596	-12,09766	-3,02505
6,12	0,32709	-9,29410	18,83192	0,08124	-12,15771	-3,03996
6,13	0,30773	-9,92728	20,08404	0,07649	-12,21790	-3,05492
6,14	0,28830	-10,64827	21,51167	0,07171	-12,27823	-3,06992
6,15	0,26880	-11,47682	23,15435	0,06691	-12,33870	-3,08497
6,16	0,24922	-12,43912	25,06446	0,06207	-12,39931	-3,10006
6,17	0,22955	-13,57064	27,31290	0,05721	-12,46008	-3,11520
6,18	0,20980	-14,92054	29,99802	0,05231	-12,52100	-3,13039
6,19	0,18996	-16,55913	33,26044	0,04739	-12,58207	-3,14562
6,20	0,17003	-18,59053	37,30826	0,04243	-12,64331	-3,16090
6,21	0,14999	-21,17572	42,46378	0,03745	-12,70471	-3,17623
6,22	0,12986	-24,57764	49,25258	0,03243	-12,76628	-3,19160
6,23	0,10962	-29,25696	58,59608	0,02738	-12,82802	-3,20702
6,24	0,08926	-36,10105	72,26902	0,02231	-12,88994	-3,22249
6,25	0,06880	-47,06687	94,18533	0,01719	-12,95204	-3,23801
6,26	0,04821	-67,48758	135,01132	0,01205	-13,01432	-3,25358
6,27	0,02750	-118,87545	237,77153	0,00687	-13,07680	-3,26920
6,28	0,00666	-492,88646	985,77792	0,00167	-13,13947	-3,28487

**Основы динамики сооружений**

**6.1. Основные положения**

По характеру воздействия на сооружение различают нагрузки статические и динамические. Нагрузки считаются статическими, если их изменение протекает очень медленно (с бесконечно малым приращением во времени), без толчков, ударов. К динамическим относятся нагрузки, которые могут изменять свою величину, направление или положение в относительно короткие промежутки времени. Динамические нагрузки являются функциями времени и обозначаются  $P(t)$ ,  $q(t)$ ,  $m(t)$ . Все параметры, зависящие от динамических нагрузок (например, усилия, перемещения, напряжения) так же будут функциями времени и записываются  $M(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $\Delta(t)$ ,  $\sigma(t)$ , и т.д. Динамические нагрузки сообщают ускорения массам сооружения, вызывают появление инерционных сил и колебания сооружения.

Динамика сооружений – это раздел строительной механики, в котором изучаются принципы и методы расчета сооружений на действие динамических нагрузок.

Динамические расчеты выполняются с целью решения двух основных задач: определение частот колебаний системы и проверка ее на резонанс; определение наибольших (амплитудных) значений внутренних сил и перемещений, вызываемых динамической нагрузкой. Приведем наиболее характерные в строительной практике виды динамических нагрузок.

Гармоническая (вибрационная) нагрузка – нагрузка, изменяющаяся периодически по определенному закону. Нагрузки такого характера создаются при вращательном и вращательно-поступательном движении неуравновешенных частей машин и механизмов (электромоторы, турбины, станки). Для сооружений вибрационные нагрузки представляют особую опасность, так как вызываемые ими усилия и перемещения зависят не только от величины (ам-

плитуды) нагрузки, но и в значительной мере от частоты ее воздействия.

Ударная нагрузка (удар в определенном месте сооружения) характеризуется тем, что прикладывается в очень короткий промежуток времени с резким изменением скорости соударяемых тел. Она может быть неподвижной и подвижной, хаотичной (удары льдин) и периодической (механический кузнечный молот).

Сейсмическая нагрузка, включающая одновременно удары, толчки, сдвиги земной коры, является большой опасностью для инженерных сооружений по сложности динамического воздействия.

Подвижная нагрузка – меняющая свое положение на сооружении (поезда, автомобили) – относится, как правило, к сложным динамическим воздействиям, вызывающим колебания сооружения.

Ниже рассмотрены простейшие случаи расчетов стержневых систем при действии динамической нагрузки, изменяющейся по гармоническому закону, как наиболее часто встречающейся в инженерной строительной практике.

Колебания систем, вызываемые динамическими нагрузками, подразделяются на свободные и вынужденные. Если упругую систему какой-либо динамической нагрузкой вывести из состояния равновесия, а затем удалить воздействие, то массы системы, получив ускорения, будут совершать колебания относительно устойчивого положения равновесия. Такие колебания системы называются свободными. Частным случаем свободных колебаний являются собственные колебания, когда свободные колебания совершаются по типу стоячей волны с одной определенной частотой и формой деформации системы.

В системе с одной степенью свободы свободные колебания всегда являются собственными колебаниями. Система с  $n$  степенями свободы обладает спектром  $n$  собственных колебаний.

Вынужденные колебания создаются постоянно действующей на систему динамической нагрузкой, вызывающей непрерывные движения масс от-

носителем положения равновесия.

Колебания могут быть классифицированы по виду вызываемых ими в системе основных деформаций, а именно: поперечные колебания (в направлении, перпендикулярном к продольной оси стержня, вызывающие его изгиб); продольные (вдоль продольной оси стержня), крутильные, изгибно-крутильные, вызывающие деформации изгиба и кручения и др.

Колебания могут быть линейными и нелинейными. При линейных колебаниях усилия и перемещения системы находятся в линейной зависимости от величины возмущающих нагрузок. Это условие будет выполняться, если материал системы находится в упругой стадии работы.

Ниже рассматриваются поперечные колебания, как наиболее характерные для строительных конструкций. Будем так же полагать, что исследуемые системы находятся в упругой стадии работы материала и совершают линейные колебания.

Основными методами решения задач динамики сооружений являются статический (кинетостатический) и энергетический методы.

*Статический метод* (точный) основан на использовании уравнений динамического равновесия, в которые дополнительно входят (согласно принципу Даламбера) силы инерции перемещающихся масс.

При расчете сложных систем применение статического метода может вызвать значительные трудности ввиду громоздкости вычислений и в этих случаях часто используются приближенные методы и способы.

В основу *энергетического метода* (приближенного) положен закон сохранения энергии, согласно которому, при отсутствии сил сопротивления, сумма потенциальной и кинетической энергий колеблющейся упругой системы в любой момент времени остается постоянной. При использовании этого метода основная задача состоит в отыскании такого деформированного состояния системы, которое наиболее близко по форме к действительному ее состоянию при колебаниях. Уравнения изогнутых осей стержней деформированной системы принимаются приближенно, и в этом состоит приближен-

ность энергетического метода.

В динамике сооружений основной характеристикой системы является число степеней ее свободы – количество независимых геометрических параметров, определяющих положение всех масс в любой момент времени при любых деформациях системы. Этот показатель предопределяет ход расчета и играет в расчетах динамики такую же роль, как, например, число возможных перемещений узлов системы при расчете стержневых систем методом перемещений. Чем большим количеством перемещений обладают массы системы, тем сложнее ее расчет. С целью упрощения расчета обычно пренебрегают угловыми перемещениями сосредоточенных масс, учитывают только их линейные смещения и тогда каждая, не имеющая связей масса, как точка в плоскости, обладает двумя степенями свободы. Кроме того, пренебрегают весьма малыми перемещениями масс, вызванными не основными видами деформаций элементов системы при данном виде колебаний. Примером может служить невесомый упругий стержень с массой  $m$ , расположенной в его вершине (рис. 6.1).

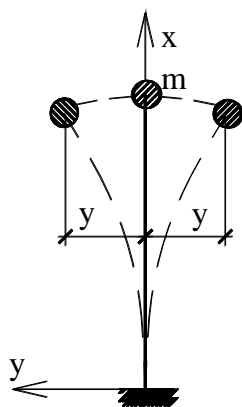


Рис. 6.1

Пренебрегая продольными деформациями стержня и обусловленным ими вертикальным смещением массы (рассматриваются поперечные колебания), деформациями сдвига и вертикальным смещением массы при изгибе стержня (как малым по сравнению с горизонтальным перемещением от изгиба стержня), получаем систему с одной степенью свободы,

так как положение массы известно, если известен параметр  $y$ .

На рис. 6.2а,б приведена система с двумя массами, обладающая двумя степенями свободы, а на рис. 6.3 – с тремя массами и четырьмя степенями свободы.

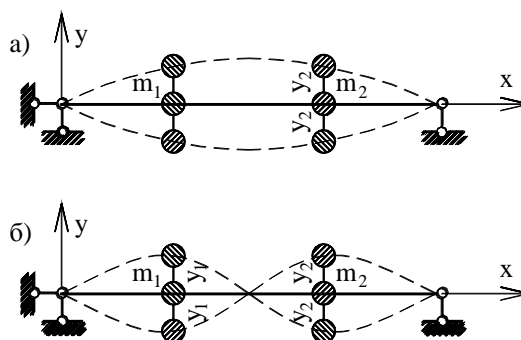


Рис. 6.2

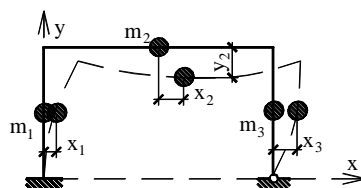


Рис. 6.3

При учете собственной массы стержней упругой системы число степеней ее свободы будет равно бесконечности. На рис. 6.4а приведена балка с постоянной по ее длине распределенной массой  $m$ . Даже в этом простейшем случае число параметров, характеризующих положение всех точек балки в деформированном состоянии равно бесконечности. Разбив эту балку на участки и заменив в пределах каждого участка распределенную массу сосредоточенной, получим систему с конечным числом степеней свободы (рис. 6.4б).

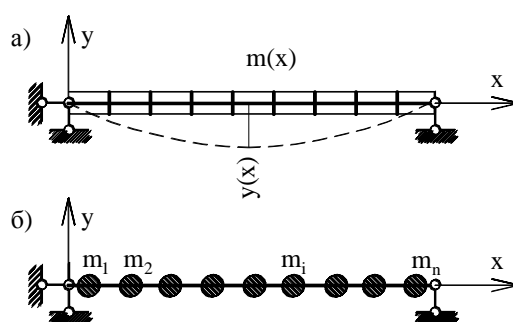


Рис. 6.4

## 6.2. Свободные колебания систем с одной степенью свободы без учета сил сопротивления

Для лучшего уяснения процесса колебаний сначала рассмотрим их без учета сил сопротивления на примере невесомой простой балки, масса кото-



рой расположена в середине пролета этой балки (рис. 6.5). В любой момент времени перемещение  $y$  массы зависит от силы упругости балки  $S$  (восстанавливающая сила) и силы инерции движущейся массы  $I_m$ . Сила упругости

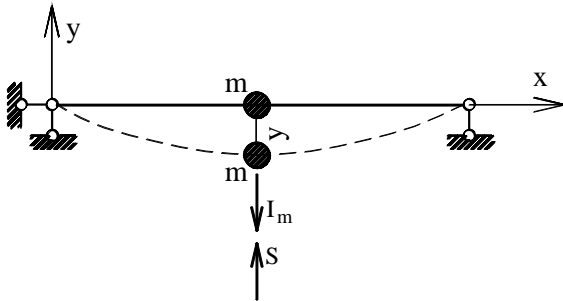


Рис. 6.5

$S$  стремится вернуть балку на линию равновесия и при любых отклонениях массы будет направлена к линии равновесия.

Для упругих систем эта сила пропорциональна величине отклонения массы от начального положения и может

быть принята равной  $S = C \cdot y$ , где  $C$  – жесткость балки, определяемая силой, необходимой для перемещения точки расположения массы по направлению колебаний на единицу;  $y$  – отклонение массы от положения равновесия.

Сила инерции  $I_m$  и выражается зависимостью  $I_m = -m \frac{d^2 y}{dt^2} = -my''$ , где  $y''$  – ускорение массы (знак «минус» указывает, что сила инерции направлена в сторону, противоположную ускорению).

В любой момент времени уравнение динамического равновесия ( $\sum Y = 0$ ) массы имеет вид:

$$S - I_m = 0,$$

или

$$my'' + C \cdot y = 0. \quad (6.1)$$

Разделив на  $m$  слагаемые равенства (6.1) и обозначив

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}, \quad (6.2)$$

получаем уравнение свободных колебаний системы с одной степенью свободы без учета сил сопротивления:

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Решение этого однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \quad (6.3)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий:

если  $t = 0$ ,  $y = y_0$  – начальное отклонение массы;

если  $t = 0$ ,  $v = v_0$  – начальная скорость движения массы.

Из первого условия  $C_2 = y_0$ .

Из второго условия  $y' = C_1 \omega \cos \omega t - y_0 \omega \sin \omega t$

При  $t = 0$ ,  $y' = v_0 = C_1 \omega$  и  $C_1 = \frac{v_0}{\omega}$ .

Подставляя в уравнение (6.3) имеем:

$$y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + y_0 \cos \omega t. \quad (6.4)$$

Уравнение (6.3) можно привести к виду:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (6.5)$$

где  $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$  – амплитуда колебаний,  $\varphi$  – начальная фаза, определяемая выражением  $\varphi = \text{arctg}\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$ .

Если в первом условии при  $t = 0$  принять  $y = 0$ , то  $C_2 = y_0 = 0$  и уравнение колебаний (6.4) принимает вид:

$$y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (6.6)$$

Уравнение (6.6) является функцией времени, график которой показан на рис. 6.6. Колебания совершаются по синусоидальному закону. На рис. 6.6 штриховой линией показан график функции равенства (6.4), из которого следует, что при значениях  $t = 0$ ,  $t = \frac{\pi}{\omega}$ ,  $t = \frac{2\pi}{\omega}$  и т.д. масса не будет находиться на линии равновесия, а будет смещена на величину  $y_0$ .

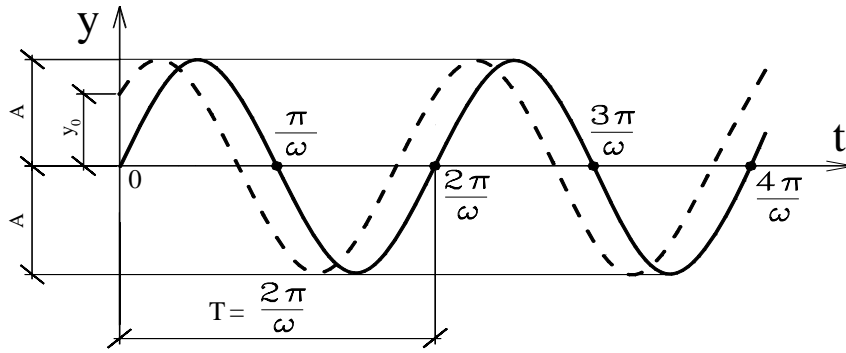


Рис. 6.6

Время, за которое масса совершает один полный цикл колебаний, называют *периодом колебаний*. По рис. 6.6

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (6.7)$$

Число полных циклов колебаний в единицу времени носит название *частоты колебаний*. Из равенства (6.7) имеем:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (6.8)$$

Частоту  $\omega$ , равную числу полных циклов колебаний в течение  $2\pi$  секунд, принято называть *круговой частотой*.

Частота колебаний в одну секунду выражается в герцах и равна

$$V = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

В практических расчетах часто пользуются так называемой *технической частотой*, выражающей число полных циклов колебаний за одну минуту. По формуле (6.8) имеем:

$$n = \frac{60}{T} = \frac{60}{2\pi} \omega \left( \frac{\text{колеб.}}{\text{мин}} \right). \quad (6.9)$$

Выше (6.2) обозначено  $\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$ , где  $C$  – сила, обеспечивающая перемещение, равное единице.

По отношению к полному  $y_{cm}$ , вызванному силой  $P$ , значение  $C$  выразится равенством:

$$C = \frac{P}{y_{cm}} = \frac{mg}{y_{cm}},$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Подставив последнее выражение в формулу (6.2), имеем:

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{my_{cm}}} = \sqrt{\frac{g}{y_{cm}}} (c^{-1}). \quad (6.10)$$

Как известно  $g = 981 \frac{см}{сек^2}$ . Приняв  $g \approx (10\pi)^2$  и подставив выражение

(6.10) в формулу технической частоты (6.9), получаем:

$$n = \frac{60}{2\pi} 10\pi \sqrt{\frac{1}{y_{cm}}} = \frac{300}{\sqrt{y_{cm}}} \left( \frac{\text{колеб.}}{\text{мин}} \right), \quad (6.11)$$

где  $y_{cm}$  должно быть взято в сантиметрах.

Формулу (6.2) можно преобразовать к другому виду. Из определения жесткости ( $C$ ) системы вытекает, что должно соблюдаться условие  $C\delta_{11} = 1$ ,

откуда  $C = \frac{1}{\delta_{11}}$ , где  $\delta_{11}$  – перемещение точки расположения массы по на-

правлению колебания, вызванное силой  $P = 1$ . Тогда формула (6.2) принимает вид:

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}. \quad (6.12)$$

Из формул (6.7), (6.8) и (6.10) видно, что для каждой конкретной системы частота и период колебаний остаются постоянными величинами и зависят только от упругих свойств этой системы и величины массы. Они не зависят от начальных условий, вызывающих движение массы и носят название *основных динамических характеристик системы*.

Рассмотрим, как изменяется потенциальная и кинетическая энергия системы в процессе ее колебаний (рис. 6.6). При отклонении массы от положения статического равновесия ее перемещению препятствует сила упругости, замедляя движение массы. В момент наибольшего отклонения массы ее скорость равна нулю и равна нулю ее кинетическая энергия. В это время по-

тенциальная энергия (энергия изгиба) достигает своего максимального значения и с ускорением возвращает массу к линии равновесия. К моменту расположения массы на линии равновесия потенциальная энергия убывает до нуля, но в это время скорость движения массы и ее кинетическая энергия достигает максимума и масса продолжает движение от линии равновесия, достигая максимального отклонения в обратном направлении и т.д. Таким образом, при колебаниях системы происходит переход одного вида энергии в другой.

Отметим, что приведенные выше зависимости и выводы будут справедливы для любых стержневых систем с одной степенью свободы при линейных колебаниях массы.

### 6.3. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы без учета сил сопротивления. Явление резонанса

Этот вид колебаний рассмотрим также на примере балки, изображенной на рис. 6.7. Примем динамическую нагрузку в виде гармонической, изме-

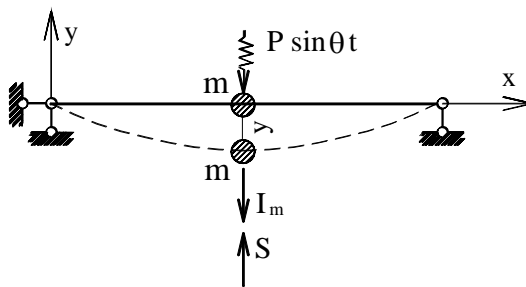


Рис. 6.7

няющейся по синусоидальному закону, т.е.  $P(t) = P \sin \theta t$ , где  $P$  и  $\theta$  – соответственно максимальная составляющая (амплитуда) нагрузки и круговая частота возмущающей силы. Приняв, что направление перемещения массы  $m$

совпадает с направлением действия силы  $P(t)$ , составим уравнение динамического равновесия

$$\sum Y = 0; \quad -P(t) - I_m + S = 0 \quad \text{или, сохраняя предыдущие обозначения,}$$

$$m y'' + C y = P \sin \theta t .$$

Разделив на  $m$  слагаемые последнего равенства и обозначив  $\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$ ,

получаем неоднородное дифференциальное уравнение в виде

$$y'' + \omega^2 y = \frac{P}{m} \sin \theta t. \quad (6.13)$$

Решение уравнения (6.13) в установившемся режиме имеет вид:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{P}{m(\omega^2 - \theta^2)} \sin \theta t, \quad (6.14)$$

Из равенства (6.14) следует, что вынужденные колебания совершаются с той же частотой, которую имеет возмущающая сила, а амплитуда вынужденных колебаний ( $y_{дин}$ ) зависит от величины составляющей  $P$  возмущающей силы  $P(t)$  и соотношения частот свободных и вынужденных колебаний.

Динамический прогиб можно представить в виде:

$$y_{дин} = \frac{P}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{P}{m\omega^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)} = \frac{P}{m \frac{C}{m} \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)} = \frac{P}{C} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)} = y_{ст} \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)},$$

или 
$$y_{дин} = y_{ст} \mu, \quad (6.15)$$

где 
$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}. \quad (6.16)$$

В выражении (6.15)  $y_{ст}$  – статический прогиб, т.е прогиб, вызываемый статическим действием амплитудного значения динамической нагрузки  $P(t)$ .

Отвлеченная величина  $\mu$  (6.16) носит название динамического коэффициента и в системах с одной степенью свободы выражает отношение динамических величины (усилий, прогибов) к их статическим величинам. График изменения численных значений динамического коэффициента представлен на рис. 6.8. Если  $\theta > \omega$ , то динамический коэффициент  $\mu$  имеет отрицательные значения и правая кривая располагается ниже оси  $\frac{\theta}{\omega}$  (на рис. 6.8 показана пунктирной линией). Обычно значения коэффициента  $\mu$  принимают-

ся по абсолютной величине и обе кривые на графике располагаются выше оси  $\frac{\theta}{\omega}$  (рис. 6.8).

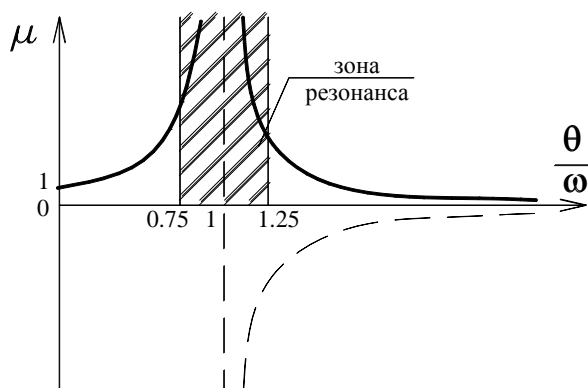


Рис. 6.8

Из формулы (6.16) видно, что с приближением частоты возмущающей силы  $\theta$  к частоте свободных колебаний  $\omega$  динамический коэффициент, равно как и динамический прогиб (6.15), стремительно возрастают. При равенстве частот ( $\theta = \omega$ ) динамический коэффициент становится равным бесконечности. Этот случай в технике носит название явления резонанса и представляет большую опасность для сооружения, так как усилия, перемещения и напряжения в элементах системы достигают больших значений. Для ответственных сооружений недопустимы не только явления резонанса, но и условия, при которых эти сооружения находились бы в зоне резонанса (рис. 6.8). Во избежание резонанса обычно обеспечивается условие, чтобы частота свободных колебаний системы отличалась от частоты вынужденных ее колебаний на 25-30%.

#### 6.4. Свободные колебания систем с одной степенью свободы при учете сил сопротивления

Из графика, приведенного на рис. 6.6 следует, что масса, выведенная динамическим воздействием из состояния равновесия, будет совершать колебания с постоянной амплитудой неограниченное время. В реальных условиях процесс колебаний протекает иначе, так как неизбежны силы сопротивления,

препятствующие колебаниям массы. Это сопротивление окружающей среды (например, воздуха), трение в опорных устройствах системы, внутреннее трение частиц материала в процессе деформирования системы и др. При наличии сил сопротивления часть энергии системы расходуется (необратимо) на преодоление этих сил и свободные колебания затухают. Влияние сил сопротивления на колеблющуюся систему учитывается обычно в предположении, что эти силы пропорциональны скорости колебания системы.

Затухающие колебания с принятыми начальными условиями проследим на примере упругой невесомой балки с сосредоточенной массой  $m$  (рис. 6.9).

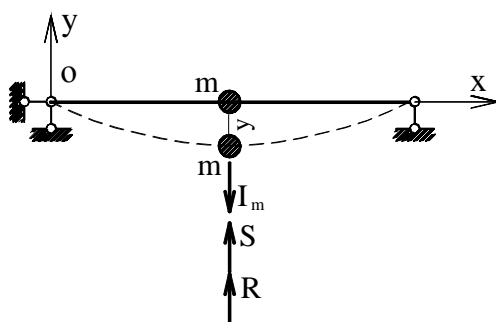


Рис. 6.9

На выведенную из состояния равновесия массу  $m$  действуют сила инерции  $I_m = -my''$ , сила упругости  $S = Cy$  и сила сопротивления  $R = \beta y'$ .

Уравнение динамического равновесия имеет вид:

$$\sum Y = 0; \quad S + R - I_m = 0, \text{ или } my'' + \beta y' + Cy = 0.$$

Разделив слагаемые последнего равенства на  $m$ , учитывая соотношение (6.2) и обозначив  $\frac{\beta}{m} = 2k$ , получаем:

$$y'' + 2k y' + \omega^2 y = 0 \quad (6.17)$$

Решение уравнения (6.17) имеет вид:

$$y = e^{-kt} \left( C_1 \sin(\sqrt{\omega^2 - k^2} t) + C_2 \cos(\sqrt{\omega^2 - k^2} t) \right), \quad (6.18)$$

где  $C_1$  и  $-C_2$  постоянные интегрирования, которые могут быть найдены из начальных условий:

$$\text{при } t = 0 \quad y = y_0; \quad v = v_0,$$

где  $y_0$  и  $v_0$  — соответственно начальное отклонение массы от положения равновесия и ее скорость.

По первому условию  $y = C_2 \cdot 1 = y_0$  и  $C_2 = y_0$ .



По второму условию

$$y' = e^{-kt} \left( C_1 \cos(\sqrt{\omega^2 - k^2} t) \sqrt{\omega^2 - k^2} - C_2 \sin(\sqrt{\omega^2 - k^2} t) \sqrt{\omega^2 - k^2} \right) - k e^{-kt} \left( C_1 \sin(\sqrt{\omega^2 - k^2} t) + C_2 \cos(\sqrt{\omega^2 - k^2} t) \right)$$

Если  $t = 0$ ,  $v = (C_1 \sqrt{\omega^2 - k^2}) - k y_0 = v_0$ ,  $C_1 = \frac{v_0 + k y_0}{\sqrt{\omega^2 - k^2}}$  и уравнение

колебаний (6.18) принимает вид:

$$y = e^{-kt} \left( \frac{v_0 + k y_0}{\sqrt{\omega^2 - k^2}} \sin(\sqrt{\omega^2 - k^2} t) + y_0 \cos(\sqrt{\omega^2 - k^2} t) \right). \quad (6.19)$$

Если  $y_0 = 0$  (при  $t = 0$  масса находилась на линии статического равновесия),

то

$$y = e^{-kt} \frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 - k^2}} \sin(\sqrt{\omega^2 - k^2} t) \quad (6.20)$$

Решение уравнения (6.20) справедливо при условии  $\omega^2 > k^2$ .

При  $\sin(\sqrt{\omega^2 - k^2} t) = 1$  максимальные значения прогиба:

$$y_{\max} = e^{-kt} \frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 - k^2}}. \quad (6.21)$$

Функция (6.20) имеет нулевые ординаты на оси  $t$ , если:

$$t = 0; \quad t = \frac{\pi}{\sqrt{\omega^2 - k^2}}; \quad t = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - k^2}} \text{ и т.д.}$$

Из уравнение (6.20) следует, что с течением времени амплитуда колебаний уменьшается до нуля и колебания затухают. График таких свободных колебаний показан на рис. 6.10. В этом случае период и круговая частота свободных колебаний определяются зависимостями:

$$T_c = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - k^2}} \quad (6.22)$$

$$\omega_c = \sqrt{\omega^2 - k^2} \quad (6.23)$$

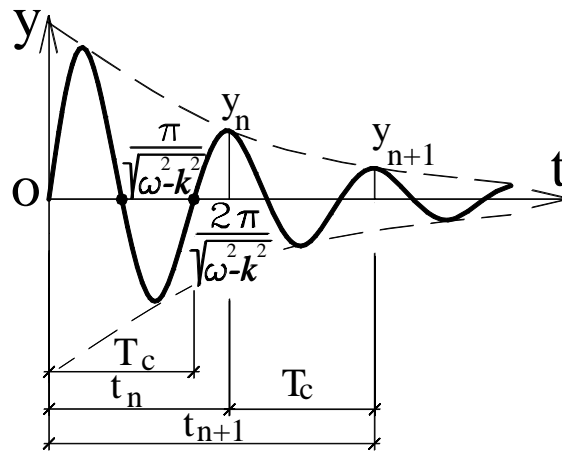


Рис. 6.10

Таким образом, при наличии сил сопротивления свободные колебания системы являются затухающими. Амплитуда колебаний в этом случае уменьшается до нуля. Если силы сопротивления и масса постоянны, то круговая частота и период колебаний так же остаются постоянными, зависящими от упругих свойств системы.

Для большинства инженерных сооружений коэффициент  $k$  мал в сравнении с частотой свободных колебаний  $\omega$ . Поэтому в практических расчетах обычно пренебрегают силами сопротивления и определяют приближенные значения периода и частоты свободных колебаний по формулам (6.7) и (6.8), вместо (6.22) и (6.23).

В качестве меры затухания колебаний часто используют так называемый логарифмический декремент колебаний. Он определяется так. В моменты времени  $t_n$  и  $t_{n+1}$  (см. рис. 6.10) амплитуды колебаний по формуле (6.21) будут:

$$y_n = e^{-kt_n} \frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 - k^2}}; \quad y_{n+1} = e^{-k(t_n+T_c)} \frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 - k^2}}.$$

Отношения этих амплитуд

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = e^{k(t_n+T_c-t_n)} = e^{kT_c}; \quad \ln\left(\frac{y_n}{y_{n+1}}\right) = kT_c = \text{const}.$$

Обозначим 
$$\gamma = \ln\left(\frac{y_n}{y_{n+1}}\right) = kT_c \quad . \quad (6.24)$$

Безразмерная постоянная величина  $\gamma$  носит название логарифмического декремента колебаний. Она также является динамической характеристикой системы и принимается по таблицам, имеющимся в справочной литературе.

### 6.5. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы при учете сил сопротивления

Для получения дифференциального уравнения этого вида колебаний воспользуемся рисунком (6.9), на котором сохраняются все силы, действующие на массу, и добавится возмущающая нагрузка, которую примем гармонической  $P(t) = P \sin \theta t$ , совпадающей по направлению (вниз) с перемещением массы. Тогда уравнение динамического равновесия будет:

$$\sum Y = S + R - I_m - P \sin \theta t = 0, \text{ или } my'' + \beta y' + Cy = P \sin \theta t$$

Сохранив принятые выше обозначения, имеем

$$y'' + 2ky' + \omega^2 y = \frac{P}{m} \sin \theta t \quad (6.25)$$

Решение уравнения (6.25) включает общее (6.18) и частное решение и имеет вид:

$$y = e^{-kt} \left( C_1 \sin(\sqrt{\omega^2 - k^2} t) + C_2 \cos(\sqrt{\omega^2 - k^2} t) \right) - \frac{P}{m \left( (\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\theta^2 k^2 \right)} \left( 2\theta k \cos \theta t - (\omega^2 - \theta^2) \sin \theta t \right), \quad (6.26)$$

где первое слагаемое выражает свободные колебания системы при наличии сил сопротивления, а второе – вынужденные колебания, причем первый множитель второго слагаемого – амплитуда колебаний ( $y_{\text{дин}}$ ).

После преобразований, как показано выше, уравнение (6.26) принимает вид:

$$y = e^{-kt} \left( \frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 - k^2}} \sin(\sqrt{\omega^2 - k^2} t) \right) - y_{\text{дин}} \left[ 2\theta k \cos \theta t - (\omega^2 - \theta^2) \sin \theta t \right] \quad (6.27)$$

Свободные колебания с течением времени затухают, и колебания сис-

темы принимают установившийся характер вынужденных колебаний, определяемых вторым слагаемым уравнения (6.27). После преобразований второе слагаемое уравнения (6.27) принимает вид:

$$y = y_{\text{дин}} \sin(\theta t + \varepsilon),$$

где

$$y_{\text{дин}} = \frac{P}{m\sqrt{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\theta^2 k^2}}. \quad (6.28)$$

Учитывая принятые ранее обозначения:

$$\omega^2 = \frac{C}{m}; \quad \gamma = kT; \quad \left( 2k = \frac{2\gamma}{T} = \frac{\gamma\omega}{\pi} \right),$$

амплитуду вынужденных колебаний

можно представить в виде

$$\begin{aligned} y_{\text{дин}} &= \frac{P}{m\sqrt{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\theta^2 k^2}} = \frac{P}{m\omega^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\theta^2 k^2}{\omega^4}}} = \\ &= \frac{P}{C} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\theta^2 \gamma^2}{\omega^2 \pi^2}}}, \end{aligned}$$

или

$$y_{\text{дин}} = y_{\text{ст}} \cdot \mu; \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\theta^2 \gamma^2}{\omega^2 \pi^2}}}, \quad (6.29)$$

где  $\mu$  – динамический коэффициент, зависимость которого от параметра  $\gamma$  можно представить в виде графика, который имеется в учебной и справочной литературе.

Из выражения (6.29) видно, что при совпадении частот  $\theta$  и  $\omega$  (случай резонанса) динамический коэффициент  $\mu$  не обращается в бесконечность (как это происходит без учета сил сопротивления), а имеет значение

$$\mu = \frac{\pi}{\gamma} \quad (\gamma \neq 0).$$

Для реальных конструкций абсолютная величина декремента

$\gamma$  значительно меньше единицы. Например, для металлических конструкций  $\gamma = 0,02 - 0,15$ , для деревянных –  $\gamma = 0,15 - 0,17$  т. д. Поэтому в случае резо-

нанса ( $\omega = \theta$ ) динамический коэффициент и амплитуда колебаний достигают недопустимо больших значений, и сооружению грозит разрушение, т.е. и в этом случае резонанс остается большой опасностью для сооружения.

### 6.6. Свободные колебания систем со многими степенями свободы

Рассмотрим эти колебания на примере упругой невесомой балки с  $n$  сосредоточенными массами без учета сил сопротивления (рис. 6.11). Рассматриваемая система обладает  $n$  степенями свободы, будет иметь  $n$  частот собственных колебаний  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , которым соответствуют  $n$  форм колебаний.

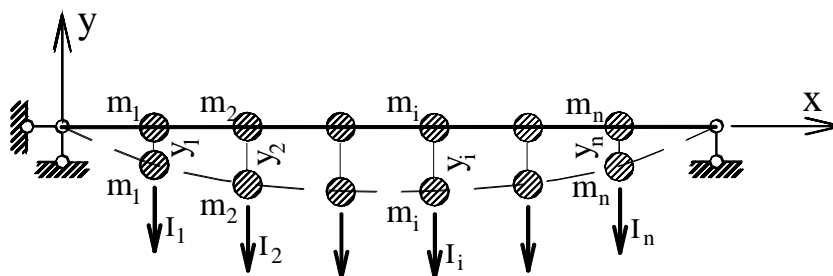


Рис. 6.11

Полные перемещения масс под действием инерционных сил  $I_1, I_2, \dots, I_n$  можно представить в виде:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}I_1 + \delta_{12}I_2 + \delta_{13}I_3 + \dots + \delta_{1n}I_n; \\ y_2 = \delta_{21}I_1 + \delta_{22}I_2 + \delta_{23}I_3 + \dots + \delta_{2n}I_n; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n = \delta_{n1}I_1 + \delta_{n2}I_2 + \delta_{n3}I_3 + \dots + \delta_{nn}I_n \end{cases} \quad (6.30)$$

где  $\delta_{ii}, \delta_{ik}, I_i$  – соответственно перемещения точек расположения масс, вызванные силами  $P=1$  и инерционные силы этих масс.

Так как силы инерции  $I_i = -m_i y_i''$ , то уравнения (6.30) можно записать



Разделив все слагаемые уравнений (6.32) на  $\omega^2$  и обозначив,  $\frac{1}{\omega^2} = \lambda$ , характеристическое уравнение частот, называемое *вековым уравнением*, получаем в виде:

$$D = \begin{vmatrix} (\delta_{11}m_1 - \lambda) & \delta_{12}m_2 & \dots & \delta_{1n}m_n \\ \delta_{21}m_1 & (\delta_{22}m_2 - \lambda) & \dots & \delta_{2n}m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1}m_1 & \delta_{n2}m_2 & \dots & (\delta_{nn}m_n - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (6.33)$$

Раскрыв равенство (6.33), получим алгебраическое уравнение  $n$ -ой степени относительно  $\lambda$ , а решив его найдем значение его корней  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

По формуле  $\omega_i = \sqrt{\frac{1}{\lambda_i}}$  находим частоты колебаний  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ .

Уравнение (6.33) справедливо для любых систем (балки, рамы, фермы и др.) как статически определимых, так и статически неопределимых. В последнем случае эпюры изгибающих моментов (балки, рамы) для определения перемещений  $\delta_{ii}$  должны быть построены от сил  $P_i = 1$  в заданной статически неопределимой системе, и поэтому при определении перемещений  $\delta_{ik}$  эпюры вспомогательного состояния ( $\bar{M}_k$ ) могут быть взяты в любой статически определимой основной системе метода сил.

В практических расчетах обычно нужно знать наименьшую частоту собственных колебаний  $\omega_{\min}$  (соответствует наибольшему значению корня  $\lambda_{\max}$ ), которую принято называть основной частотой колебаний системы.

### 6.7. Определение внутренних сил и перемещений при действии динамической нагрузки

При действии на систему динамической нагрузки гармонического характера массы системы будут совершать, кроме собственных колебаний, вынужденные колебания с той же частотой, что и частота возмущающей силы. Выше (п. 6.4) на примере системы с одной степенью свободы показано, что в реальных условиях, при наличии сил сопротивления, свободные колебания с

течением времени затухают. Поэтому их можно не учитывать и рассматривать систему при установившихся вынужденных колебаниях.

При вынужденных колебаниях перемещения масс системы происходят под влиянием действующих на них динамических нагрузок  $P(t)$  и сил инерции  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , приложенных в точках расположения этих масс. Если возмущающие динамические нагрузки подчиняются одному и тому же закону, обладают одной и той же частотой, то все параметры упругой системы, зависящие от этих нагрузок, в том числе инерционные силы, достигают своего амплитудного (наибольшего) значения в один и тот же момент времени. В тот же момент времени будут достигать своего максимального значения все внутренние силы и перемещения системы. Исходя из этого в линейно-деформируемой системе, максимальное значение, например, изгибающего момента  $M_{iD}$  в некотором ее сечении  $i$  определится выражением

$$M_{iD} = M_{ip} + \bar{M}_{i1}I_1 + \bar{M}_{i2}I_2 + \dots + \bar{M}_{in}I_n, \quad (6.34)$$

где  $M_{ip}$  – изгибающий момент в сечении  $i$ , вызванный статическим действием амплитудных значений динамических нагрузок;

$\bar{M}_{i1}, \bar{M}_{i2}, \dots, \bar{M}_{in}$  – изгибающие моменты в сечении  $i$ , вызванные поочередно прикладываемыми в местах расположения масс статическими силами  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , равными единице;

$I_1, I_2, \dots, I_n$  – максимальные значения инерционных сил.

Из формулы (6.34) видно, что эпюры динамических изгибающих моментов строятся по тому же принципу, что и окончательные эпюры изгибающих моментов при расчете статически неопределимых систем, например, методом перемещений. Проверки правильности эпюры динамических моментов ( $M_D$ ) в статически определимых и статически неопределимых системах остаются обычными. Например, для проверки правильности окончательной эпюры динамических моментов в статически неопределимой системе используются статическая и кинематическая проверки.



Эпюры поперечных ( $Q_D$ ) и продольных ( $N_D$ ) сил могут быть построены тем же приемом, что и  $M_D$  (6.34). В расчетной практике чаще используется другой способ. По эпюре динамических моментов  $M_D$  обычными приемами строится эпюра поперечных сил  $Q_D$ , а затем, из условий равновесия узлов, – эпюра продольных сил  $N_D$ . Проверки правильности построения этих эпюр остаются обычными. Можно ограничиться (для систем средней сложности) проверкой равновесия системы в целом, пользуясь уравнениями  $\sum M_k = 0$ ,  $\sum X = 0$  и  $\sum Y = 0$ , в которые должны войти опорные реакции, инерционные силы с учетом их фактического направления и заданные динамические нагрузки.

Перемещение любой точки системы ( $\Delta_{iD}$ ), вызванное динамической нагрузкой, по аналогии с формулой (6.34), можно выразить зависимостью:

$$\Delta_{iD} = \Delta_{ip} + \delta_{i1}I_1 + \delta_{i2}I_2 + \dots + \delta_{in}I_n, \quad (6.35)$$

где  $\Delta_{ip}$  – перемещение точки  $i$  системы от статического действия динамических нагрузок, равных по величине амплитудным своим значениям;

$\delta_{ik}$  – перемещения той же точки, вызванные статическими силами  $P=1$ , поочередно прикладываемыми в местах расположения масс  $m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_n$  по направлению колебаний;

$I_1, I_2, \dots, I_n$  – максимальные значения инерционных сил.

Из выражений (6.34) и (6.35) видно, что для определения амплитудных значений динамических усилий и перемещений необходимо знать максимальные значения инерционных сил, определение которых показано ниже.

### **6.8. Канонические уравнения для определения максимальных значений инерционных сил**

Рассмотрим вынужденные колебания упругой системы на примере невесомой балки с  $n$  массами, на которые действуют динамические нагрузки (рис 6.12).



$$y_i(t) = y_i \sin \theta t, \quad (6.37)$$

а вторая производная этого равенства

$$y_i''(t) = -\theta^2 y_i \sin \theta t.$$

Инерционная сила определяется равенством:

$$I_i(t) = -m_i y_i''(t),$$

или

$$I_i(t) = m_i \theta^2 y_i \sin \theta t.$$

С учетом (6.37),  $I_i(t) = m_i \theta^2 y_i(t)$ ,

$$\text{откуда} \quad y_i(t) = \frac{I_i(t)}{m_i \theta^2} \quad (6.38)$$

Тогда  $i$ -е уравнение системы (6.36) будет

$$\frac{I_i(t)}{m_i \theta^2} = \delta_{i1} I_1(t) + \delta_{i2} I_2(t) + \delta_{ii} I_i(t) + \dots + \delta_{in} I_n(t) + \Delta_{ip}(t) = 0,$$

$$\text{или} \quad \delta_{i1} I_1(t) + \delta_{i2} I_2(t) + \dots + \left( \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \theta^2} \right) I_i(t) + \dots + \delta_{in} I_n(t) + \Delta_{ip}(t) = 0.$$

На основании (6.38) имеем:

$$y_1(t) = \frac{I_1(t)}{m_1 \theta^2}; \quad y_2(t) = \frac{I_2(t)}{m_2 \theta^2}; \quad \dots \quad y_n(t) = \frac{I_n(t)}{m_n \theta^2}.$$

Подставив выражение  $y_i(t)$  в уравнение (6.36) и сгруппировав слагаемые, получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \delta_{i1} - \frac{1}{m_1 \theta^2} \right) I_1(t) + \delta_{i2} I_2(t) + \dots + \delta_{in} I_n(t) + \Delta_{ip}(t) = 0; \\ \delta_{21} I_1(t) + \left( \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2} \right) I_2(t) + \dots + \delta_{2n} I_n(t) + \Delta_{2p}(t) = 0; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \delta_{n1} I_1(t) + \delta_{n2} I_2(t) + \dots + \left( \delta_{nn} - \frac{1}{m_n \theta^2} \right) I_n(t) + \Delta_{np}(t) = 0. \end{array} \right. \quad (6.39)$$

Так как все инерционные силы в уравнениях (6.39) являются периодическими функциями  $I_i(t) = I_i \sin \theta t$  и  $\Delta_{ip}(t) = \Delta_{ip} \sin \theta t$ , то сократив эти

уравнения на  $\sin \theta t$  и обозначив  $\left( \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \theta^2} \right) = \delta_{ii}^\circ$  получаем:

$$\begin{cases} \delta_{11}^\circ I_1 + \delta_{12} I_2 + \dots + \delta_{1n} I_n + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} I_1 + \delta_{22}^\circ I_2 + \dots + \delta_{2n} I_n + \Delta_{2p} = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \delta_{n1} I_1 + \delta_{n2} I_2 + \dots + \delta_{nn}^\circ I_n + \Delta_{np} = 0 \end{cases} \quad (6.40)$$

Решив систему уравнений (6.40), определяют максимальные значения инерционных сил, далее по зависимостям (6.34) и (6.35) вычисляют усилия и перемещения, вызываемые динамическими нагрузками.

Из выражений коэффициентов  $\delta_{ii}^\circ$  видно, что каждой частоте вынужденных колебаний  $\theta$  соответствуют свои амплитудные значения инерционных сил, а, следовательно, и свои амплитудные значения усилий и перемещений.

Уравнения (6.40) по своей структуре аналогичны каноническим уравнениям метода сил и носят название канонических уравнений для определения максимальных значений инерционных сил. Они справедливы для любой стержневой (в том числе шарнирно-стержневой) системы, как статически определимой, так и статически неопределимой. Физический смысл коэффициентов  $\delta_{ii}$ ,  $\delta_{ik}$  и свободных членов уравнений  $\Delta_{ip}$  тот же, что и в канонических уравнениях метода сил. В системах, элементы которых работают преимущественно на изгиб, эти перемещения могут быть найдены, например, путем перемножения эпюр.

Если рассматриваемая стержневая система статически неопределима, то при определении перемещений  $\delta_{ik}$  одна из эпюр может быть взята в любой основной статически определимой системе метода сил. При определении перемещений  $\Delta_{ip}$  эпюра  $M_p$  должна быть построена в заданной (статически неопределимой) системе, а эпюры вспомогательного состояния ( $\bar{M}_i$ ) могут быть приняты в любой основной системе метода сил. Построение эпюр

$(\bar{M}_i, M_p)$  в статически неопределимой системе выполняется любым известным методом, например, методом сил.

Системы со многими степенями свободы могут оказаться в состоянии резонанса при совпадении частоты возмущающей гармонической нагрузки с любой из частот  $\omega$  собственных колебаний системы. Однако, динамический коэффициент, усилия и перемещения, как правило, достигают наибольших своих значений при совпадении частоты  $\theta$  с наименьшей частотой  $\omega$  собственных колебаний системы. Поэтому в динамических расчетах конструкций наиболее важной является наименьшая частота собственных колебаний системы, независимо от того, с одной или со многими степенями свободы эта система. В системах со многими степенями свободы самую низкую частоту собственных колебаний обычно называют основной частотой.

### 6.9. Примеры расчета рам на динамическую нагрузку

Применение статического метода в динамике сооружений рассмотрим на примерах расчета рам, нагружаемых динамическими нагрузками. Рассматривая системы с конечным числом степеней свободы, будем находить экстремальные значения динамических изгибающих моментов ( $M_D$ ), поперечных ( $Q_D$ ) и продольных ( $N_D$ ) сил. В приводимых примерах расчета соотношение частот собственных и вынужденных колебаний принято таким, что явление резонанса заведомо отсутствует. Поэтому проверки систем на резонанс не проводились. Ниже приведены примеры расчета статически определимой и статически неопределимой рамы.

#### Расчет статически определимой рамы

Для рамы, изображенной на (рис. 6.13), требуется определить динамические усилия ( $M_D, Q_D, N_D$ ) при амплитуде возмущающей силы  $P = 2кН$ , частоте вибрационной нагрузки  $\theta = 0,5\omega_{\min}$  и массах  $m_1 = 400кг$ ,  $m_2 = 500кг$ , где  $\omega_{\min}$  – наименьшая частота собственных колебаний.

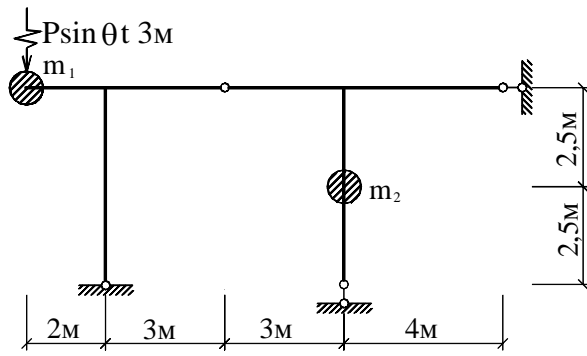


Рис. 6.13.

Учитывая принимаемые допущения (п. 6.1), положение масс в любой момент времени определяется следующими параметрами: масса  $m_1$  может перемещаться по вертикали, а масса  $m_2$  – в горизонтальном направлении. Других

перемещений эти массы не имеют и система обладает двумя степенями свободы. Определим частоты собственных колебаний

На основании равенства (6.33) уравнение колебаний для системы с двумя степенями свободы имеет вид:

$$D = \begin{vmatrix} (\delta_{11}m_1 - \lambda) & \delta_{12}m_2 \\ \delta_{21}m_1 & (\delta_{22}m_2 - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель получаем

$$(\delta_{11}m_1 - \lambda)(\delta_{22}m_2 - \lambda) - \delta_{12}^2m_1m_2 = 0,$$

откуда  $\lambda^2 - (\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2)\lambda + (\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)m_1m_2 = 0,$  (6.41)

где  $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}$  – перемещения масс, вызванные статическими силами  $P=1$ , прикладываемыми поочередно в точках расположения масс по направлению перемещений этих масс.

Эпюры изгибающих моментов от сил  $P_1=1$  и  $P_2=1$  приведены на рис. 6.14а,б.

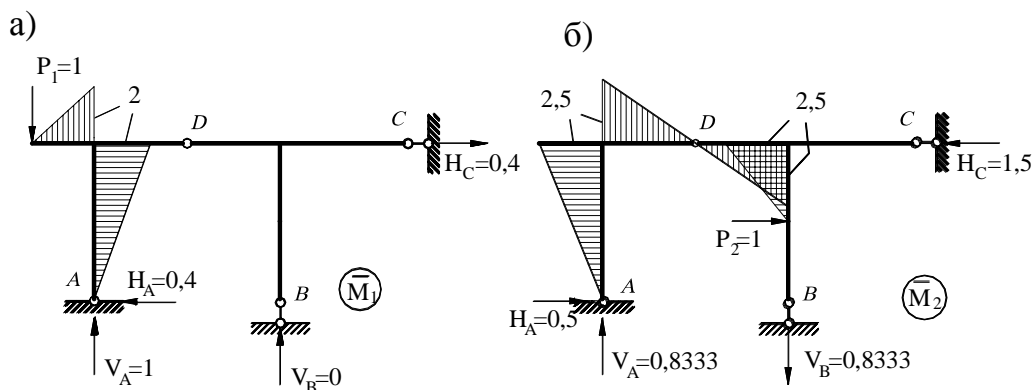


Рис. 6.14

Перемещения  $\delta_{ii}, \delta_{ik}$  найдем по формуле Мора, пользуясь правилом

Верещагина:

$$\delta_{11} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{9,333}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 dx}{EI} = -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 = -\frac{8,333}{EI};$$

$$\delta_{22} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_2^2 dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 + \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 2,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 \right) = \frac{28,125}{EI}.$$

Подставляя значения перемещений в уравнение (6.41), имеем:

$$\lambda^2 - \left( \frac{9,333}{EI} m_1 + \frac{28,125}{EI} m_2 \right) \lambda + \left( \frac{9,333}{EI} \cdot \frac{28,125}{EI} - \left( -\frac{8,333}{EI} \right)^2 \right) m_1 m_2 = 0,$$

$$\text{или } \lambda^2 - \left( \frac{9,333 \cdot 400}{EI} + \frac{28,125 \cdot 500}{EI} \right) \lambda + \left( \frac{9,333}{EI} \cdot \frac{28,125}{EI} + \frac{8,333^2}{(EI)^2} \right) \cdot 400 \cdot 500 = 0,$$

$$\text{откуда } \lambda^2 - \frac{17796}{EI} \lambda + \frac{66386000}{(EI)^2} = 0.$$

Корни этого равенства:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\left( -\frac{17796}{EI} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{17796}{EI} \right)^2 - 4 \cdot \frac{66386000}{(EI)^2}}}{2} = \frac{8898}{EI} \pm \frac{3576}{EI};$$

$$\lambda_1 = \frac{12474}{EI}; \quad \lambda_2 = \frac{5322}{EI}.$$

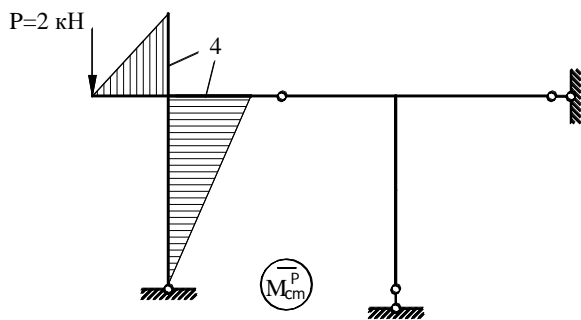
Частоты собственных колебаний будут:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = 0,009 \sqrt{EI} \text{ c}^{-1}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} = 0,014 \sqrt{EI} \text{ c}^{-1}.$$

Круговая частота вибрационной нагрузки

$$\theta = \alpha \omega_{\min} = 0,5 \cdot 0,009 \sqrt{EI} = 0,0045 \sqrt{EI} (\text{c}^{-1}).$$

Эпюра изгибающих моментов от статического действия вибрационной нагрузки по условию  $M_{cm}^p = \bar{M}_1 \cdot P$  приведена на рис. 6.15.



Максимальные значения инерционных сил находим по условию (6.40):

$$\begin{cases} \delta_{11}^{\circ} I_1 + \delta_{12} I_2 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21} I_1 + \delta_{22}^{\circ} I_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases} \quad (6.42)$$

Рис. 6.15

$$\delta_{11}^{\circ} = \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^2} = \frac{9,333}{EI} - \frac{1}{400 \cdot (0,0045 \sqrt{EI})^2} = -\frac{114,2}{EI};$$

$$\delta_{22}^{\circ} = \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2} = \frac{28,125}{EI} - \frac{1}{500 \cdot (0,0045 \sqrt{EI})^2} = -\frac{70,65}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 dx}{EI} = -\frac{8,333}{EI};$$

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_{cm}^p dx}{EI} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{18,67}{EI};$$

$$\Delta_{2p} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_{cm}^p dx}{EI} = -\frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = -\frac{16,67}{EI}.$$

Подставив в уравнение (6.42), имеем:

$$\begin{cases} -\frac{114,2}{EI} I_1 - \frac{8,333}{EI} I_2 + \frac{18,67}{EI} = 0; \\ -\frac{8,333}{EI} I_1 - \frac{70,65}{EI} I_2 - \frac{16,67}{EI} = 0, \end{cases}$$

откуда  $I_1 = 0,1823$  и  $I_2 = -0,2574$ .

Достоверность полученных сил инерции  $I_i$  проверяется подстановкой их значений в исходные уравнения.

Эпюру  $M_D$  получаем по условию  $M_D = M_{cm}^p + \bar{M}_1 I_1 + \bar{M}_2 I_2$ .

Эпюры  $\bar{M}_i I_i$  и окончательная эпюра изгибающих моментов  $M_D$  приведены на рис. (6.16).



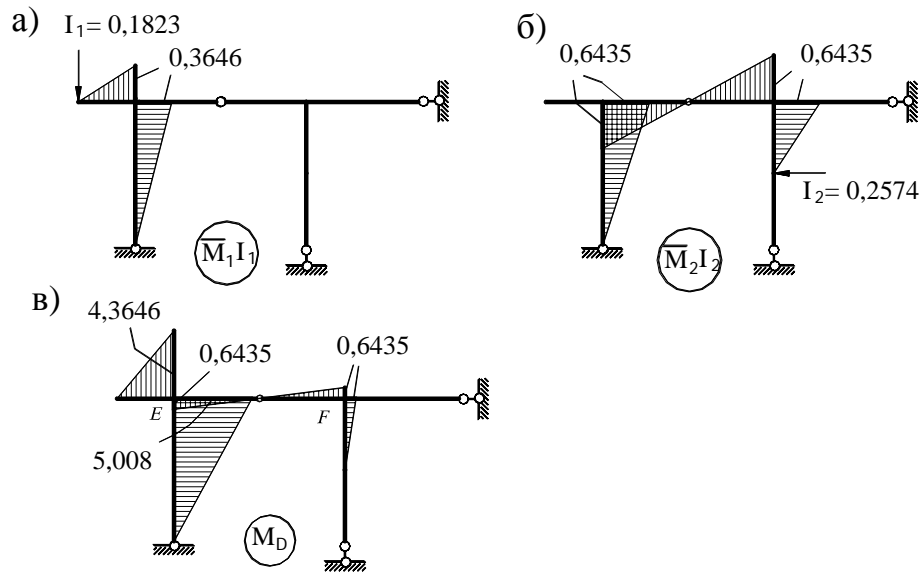
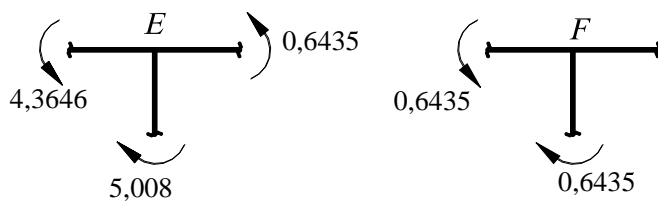


Рис. 6.16

Правильность построения эпюры  $M_D$  состоит в проверке равновесия узлов системы. Проверяем равновесие узлов  $E$  и  $F$  (рис. 6.17):



Равновесие узлов  $E$  и  $F$ .

$$\sum M_E = 5,008 - 0,6435 - 4,3646 = 0.$$

$$\sum M_F = 0,6435 - 0,6435 = 0.$$

Рис. 6.17

С помощью эпюры  $M_D$  обычными приемами находятся значения поперечных сил, а затем из условий равновесия узлов находятся продольные силы в стержнях системы. Эпюры  $Q_D$  и  $N_D$  приведены на рис. 6.18.

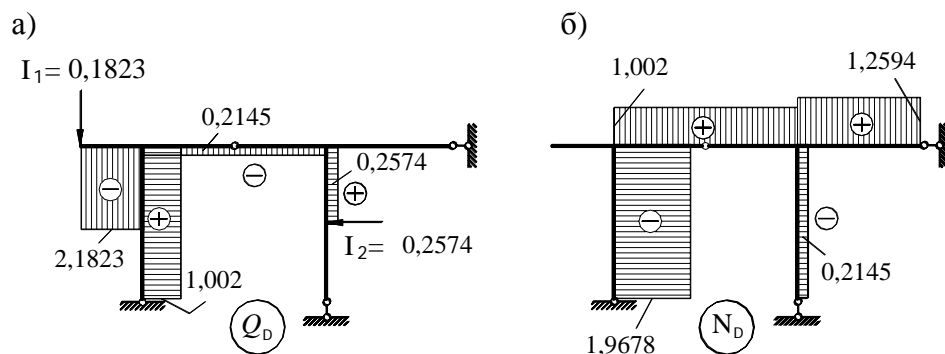


Рис. 6.18

Для проверки их правильности можно использовать уравнения  $\sum X = 0$  и  $\sum Y = 0$ , рассматривая равновесие системы в целом. В эти уравне-

ния должны быть включены опорные реакции, найденные инерционные силы с учетом их знаков и действующие динамические нагрузки. Для рассматриваемой рамы указанные проверки приведены на рис. 6.19.

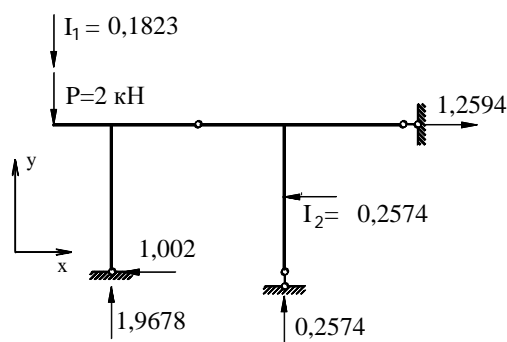


Рис. 6.19

$$\begin{aligned} \sum X &= 1,2594 - 0,2574 - 1,002 = \\ &= 1,2594 - 1,2594 = 0; \\ \sum Y &= 1,9678 + 0,2145 - 2 - 0,1823 = \\ &= 2,1823 - 2,1823 = 0. \end{aligned}$$

### Расчет статически неопределимой рамы

Для заданной рамы (рис. 6.20) требуется определить динамические изгибающие моменты, поперечные и продольные силы и построить их эпюры при  $m = 0,5m$ ;  $P = 2кН$ ;  $\alpha = 0,6$ .

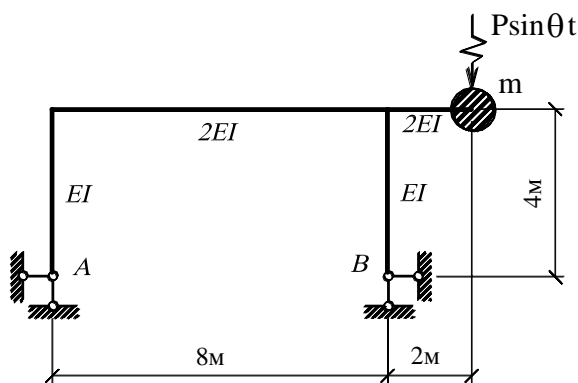


Рис. 6.20

С учетом принимаемых допущений (п. 6.1) масса  $m$  может перемещаться по вертикали и в горизонтальном направлении, а рассматриваемая система обладает двумя степенями свободы. Равенство (6.33) в этом случае принимает вид:

$$D = \begin{vmatrix} (\delta_{11}m - \lambda) & \delta_{12}m \\ \delta_{21}m & (\delta_{22}m - \lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{откуда } (\delta_{11}m - \lambda)(\delta_{22}m - \lambda) - \delta_{12}^2 m^2 = 0. \quad (6.43)$$

В уравнении (6.43)  $\delta_{ii}, \delta_{ik}$  – перемещения массы в заданной системе, вызванные статическими силами  $P_i = 1$ , действующими по направлениям

возможных перемещений этой массы.

Так как заданная система статически неопределима, то указанные перемещения  $\delta_{ii}$  и  $\delta_{ik}$  должны быть найдены после раскрытия ее статической неопределимости. Воспользуемся методом сил (основная система приведена на рис. 6.21). Каноническое уравнение и выражение неизвестного  $X_1$ :

$$\delta_{11}^* X_1 + \Delta_{1p} = 0; \Rightarrow X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}^*}. \quad (6.44)$$

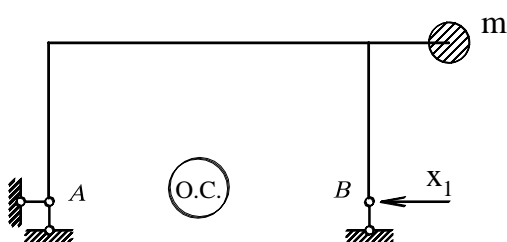


Рис. 6.21

Эпюра изгибающих моментов от действия силы  $X_1 = 1$  приведена на рис.

6.22, а от вертикальной силы  $P_1 = 1$  – на рис 6.23.

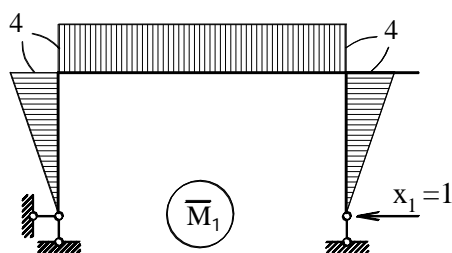


Рис. 6.22

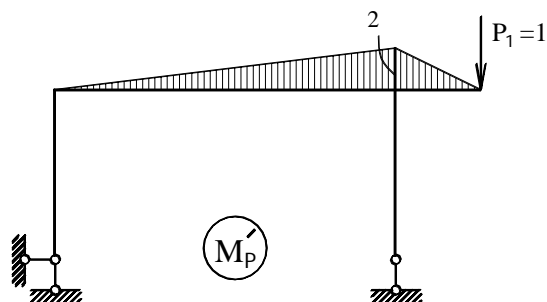


Рис. 6.23

$$\delta_{11}^* = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EI} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{2EI} 4 \cdot 8 \cdot 4 = \frac{128}{3EI} + \frac{64}{EI} = \frac{320}{3EI}.$$

$$\Delta_{1p}^1 = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M'_p dx}{EI} = \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} 2 \cdot 8 \cdot 4 = \frac{16}{EI}.$$

По формуле (6.44) имеем

$$X_1' = -\frac{16 \cdot 3EI}{EI \cdot 320} = -0,15.$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов ( $M_1$ ), полученная по условию

$$M_1 = M'_p + \bar{M}_1 X_1',$$

приведена на рис. 6.24.

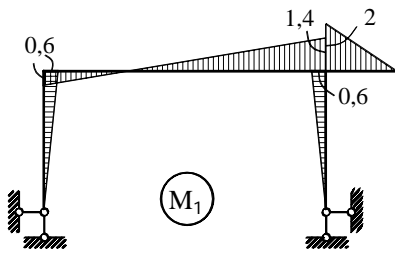


Рис. 6.24

Кинематическая проверка правильности этой эпюры ( $M_1$ ):

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{M_1 \bar{M}_1 dx}{EI} &= -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,6 \cdot 2 + \\ &+ \frac{1}{2EI} \cdot 4 \cdot 8 \cdot \frac{1,4 - 0,6}{2} = -\frac{6,4}{EI} + \frac{6,4}{EI} = 0. \end{aligned}$$

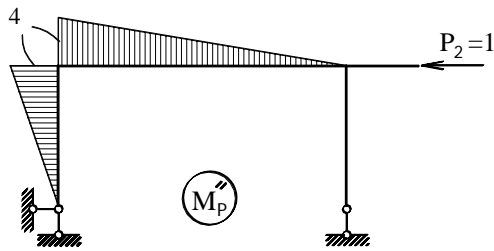


Рис. 6.25

Эпюра изгибающих моментов в основной системе от действия горизонтальной силы  $P_2 = 1$  приведена на рис. 6.25. Перемещение, вызываемое этой нагрузкой

$$\Delta_{1p}'' = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_p'' dx}{EI} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot 4 = \frac{64}{3EI} + \frac{32}{EI} = \frac{160}{3EI}$$

$$\text{По условию (6.44) } X_1'' = -\frac{160 \cdot 3EI}{3EI \cdot 320} = -0,5.$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов от горизонтальной нагрузки, полученная по условию

$$M_2 = M_p'' + \bar{M}_1 X_1'',$$

приведена на рис. 6.26. Кинематическая проверка правильности этой эпюры:

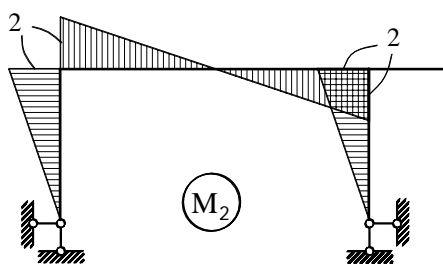


Рис. 6.26

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{M_2 \bar{M}_1 dx}{EI} &= \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \\ &- \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \cdot 4 \cdot 8 \cdot 0 = \\ &= \frac{32}{3EI} - \frac{32}{3EI} = 0. \end{aligned}$$

Статические проверки правильности окончательных эпюр  $M_1$  и  $M_2$  не приводим в развернутом виде, так как легко убедиться, что они выполняются.

Перемещения, вызванные единичными силами в статически неопредели-

мой системе, будут:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2 dx}{EI} = \sum \int \frac{M_1 M'_p dx}{EI} = \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1,4 - \frac{1}{3} \cdot 0,6 \right) +$$

$$+ \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4,2667}{EI};$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{M_2^2 dx}{EI} = \sum \int \frac{M_2 M''_p dx}{EI} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \times$$

$$\times \left( \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2 \right) = \frac{16,0}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{M_1 \cdot M_2 dx}{EI} = \sum \int \frac{M_1 M''_p dx}{EI} = \sum \int \frac{M_2 M'_p dx}{EI} =$$

$$= \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = -\frac{2,6667}{EI}.$$

Подставив найденные значения перемещений в уравнение (6.43), получаем  $\left( \frac{4,2667}{EI} m - \lambda \right) \left( \frac{16,0}{EI} m - \lambda \right) - \left( -\frac{2,6667}{EI} \right)^2 m^2 = 0$ ,

откуда:

$$\frac{4,2667}{EI} m \cdot \frac{16,0}{EI} m - \frac{4,2667}{EI} m \cdot \lambda - \frac{16}{EI} m \lambda + \lambda^2 - \left( -\frac{2,6667}{EI} \right)^2 m^2 = 0;$$

$$\lambda^2 - \frac{20,267}{EI} m \lambda + \frac{75,378}{(EI)^2} m^2 = 0; \quad \lambda^2 - \frac{10,134}{EI} \lambda + \frac{18,845}{(EI)^2} = 0.$$

Корни этого равенства:

$$\lambda_{1,2} = -\left( -\frac{10,134}{2EI} \right) \pm \sqrt{\left( -\frac{10,134}{2 \cdot EI} \right)^2 - 4 \cdot \frac{18,845}{4 \cdot (EI)^2}} = \frac{5,067}{EI} \pm \frac{2,6133}{EI};$$

$$\lambda_1 = \frac{7,6803}{EI} \text{ и } \lambda_2 = \frac{2,4537}{EI}.$$

Частоты собственных колебаний:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{EI}{7,6803}} = 0,3608 \sqrt{EI} \text{ (с}^{-1}\text{)};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{EI}{2,4537}} = 0,63839 \sqrt{EI} \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Частота вибрационной нагрузки (при  $\alpha = 0,6$ ):

$$\theta = \alpha \omega_{\min} = 0,6 \cdot \omega_1 = 0,6 \cdot 0,3608 \sqrt{EI} = 0,21648 \sqrt{EI} \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Эпюра изгибающих моментов от статического действия амплитудного

значения вибрационной нагрузки при  $P = 2$  кН, получаемая по условию

$$M_{cm}^P = M_1 \cdot P,$$

приведена на рис. 6.27.

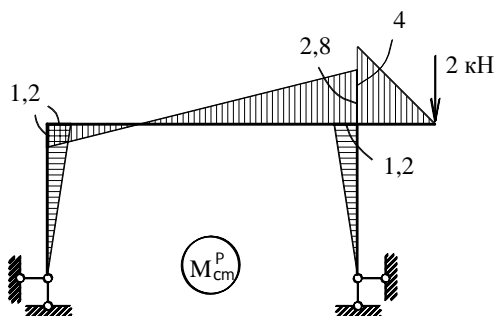


Рис. 6.27

Максимальные значения инерционных сил найдем, пользуясь уравнениями (6.40). В нашем случае эти уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}^0 I_1 + \delta_{12} I_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21} I_1 + \delta_{22}^0 I_2 + \Delta_{2P} = 0, \end{cases} \quad (6.45)$$

где:

$$\delta_{11}^0 = \delta_{11} - \frac{1}{m \theta^2} = \frac{4,2667}{EI} - \frac{1}{0,5(0,21648\sqrt{EI})^2} = -\frac{38,410}{EI};$$

$$\delta_{22}^0 = \delta_{22} - \frac{1}{m \theta^2} = \frac{16}{EI} - \frac{1}{0,5(0,21648\sqrt{EI})^2} = -\frac{26,677}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{2,6667}{EI};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \sum \int \frac{M_1 \cdot M_{cm}^P dx}{EI} = \sum \int \frac{M'_P \cdot M_{cm}^P dx}{EI} = \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} \cdot \\ &\quad \cdot 8 \left( \frac{2}{3} \cdot 2,8 - \frac{1}{3} \cdot 1,2 \right) = \frac{8,5333}{EI}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2P} &= \sum \int \frac{M_2 \cdot M_{cm}^P dx}{EI} = \sum \int \frac{M''_P \cdot M_{cm}^P dx}{EI} = -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} \cdot 4 \times \\ &\quad \times 8 \left( \frac{1}{3} \cdot 2,8 - \frac{2}{3} \cdot 1,2 \right) = -\frac{5,3333}{EI}. \end{aligned}$$

Подставив значения коэффициентов при неизвестных и свободных членов в уравнения (6.45) имеем:

$$\begin{cases} -\frac{38,410}{EI} I_1 - \frac{2,6667}{EI} I_2 + \frac{8,5333}{EI} = 0; \\ -\frac{2,6667}{EI} I_1 - \frac{26,677}{EI} I_2 - \frac{5,3333}{EI} = 0, \end{cases}$$

откуда

$$I_1 = 0,23769,$$

$$I_2 = -0,22367.$$

Максимальные усилия в элементах рамы при установившихся вынужденных колебаниях будут:

$$M_D = M_{cm}^P + M_1 I_1 + M_2 I_2.$$

Эпюры изгибающих моментов от статического действия динамической нагрузки ( $M_{cm}^P$ ) и фактических значений инерционных сил ( $M_i I_i$ ) приведены на рис. 6.28а,б,в, а окончательная эпюра динамических изгибающих моментов  $M_D$  – на рис. 6.29.

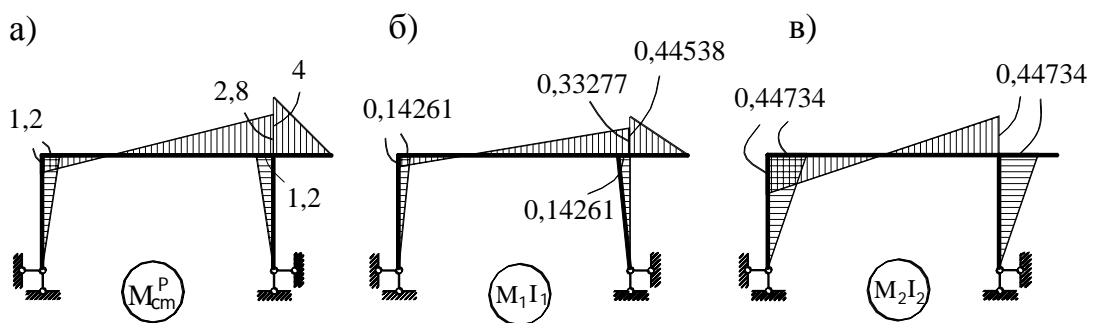


Рис. 6.28

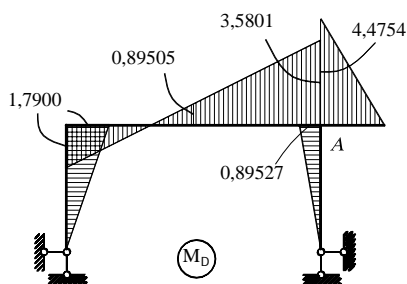
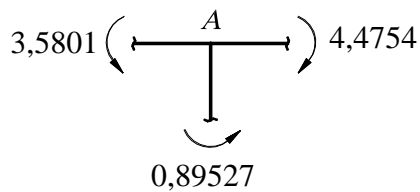


Рис. 6.29

Статическая проверка



Проверки правильности построения эпюры  $M_D$  остаются обычными: статическая и кинематическая.

$$\sum M_A = 4,4754 - 3,5801 - 0,89527 =$$

$$= 4,4754 - 4,4754 = 0.$$

Кинематическая проверка:  $\sum \int \frac{M_D \bar{M}_1 dx}{EI} = 0$ .

Эпюра  $\bar{M}_1$  изображена на рис. 6.22 и, пользуясь правилом Верещагина, имеем:

$$-\frac{1}{EI} \frac{1}{2} 1,79 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} 4 + \frac{1}{2EI} 4 \cdot 8 \cdot 0,89505 - \frac{1}{EI} \frac{1}{2} 0,89527 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} 4 = -9,5467 + 14,321 - 4,7748 = 14,321 - 14,321 = 0.$$

Поперечные и продольные силы, вызываемые динамическими нагрузками, строятся теми же приемами, что и в расчетах на действие статических нагрузок. С помощью эпюры  $M_D$  строится эпюра  $Q_D$ , а затем из условия равновесия узлов находятся продольные силы в стержнях, и строится эпюра  $N_D$ . Указанные эпюры приведены соответственно на рис. 6.30а,б. На рис. 6.30, в обозначены действующие на раму нагрузки и опорные реакции, включенные в уравнения равновесия  $\sum X = 0$  и  $\sum Y = 0$  при выполнении проверок равновесия системы в целом.

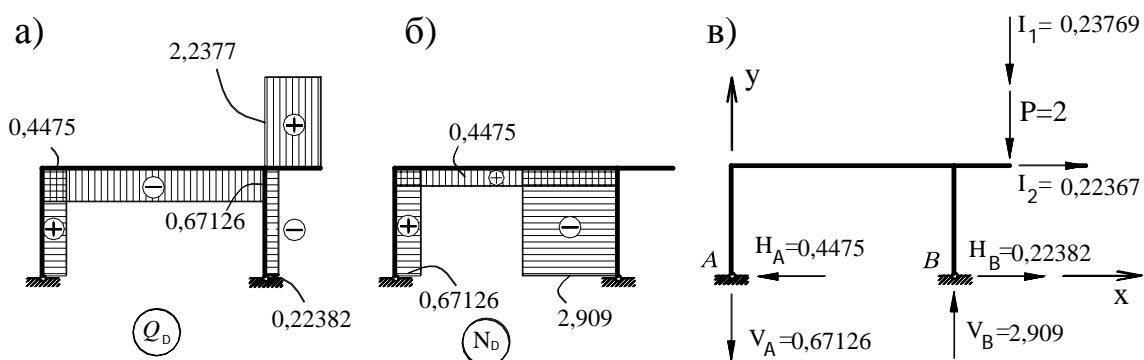


Рис. 6.30

$$\sum X = 0; \quad 0,22367 + 0,22382 - 0,4475 = 0,4475 - 0,4475 = 0.$$

$$\sum Y = 0; \quad 2,909 - 0,23769 - 2 - 0,67126 = 2,909 - 2,909 = 0.$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad & -2,909 \cdot 8 + 0,23769 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 0,22367 \cdot 4 = \\ & = -23,272 + 2,3769 + 20 + 0,89468 = -23,272 + 23,272 = 0 \end{aligned}$$



## *Глава 7*

### **Приближенные методы и способы определения частот свободных колебаний**

#### **7.1. Назначение приближенных методов**

Приведенные выше решения задач динамики сооружений выполнены статическим (кинетостатическим) методом, который с учетом принимаемых допущений считается точным методом. Расчет систем с большим числом степеней свободы статическим методом оказывается очень громоздким и трудным. Если в любой стержневой системе учесть собственный вес хотя бы одного из ее элементов, то получаем систему с бесконечным числом степеней свободы и решить задачу в такой постановке без замены распределенных масс сосредоточенными статическим методом невозможно. Это обстоятельство заставляет инженеров прибегать к приближенным методам и способам. Один из наиболее распространенных приемов упрощения решения состоит в замене распределенных масс заданной системы сосредоточенными (точечными) массами, т.е. осуществляется переход к системе с конечным числом степеней свободы, и решение может быть выполнено статическим методом. Этим решением будут получены приближенные значения частот свободных колебаний. Чем большее количество принято сосредоточенных масс, тем точнее получаемый результат, но в то же время сложнее расчет.

Для однопролетной шарнирно опертой балки постоянного сечения со сплошной по всему пролету равномерно распределенной массой (система с бесконечным числом степеней свободы) получено решение, позволяющее находить точное значение наименьшей (первой) частоты свободных колебаний системы (решение будет приведено ниже). Этим решением можно воспользоваться для определения наименьшей частоты свободных колебаний в других системах (например, в рамах), если позволяют условия заданной системы. Но это решение может быть применено для ограниченного круга задач. В общем случае в системах с числом степеней свободы, равным бесконечно-

сти, частоты свободных колебаний отыскиваются приближенными методами.

Могут быть так же использованы свойства симметрии системы, если это допускает заданная или преобразованная система.

Большое значение имеют те приближенные методы решения задач динамики, которые позволяют более простым путем получить результат достаточной точности с практической точки зрения.

Решение важной задачи динамики сооружений – нахождение частот свободных колебаний системы – существенно упрощается, если известны уравнения изгиба стержней при колебаниях системы. Уравнения изгиба стержней, как правило, неизвестны и в приближенных методах их принимают условно с учетом условий соединения между собой стержней в системе и закрепления их на опорах. Это наиболее трудный и ответственный этап в использовании приближенных методов, так как он предопределяет достоверность получаемого результата.

Широко используемый в расчетной практике способ замены распределенных масс сосредоточенными (точечными) массами дает удовлетворительную точность при определении первой (наименьшей) частоты свободных колебаний и может приводить к значительным погрешностям при вычислении высших частот.

Основным недостатком приближенных методов является то, что неизвестна степень точности (погрешности) полученного результата. Для наиболее часто используемых приближенных методов практическими расчетами выявлены общие критерии их точности (например, для энергетического метода), а в других случаях степень приближенности результата может быть установлена после решения той же задачи точным методом.

## **7.2. Энергетический метод**

Ранее (п. 6.1) отмечалось, что в основу этого метода положен закон сохранения энергии, согласно которому в любой момент временно сума потенциальной и кинематической энергии колеблющейся системы остается посто-

янной:

$$U + V = C \quad (7.1)$$

где  $U, V$  – соответственно потенциальная и кинетическая энергия системы.

Рассматривая свободные колебания системы с одной степенью свободы (п. 6.2), было установлено, что при колебаниях системы происходит переход одного вида энергии в другой. Поскольку  $U_{\min} = V_{\min} = 0$ , то из условия (7.1) следует, что

$$U_{\max} = V_{\max} \quad (7.2)$$

Условие (7.2) позволяет находить частоты собственных колебаний системы из условия равенства работ, выполняемых ее силами при колебаниях. Определение частоты собственных колебаний энергетическим методом

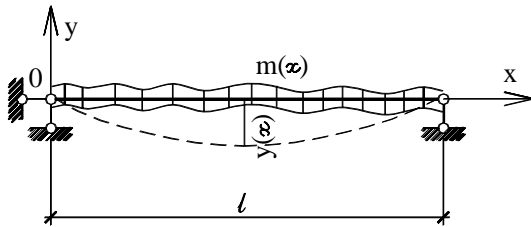


Рис. 7.1

рассмотрим на примере однопролетной упругой шарнирно опертой балки переменной жесткости с распределенной массой  $m(x)$ , которая изменяется по любому закону (рис. 7.1).

Уравнение изогнутой оси балки в процессе колебаний примем по синусоидальному закону

$$y(x, t) = y(x) \sin(\omega t + \varphi), \quad (7.3)$$

где  $y(x)$  – амплитуда колебаний.

Для систем, элементы которых испытывают преимущественно изгиб, пренебрегая влиянием поперечных и продольных сил, потенциальная энергия численно равна работе изгибающих моментов, т.е.

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI(x)}.$$

Так как  $EIy''(x) = -M_x$ , то последнее равенство можно записать

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI_x [y''(x)]^2 dx. \quad (7.4)$$

Воспользовавшись условием (7.3)

$$y''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = y''(x) \sin(\omega t + \varphi).$$

Тогда равенство (7.4) принимает вид

$$U = \frac{1}{2} \sin^2(\omega t + \varphi) \int_0^l EI_x [y''(x)]^2 dx.$$

Если принять  $\sin(\omega t + \varphi) = 1$ , то максимальное значение потенциальной энергии будет:

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI_x [y''(x)]^2 dx. \quad (7.5)$$

Кинетическая энергия с учетом (7.3) будет:

$$\begin{aligned} y'(x, t) &= \frac{dy}{dt} = y(x) \omega \cos(\omega t + \varphi); \\ V &= \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \omega^2 y^2(x) \cos^2(\omega t + \varphi) dx = \\ &= \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \frac{1}{2} \int_0^l m(x) y^2(x) dx. \end{aligned}$$

Если принять  $\cos^2(\omega t + \varphi) = 1$ , максимальная кинетическая энергия

$$V_{\max} = \omega^2 \frac{1}{2} \int_0^l m(x) y^2(x) dx. \quad (7.6)$$

Приравнявая выражения (7.5) и (7.6), находим

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI_x [y''(x)]^2 dx}{\int_0^l m(x) y^2(x) dx}. \quad (7.7)$$

Если система содержит  $m$  стержней, то равенство (7.7) принимает вид:

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \int_0^l EI_x [y''(x)]^2 dx}{\sum_{i=1}^m \int_0^l m(x) y^2(x) dx}, \quad (7.8)$$

где  $m$  – количество элементов системы.

Из формулы (7.8) видно, что частоты собственных колебаний системы могут быть найдены энергетическим методом, если известны уравнения изогнутых осей стержней в процессе колебания. Эти уравнения, как правило, неизвестны и ими задаются с учетом характера соединения стержней между собой и типа опорных закреплений, что и предопределяет приближенность получаемого результата.

Если известна действительная форма изогнутой оси стержня в процессе колебаний, то энергетическим методом получается точное решение.

Применение энергетического метода проследим на примере упругой однопролетной шарнирно опертой балки постоянного сечения со сплошной по всему пролету равномерно распределенной массой (рис. 7.2).

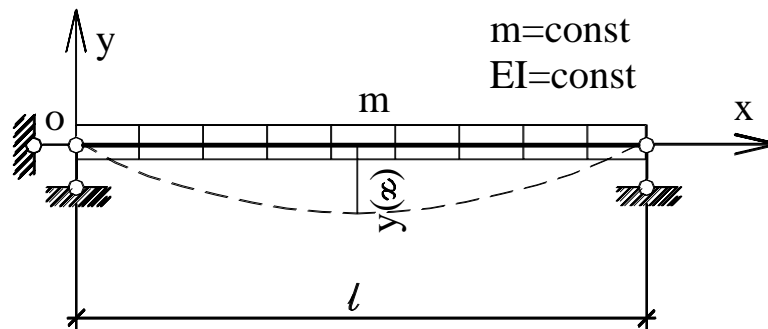


Рис. 7.2

Уравнение изогнутой оси балки при колебаниях примем в виде

$$y(x) = y_0 \sin \frac{\pi x}{\ell}, \quad (7.9)$$

где  $y_0$  – максимальное отклонение балки в середине пролета от линии статического равновесия (амплитуда). Нетрудно заметить, что (7.9) удовлетворяет всем граничным условиям рассматриваемой задачи.

Частоту собственных колебаний определим по формуле (7.7). Вторая производная уравнения (7.9)

$$y''(x) = -\frac{\pi^2}{\ell^2} y_0 \sin \frac{\pi x}{\ell}.$$

Так как  $EI = const$ , то потенциальная энергия по (7.5)

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI [y''(x)]^2 dx = \frac{1}{2} EI \frac{\pi^4}{\ell^4} y_0^2 \int_0^{\ell} \sin^2 \frac{\pi x}{\ell} dx = \frac{1}{2} EI \frac{\pi^4}{\ell^4} y_0^2 \frac{\ell}{2}.$$

Кинетическая энергия по (7.6) с учетом (7.9)

$$V_{\max} = \omega^2 \frac{1}{2} \int_0^{\ell} m y^2(x) dx = \omega^2 \frac{1}{2} m y_0^2 \int_0^{\ell} \sin^2 \frac{\pi x}{\ell} dx = \frac{1}{2} \omega^2 m y_0^2 \cdot \frac{\ell}{2}.$$

По формуле (7.7) имеем:

$$\omega^2 = \frac{EI \pi^4 y_0^2}{4 \ell^3} \cdot \frac{4}{m y_0^2 \ell},$$

откуда 
$$\omega = \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}. \quad (7.10)$$

Формула (7.10) дает точное решение, так как уравнение (7.9) – действительное уравнение изогнутой оси балки, полученное статическим методом при постоянных значениях  $m$  и  $EI$ .

Если уравнение изогнутой оси стержня в процессе колебаний неизвестно, то оно может быть принято по уравнению изогнутой оси при статическом действии на него соответствующих нагрузок. Например, в рассматриваемом случае (рис. 7.2) примем уравнение изогнутой оси балки при колебаниях, совпадающим с уравнением изгиба ее оси при действии на балку сплошной равномерно распределенной нагрузки  $q$

$$y(x) = \frac{q}{24EI} (\ell^3 x - 2\ell x^3 + x^4).$$

Определив максимальное значение потенциальной (7.5) и кинетической (7.6) энергии, по формуле (7.7) получаем  $\omega^2 = \frac{9.8767}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$ .

Если принять  $\pi^2 = 9,8696$ , относительная погрешность в сравнении с точным решением (7.10) составляет 0.07%, т.е. результат практически совпадает.

Определение частот собственных колебаний энергетическим методом может быть выполнено в другом виде (так называемая вторая форма энергетического метода в сравнении с первой, изложенной выше). Выразим потен-

циальную энергию системы через работу внешних сил. В качестве примера возьмем балку, изображенную на рис. 7.1, переменной жесткости  $EI_x$  и с переменной массой  $m(x)$ , изменяющейся по длине балки. Элементарная сила, действующая на бесконечно малом элементе длиной  $dx$ , равна  $m(x)gdx$ . Приняв уравнение колебаний, как и в предыдущей задаче, по условию (7.3)

$$y(x, t) = y(x) \sin(\omega t + \varphi),$$

найдем потенциальную и кинематическую энергию колеблющейся системы

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} m(x) g y(x, t) dx = \frac{1}{2} \sin(\omega t + \varphi) \int_0^{\ell} m(x) g y(x) dx,$$

откуда 
$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} m(x) g y(x) dx.$$

Кинетическая энергия останется без изменений (принято то же самой уравнение колебаний) и по формуле (7.6)

$$V_{\max} = \omega^2 \frac{1}{2} \int_0^{\ell} m(x) y^2(x) dx.$$

По условию (7.2)  $U_{\max} = V_{\max}$  и частота собственных колебаний

$$\omega^2 = \frac{\int_0^{\ell} m(x) g y(x) dx}{\int_0^{\ell} m(x) y^2(x) dx}. \quad (7.11)$$

Если заданная система содержит несколько стержней, то формула (7.11) принимает вид

$$\omega^2 = \frac{\sum_{1 \ 0}^m \int_0^{\ell} m(x) g y(x) dx}{\sum_{1 \ 0}^m \int_0^{\ell} m(x) y^2(x) dx}, \quad (7.12)$$

где  $m$  – число стержней в системе.

Формулы (7.8) и (7.12) справедливы для любых стержневых систем, в том числе для статически неопределимых.

При использовании формул (7.8) и (7.12) необходимо отыскать близкие к действительным уравнения изогнутых осей для каждого из стержней сис-

темы и это является определенной трудностью в решениях конкретных задач.

Если заданная система содержит только сосредоточенные массы, то формула (7.12) принимает вид:

$$\omega^2 = \frac{g \sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i y_i^2}, \quad (7.13)$$

где  $y_i$  – полные перемещения точек расположения масс в направлении колебаний;  $n$  – количество масс системы.

При определении частоты собственных колебаний по формуле (7.13) основной трудностью является отыскание полных перемещений масс системы в направлении их колебаний. В случае линейно-деформируемой упругой системы эта задача упрощается, так как, пользуясь принципом независимости действия сил, перемещения любой точки  $k$  системы можно найти по зависимости

$$\delta_{kp} = \delta_{k1} P_1 + \delta_{k2} P_2 + \dots + \delta_{kn} P_n, \quad (7.14)$$

где  $\delta_{ki}$  – перемещения точки  $k$  по искомому направлению, вызванные силами  $P_i = 1$ , прикладываемыми поочередно в местах расположения масс  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Эти перемещения ( $\delta_{ki}$ ) могут быть найдены, по формуле Мора. Например, для систем, сплошные элементы которых испытывают преимущественно изгиб:

$$\delta_{ki} = \sum \int_0^{\ell} \frac{\overline{M}_k \overline{M}_i dx}{EI};$$

$P_1, P_2, \dots, P_n$  – фактические значения нагрузок заданной системы в местах расположения масс.

Формула (7.13) справедлива для любых стержневых (в том числе шарнирно-стержневых) систем, как статически определимых, так и статически неопределимых. Эффективность ее использования будет показана ниже на конкретных примерах расчета стержневых систем.



### 7.3. Упрощение расчетной схемы системы

Упрощение расчетной схемы системы в динамике сооружений проводится, как правило, для того, чтобы сократить число степеней свободы системы. Это позволяет упростить решение, рассчитывая систему любым известным методом.

Выше отмечалось, что один из способов упрощения решения задачи состоит в замене распределенных масс сосредоточенными массами. Проследим решение задачи с использованием этого способа на примере упругой шарнирно опертой балки постоянного сечения со сплошной равномерно распределенной массой (рис. 7.3а). Как показано выше (7.10), точное значение основной частоты собственных колебаний рассматриваемой системы (рис.

7.3а), с бесконечным числом степеней свободы  $\omega = \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{9,8696}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$ .

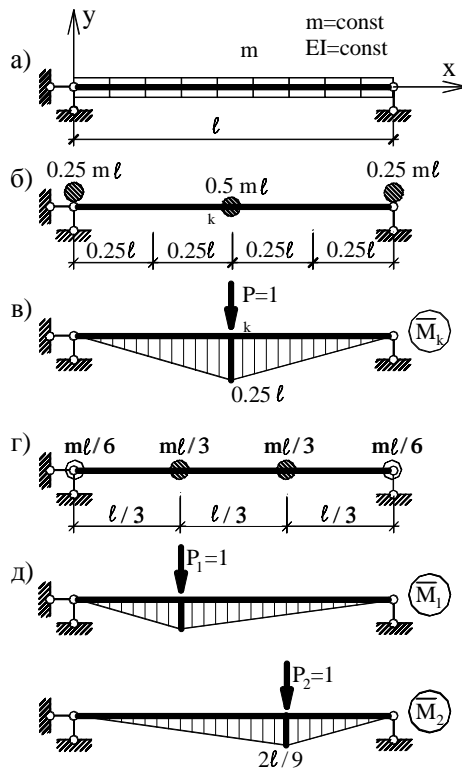


Рис.7.3

Заменим равномерно распределенную массу  $m$  сосредоточенными массами, одну из которых  $0,5 ml$  расположим в середине пролета, а две других  $0,25ml$  – на левой и правой опорах. Массы  $0,25ml$  не влияют на изгиб балки и на частоту свободных колебаний и их можно не учитывать (рис. 7.3б). Получим систему с одной степенью свободы, частоту свободных колебаний которой определим по формуле (6.12).

Эпюра изгибающих моментов от приложенной в точке  $k$  силы  $P = 1$  (месте расположения массы  $m$ ) показана на рис. 7.3в.

$$\text{Перемещение } \delta_{11} = \sum \int_0^{\ell} \frac{\overline{M}_k^2 dx}{EI} = \frac{\ell^3}{48EI}$$

и частота свободных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 48EI}{m\ell \cdot \ell^3}} = \frac{9,7980}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}},$$

ошибка составляет 0,73% в сравнении с точным решением по формуле (7.10) и допустима в практических расчетах.

Рассмотрим ту же балку с двумя массами  $m_1 = m_2 = m\ell/3$ , расположенными в третях ее пролета (рис. 6.33г). Частоты собственных колебаний системы с двумя степенями свободы найдем статическим методом без учета сил сопротивления перемещению масс, используя вековое уравнение (6.33). Эпюры изгибающих моментов  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  от сил  $P = 1$ , приложенных поочередно в местах расположения масс  $m_1$  и  $m_2$  приведены на рис. 7.3д.

Характеристическое уравнение получим, раскрыв определитель

$$D = \begin{vmatrix} (\delta_{11}m_1 - \lambda) & \delta_{12}m_2 \\ \delta_{21}m_1 & (\delta_{22}m_2 - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (7.15)$$

По формуле Мора (путем перемножения эпюр) имеем:

$$\delta_{11} = \sum \int_0^\ell \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EI} = \frac{4\ell^3}{243EI}; \quad \delta_{22} = \delta_{11} = \frac{4\ell^3}{243EI}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int_0^\ell \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 dx}{EI} = \frac{7\ell^3}{486EI}.$$

Раскрывая определитель (7.15), с учетом  $m_1 = m_2$  и  $\delta_{11} = \delta_{22}$ , имеем:

$$\lambda^2 - 2\delta_{11}m\lambda - (\delta_{12}^2 - \delta_{11}^2)m^2 = 0,$$

откуда  $\lambda_{1,2} = m(\delta_{11} \pm \delta_{12})$ .

Подставляя значение  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{12}$  и  $m = \frac{m\ell}{3}$ ,

$$\lambda_1 = \frac{5m\ell^4}{486EI} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{m\ell^4}{1458EI}.$$

Из условия  $\omega_i = \sqrt{\frac{1}{\lambda_i}}$  получаем

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{486EI}{5m\ell^4}} = \frac{9,8590}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (c^{-1}),$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{1458EI}{m\ell^4}} = \frac{38,1838}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Точное решение этой задачи (при сплошной равномерно распределенной массе по всему пролету балки (7.10)):

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{9,8696}{\ell^2}; \quad \omega_2 = \frac{4\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{39,4784}{\ell^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

По полученным результатам погрешность в вычислении первой частоты ( $\omega_1$ ) составляет 0,12%, а по частоте второго тона ( $\omega_2$ ) – 3,39%, что ранее отмечалось (п. 7.1).

Для сравнения найдем основную частоту свободных колебаний балки с двумя массами  $m_1 = m_2 = m\ell/3$  и двумя степенями свободы (предыдущего примера) по формуле (7.13), учитывающей только сосредоточенные массы. Полные перемещения точек расположения масс  $m_1$  и  $m_2$  ( $y_1$  и  $y_2$ ) с учетом приведенных выше единичных перемещений  $\delta_{ii}$  и  $\delta_{ik}$  по (7.14) будут:

$$y_1 = m_1 g \delta_{11} + m_2 g \delta_{12} = g \left( \frac{m\ell}{3} \frac{4\ell^3}{243EI} + \frac{m\ell}{3} \frac{7\ell^3}{486EI} \right) = \frac{15mgl^4}{1458EI};$$

$$y_2 = m_2 g \delta_{22} + m_1 g \delta_{21} = g \left( \frac{m\ell}{3} \frac{4\ell^3}{243EI} + \frac{m\ell}{3} \frac{7\ell^3}{486EI} \right) = \frac{15mgl^4}{1458EI}.$$

Числитель формулы (7.13)

$$g \sum_{i=1}^2 m_i y_i = g^2 \left( \frac{m\ell}{3} \frac{15m\ell^4}{1458EI} \cdot 2 \right) = \frac{10m^2 g^2 \ell^5}{1458EI}.$$

Знаменатель формулы (7.13)

$$\sum_{i=1}^2 m_i y_i^2 = g \frac{m\ell}{3} \cdot \left( \frac{15mgl^4}{1458EI} \right)^2 \cdot 2 = \frac{150m^3 g^2 \ell^9}{(1458EI)^2},$$

тогда

$$\omega^2 = \frac{10m^2 g^2 \ell^5}{1458EI} \cdot \frac{(1458EI)^2}{150m^3 g^2 \ell^9} = \frac{1458EI}{15m\ell^4},$$

откуда

$$\omega = \frac{9,8590}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Этот результат полностью совпадает с основной частотой ( $\omega_1$ ) в приведенном выше решении этой же задачи статическим методом, как системы с двумя степенями свободы и свидетельствует об эффективности формулы (7.13) энергетического метода, пользуясь, которой исключаются процедура вычисления определителей и решения алгебраических уравнений высоких порядков.

#### 7.4. Использование свойств симметрии системы

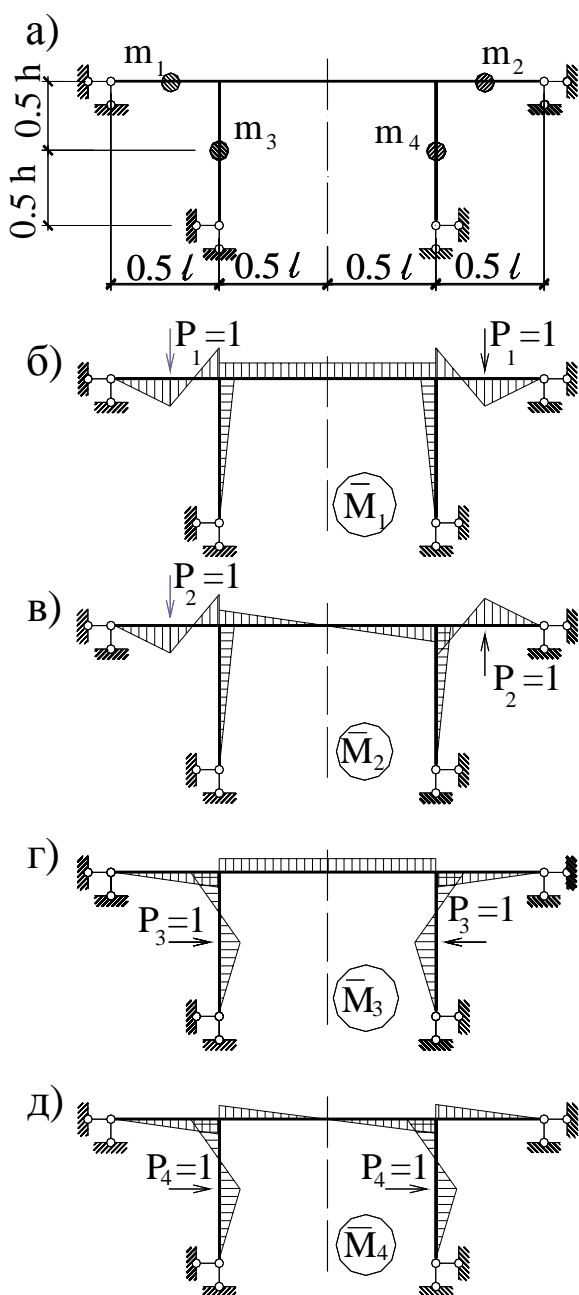


Рис. 7.4

Упрощение расчета путем использования свойств симметрии системы рассмотрим на примере рамы, изображенной на рис. 7.4а. В силу принятых допущений (при определении перемещений масс учитываются только деформации изгиба стержней) заданная система обладает четырьмя степенями свободы. При этом заданную систему примем симметричной по геометрии, по численным значениям ( $m_1 = m_2, m_3 = m_4$ ) и расположению масс, по жесткостям элементов. Уравнение колебаний найдем с помощью векового уравнения (6.33). Перемещения точек расположения масс будем находить от действия групповых (спаренных) сил  $P = 1$ , прикладываемых в этих точках.

Эпюры изгибающих моментов (в общем виде) от симметричных и обратно симметричных спаренных сил  $P=1$ , приложенных в местах расположения масс, приведены на рис. 7.4. Так как заданная система симметрична, то симметрично расположенные нагрузки  $P=1$  создают симметричные эпюры изгибающих моментов  $(\bar{M}_1, \bar{M}_3)$ , а косо симметричные единичные нагрузки – косо симметричные эпюры  $(\bar{M}_2, \bar{M}_4)$ .

Поскольку, в рассматриваемом случае все перемещения  $\delta_{ii}$  и  $\delta_{ik}$  вызваны действием групповых сил, состоящих из двух сил, массы в определителе (6.33) следует вводить с коэффициентом  $\frac{1}{2}$ .

В общем виде определитель (6.33) для системы с четырьмя степенями свободы имеет вид:

$$D = \begin{vmatrix} (\delta_{11}m_1 - \lambda) & \delta_{12}m_2 & \delta_{13}m_3 & \delta_{14}m_4 \\ \delta_{21}m_1 & (\delta_{22}m_2 - \lambda) & \delta_{23}m_3 & \delta_{24}m_4 \\ \delta_{31}m_1 & \delta_{32}m_2 & (\delta_{33}m_3 - \lambda) & \delta_{34}m_4 \\ \delta_{41}m_1 & \delta_{42}m_2 & \delta_{43}m_3 & (\delta_{44}m_4 - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (7.16)$$

Учитывая симметрию системы, полученные симметричные и косо симметричные единичные эпюры от групповых сил (рис. 7.4б,в,г,д)

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0, \quad \delta_{14} = \delta_{41} = 0, \quad \delta_{32} = \delta_{23} = 0, \quad \delta_{34} = \delta_{43} = 0$$

и равенство (7.16) принимает вид:

$$D = \begin{vmatrix} \left( \delta_{11} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) & 0 & \delta_{13} \frac{m_3}{2} & 0 \\ 0 & \left( \delta_{22} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) & 0 & \delta_{24} \frac{m_4}{2} \\ \delta_{31} \frac{m_1}{2} & 0 & \left( \delta_{33} \frac{m_3}{2} - \lambda \right) & 0 \\ 0 & \delta_{42} \frac{m_2}{2} & 0 & \left( \delta_{44} \frac{m_4}{2} - \lambda \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (7.17)$$

Раскрывая равенство (7.17) по элементам первого столбца имеем:

$$\begin{aligned}
D &= \left( \delta_{11} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) \begin{vmatrix} \left( \delta_{22} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) & 0 & \delta_{24} \frac{m_4}{2} \\ 0 & \left( \delta_{33} \frac{m_3}{2} - \lambda \right) & 0 \\ \delta_{42} \frac{m_2}{2} & 0 & \left( \delta_{44} \frac{m_4}{2} - \lambda \right) \end{vmatrix} + \\
&+ \delta_{31} \frac{m_1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \delta_{13} \frac{m_3}{2} & 0 \\ \left( \delta_{22} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) & 0 & \delta_{24} \frac{m_4}{2} \\ \delta_{42} \frac{m_2}{2} & 0 & \left( \delta_{44} \frac{m_4}{2} - \lambda \right) \end{vmatrix} = \\
&= \left( \delta_{11} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{22} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{33} \frac{m_3}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{44} \frac{m_4}{2} - \lambda \right) - \\
&- \left( \delta_{11} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) \delta_{42} \frac{m_2}{2} \left( \delta_{33} \frac{m_3}{2} - \lambda \right) \delta_{24} \frac{m_4}{2} + \\
&+ \delta_{31} \frac{m_1}{2} \delta_{13} \frac{m_3}{2} \delta_{24} \frac{m_4}{2} \delta_{42} \frac{m_2}{2} - \delta_{31} \frac{m_1}{2} \left( \delta_{22} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) \delta_{13} \frac{m_3}{2} \left( \delta_{44} \frac{m_4}{2} - \lambda \right) = 0,
\end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
&\left( \delta_{11} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) \cdot \left( \delta_{22} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) \cdot \left( \delta_{33} \frac{m_3}{2} - \lambda \right) \cdot \left( \delta_{44} \frac{m_4}{2} - \lambda \right) - \\
&- \delta_{24}^2 \frac{m_2 m_4}{4} \left( \delta_{11} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) \cdot \left( \delta_{33} \frac{m_3}{2} - \lambda \right) + \tag{7.18} \\
&+ \delta_{13}^2 \frac{m_1 m_3}{4} \delta_{24}^2 \frac{m_2 m_4}{4} - \delta_{13}^2 \frac{m_1 m_3}{4} \left( \delta_{22} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) \cdot \left( \delta_{44} \frac{m_4}{2} - \lambda \right) = 0.
\end{aligned}$$

Уравнение (7.18) является общим для любой симметричной системы с четырьмя степенями свободы и в том числе для системы, изображенной на рис. 7.4а. Оно охватывает возможные симметричную и кососимметричную формы деформации при соответствующих колебаниях системы.

Если в уравнении, аналогичном (7.17), будет обеспечено условие, что все побочные коэффициенты  $\delta_{ik} = 0$ , то, определитель в развернутом виде будет:

$$\left( \delta_{11} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{22} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) \dots \left( \delta_{ii} \frac{m_i}{2} - \lambda \right) \dots \left( \delta_{nn} \frac{m_n}{2} - \lambda \right) = 0. \tag{7.19}$$

Приравнявая поочередно нулю отдельные сомножители уравнения (7.19), получаем частоты собственных колебаний, которым соответствуют

свои формы деформации системы, называемые главными формами колебаний.

Главные формы собственных колебаний взаимно ортогональны – возможная работа сил инерции первой формы на перемещениях второй формы (и наоборот) равна нулю. В этом нетрудно убедиться на примере симметричной балки, изображенной на рис. 7.5а, определяя возможную работу сил инерции в состоянии симметричной ее деформации (рис. 7.5б) на перемещениях кососимметричной деформации (рис. 7.5в).

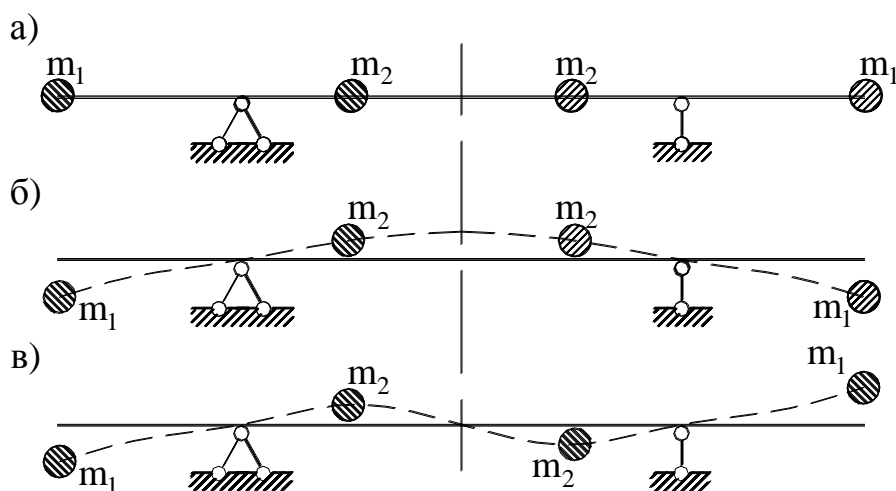


Рис. 7.5

Эта же закономерность распределения усилий и деформаций в симметричной системе наблюдается и в расчетах на прочность при действии статических нагрузок. Например, при действии на симметричную систему симметричной нагрузки обратно симметричные неизвестные равны нулю.

По аналогии, при действии на симметричную систему симметричных инерционных сил (симметричные колебания) обратно симметричные инерционные силы (групповые или одиночные) будут равны нулю и наоборот. Поэтому колебания системы, удовлетворяющей всем требованиям свойств симметрии, целесообразно исследовать, рассматривая независимо симметричную и косо симметричную формы ее деформации. Для каждой разновидности этих колебаний уравнение (7.18) может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} & \left( \delta_{22} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{44} \frac{m_4}{2} - \lambda \right) \left[ \left( \delta_{11} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{33} \frac{m_3}{2} - \lambda \right) - \delta_{13}^2 \frac{m_1 m_3}{4} \right] - \\ & - \delta_{24}^2 \frac{m_2 m_4}{4} \left( \delta_{11} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{33} \frac{m_3}{2} - \lambda \right) + \delta_{13}^2 \frac{m_1 m_3}{4} \cdot \delta_{24}^2 \frac{m_2 m_4}{4} = 0; \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} & \left( \delta_{11} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{33} \frac{m_3}{2} - \lambda \right) \left[ \left( \delta_{22} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{44} \frac{m_4}{2} - \lambda \right) - \delta_{24}^2 \frac{m_2 m_4}{4} \right] - \\ & - \delta_{13}^2 \frac{m_1 m_3}{4} \left( \delta_{22} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{44} \frac{m_4}{2} - \lambda \right) + \delta_{13}^2 \frac{m_1 m_3}{4} \cdot \delta_{24}^2 \frac{m_2 m_4}{4} = 0. \end{aligned} \quad (7.21)$$

В рассматриваемом случае уравнение (7.20) (отброшены как равные нулю все сомножители и слагаемые, включающие влияние обратно симметричных инерционных сил) выражает симметричные колебания рамы, определяемые сомножителем

$$\left[ \left( \delta_{11} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{33} \frac{m_3}{2} - \lambda \right) - \delta_{13}^2 \frac{m_1 m_3}{4} \right],$$

а уравнение (7.21) – аналогично обозначенные (в квадратных скобках) косо симметричные колебания.

С целью упрощения расчета симметричные и косо симметричные колебания симметричной системы можно рассматривать отдельно, пользуясь независимыми уравнениями для каждого вида колебаний. Убедимся в справедливости этого на рассматриваемом примере расчета рамы (рис. 7.4). Воспользуемся одним из свойств определителей и в исходном определителе (7.17) поменяем местами вторую и третью строки, а затем поменяем местами второй и третий столбец. Преобразованный определитель принимает вид:

$$D = \begin{vmatrix} \left( \delta_{11} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) & \delta_{13} \frac{m_3}{2} & 0 & 0 \\ \delta_{31} \frac{m_1}{2} & \left( \delta_{33} \frac{m_3}{2} - \lambda \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left( \delta_{22} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) & \delta_{24} \frac{m_4}{2} \\ 0 & 0 & \delta_{42} \frac{m_2}{2} & \left( \delta_{44} \frac{m_4}{2} - \lambda \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (7.22)$$

В равенстве (7.22) первая и вторая строки определителя выражают



симметричные, а третья и четвертая строки – кососимметричные колебания.

Определитель (7.22) можно представить в виде:

$$D = D_I \times D_{II} = 0, \quad (7.23)$$

где

$$D_I = \begin{vmatrix} \left( \delta_{11} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) & \delta_{13} \frac{m_3}{2} \\ \delta_{31} \frac{m_1}{2} & \left( \delta_{33} \frac{m_3}{2} - \lambda \right) \end{vmatrix} = 0 \text{ и } D_{II} = \begin{vmatrix} \left( \delta_{22} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) & \delta_{24} \frac{m_4}{2} \\ \delta_{42} \frac{m_2}{2} & \left( \delta_{44} \frac{m_4}{2} - \lambda \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определители  $D_I$  и  $D_{II}$ , имеем:

$$D_I = \left( \delta_{11} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{33} \frac{m_3}{2} - \lambda \right) - \delta_{13}^2 \frac{m_1}{2} \frac{m_3}{2} = 0;$$

$$D_{II} = \left( \delta_{22} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{44} \frac{m_4}{2} - \lambda \right) - \delta_{24}^2 \frac{m_2}{2} \frac{m_4}{2} = 0.$$

Подставляя выражения  $D_I$  и  $D_{II}$  в равенство (7.23) и преобразовывая, получаем:

$$\left[ \left( \delta_{11} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{33} \frac{m_3}{2} - \lambda \right) - \delta_{13}^2 \frac{m_1}{2} \frac{m_3}{2} \right] \left[ \left( \delta_{22} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{44} \frac{m_4}{2} - \lambda \right) - \delta_{24}^2 \frac{m_2}{2} \frac{m_4}{2} \right] = 0.$$

или

$$\begin{aligned} & \left( \delta_{11} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{33} \frac{m_3}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{22} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{44} \frac{m_4}{2} - \lambda \right) - \\ & - \left( \delta_{11} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{33} \frac{m_3}{2} - \lambda \right) \delta_{24}^2 \frac{m_2 m_4}{4} - \delta_{13}^2 \frac{m_1 m_3}{4} \times \\ & \times \left( \delta_{22} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{44} \frac{m_4}{2} - \lambda \right) + \delta_{13}^2 \frac{m_1 m_3}{4} \cdot \delta_{24}^2 \frac{m_2 m_4}{4} = 0. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Уравнение (7.24) полностью совпадает с уравнением (7.18), полученным из исходного определителя (7.17). Это подтверждает справедливость равенства (7.23) и возможность рассматривать независимо симметричные и ко-со симметричные колебания симметричных систем.

Представляет определенный интерес форма записи характеристических уравнений колебаний в динамических расчетах симметричных систем. Например, в рассмотренной выше симметричной раме с четырьмя степенями

свободы, симметрично расположенные массы будут численно равны. Заданную систему можно представить, как показано на рис. 7.6.

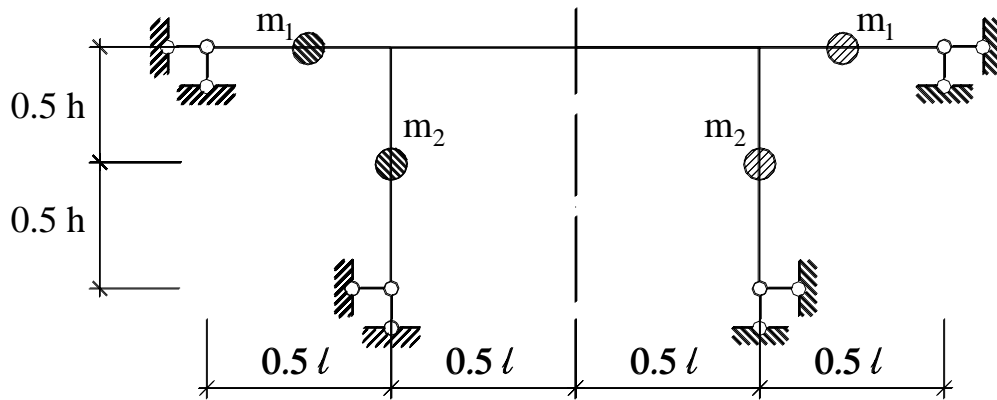


Рис. 7.6

Сохранив обозначения направлений перемещений масс, единичные эпюры останутся без изменений и представлены на рис. 7.4б,в,г,д. Преобразованный определитель (7.22) симметричных и косо симметричных колебаний принимает вид:

$$D = \begin{vmatrix} \left( \delta_{11} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) & \delta_{13} \frac{m_2}{2} & 0 & 0 \\ \delta_{31} \frac{m_1}{2} & \left( \delta_{33} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left( \delta_{22} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) & \delta_{24} \frac{m_2}{2} \\ 0 & 0 & \delta_{42} \frac{m_1}{2} & \left( \delta_{44} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (7.25)$$

Как и ранее останется в силе условие (7.23), т.е.  $D = D_I \times D_{II}$ , а уравнения колебаний в отличие от канонической формы в равенстве (7.25) принимает вид:

$$D_I = \left( \delta_{11} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{33} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) - \delta_{13}^2 \frac{m_1 m_2}{4} = 0; \quad (7.26)$$

$$D_{II} = \left( \delta_{22} \frac{m_1}{2} - \lambda \right) \left( \delta_{44} \frac{m_2}{2} - \lambda \right) - \delta_{24}^2 \frac{m_1 m_2}{4} = 0, \quad (7.27)$$

где равенства (7.26) и (7.27) выражают соответственно симметричные и косо симметричные свободные колебания симметричной системы с четырьмя степенями свободы.

