МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Инновационный менеджмент»

Н. И. Байкова
А. А. Косовский
И. И. Кондратенко

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ И МОДЕЛЕЙ В ЛОГИСТИКЕ

Методическое пособие

Минск
БНТУ
2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Инновационный менеджмент»

Н. И. Байкова
А. А. Косовский
И. И. Кондратенко

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ И МОДЕЛЕЙ В ЛОГИСТИКЕ

Методическое пособие
для слушателей РИИТ
специальности 1-26 06 85 «Логистика»

Минск
БНТУ
2014

УДК 005.932:330.4
ББК 65.37
Б18

Рецензенты:
заведующий кафедрой государственного строительства Академии управления при Президенте Республики Беларусь,
кандидат экономических наук, доцент *А. Г. Шумилин*;
кандидат экономических наук, доцент кафедры
«Экономика управления на транспорте» БНТУ *В. Л. Шабека*

Байкова, Н. И.
Б18 Использование экономико-математических методов и моделей в логистике : методическое пособие для слушателей РИИТ специальности 1-26 06 85 «Логистика» / Н. И. Байкова, А. А. Косовский, И. И. Кондратенко. – Минск : БНТУ, 2014. – 65 с.
ISBN 978-985-550-439-2.

Издание составлено в соответствии с программой дисциплины «Экономико-математические методы и модели» на основе государственных образовательных стандартов в области высшей математики, экономико-математических методов и моделей для специалистов с высшим образованием по экономическим специальностям.

В пособии рассматриваются общесистемные экономико-математические методы и модели (линейного программирования, сетевого планирования и управления, систем массового обслуживания, управления запасами).

Издание адресовано в первую очередь слушателям в системе последипломного образования, специализирующимся в области управления материальными потоками и логистики.

УДК 005.932:330.4
ББК 65.37

ISBN 978-985-550-439-2

ВВЕДЕНИЕ

Целью дисциплины «Экономико-математические методы и модели» является изложение теоретических основ, методологических принципов и конкретных подходов постановки, решения на ЭВМ и анализа задач оптимального управления и экономического регулирования производством, снабжением, сбытом на базе экономико-математических методов.

Дисциплина «Экономико-математические методы и модели» находится в тесной связи и базируется на таких предметах, как экономика предприятия, менеджмент, маркетинг, производственные технологии, прогнозирование и планирование экономики, финансы предприятий, денежное обращение, статистика и др. Методологической основой дисциплины является высшая и прикладная математика. Без глубокого знания этих предметов нельзя моделировать конкретные экономические процессы или явления, составлять и решать на ЭВМ реальные экономико-математические задачи, производить глубокий анализ и всесторонний анализ полученных решений.

В результате изучения изложенного в пособии материала должны быть сформированы следующие навыки и умения:

– самостоятельной смысловой постановки прикладных задач;

– математического моделирования экономических объектов;

– оценки пределов применимости полученных результатов.

Структура и содержание издания соответствуют учебной программе дисциплины.

В главе I «Постановка и решение задач линейного программирования» рассматриваются задания о постановке задач линейного программирования и решении их графическим и симплекс-методом, приводится решение транспортной задачи.

В главе II «Математические методы сетевого планирования и управления» рассматриваются задачи о построении сетевого графика и нахождении его временных параметров.

В главе III «Модели управления запасами» предлагаются задания по определению оптимального размера партии при мгновенном и непрерывном поступлении заказа с условиями допущения и отсутствия дефицита.

В главе IV «Модели массового обслуживания» рассматриваются задачи массового обслуживания: многоканальная система массового обслуживания (СМО) с отказами, многоканальная СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди и многоканальная СМО с неограниченной очередью.

Также в первых четырех главах приводится подробное решение заданий, даются некоторые методические рекомендации полезные для их успешного выполнения.

В главе V рассматриваются примеры решения задач, позволяющие определять параметры систем обслуживания при детерминированном спросе на товар.

В главе VI приводятся примеры решения задач на определение параметров системы обслуживания при случайном спросе на товар

Глава I
ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задание 1.1

Прядильная фабрика для производства двух видов пряжи использует три типа сырья – чистую шерсть, капрон и акрил. В таблице 1.1 указаны нормы сырья, его общее количество, которое может быть использовано фабрикой в течение года, и прибыль от реализации тонн пряжи каждого вида.

Таблица 1.1 – Нормы расхода сырья на 1 т пряжи, *т*

Тип сырья	I вид пряжи	II вид пряжи	Количество сырья, *т*
Шерсть	0,8	0,4	570
Капрон	a	0,5	b
Акрил	a–0,1	0,2	c
Прибыль от реализации 1 т пряжи, у. е.	1100	900	–

Требуется составить задачу линейного программирования годового производства пряжи с целью максимизации суммарной прибыли (таблица 1.2).

Таблица 1.2 – Исходные данные к заданию 1.1

№ варианта	a	b	c
1,11	0,8	620	500
2,12	0,7	730	500
3,13	0,9	840	500
4,14	0,6	650	510
5,15	0,7	760	510
6,16	0,6	870	510
7,17	0,7	920	400
8,18	0,9	850	400
9,19	0,8	780	400
10,20	0,8	680	510
21	0,7	670	580

Решение (вариант 21)

Считаем, что технология производства линейна, т. е. затраты сырья растут прямо пропорционально объему производства. Пусть x_1 показывает планируемый объем производства пряжи I вида, x_2 – пряжи II вида. Тогда допустимым является только такой набор производимых товаров, при котором суммарные затраты каждого ресурса не превосходят его запаса, т. е. удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,4x_2 \le 570; \\ 0,7x_1 + 0,5x_2 \le 670; \\ 0,6x_1 + 0,2x_2 \le 580. \end{cases}$$

Кроме того, имеются следующие естественные ограничения:

$$x_1 \ge 0;$$

$$x_2 \ge 0.$$

Прибыль от реализации данного набора производимых товаров выражается величиной

$$1100x_1 + 900x_2.$$

Тогда задача линейного программирования ставится следующим образом:

$$1100x_1 + 900x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,4x_2 \le 570, \\ 0,7x_1 + 0,5x_2 \le 670, \\ 0,6x_1 + 0,2x_2 \le 580, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задание 1.2

Используя графический метод, найти решение следующей задачи линейного программирования (таблица 1.3):

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 \to \min, \\ x_1 + (b-3)x_2 \ge b, \\ (c-4)x_1 + x_2 \ge c, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 11, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Таблица 1.3 – Исходные данные к заданию 1.2

№ варианта	a	b	c
1, 11	$\frac{1}{4}$	5	9
2, 12	$\frac{5}{4}$	4	6
3, 13	$\frac{9}{2}$	7	8
4, 14	$\frac{7}{4}$	8	7
5, 15	$\frac{5}{2}$	6	6
6, 16	$\frac{1}{2}$	7	6
7, 17	$\frac{5}{2}$	4	7
8, 18	$\frac{13}{2}$	5	8
9, 19	$\frac{2}{3}$	6	7
10, 20	$\frac{1}{3}$	5	7
21	$\frac{3}{2}$	6	5

Решение (вариант 21)

Заменяя знаки неравенств на знаки точных равенств, построим область решений по уравнениям прямых $x_1 + 3x_2 = 6$, $x_1 + x_2 = 5$, $3x_1 + 2x_2 = 11$ (рисунок 1.1).

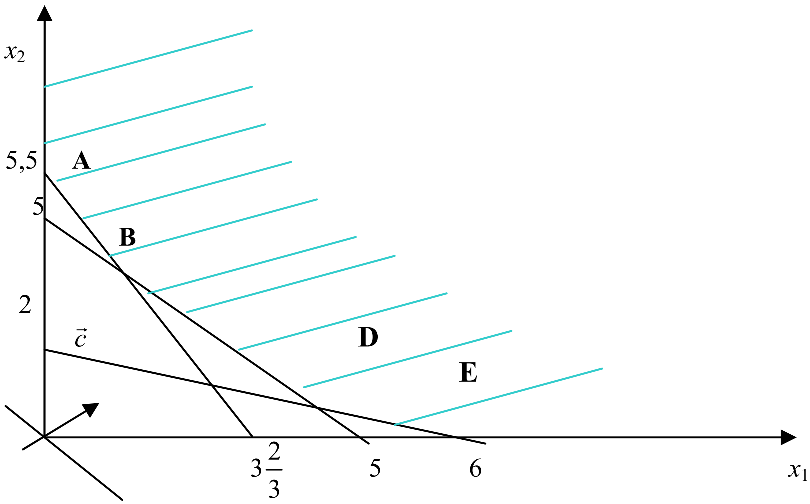

Рисунок.1.1 – Графическое изображение области решения задачи

Прямую $x_1 + 3x_2 = 6$ построим по двум точкам (0; 2) и (6; 0), которые легко получаются в результате последовательного обнуления одной из переменных: $x_1 = 0$, $x_2 = (6 - 0) / 3 = 2$; $x_2 = 0$, $x_1 = 6 - 3 \cdot 0 = 6$.

Множеством решений нестрого неравенства является одна из плоскостей, на которую делит плоскость построенная прямая. Какая из них является искомой, можно выяснить при помощи контрольной точки: если в произвольно взятой точке неравенство выполняется, то оно выполняется и во всех других точках данной полуплоскости и не выполняется во всех точках другой полуплоскости. В качестве контрольной точки удобно взять начало координат. Подставив координаты точки (0; 0) в неравенство, получим $0 + 3 \cdot 0 = 0 < 6$, т. е. неравенство в данной полуплоскости не выполняется, следовательно, областью решения неравенства будет являться верхняя полуплоскость.

Аналогично построим области решения двух других неравенств.

Ограничения $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ означают, что область решения будет лежать в первой четверти декартовой системы координат.

Допустимая область задачи выделена штриховкой.

Построим вектор-градиент $\vec{c}$ с координатами $(3/2;\ 1)$, для чего соединим точку $(3/2;\ 1)$ с началом координат, и прямую уровня, перпендикулярную вектору $\vec{c}$ и проходящую через начало координат. Перемещая эту прямую параллельно в направлении вектора $\vec{c}$, найдем первую точку пересечения прямой уровня и допустимой области. Это будет точка B, и ее координаты получаются при решении следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 = 11; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Итак, точка минимума (1; 4). Минимальное значение функции $f_{\min} = 3/2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 5{,}5$.

Задание 1.3

Решить задачу линейного программирования симплекс-методом по данным таблицы 1.4.

Таблица 1.4. – Исходные данные к заданию 1.3

№ варианта	Задача
1, 11	$-x_1 + x_2 \to \max$, $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Продолжение таблицы 1.4

№ варианта	Задача
2, 12	$-x_1 + x_2 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ -2x_1 + x_2 \le 1, \\ 3x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
3, 13	$9x_1 + 7x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + 3x_2 \le 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
4, 14	$9x_1 + 12x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
5, 15	$10x_1 + 12x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
6, 16	$3x_1 + 4x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

Окончание таблицы 1.4

№ варианта	Задача
7, 17	$-x_1 + x_2 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ -x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
8, 18	$7x_1 + 8x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
9, 19	$x_1 - x_2 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2, \\ -2x_1 + x_2 \le 1, \\ 3x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
10, 20	$3x_1 + 5x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
21	$4x_1 - x_2 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 8, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

Решение (варианта 21)

В математическую модель задачи введем дополнительные переменные y_1, y_2, y_3, запишем ограничения в виде уравнений и таким образом приведем задачу к канонической форме:

$$4x_1 - x_2 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + y_1 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 + y_2 = 8, \\ -x_1 + x_2 + y_3 = 2, \\ x_{11}, x_2, y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Теперь задачу можно представить в виде симплекс-таблицы (рисунок 1.2). В этой таблице свободные переменные x_1, x_2 по условию равны нулю, а базисные переменные y_1, y_2, y_3, а также целевая функция f равны свободным членам, т. е. $y_1 = 3$, $y_2 = 8$, $y_3 = 2$, $f = 0$.

Базисные переменные	Свободные переменные	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2
y_1	3	1	0	0	**1**	1
y_2	8	0	1	0	–2	3
y_3	2	0	0	1	–1	1
f	0	0	0	0	–4	1

Рисунок 1.2 – Симплекс-таблица к заданию 1.3

Выясняем, имеются ли в последней строке отрицательные числа. Находим число (–4), просматриваем столбец x_1. В этом столбце единственный положительный элемент – 1. Следовательно, разрешающим является элемент, стоящий на пересечении строки y_1 и столбца x_1. Выделим эту строку-столбец рамками.

На следующей итерации переменную y_1 нужно вывести из базисных (→), а переменную x_1 ввести в базисные (↑). Новый базис состоит из $\{x_1, y_2, y_3\}$.

Для составления следующей таблицы разделим выделенную строку таблицы (см. рисунок 1.2) на разрешающий элемент и полученную строку запишем на месте прежней (в данном случае эта строка не изменяется, так как разрешающий элемент равен 1). К каждой из остальных строк прибавляем вновь полученную, умноженную на такое число, чтобы в клетках для столбца x_1 появились нули, и вставляем преобразованные строки на месте прежних. Этим завершается первая итерация, и в результате переходим к таблице 1.5.

Таблица 1.5 – Результаты первой итерации

Базисные переменные	Свободные переменные	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2
x_1	3	1	0	0	1	1
y_2	2	–2	1	0	0	1
y_3	5	1	0	1	0	2
f	12	4	0	0	0	4

Из симплексной таблицы 1.5 следует, что в столбце свободных членов все элементы положительные, следовательно, решение является допустимым. В строке целевой функции все элементы неотрицательные. Это означает, что решение является оптимальным при максимизации целевой функции f. При этом оптимальным планом является $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, а целевая функция $f = 12$.

Задание 1.4

На трех складах A_1, A_2, A_3 находится 100, 150, 80 т горючего соответственно. Перевозка одной тонны горючего со склада A_1 в пункты B_1, B_2, B_3 соответственно стоит a_1, b_1, c_1 денежных единиц. Перевозка одной тонны горючего со склада A_2 в пункты B_1, B_2, B_3 соответственно стоит a_2, b_2, c_2. Перевозка одной тонны горючего со склада A_3 в пункты B_1, B_2, B_3 соответственно стоит a_3, b_3, c_3. Необходимо доставить в пункты B_1, B_2, B_3 80, 140 и 110 тонн горючего соответственно. По данным таблицы 1.6 составить такой план перевозки горючего, при котором транспортные расходы будут наименьшими.

Таблица 1.6 – Исходные данные к заданию 1.4

№ варианта	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2	a_3	b_3	c_3
1, 11	4	3	5	10	1	2	3	8	6
2, 12	3	2	4	9	0	1	2	7	5
3, 13	10	1	2	4	3	5	3	8	6
4, 14	9	0	1	3	2	4	2	7	5
5, 15	2	7	5	9	0	1	3	2	4
6, 16	3	8	6	10	1	2	4	3	5
7, 17	3	2	4	2	7	5	9	0	1
8, 18	3	2	4	9	0	1	2	7	5
9, 19	4	3	5	10	1	2	3	8	6
10, 20	10	1	2	4	3	5	3	8	6
21	4	3	5	3	8	6	10	1	2

Решение (вариант 21)

Базисный план можно построить по правилу северо-западного угла. Данный метод прост и легко формализируем, однако не учитывает величину затрат, и исходное опорное решение часто может далеким от оптимального.

Учитывая выше сказанное, более рационально будет использовать прием минимального элемента, который дает базисное решение наиболее близкое к оптимальному по сравнению с другими методами.

В этом случае построение исходного базисного плана начинаем с клетки с наименьшей величиной затрат c_{ij}, в данном примере с клетки (3, 2), где $c_{32} = 1$ (рисунок 1.3). В эту клетку заносим $x_{32} =$ $= \min\{a_3, b_2\} = \min\{80, 140\} = 80$.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	40 ^{4}	60 ^{3}	^{5}	100
A_2	40 ^{3}	^{8}	110 ^{6}	150
A_3	^{10}	80 ^{1}	^{2}	80
b_j	80	140	110	

Рисунок 1.3 – Построение базисного плана

Строка a_3 закрыта полностью, закрываем столбец b_2, заполняя ячейку с минимальной стоимостью, в данном случае это клетка (1, 2), где $c_{12} = 3$. Сюда заносим $x_{12} = \min\{a_1, b_2 - a_3\} = \min\{100, 140 - 80\} = 60$.

Переходим к клетке(1,1), в которую заносим $x_{11} = \min\{a_1 - b_2, b_1\} = \min\{100 - 60, 80\} = 40$, и закрываем строку a_1.

Заносим в клетку (2, 1) $x_{21} = \min\{80, 80 - 40\} = 40$ и закрываем столбец b_1.

Наконец, переходим клетке (2, 3), куда заносим $x_{23} = \min\{150 - 40, 110\} = 110$. Столбец b_3 и строка a_2 закрыты.

Поскольку остатки по строке и столбцу равны, исходное опорное решение построено. Этому плану соответствуют затраты в количестве

$$f = 40 \cdot 4 + 60 \cdot 3 + 40 \cdot 3 + 110 \cdot 6 + 80 \cdot 1 = 1200 \text{ ден.ед.}$$

Имея опорный план, перейдем теперь к построению новых опорных решений, которые улучшают друг друга. Для этого применим метод потенциалов.

Каждому пункту отправления A_i поставим в соответствие некоторую величину u_i, называемую потенциалом пункта A_i, и каждому пункту потребления B_j величину ν_j – потенциал пункта B_j.

Для базисных клеток свяжем эти величины равенством $u_k + \nu_l = c_{kl}$, где c_{kl} – стоимость перевозки одной тонны горючего из пункта A_k в пункт B_l.

Таким образом получаем следующую систему:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_2 = 3, \\ u_2 + v_1 = 3, \\ u_2 + v_3 = 6, \\ u_3 + v_2 = 1. \end{cases}$$

Значение одной неизвестной зададим произвольно, например, $u_1 = 0$. Тогда $u_2 = -1$, $u_3 = -2$, $v_1 = 4$, $v_2 = 3$, $v_3 = 7$.

Далее вычисляем косвенные стоимости c'_{ij} для свободных клеток:

$$c'_{13} = u_1 + v_3 = 7,\ c'_{22} = u_2 + v_2 = 2,\ c'_{31} = u_3 + v_1 = 2,\ c'_{33} = u_3 + v_3 = 5.$$

Подсчитаем теперь разности $\delta_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$:

$$\delta_{13} = 5 - 7 = -2,\ \delta_{22} = 8 - 2 = 6,\ \delta_{31} = 10 - 2 = 8,\ \delta_{33} = 2 - 5 = -3.$$

Разностей δ_{13} и δ_{33} меньше нуля, следовательно, полученный план не оптимален и можно уменьшить *f*. Перераспределим поставки, переходя к новому базисному решению. Для этого:

а) выберем клетку с отрицательной разностью;

б) ходом шахматной ладьи (двигаясь строго вертикально или строго горизонтально) обходим базисные клетки таким образом, чтобы последним ходом вернуться в исходную. При этом поочередно базисные клетки помечаем «–» и «+». В каждой строке или столбце не должно быть более двух таких отметок;

в) среди клеток, помеченных знаком «–» находим клетку с минимальной поставкой.

Эта поставка прибавляется в клетки, отмеченные «+», и вычитается из клеток, помеченных «–».

Например, в нашей задаче пересчет можно произвести следующим образом (рисунок 1.4):

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	40 – ^{4}	60 ^{3}	+ ^{5}	100
A_2	40 + ^{3}	^{8}	110 – ^{6}	150
A_3	^{10}	80 ^{1}	^{2}	80
b_j	80	140	110	

Рисунок 1.4 – Результаты первой итерации

Из таблицы видно, что поставки в базисных клетках можно увеличить / уменьшить на 40 единиц. Полученные результаты см. на рисунке 1.5.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	^{4}	60 ^{3}	40 ^{5}	100
A_2	80 ^{3}	^{8}	70 ^{6}	150
A_3	^{10}	80 ^{1}	^{2}	80
b_j	80	140	110	

Рисунок 1.5 – Результаты второй итерации

Затраты равны $f = 60 \cdot 3 + 40 \cdot 5 + 80 \cdot 3 + 70 \cdot 6 + 80 \cdot 1 = 1120$.

Найдем потенциалы из системы:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 3, \\ u_1 + v_3 = 5, \\ u_2 + v_1 = 3, \\ u_2 + v_3 = 6, \\ u_3 + v_2 = 1; \end{cases}$$

$$u_1 = 0,\ u_2 = -2,\ u_3 = -2,\ v_1 = 5,\ v_2 = 3,\ v_3 = 8.$$

Посчитаем косвенные стоимости:

$$c'_{11} = 5,\ c'_{22} = 1,\ c'_{31} = 3,\ c'_{33} = 6.$$

Вычислим разности: $\delta_{11} = 4 - 5 = -1$, $\delta_{22} = 8 - 1 = 7$, $\delta_{31} = 10 - 3 = 7$, $\delta_{33} = 2 - 6 = -4$.

Среди разностей есть отрицательные, значит, решение можно улучшить.

Произведем цикл пересчета (см. рисунок 1.6).

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	^{4}	100 ^{3}	^{5}	100
A_2	80 ^{3}	^{8}	70 ^{6}	150
A_3	^{10}	40 ^{1}	40 ^{2}	80
b_j	80	140	110	

Рисунок 1.6 – Результаты третьей итерации

Затраты в данном случае равны $f = 100 \cdot 3 + 80 \cdot 3 + 70 \cdot 6 + 40 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 1080$.

Проверим полученное решение на оптимальность.

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 3, \\ u_1 + v_3 = 5, \\ u_2 + v_1 = 3, \\ u_2 + v_3 = 6, \\ u_3 + v_2 = 1; \end{cases}$$

$$u_1 = 0,\ u_2 = 2,\ u_3 = -2,\ v_1 = 1,\ v_2 = 3,\ v_3 = 4.$$

Косвенные стоимости в данном случае равны:

$$c'_{11} = 1,\ c'_{22} = 5,\ c'_{13} = 4.$$

Вычислим разности: $\delta_{11} = 4 - 1 = 3$, $\delta_{22} = 8 - 5 = 3$, $\delta_{13} = 10 - 4 = 6$.

Среди разностей нет отрицательных, следовательно, опорный план является оптимальным, транспортные расходы равны 1080 ден. ед.

Глава II
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

Задание 2.1

Построить сетевой график, рассчитать временные параметры свершения событий, выделить критический путь, определить его длительность на основании данных, представленных в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Исходные данные к заданию 2

№ варианта	Параметр	Значение										
1, 11	Работы	(1,2)	(2,3)	(2,4)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(4,7)	(5,8)	(6,7)	(6,8)	(7,8)
	Длительность	1	5	3	2	9	8	7	8	3	5	4
2, 12	Работы	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,7)	(4,5)	(5,6)	(6,7)
	Длительность	2	3	4	5	4	5	4	8	2	6	7
3, 13	Работы	(1,2)	(1,3)	(1,5)	(2,4)	(3,6)	(4,5)	(4,7)	(5,6)	(5,7)	(6,7)	–
	Длительность	2	4	5	3	6	4	6	2	7	4	–
4, 14	Работы	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,5)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	–
	Длительность	3	6	4	2	5	7	4	4	6	2	–
5, 15	Работы	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,5)	(3,4)	(3,6)	(4,6)	(4,7)	(5,6)	(6,7)
	Длительность	3	6	5	4	7	5	5	7	8	3	9
6, 16	Работы	(1,2)	(1,3)	(1,5)	(2,4)	(3,6)	(4,5)	(4,7)	(5,6)	(5,7)	(6,7)	–
	Длительность	2	2	4	3	4	5	2	6	4	7	–
7, 17	Работы	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(2,5)	(3,5)	(3,6)	(4,6)	(4,8)	(5,7)	(6,8)	(7,8)
	Длительность	2	6	3	5	10	9	6	9	4	6	3
8, 18	Работы	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(4,5)	(5,6)	–
	Длительность	2	5	3	5	2	4	3	2	6	3	–
9, 19	Работы	(1,2)	(1,3)	(1,5)	(2,3)	(2,6)	(3,4)	(4,6)	(5,6)	(5,7)	–	–
	Длительность	2	4	5	2	8	4	6	2	9	–	–
10, 20	Работы	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	–
	Длительность	3	5	5	2	6	6	4	4	4	1	–
21	Работы	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,6)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(4,5)	(5,6)	–
	Длительность	3	4	4	6	2	1	1	3	5	2	–

Произведенные расчеты представить в виде таблицы 2.1.

Таблица 2.2 – результаты расчетов для задания 2

Работа	Продолжительность	Раннее начало	Раннее окончание	Позднее начало	Позднее окончание	Полный резерв	Свободный резерв

Решение (вариант 21)

Построим сетевой график, рассчитаем ранние и поздние сроки свершения событий и их резервы времени (см. рисунок 2) и запишем результаты расчетов в таблицу 2.3. Ранний срок свершения событий рассчитывается, начиная с события *1*, причем $t_р(1) = 0$. Поздний срок свершения события рассчитывается начиная с последнего, в нашем случае с события *6*, причем $t_п(6) = t_р(6)$.

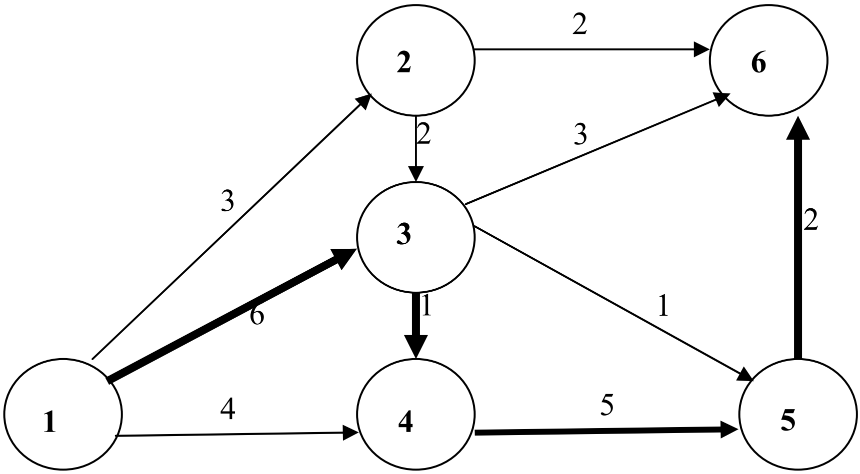

Рисунок 2. Графическое изображение сетевой модели

Таблица 2.3 – Результаты расчетов для задания 2 (вариант 21)

Событие	Ранний срок свершения события $t_р(j) = \max\{t_р(i) + t_{ij}\}$ $(i, j) \in U_j^*$	Поздний срок свершения события $t_п(i) = \min\{t_п(j) - t_{ij}\}$ $(i, j) \in U_i^*$	Резерв времени события $R(i) = t_п(i) - t_р(i)$
1	0	0	0
2	3	5	2
3	6	6	0
4	7	7	0
5	12	12	0
6	14	14	0

Примечание. U_j^* – набор работ, входящих в событие j; U_i^* – набор работ, исходящих из события i.

Таким образом, критическое время равно 14. События, для которых резерв времени равен нулю, являются критическими, через них проходит критический путь. Для нашего примера критический путь проходит через события 1–3–4–5–6, он выделен жирной линией.

Рассчитаем сроки выполнения работ и их резервы времени. Расчеты оформим в виде таблицы 2.4.

Таблица 2.4 – Выходные данные задания 2

Работа	Продолжительность	Раннее начало	Раннее окончание	Позднее начало	Позднее окончание	Полный резерв	Свободный резерв
$(i,\ j)$	t_{ij}	$t_{ij}^{\text{р.н}} = t_{\text{р}}(i)$	$t_{ij}^{\text{р.о}} = t_{ij}^{\text{р.н}} + t_{ij}$	$t_{ij}^{\text{п.н}} = t_{ij}^{\text{р.о}} - tij$	$t_{ij}^{\text{п.о}} = t_{\text{п}}(j)$	$R_{ij}^{\text{п}} = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij}$	$R_{ij}^{\text{с}} = t_{\text{р}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij}$
(1, 2)	3	0	3	2	5	2	0
(1, 3)	6	0	6	0	6	0	0
(1, 4)	4	0	4	3	7	3	3
(2, 3)	2	3	5	4	6	1	1
(2, 6)	2	3	5	12	14	9	7
(3, 4)	1	6	7	6	7	0	0
(3, 5)	1	6	7	11	12	5	0
(3, 6)	3	6	9	9	14	5	3
(4, 5)	5	7	12	7	12	0	0
(5, 6)	2	12	14	12	14	0	0

Обратим внимание на то, что работы (1, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6) с нулевыми полными резервами времени являются критическими, т. е. определяют продолжительность выполнения проекта.

Глава III
МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

3.1. Модель Уилсона (простейшая модель)

Задание 3.1

Магазин реализует некоторый товар, спрос на который в течение года составляет v ед. Затраты на реализацию одной партии товара – K ден. ед., издержки по хранению одной единицы товара в течение года – s ден. ед. (см. таблицу 3.1).

Определите:

1) оптимальную партию поставки;
2) оптимальное число поставок за год;
3) интервал времени между поставками;
4) суммарные затраты на хранение и реализацию данного товара.

Сравните полученные затраты с затратами в случае отклонений от оптимальной партии поставки в любом направлении в два раза.

Таблица 3.1 – Исходные данные к заданию 3.1

№ варианта	ν	K	s
1, 11	600	18	6
2, 12	750	24	5
3, 13	900	16	8
4, 14	640	20	8
5, 15	720	18	5
6, 16	700	21	6
7, 17	600	24	4
8, 18	800	18	8
9, 19	880	22	5
10, 20	810	16	5
21	800	20	5

Решение (вариант 21)

Оптимальный размер партии товара находим по формуле Уилсона:

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}},$$

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 800}{5}} = \sqrt{64 \cdot 100} = 80 \text{ шт.}$$

Оптимальное число поставок за период $T = 1$ г.

$$n^* = \left[\frac{\nu T}{q^*}\right] = \left[\frac{800 \cdot 1}{80}\right] = [10] = 10 \text{ ед.}$$

Интервал между заказами

$$\tau^* = \frac{q^*}{\nu} = \frac{80}{800} = \frac{1}{10} \text{ г.} = 36 \text{ дн.}$$

Наименьшие затраты на хранение и реализацию товара определяются по формуле

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu},$$

$$L^* = \sqrt{2 \cdot 20 \cdot 5 \cdot 800} = 400 \text{ ден. ед.}$$

В случае отклонения от оптимальной партии в два раза партия товара составит $q_1 = 40$ ед. или $q_2 = 160$ ед.

В этом случае затраты на хранение и реализацию товара составят

$$L(q_i) = \frac{K \cdot \nu}{q} + s \cdot \frac{q_i}{2},$$

$$L(q_1) = \frac{20 \cdot 800}{40} + 5 \cdot \frac{40}{2} = 500,$$

$$L(q_2) = \frac{20 \cdot 800}{160} + 5 \cdot \frac{160}{2} = 500,$$

ден. ед. в год.

Таким образом, если действительная партия поставки товара отличается от оптимальной в любом направлении в два раза, то издержки увеличиваются на 100 единиц в год или на 25 % по сравнению с оптимальной.

3.2. Модель с дефицитом при учете неудовлетворенных требований

Задание 3.2

Торговое предприятие в течение года закупает у завода ν единиц товара для розничной реализации. Издержки хранения одной единицы данного товара составляют s ден. ед. в год. Издержки размещения заказа – K ден. ед. Все неудовлетворенные требования берутся на учет. Удельные издержки дефицита составляют d ден. ед. за нехватку одной единицы товара в течение года.

Определите:

1) величину партии товара;

2) максимальную величину задолженного спроса;

3) максимальную величину текущего запаса;

4) интервал возобновления поставки;

5) время существования дефицита;

6) оптимальную величину цикла;

7) минимальные годовые издержки, связанные с заказом и хранением товара;

8) величину экономии, которая достигается при введении системы планирования запасов в условиях дефицита.

Таблица 3.2 – Исходные данные к заданию 3.2

№ варианта	ν	K	s	d
1, 11	1000	50	10	41
2, 12	1050	60	11	45
3, 13	1100	70	12	49
4, 14	1150	80	13	53
5, 15	1200	90	14	57
6, 16	1250	100	15	61
7, 17	1300	110	16	65
8, 18	1350	120	17	69

Окончание таблицы 3.2

№ варианта	ν	K	s	d
9, 19	1400	130	18	73
10, 20	1450	140	19	77
21	1500	150	20	81

Решение (вариант 21)

В условиях планирования дефицита оптимальная партия товара равна

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{1 + \frac{s}{d}},$$

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 150 \cdot 1500}{20}} \cdot \sqrt{1 + \frac{20}{81}} = 150 \cdot \sqrt{\frac{101}{81}} \approx 167,5 \text{ ед.}$$

Максимальная величина задолженного спроса составит

$$y^* = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s}{d}}},$$

$$y^* = \frac{20}{81}\sqrt{\frac{2 \cdot 150 \cdot 1500}{20}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{20}{81}}} \approx 33 \text{ ед.}$$

Максимальная величина текущего запаса

$$Y^* = q^* - y^*,$$

$$Y^* = 167 - 33 = 134 \text{ ед.}$$

Период возобновления поставки

$$\tau_1^* = \frac{Y^*}{\nu},$$

$$\tau_1^* \approx \frac{154}{1500} = 0{,}1027 \ \text{г.} \approx 32 \ \text{дн.}$$

Время существования дефицита

$$\tau_2^* = \frac{Y^*}{\nu},$$

$$\tau_2^* \approx \frac{33}{1500} = 0{,}022 \ \text{г.} \approx 8 \ \text{дн.}$$

Оптимальная величина цикла

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^*,$$

$$\tau^* = 0{,}124 \ \text{г.} = 40 \ \text{дн.}$$

При этом минимальные годовые издержки, связанные с заказом и хранением товара, составят

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s}{d}}},$$

$$L^* = \sqrt{2 \cdot 150 \cdot 20 \cdot 1500} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{20}{81}}} = 2686{,}6 \ \text{ден. ед.}$$

Если дефицит товара не допускается, то партия состоит из

$$q_u = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}},$$

$$q_u = \sqrt{\frac{2 \cdot 150 \cdot 1500}{20}} = 150 \text{ ед.}$$

При этом издержки содержания запасов составят

$$L_u = 20 \cdot 150 = 3000 \text{ ден. ед.}$$

При планировании дефицита экономия составит

$$L = 3000 - 2686{,}6 = 313{,}4 \text{ ден.ед.}$$

3.3. Модель с дефицитом при потере неудовлетворенных требований

Задание 3.3

Предприятие выпускает некоторую продукцию, среднегодовой спрос на которую составляет ν шт. Издержки наладки оборудования равны K ден. ед., издержки хранения s ден. ед. Неудовлетворенные требования теряются. Удельный вес дефицита – d ден. ед., в году 240 рабочих дней.

Определите:

1) величину партии, при которой издержки минимальны;
2) время между выпуском партий;
3) время выпуска партии продукции;
4) количество партий, производимых в течение года;
5) количество производимой в течение года продукции;
6) издержки работы системы в течение года;

Таблица 3.3 – Исходные данные к заданию 3.3

№ варианта	ν	K	s	d
1, 11	450	120	7	35
2, 12	500	125	8	40
3, 13	550	130	9	45
4, 14	600	135	10	50
5, 15	650	140	11	55
6, 16	700	145	12	60
7, 17	750	150	13	65
8, 18	800	155	14	70
9, 19	850	160	15	75
10, 20	900	165	16	80
21	800	160	30	90

Решение (вариант 21)

Определим оптимальную величину партии

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{1+\frac{s}{d}} = \sqrt{\frac{2\cdot 160\cdot 800}{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{30}{90}}} = 80 \text{ шт.}$$

Партии должны выпускаться через

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \sqrt{1+\frac{s}{d}} = \sqrt{\frac{2\cdot 160}{30\cdot 800}} \cdot \sqrt{1+\frac{30}{90}} \approx 0{,}133 \text{ г.} = 0{,}133\cdot 240 = 32 \text{ дн.}$$

Время производства партии составляет

$$\tau_1^* = \frac{q^*}{\nu} = \frac{80}{800} = \frac{1}{10} \text{ г.} = 0{,}1\cdot 240 = 24 \text{ дн.}$$

время дефицита

$$\tau_2^* = \tau^* - \tau_1^* = 32 - 24 = 8 \text{ дн.}$$

В течение года будет выпущено $n = \frac{1}{0{,}133} 7{,}5$ партий. Это составит 7,5 · 80 = 600 шт. продукции.

Годовые издержки системы

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \sqrt{1 + \frac{s}{d}} = 3200 \text{ ден. ед.}$$

Глава IV
МОДЕЛИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

4.1. Многоканальная СМО с отказами

Задание 4.1

Справочная служба некоторого торгового предприятия обслуживает клиентов по телефону, разветвленному на n линий. В среднем за один час работы поступает λ запросов. Среднее время переговоров диспетчеров службы $\overline{t}_{\text{обсл}}$. Дайте оценку работы такой СМО (таблица 4.1).

Таблица 4.1. – Исходные данные к заданию 4.1

№ варианта	n	λ	$\overline{t}_{\text{обсл}}$
1, 11	4	90	3,0
2, 12	5	120	2,5
3, 13	6	140	2,0
4, 14	8	160	2,5
5, 15	5	150	2,0
6, 16	6	120	3,0
7, 17	7	150	3,5
8, 18	8	150	4,0
9, 19	7	120	3,5
10, 20	5	110	2,0
21	4	100	2,5

Решение (вариант 21)

$$\overline{t}_{\text{обсл}} = 2{,}5 \text{ мин} = 0{,}042 \text{ ч.}$$

Определим:

– интенсивность обслуживания

$$\mu = \frac{1}{\overline{t}_{\text{обсл}}} = \frac{1}{0{,}042} = 23{,}81 \text{ заявки/ч;}$$

– интенсивность нагрузки

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \overline{t}_{\text{обсл}} = 100 \cdot 0{,}042 = 4{,}2.$$

Доля времени простоя диспетчеров предприятия P_0 определяется как вероятность того, что система свободна:

$$P_0 = \left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\frac{\rho^4}{4!}\right)^{-1} = \left(1+4,2+\frac{4,2^2}{2!}+\frac{4,2^3}{3!}+\frac{4,2^4}{4!}\right)^{-1} = 0,026.$$

Вероятность того, что заявка, поступившая в систему, получит отказ, равна вероятности занятости всех четырех линий:

$$P_{\text{отк}} = P_4 = \frac{\rho^4}{4!}\cdot P_0 = \frac{4,2^4}{4!}\cdot 0,025 = 0,327.$$

Относительная пропускная способность системы

$$q = P_{\text{обсл}} = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0,324 = 0,673.$$

Абсолютная пропускная способность системы

$$A = \lambda \cdot q = 100 \cdot 0,676 = 67,35 \text{ клиента/ч.}$$

Среднее число занятых каналов

$$\bar{N}_3 = \rho \cdot q = 4,2 \cdot 0,676 = 2,8.$$

Коэффициент занятости каналов

$$k_3 = \frac{\bar{N}_3}{n} = \frac{2,8}{4} = 0,7.$$

Таким образом можно сделать вывод о неэффективности работы системы: доля обслуженных клиентов составляет 68 %, необслуженных – 32 %. Абсолютная пропускная способность равна 67 клиентов/ч; каждый канал занят обслуживанием 70 % времени. Для повышения эффективности можно рекомендовать предприятию увеличить число линий и снизить время обслуживания.

4.2. Многоканальная СМО с ожиданием и ограничением длины очереди

Задание 4.2

В парикмахерскую в среднем в час приходят λ клиентов. Если в очереди уже находятся m человек, то пришедшие не желают терять времени в ожидании обслуживания и покидают парикмахерскую. Среднее время обслуживания одного клиента – $\overline{t}_{обсл}$ мин, в зале работают n мастеров (таблица 4.2).

Определите:

1) интенсивность обслуживания;
2) интенсивность нагрузки;
3) вероятность того, что система свободна;
4) вероятность того, что пришедший клиент получит отказ (не будет обслужен);
5) относительную пропускную способность;
6) абсолютную пропускную способность;
7) среднее число занятых каналов;
8) коэффициент занятости каналов;
9) среднее число клиентов, находящихся в очереди;

Сделайте вывод об эффективности работы парикмахерской

Таблица 4.2 – Исходные данные к задаче 4.2

№ варианта	n	m	λ	$\overline{t}_{обсл}$
1, 11	5	8	9	25
2, 12	3	4	5	30
3, 13	2	3	8	35
4, 14	3	7	8	18
5, 15	5	8	9	30
6, 16	5	11	9	28
7, 17	2	3	5	40
8, 18	3	5	7	25
9, 19	5	9	9	28
10, 20	6	13	9	35
21	2	3	9	20

Решение (вариант 21)

$$\overline{t}_{\text{обсл}} = 20\ \text{мин} = 1/3\ \text{ч}.$$

Определим:
– интенсивность обслуживания

$$\mu = \frac{1}{\overline{t}_{\text{обсл}}} = \frac{1}{1/3} = 3\ \text{чел/ч};$$

– интенсивность нагрузки

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \overline{t}_{\text{обсл}} = 3; \qquad \psi = \frac{\rho}{n} = \frac{3}{2} = 1,5;$$

– вероятность того, что система P_0 свободна

$$P_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^2}{2!} \cdot \frac{\rho/n - (\rho/n)}{1 - (\rho/n)}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{2!} \cdot \frac{1,5 - 1,5}{1 - 1,5}\right)^{-1} = 0,025.$$

Вероятность того, что заявка, поступившая в систему, получит отказ, определяется по формуле

$$P_{\text{отк}} = P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \cdot P_0 = \frac{3^5}{2^3 \cdot 2!} \cdot 0,025 = 0,37,$$

что показывает долю потенциальных клиентов, которые не получили возможность воспользоваться услугами парикмахеров.

Относительная пропускная способность системы

$$q = P_{\text{обсл}} = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0,37 = 0,63.$$

Абсолютная пропускная способность системы

$$A = \lambda \cdot q = 9 \cdot 0,63 = 5,63;$$

$$\bar{N}_3 = m \cdot q = 3 \cdot 0,63 = 1,88.$$

Коэффициент занятости каналов

$$k_3 = \frac{\bar{N}_3}{n} = \frac{1,88}{2} = 0,94.$$

Среднее число клиентов, находящихся в очереди

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1} \cdot P_0}{n! \cdot n} \cdot \frac{1 - \psi^m \left(m + 1 - m \cdot \psi\right)}{\left(1 - \psi\right)^2} =$$

$$= \frac{3^3 \cdot 0,025}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1 - 1,5^3 \left(3 + 1 - 3 \cdot 1,5\right)}{\left(1 - 1,5\right)^2} = 1,79.$$

Абсолютная пропускная способность равна 5,63 клиентов/ч; средняя длина очереди составляет 1,79 чел. Несмотря на то, что коэффициент занятости каналов достаточно высок – 0,94, система работает в напряженном режиме, так как средняя доля потерянных заявок составляет 38 % от числа поступивших. Эффективность системы можно повысить путем увеличения числа парикмахеров и снижения времени обслуживания.

4.3 Многоканальная СМО с ожиданием и неограниченной очередью

Задание 4.3

На вокзале n касс по продаже билетов, интенсивность потока покупателей составляет λ чел/ч, а среднее время обслуживания – $\overline{t}_{обсл}$ мин (см. таблицу 4.3).

Определите:

1) интенсивность обслуживания;

2) интенсивность нагрузки;

Проведите анализ работы СМО.

Таблица 4.3 – Исходные данные к заданию 4.3

№ варианта	n	λ	$\overline{t}_{обсл}$
1, 11	4	35	6
2, 12	2	20	6
3, 13	1	30	4
4, 14	2	20	5
5, 15	3	25	5
6, 16	4	25	6
7, 17	5	35	4
8, 18	4	35	5
9, 19	3	25	6
10, 20	2	30	6
21	1	30	5

Решение (вариант 21)

$$\overline{t}_{обсл} = 5 \text{ мин} = \frac{1}{12} \text{ ч.}$$

Определим:

– интенсивность обслуживания

$$\mu = \frac{1}{\overline{t}_{\text{обсл}}} = \frac{1}{1/12} = 12 \text{ чел/ч};$$

– интенсивность нагрузки

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \overline{t}_{\text{обсл}} = 2,5.$$

Так как $\rho > 1$, продажа билетов не может осуществляться в стационарном режиме, очередь будет все время увеличиваться. В данной ситуации необходимо либо уменьшить время обслуживания до 1,9 мин, тогда $\rho = 0,95 < 1$, либо ввести еще хотя бы две кассы, тогда нагрузка на один канал будет $\psi = \rho / n = 2,5 / 3 = 0,83 < 1,$ и таким образом стационарный режим продажи билетов станет возможным.

Глава V
ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИ ДЕТЕРМИНИРОВАННОМ СПРОСЕ НА ТОВАР

5.1. Расчет параметров системы обслуживания при известной интенсивности поступления товара

Потребность производства в товаре составляет Q = 1530 т за время T = 365 дн. На склад товар доставляется партиями и затраты на доставку его не зависят от размера партии (условно). Пусть они составляют $C_д$ = 1000 у. е. Товар со склада на производство поступает непрерывно и не изменяется во времени.

Пусть затраты на хранение составляют C_x = 20 у. е./т. дн. и интенсивность поступления товара на склад $\lambda = 1{,}1\, Q / T$.

Необходимо определить оптимальный размер партии поставки товара на склад, при котором суммарные издержки на доставку и хранение товара были бы минимальны. Также необходимо найти период времени между поставками товара, суммарные годовые издержки, норму и норматив оборотных средств на складе (рисунок 5.1).

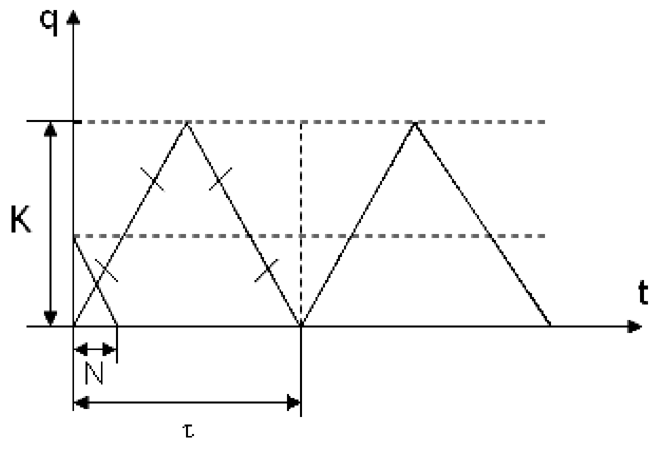

Рисунок 5.1. – График оптимального размера партии поставки товара на склад при известной интенсивности поступления товара
τ – время одного цикла; N – запас оборотных средств на складе

$$\frac{Q}{T} < \lambda,$$

$$n = \frac{T}{t} = \frac{Q}{q},$$

$$\lambda = 1{,}1\frac{Q}{T} = 4{,}6 \text{ т/дн.},$$

$$\upsilon = \frac{\lambda}{1{,}1} = \frac{Q}{T} = 4{,}2 \text{ т/дн.},$$

$$K = q - \upsilon \cdot \tau_1 = q - \frac{Q}{T} \cdot \tau_1,$$

$$K = q - \frac{Q}{T} \cdot \frac{q}{\lambda} = q\left(1 - \frac{Q}{T \cdot \lambda}\right);$$

$$C^{\Sigma} = C_x^{\Sigma} + C_{\text{д}}^{\Sigma} = \left(C_X^{1\text{ц}} + C_{\text{д}}^{1\text{ц}}\right) \cdot n = C_{\text{д}}^{1\text{ц}} \cdot n + C_{\text{х}}^{1\text{ц}} \cdot n =$$

$$= C_{\text{д}}^{1\text{ц}} \cdot n + \frac{1}{2} \cdot K \cdot \tau \cdot C_x \cdot n =$$

$$= C_{\text{д}}^{1\text{ц}} \cdot \frac{Q}{q} + \frac{1}{2} \cdot K \cdot \tau \cdot C_x \cdot \frac{T}{\tau} = C_{\text{д}}^{1\text{ц}} \cdot \frac{Q}{q} + \frac{1}{2} \cdot q\left(1 - \frac{Q}{T \cdot \lambda}\right)\frac{T}{\tau} \cdot C_x \cdot \tau =$$

$$= C_{\text{д}}^{1\text{ц}} \cdot \frac{Q}{q} + \frac{1}{2} \cdot q \cdot C_x \cdot T - \frac{Q \cdot q \cdot C_x}{2\lambda} \to \min$$

$$\frac{\partial C^{\Sigma}}{\partial q} = -C_{\text{д}} \frac{Q}{q^2} + \frac{1}{2} \cdot C_x \cdot T - \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{\lambda} \cdot C_x = 0;$$

$$-C_{\text{д}}\frac{Q}{q^2}+\frac{1}{2}\cdot C_x\cdot T\left(1-\frac{Q}{T\cdot\lambda}\right)=0.$$

$$q^2=\frac{2\cdot C_{\text{д}}\cdot Q}{C_x\cdot T\left(1-\dfrac{Q}{T\cdot\lambda}\right)}\Rightarrow q=\sqrt{\frac{2\cdot C_{\text{д}}\cdot Q}{C_x\cdot T\left(1-\dfrac{Q}{T\cdot\lambda}\right)}};$$

$$q=\sqrt{\frac{2\cdot 1000\cdot 1530}{20\cdot 365\cdot 0,089}}=68,63\,\text{т};$$

$$\tau=\frac{q\cdot T}{Q}=\frac{68,63\cdot 365}{1530}=16\ \text{дн.};$$

$$C^{\Sigma}=C_{\text{д}}\cdot\frac{Q}{q}+\frac{1}{2}\cdot q\left(1-\frac{Q}{T\cdot\lambda}\right)C_x\cdot T\rightarrow\min;$$

$$C^{\Sigma}=1000\cdot\frac{1530}{68,63}+\frac{1}{2}\cdot 68,63\cdot 0,089\cdot 20\cdot 365=44\,588\ \text{у. е.}$$

$$N=\frac{1}{2}\cdot K\cdot\frac{T}{Q}=\frac{1}{2}\cdot q\left(1-\frac{Q}{T\cdot\lambda}\right)\frac{T}{Q}=\frac{1}{2}\cdot 68,63\cdot 0,089\cdot\frac{365}{1530}=0,73\ \text{дн.}$$

$$n=\frac{1}{2}\cdot K\cdot C_T=\frac{1}{2}\cdot q\left(1-\frac{Q}{T\cdot\lambda}\right)C_T=\frac{1}{2}\cdot 68,63\cdot 0,089\cdot 1700=5191,9\ \text{у. е.}$$

$$K=68,63\left(1-\frac{1530}{365\cdot 4,6}\right)=6,09\ \text{т.}$$

Норма – показатель, отражающий минимально необходимый средний уровень оборотных средств, выраженный в днях запаса.

Норматив оборотных средств – показатель, отражающий минимально необходимый средний уровень оборотных средств, выраженный в денежной форме.

5.2. Определение параметров системы обслуживания с учетом убытков из-за неудовлетворенного спроса

Данный пункт предусматривает рассмотрение однопродуктовой детерминированной задачи с учетом убытков из-за неудовлетворенного спроса.

Пусть существует потребность производства в товаре составляющего Q = 2090 т за время T = 365 дн. На склад товар доставляется партиями и затраты на доставку его не зависят от размера партии (условно). Пусть они составляют $C_д$ = 1000 у. е. Товар со склада на производство поступает непрерывно и не изменяется во времени.

Пусть затраты на хранение составляют C_x = 20 у. е. / т.·дн.

Товар в определенное время на складе заканчивается, предприятие берет товар взаймы у других субъектов хозяйствования и возвращает его из новой партии товара.

Затраты, связанные с займом товара, составляют $C_у$ = 50 у. е. / т.·дн. Причем берется взаймы вся партия сразу.

Необходимо определить оптимальный размер партии поставки товара на склад и величину партии, закладываемой на хранение, при условии, что суммарные издержки на доставку и хранение товара будут минимальны. Также необходимо найти период времени между поставками товара, суммарные годовые издержки, норму и норматив оборотных средств на складе (см. рисунок 5.2).

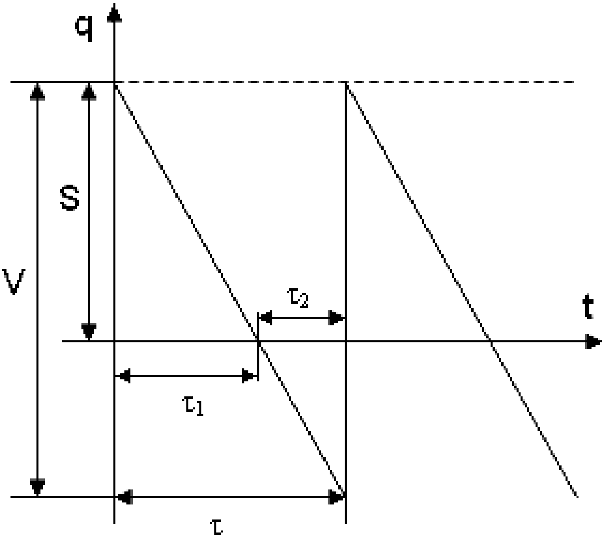

Рисунок 5.2 – График оптимального размера партии поставки товара на склад с учетом убытков из-за неудовлетворенного спроса

$$n = \frac{T}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{Q}{V};$$

$$\frac{\tau_1}{\tau} = \frac{S}{V};$$

$$\frac{\tau_2}{\tau} = \frac{V - S}{V}.$$

$$C_\Sigma = C_\Sigma^x + C_\Sigma^\text{д} = C_\Sigma^{1\text{ц}} \cdot n = \left(C_x^{1\text{ц}} + C_\text{д}^{1\text{ц}}\right) n,$$

$$C_x^{1\text{ц}} = \frac{1}{2} \cdot S \cdot \tau_1 \cdot C_x + \frac{1}{2} \cdot \tau_2 \left(V - S\right) C_y.$$

$$C_{\Sigma}=\left(C_{д}^{1ц}+\frac{1}{2}\cdot S\cdot\tau_1\cdot C_x^{1ц}+\frac{1}{2}\cdot\tau_2\cdot(V-S)\cdot C_y^{1ц}\right)n=$$

$$=C_{д}^{1ц}\cdot\frac{Q}{V}+\frac{1}{2}\cdot S\cdot\tau_1\cdot C_x^{1ц}\cdot\frac{T}{\tau}+\frac{1}{2}\cdot\tau_2\,(V-S)\,C_y^{1ц}\cdot\frac{T}{\tau}=$$

$$=C_{д}^{1ц}\cdot\frac{Q}{V}+\frac{1}{2}\cdot C_x^{1ц}\cdot\frac{S^2\cdot T}{V}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(V-S)^2\,T}{V}\cdot C_y^{1ц}\to\min;$$

$$\frac{\partial C_{\Sigma}}{\partial V}=-\frac{C_{д}^{1ц}\cdot Q}{V^2}-\frac{1}{2}\cdot C_x^{1ц}\cdot\frac{S^2\cdot T}{V^2}+\frac{T\left(V^2-S^2\right)}{2\cdot V^2}\cdot C_y^{1ц}=0;$$

$$\frac{\partial C_{\Sigma}}{\partial S}=C_x^{1ц}\cdot\frac{S\ \ \cdot T}{V}-\frac{2\cdot T(V-S)}{2\cdot V}\cdot C_y^{1ц}=0.$$

Получим следующую систему и выразим *S* и *V* из нее:

$$\begin{cases}-2\cdot C_{д}^{1ц}\cdot Q-C_x^{1ц}\cdot T\cdot S^2+T\left(V^2-S^2\right)C_y^{1ц}=0,\\ C_x^{1ц}\cdot S\cdot T-T(V-S)\,C_y^{1ц}=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-2\cdot C_{д}^{1ц}\cdot Q+T\cdot V^2\cdot C_y^{1ц}=S^2\left(C_y^{1ц}\cdot T+C_x^{1ц}\cdot T\right),\\ C_x^{1ц}\cdot S\cdot T+T\cdot S\cdot C_y^{1ц}=T\cdot V\cdot C_y^{1ц};\end{cases}$$

$$\begin{cases}-2\cdot C_{д}^{1ц}\cdot Q+T\cdot S^2\cdot\dfrac{C_y^{1ц2}+C_x^{1ц2}+2C_y^{1ц}\cdot C_x^{1ц}}{C_y^{1ц}}=S^2\left(C_y^{1ц}\cdot T+C_x^{1ц}\cdot T\right),\\ V=S\cdot\dfrac{C_y^{1ц}+C_x^{1ц}}{C_y^{1ц}};\end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \cdot C_{\text{д}}^{1\text{ц}} \cdot Q = S^2 \cdot \dfrac{\left(-C_x^{1\text{ц}} \cdot T \cdot C_y^{1\text{ц}} - T \cdot C_x^{1\text{ц}2}\right)}{C_y^{1\text{ц}}}; \\ V = S \cdot \dfrac{C_y^{1\text{ц}} + C_x^{1\text{ц}}}{C_y^{1\text{ц}}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} S^2 = \dfrac{2 \cdot C_{\text{д}}^{1\text{ц}} \cdot Q \cdot C_y^{1\text{ц}}}{C_x^{1\text{ц}} \cdot T \cdot C_y^{1\text{ц}} + T \cdot C_x^{1\text{ц}2}}, \\ V = S \cdot \dfrac{C_y^{1\text{ц}} + C_x^{1\text{ц}}}{C_y^{1\text{ц}}}; \end{cases}$$

Если $\rho = \dfrac{C_y^{1\text{ц}}}{C_y^{1\text{ц}} + C_x^{1\text{ц}}}$, тогда

$$S = \sqrt{\frac{2 \cdot C_{\text{д}}^{1\text{ц}} \cdot Q}{T \cdot C_x^{1\text{ц}}}} \cdot \sqrt{\rho},$$

$$V = \frac{S}{\rho} = \sqrt{\frac{2 \cdot C_{\text{д}}^{1\text{ц}} \cdot Q}{T \cdot C_x^{1\text{ц}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}},$$

$$\rho = \frac{C_y}{C_x + C_y} = \frac{50}{20 + 50} = 0,714,$$

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 1530}{20 \cdot 365}} \cdot \frac{1}{\sqrt{0,714}} = 24,23 \text{ т/сут},$$

$$S = \rho \cdot V = 0,714 \cdot 24,23 = 17,3 \text{ т},$$

$$\tau = \frac{V \cdot T}{Q} = \frac{24,23 \cdot 365}{1530} = 6 \text{ дн.}$$

$$\tau_1 = \frac{S \cdot \tau}{V} = \frac{17,3 \cdot 6}{24,23} = 4,28 \text{ дн.}$$

$$C_{\Sigma} = 1000 \cdot \frac{1530}{24,23} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(17,3)^2}{24,23} \cdot 20 \cdot 365 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{(24,23 - 17,3)^2}{24,23} \cdot 50 \cdot 365 = 126\,316 \text{ у. е.}$$

$$N = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau_1 \cdot S}{\tau} \cdot \frac{T}{Q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S^2 \cdot T}{Q \cdot V} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(17,3)^2 \cdot 365}{1530 \cdot 24,23} = 1,47 \text{дн.}$$

$$n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau_1 \cdot S}{\tau} \cdot C_T = \frac{1}{2} \cdot \frac{S^2 \cdot C_T}{V} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(17,3)^2 \cdot 1700}{24,23} = 10\,499,2 \text{ у. е.}$$

5.3. Определение точки заказа

Точка заказа – это тот уровень запаса товара на складе, при котором необходимо производить заказ на доставку новой партии товара.

Пусть время выполнения заказа $\theta = 30$ дн,

r – точка заказа, т:

$$r = \theta \cdot \frac{Q}{T} - \left| \frac{\theta}{\tau} \right| V_{\text{опт}} - \left(V_{\text{опт}} - S_{\text{опт}} \right),$$

$$S - V \le r \le S;$$

$\theta \cdot \dfrac{Q}{T}$ – количество расходуемого товара за время θ, т;

$$r = 30 \cdot \frac{1530}{365} - \left| \frac{30}{5,8} \right| 24,23 - (24,23 - 17,3) = -2,3 \text{ т.}$$

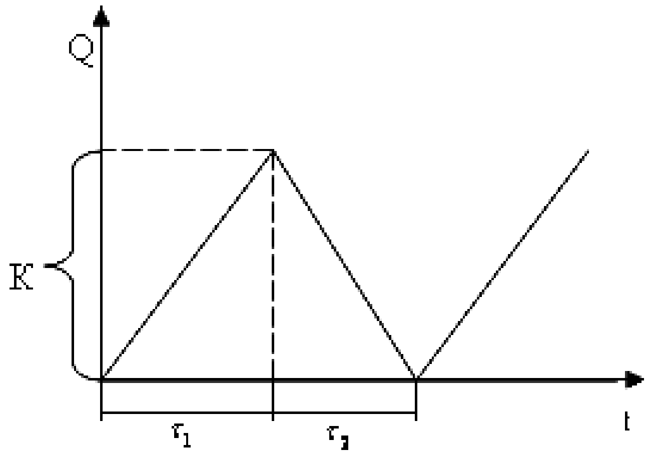

Рисунок 5.3 – Графическая интерпретация определения точки заказа

Определим точки заказа для задачи с непрерывной интенсивностью поступления товара на склад.

Рассмотрим два случая:

Если

$$\theta - \left|\frac{\theta}{\tau}\right|\tau \le \tau_2,$$

где $\left|\frac{\theta}{\tau}\right|$ – количество совершаемых циклов за время θ,

$\theta - \left|\frac{\theta}{\tau}\right|\tau$ – время, которое не входит в цикл, дн.,

то

$$r = \theta \cdot \nu - \left|\frac{\theta}{\tau}\right| q.$$

Если $\theta - \left|\frac{\theta}{\tau}\right|\tau > \tau_2$, то

$$r=(\lambda-\nu)\left(\tau-\left(\theta-\left|\frac{\theta}{\tau}\right|\tau\right)\right)=(\lambda-\nu)\left(\tau+\left|\frac{\theta}{\tau}\right|\tau-\theta\right)=$$

$$=(\lambda-\nu)\left(\tau\left(1+\left|\frac{\theta}{\tau}\right|\right)-\theta\right)=$$

$$=\theta(\nu-\lambda)+\left(\left|\frac{\theta}{\tau}\right|+1\right)(\lambda-\nu)\tau=\theta(\nu-\lambda)+\left(\left|\frac{\theta}{\tau}\right|+1\right)\left(\frac{\lambda}{\nu}-1\right)q,$$

$$\tau_2=\tau-\tau_1=\tau-\frac{q}{\lambda}=16-\frac{68,63}{4,6}=1,08 \text{ дн.},$$

$$\theta-\left|\frac{\theta}{t}\right|\tau=30-\left|\frac{30}{16}\right|16=14 \text{ дн.}>1,08 \text{ дн.}$$

Так как 14 > 1,08, то рассчитываем по второй формуле:

$$r=30\cdot(4,2-4,6)+\left(\left|\frac{30}{16}\right|+1\right)\left(\frac{4,6}{4,2}-1\right)68,63=1,07 \text{ т.т}$$

5.4. Определение нормы и норматива запаса товара на складе при нелинейной функции среднедневного расхода

Пусть товар на складе расходуется по следующей функции:

$$q(t)=-t^2+a\cdot t+b.$$

Необходимо определить параметры данной функции, а также отыскать норму и норматив.

Пусть $S = q(t)$ = 17,3 т, а τ_1 = 4,28 дн. Рассмотрим данную функцию в двух точках: (τ_1; 0) и (0; S). В первой точке имеем $S = b$ = = 17,3; во второй – $0=-4,28^2+a\cdot 4,28+17,3$.

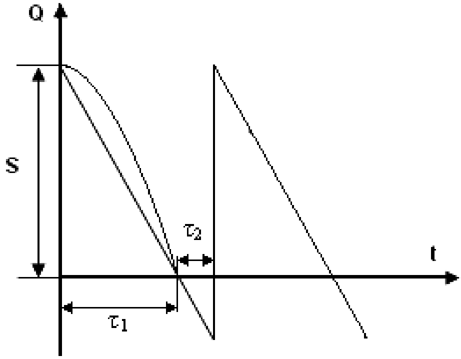

Рисунок 5.4 – Графическая интерпретация определения нормы и норматива товара на складе

Тогда b = 17,3; a = 0,24. Получим функцию

$$q(t) = -t^2 + 0,24 \cdot t + 17,3.$$

Норма запаса рассчитывается по формуле

$$N = \frac{\int_0^{\tau_1} (-t^2 + a \cdot t + b)\mathrm{d}t}{\tau \cdot \frac{Q}{T}}.$$

$$N = \frac{\int_0^{4,28} \left(-t^2 + 0,24 \cdot t + 17,3\right)\mathrm{d}t}{6 \cdot \frac{1530}{365}} =$$

$$= \frac{-\frac{4,28^3}{3} + 0,24 \cdot \frac{4,28^2}{2} + 17,3 \cdot 4,28}{6 \cdot \frac{1530}{365}} = 2,0 \text{ дн.}$$

$$n = C_T \cdot N \cdot \lambda = 1700 \cdot 2,0 \cdot 4,6 = 15\,640 \; у.\, е.$$

Глава VI
ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНОМ СПРОСЕ НА ТОВАР

6.1. Определение параметров спроса с незначительными затратами на хранение товара

Постановка задачи: спрос имеет случайный характер и он неизвестен. Однако известен закон распределения этого спроса:

– q – величина спроса за время T;

– $P(q)$ – вероятность того, что спрос за время T составит q.

Если величина запаса на складе S больше спроса, то избыток товара продается с издержками C_1; если величина спроса больше запаса на складе, то товар приобретается с издержками C_2 на единицу товара.

Решение:

$$C(S) = C_1 \cdot \sum_{q=0}^{q=S} (S-q) \cdot P(q) + C_2 \cdot \sum_{q=S+1}^{q=\infty} (q-S) P(q);$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = C_1 \cdot \sum_{q=0}^{q=S} P(q) - C_2 \cdot \sum_{q=S+1}^{q=\infty} P(q) = 0;$$

$$\sum_{q=0}^{q=\infty} P(q) = \sum_{q=0}^{q=S} P(q) + \sum_{q=S+1}^{q=\infty} P(q) = 1;$$

$$C_1 \cdot \sum_{q=0}^{q=S} P(q) = C_2 (1 - \sum_{q=0}^{q=S} P(q));$$

$$(C_1 + C_2) \cdot \sum_{q=0}^{q=S} P(q) = C_2;$$

$$\sum_{q=0}^{q=S} P(q) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{250}{100 + 250} = 0,714,$$

где $C(S)$ – математическое ожидание общих издержек;

$q \in (0, S)$ – уровень запаса, который необходимо найти.

Плотность распределения вероятности имеет график геометрической прогрессии. Затраты, связанные с реализацией 1 т излишнего товара, составляют 100 у. е./т. Затраты на приобретение недостающего товара составляют 250 у. е./т.

Распишем нормировочные условия:

$$\sum_{q=0}^{q=\infty} P(q) = 1.$$

Вероятность спроса распределена по геометрической прогрессии.

$$S_n = P(0) + d \cdot P(0) + \ldots + d^{n-1} \cdot P(0);$$

$$dS_n = d \cdot P(0) + \ldots + d^{n-1} \cdot P(0) + d^n \cdot P(0);$$

$$S_n (d - 1) = P(0) \cdot (d^n - 1);$$

$$S_n = \frac{P(0) \cdot (d^n - 1)}{d - 1}, \text{ где } n = \infty; \; d < 1,$$

так как $n \Rightarrow \infty$ то $d^n = 0$;

$$S_n = \frac{P(0)}{1 - d} = 1;$$

$$d = 1 - P(0) = 1 - \frac{N}{100} = 1 - \frac{9}{100} = 0{,}91,$$

где N – номер варианта.

Ищем такой размер запаса, при котором будут минимальны суммарные издержки:

$$\sum_{q=0}^{q=s} P(0) \geq \frac{C_2}{C_1 + C_2};$$

$$S_s = \frac{P(0)\left(d^2 - 1\right)}{d - 1} = 0,714;$$

$$0,91^s - 1 = \frac{-0,09 \cdot 0,714}{0,09} \Rightarrow 0,91^s = 0,286;$$

$$S = \frac{\ln 0,286}{\ln 0,91} = 13,27 \text{ т.}$$

Принимаем, что s = 14 т. Значит, для хранения товара необходим склад вместимостью 14 т.

Найдем суммарные издержки при данном объеме запаса на складе:

$$P(q) = P(0) \cdot d^{q-1};$$

$$d = 1 - P(0);$$

$$C(S) = C_1 \cdot \sum_{q=0}^{q=S} (S - q) \cdot P(0) \cdot d^{q-1} + C_2 \cdot \sum_{q=S+1}^{q=\infty} (q - S) \cdot P(0) \cdot d^{q-1}.$$

Так как $\sum_{q=S+1}^{q=\infty} d^{q-1} = 1 - \sum_{q=0}^{q=S} d^{q-1}$, то

$$C(S) = P(0)(C_1 + C_2) \times$$

$$\times \left(S \cdot \sum_{q=0}^{q=S} \left(1 - P(0)\right)^{q-1} - \sum_{q=0}^{q=S} q\left(1 - P(0)\right)^{q-1} \right) + C_2 \cdot P(0)(1 - S),$$

$$C(S) = 0{,}09(100 + 250) \times$$

$$\times\left(14 \cdot \sum_{q=0}^{q=14} (0{,}91)^{q-1} - \sum_{q=0}^{q=14} q(0{,}91)^{q-1}\right) + 250 \cdot 0{,}09(-13) = 2252{,}39 \text{ у. е.}$$

6.2. Определение параметров складской системы с учетом затрат на хранение товара

Спрос на хранение на складе товара имеет случайный характер. Вероятность распределения данного спроса отражает геометрическая прогрессия. Затраты на хранение единицы товара в единицу времени C_x составляют 20 у. е. / т · дн. затраты, связанные с неудовлетворением спроса на единицу товара в единицу времени C_y – 50 у. е.

Необходимо определить размер товара S, закладываемого на склад, с тем условием, чтобы суммарные издержки на хранение и издержки, связанные с неудовлетворением спроса, были минимальны.

Так как спрос на товар имеет случайный характер, необходимо рассматривать два случая:

1. Спрос за время τ не превысит размера хранимого на складе товара (рисунок 6.1).

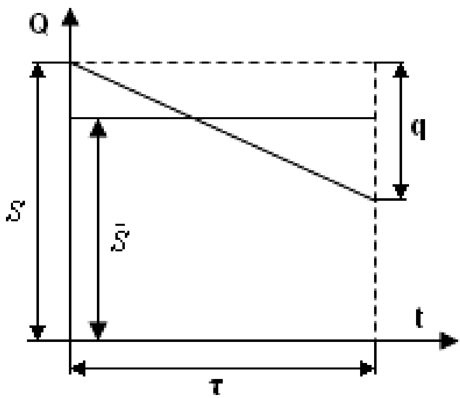

Рисунок 6.1 – Графическая интерпретация определения параметров складской системы в случае, если спрос не превышает размера хранимого на кладе товара

$$S > q;$$

$$\overline{S} = \frac{S + (S - q)}{2} = S - \frac{q}{2}.$$

2. Спрос за время τ превысит размер хранимого на складе товара (рисунок 6.2).

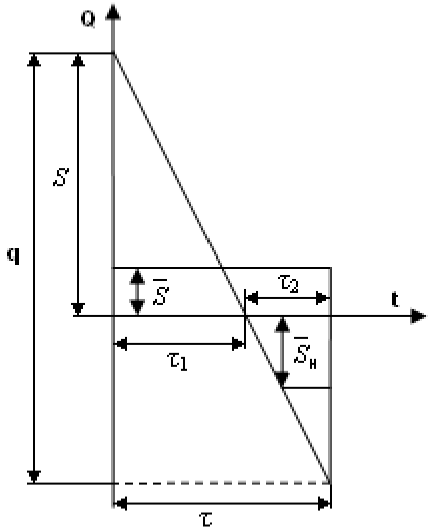

Рисунок 6.2 – Графическая интерпретация определения параметров складской системы в случае, если спрос не превышает размера хранимого на кладе товара

$$S < q;$$

так как $\frac{\tau_1}{\tau} = \frac{S}{q}$, то $\overline{S} = \frac{S^2}{2 \cdot q}$.

$$\overline{S} = \frac{(q - S)\tau_2}{2 \cdot \tau};$$

так как $\frac{\tau_2}{\tau} = \frac{q-S}{q}$, то $\overline{S}_H = \frac{(q-S)^2}{2 \cdot q}$.

Найдем математическое ожидание суммарных издержек:

$$M\left(C(S)\right) = \sum_{q=0}^{q=S} \left(C_x \cdot \left(S - \frac{q}{2} \right) \cdot P\left(q\right) \right) +$$

$$+ \sum_{q=S+1}^{q=\infty} \left(\left(C_x \cdot \frac{S^2}{2q} + C_y \cdot \frac{\left(q-S\right)^2}{2q} \right) \cdot P\left(q\right) \right) \to \min;$$

$$\frac{\partial M\left(C(S)\right)}{\partial S} = C_x \cdot \sum_{q=0}^{q=S} P\left(q\right) + \sum_{q=S+1}^{q=\infty} \left(\frac{C_x \cdot S}{q} - C_y \cdot \frac{q-S}{q} \right) \cdot P\left(q\right) = 0;$$

$$C_x \cdot \sum_{q=0}^{q=S} P\left(q\right) + S\left(C_x + C_y\right) \cdot \sum_{q=S+1}^{q=\infty} \frac{P\left(q\right)}{q} - C_y \cdot \sum_{q=S+1}^{q=\infty} P\left(q\right) = 0;$$

$$\sum_{q=S+1}^{q=\infty} P\left(q\right) + \sum_{q=0}^{q=S} P\left(q\right) = 1;$$

$$C_y \cdot \sum_{q=S+1}^{q=\infty} P\left(q\right) = C_y - C_y \cdot \sum_{q=0}^{q=S} P\left(q\right);$$

$$\left(C_x + C_y\right) \sum_{q=0}^{q=S} P\left(q\right) + S\left(C_x + C_y\right) \sum_{q=S+1}^{q=\infty} \frac{P\left(q\right)}{q} = C_y;$$

$$\rho = \frac{C_y}{C_x + C_y};$$

$$\sum_{q=0}^{q=S} P\left(q\right) + S \cdot \sum_{q=S+1}^{q=\infty} \frac{P\left(q\right)}{q} = \rho.$$

Далее необходимо произвести расчет, когда

$$\sum_{q=0}^{q=S} P(q) + S \cdot \sum_{q=S+1}^{q=\infty} \frac{P(q)}{q} \geq \rho.$$

По итогу расчетов неравенство будет иметь решение при $S \geq 7$.

6.3. Определение параметров складской системы на основе массового обслуживания

6.3.1. Расчет системы массового обслуживания с потерями

Пусть имеется простейший поток требований, который удовлетворяет следующим условиям:

– ординарности (в малый отрезок времени не может поступить сразу два требования):

$$P_1(\Delta t) >> P_{>1}(\Delta t);$$

$P_0(\Delta t) + P_1(\Delta t) \approx 1$ – за время Δt может поступить одно или ни одного требования

$P_1(\Delta t)$ – вероятность того, что за время Δt поступит ровно одно требование;

– стационарности (вероятности не зависят от расположения данного интервала на временной оси – λ = const);

– отсутствию последействия (вероятность времени обслуживания канала не зависит от того, сколько он обслуживался до этого).

Простейший поток требований описывается законом Пуассона:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

(вероятность поступления k требований за время t;

$$P_0(\Delta t) = e^{-\lambda \cdot t} = P(T \geq \Delta t) = 1 - P(T < \Delta t)$$

(не поступило ни одного требования);

$$P(T < t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$$

(вероятность того, что интервал между поступлениями двух смежных требований будет меньше t),
где T – интервал времени между поступлениями двух смежных требований.

Пусть имеется n-канальная система. Пусть время обслуживания одного требования имеет показательный закон распределения:

$$F(t) = 1 - e^{-\nu \cdot t};$$

$$\nu = \frac{1}{M|T|}$$

где ν – интенсивность обслуживания требования (сколько требований имеется возможность обслужить за единицу времени).

Будем рассматривать систему массового обслуживания в момент времени t и дадим бесконечно малое приращение Δt. Состояние системы массового обслуживания определяется количеством требований, находящихся в системе.

Обозначим состояние системы:

X – некоторое состояние системы;

X_k – в системе находится k требований.

На рисунке 6.3 представлен граф состояний.

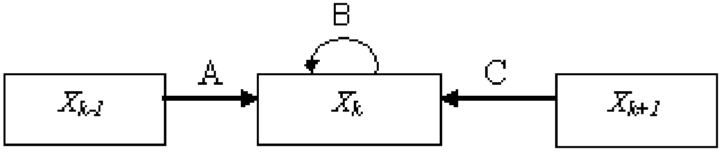

Рисунок 6.3 – Граф состояний системы массового обслуживания в момент времени t

$t + \Delta t$ – система будет находится в состоянии A.

Событие A: в момент времени t система находится в состоянии X_{k-1}. *Событие B:* ни одно из требований k-1 не будет обслужено за время Δt. Событие C: за это же время поступило ровно одно требование.

1. Рассчитаем вероятность события A:

Пусть $P_k(t)$ – вероятность того, что в системе находиться k требований в момент времени t.

$$P_1(\Delta t) = 1 - P_0(\Delta t) = 1 - e^{-\lambda \cdot \Delta t} = 1 - (1 - \lambda \cdot \Delta t) = \lambda \cdot \Delta t;$$

$$f(x_0 + \Delta x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(\Delta x)^k + 0(\Delta x)^{k+1}$$

(ряд Тейлора).

Предположим, что $x_0 = 0$, а $\Delta x = x$, тогда

$$e^x = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^0 \cdot x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1 \cdot x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

$P(T > \Delta t) = 1 - P(T < \Delta t) = e^{-\nu \cdot \Delta t}$ – вероятность того, что время обслуживания одного требования будет больше Δt.

Вероятность того, что за время Δt не будет обслужено ни одного k–1 требования, будет определяться по следующей формуле:

$$P_{k-1}(\Delta t) = e^{-(k-l) \cdot \nu \cdot \Delta t} = 1 - (k-1)\nu \cdot \Delta t.$$

В формулу Тейлора подставляем вместо x ($-\lambda \cdot \Delta t$), тогда $\dfrac{x^2}{2!} \to 0$,

т. е. $\dfrac{\lambda^2 (\Delta t)^2}{2!} \to 0 \Rightarrow e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} = 1 + x,$

т. е.

$$e^{-\lambda \cdot \Delta t} = 1 + (-\lambda \cdot \Delta t) = 1 - \lambda \cdot \Delta t,$$

$$P(A) = P_{k-1}(t) \cdot \lambda \cdot \Delta t \big(1 - (k-1) \cdot \nu \cdot \Delta t\big) = P_{k-1}(t) \cdot \lambda \cdot \Delta t.$$

2. Рассчитаем вероятность события B:

$$P(B) = P_1(t) \cdot e^{-\lambda \cdot \Delta t} \cdot e^{-\lambda \cdot \nu \cdot \Delta t} = P_k(t)\big(1 - (\lambda + k \cdot \nu) \cdot \Delta t\big).$$

3. Рассчитаем вероятность события C, вероятность того, что ровно одно из k–1 находящихся в системе требований будет обслужено:

$$P(T < \Delta t) = 1 - e^{-\nu \cdot \Delta t} = \nu \cdot \Delta t;$$

$$C_{k+1}^{1} \cdot \nu \cdot \Delta t \cdot e^{-k \cdot \nu \cdot \Delta t} = (k+1)\nu \cdot \Delta t (1 - k \cdot \nu \cdot \Delta t) = (k+1)\nu \cdot \Delta t;$$

$$P(C) = P_{k+1}(t)(1 - \lambda \cdot \Delta t)(k+1)\nu \cdot \Delta t = (k+1)\nu \cdot \Delta t \cdot P_{k+1}(t);$$

где $P(T < \Delta t)$ – вероятность того, что время обслуживания будет меньше Δt;

C_{k+1}^{1} – число сочетаний из k + 1 по одному.

Таким образом, вероятность того, что система находиться в состоянии X_k в момент времени $t + \Delta t$ равна:

$$P_k(t + \Delta t) = P(A) + P(B) + P(C),$$

$$P_k(t + \Delta t) = P_{k-1}(t) \cdot \lambda \cdot \Delta t + P_k(t)\big(1 - (\lambda + k \cdot \nu) \cdot \Delta t\big) + (k+1)\nu \cdot \Delta t \cdot P_{k+1}(t),$$

$$\frac{P_k(t + \Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = \lambda \cdot P_{k-1}(t) - (\lambda + k \cdot \lambda) \cdot P_k(t) + (k+1)\nu \cdot P_{k+1}(t),$$

$$\frac{\partial P_k(t)}{\partial t} = \lambda \cdot P_{k-1}(t) - (\lambda + k \cdot \lambda) \cdot P_k(t) + (k+1)\nu \cdot P_{k+1}(t),$$

$$\frac{\partial P_0(t)}{\partial t} = -\lambda \cdot P_0(t) + \nu \cdot P_1(t),$$

$$\frac{\partial P_n(t)}{\partial t} = \lambda \cdot P_{n-1}(t) + n \cdot \nu \cdot P_n(t),$$

где n – число каналов обслуживания.

Решив систему уравнений, можно найти вероятности для любого состояния системы. Однако на практике используют установившийся режим функционирования системы массового обслуживания, т. е. такой режим, когда $t \to \infty$.

Таким образом, для установившегося режима $P_k(t) = \text{const}$ т. е. не зависит от времени t, и производная $P_k(t)$ равна нулю, система преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda \cdot P_0 + \nu \cdot P_1; \\ 0 = \lambda \cdot P_{n-1} + n \cdot \nu \cdot P_n; \\ 0 = \lambda \cdot Pk - 1 - (\lambda + k \cdot \lambda) P_k + (k+1)\nu \cdot P_{k+1}. \end{cases}$$

Сделаем следующую подстановку:

$$\begin{cases} Z_k = -\lambda \cdot P_{k-1} + k \cdot \nu \cdot P_k; \\ Z_0 = 0; \\ Z_k - Z_{k-1} = 0; \end{cases}$$

$$Z_k = 0;$$

$$P_k = \frac{\lambda}{\nu \cdot k} \cdot P_{k-1};$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\nu} \cdot P_0;$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{2\nu} \cdot P_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2 P_0.$$

Пусть $\frac{\lambda}{\nu} = \gamma$, тогда

$$P_k = \frac{\gamma^k}{k!} \cdot P_0;$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} P_k = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\gamma^k}{k!} \cdot P_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{k=n} \frac{\gamma^k}{k!}},$$

где P_n – вероятность того, что все каналы будут заняты, т. е. вероятность отказа поступившего требования на обслуживание;

A – вероятность обслуживания;

$P_{\text{обслуж}} = 1 - P_{\text{отказа}}$ – вероятность того, что одно требование, поступившее в систему будет обслужено.

Абсолютная пропускная способность системы:

$$N = \lambda \cdot P_{\text{обслуж}} = \lambda(1 - P_n).$$

6.3.2. Определение параметров складской системы

$Q = 1530$ т – годовой грузооборот склада;

$T = 365$ дн;

$q = 24,23$ т – средний размер партий груза;

$\tau_1 = 4,28$ дн;

$d = 0,55$ т/м^2 – средняя нагрузка груза на площадку склада.

Необходимо определить площадь склада, практически обеспечивающую хранение грузооборота. Вероятность обслуживания должна быть не менее $0,95 (P_{\text{обслуж}} > 0,95)$.

$$\lambda = \frac{Q}{q \cdot T} = \frac{1530}{24,23 \cdot 365} = 0,173 \text{ партий/день};$$

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{4,28} = 0,23 \text{ партий/день,}$$

где ν – интенсивность обслуживания;

s – площадь, занимаемая одной партией груза:

$$s = \frac{q}{d} = \frac{24,23}{0,55} = 44,05 \text{ м}^2.$$

Необходимое количество площадок под одну партию товара

$$n_{\min} \geq \frac{\lambda}{\nu} = 0,173 \cdot 4,28 = 0,74 \text{ площадки;}$$

$$P_{\text{обслуж}} = 1 - P_n;$$

$$\gamma = \frac{\lambda}{\nu};$$

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^n}{n!} \cdot P_0.$$

Нахождение вероятности обслуживания на количество мест:

n	1	2	3
$P_{\text{обслуж}}$	0,57	0,86	0,97

n = 3 (результаты расчетов приведены в таблице 6).

Таблица 6 – Результаты расчетов

k	γ^k	$\frac{\gamma^k}{k!}$	$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{\gamma^k}{k!}$	P_0	P_n	$P_{\text{обслуж}}$
0	1	1	1	1	1	0
1	0,74	0,74	1,74	0,574713	0,425287	0,574713
2	0,5476	0,2738	2,0138	0,496574	0,135962	0,864038
3	0,405224	0,067537333	2,081337	0,48046	0,032449	0,967551

$$S = s \cdot n = 44,05 \cdot 3 = 132,15 \text{ м}^2.$$

$$N = \lambda \cdot P_{\text{обслуж}} = 0,173 \cdot 0,97 = 0,17 \text{ т/дн}.$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Минюк, С. А. Математические методы и модели в экономике : учебное пособие / С. А. Минюк, Е. А. Ровба, К. К. Кузьмич. – Минск : ТетраСистемс, 2002. – 432 с.

2. Кузьмицкая, Э. Е. Экономико-математические методы и модели : Практикум для студентов специальности 1-08 01 01-08 «Экономика и управление» / Э. Е. Кузьмицкая. – Минск : МГВРК, 2003.

3. Гусева, С. Т. Экономико-математические методы и модели : практикум для студентов экономических специальностей / С. Т. Гусева, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов – Брест : БГТУ, 2000. – 92 с.

4. Экономико-математические методы и модели : практикум / С. Ф. Миксюк [и др.]; под ред. С. Ф. Миксюк. – Минск : БГЭУ, 2008.

5. Экономико-математические методы и модели : учебное пособие / Н. И. Холод [и др.]; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд. – Минск : БГЭУ, 2000. – 412 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

БАЙКОВА Надежда Иосифовна
КОСОВСКИЙ Андрей Аркадьевич
КОНДРАТЕНКО Ирина Игоревна

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ И МОДЕЛЕЙ В ЛОГИСТИКЕ

Методическое пособие
для слушателей РИИТ
специальности 1-26 06 85 «Логистика»

Редактор *Т. А. Зезюльчик*
Компьютерная верстка *А. Г. Занкевич*

Подписано в печать 18.12.2013. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 2,91. Тираж 100. Заказ 1233.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.