МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика»

МАТЕМАТИКА

Пособие для студентов специальности
1-36 01 01 «Технология машиностроения»

в 4 частях

Часть 2

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области машиностроительного
оборудования и технологий*

Минск
БНТУ
2020

УДК 519.2 (075.4)
ББК 22.17я7
М34

А в т о р ы:
*Г. К. Воронович, О. Р. Габасова, О. Л. Зубко,
И. Н. Катковская, Г. И. Лебедева, И. М. Мартыненко,
В. С. Марцинкевич, Л. А. Раевская, Е. В. Сагарда, Е. А. Федосик,
Н. И. Чепелев, М. В. Щукин, В. И. Юринок, Т. С. Яцкевич*

Р е ц е н з е н т ы:
доцент кафедры «Математика» БГУИР, канд. физ.-мат. наук,
доцент *З. Н. Примичева*,
зав. кафедрой «Высшая математика» БГАТУ,
канд. физ.-мат. наук *А. А. Тиунчик*

М34 **Математика** : пособие для студентов специальности 1-36 01 01 «Технология машиностроения» : в 4 ч. / Г. К. Воронович [и др.]. – Минск: БНТУ, 2020. – Ч. 2. – 192 с.
ISBN 978-985-583-093-2 (Ч. 2).

Настоящее пособие предназначено для студентов первого курса заочной формы обучения специальности 1-36-01-01 «Технология машиностроения». Так же оно рекомендуется для использования студентами заочной формы всех инженерно-технических специальностей БНТУ.

Работа содержит основные понятия, теоремы, определения, примеры с решениями в соответствии с программой первого курса второго семестра, а также задачи для самостоятельной работы и задания для контрольной работы № 2 (30 вариантов).

Часть 1 была выпущена в 2012 году.

УДК 519.2 (075.4)
ББК 22.17я7

ISBN 978-985-583-093-2 (Ч. 2)
ISBN 978-985-525-957-3

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 6

1. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РАБОТЕ НАД КУРСОМ МАТЕМАТИКИ 7

2. ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ 9

3. ПРОГРАММА КУРСА «МАТЕМАТИКА» НА II СЕМЕСТР 11

4. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ 12
4.1. Функции нескольких переменных. Определение. Предел 12
4.2. Частные производные первого порядка 15
4.3. Полный дифференциал функции двух переменных 19
4.4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности 24
4.5. Частные производные и дифференциалы высших порядков 26
4.6. Локальные экстремумы функции двух переменных. Условный экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области 31
4.7. Наибольшее и наименьшее значения (глобальные экстремумы) функции двух переменных в замкнутой области 37

5. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ 39
5.1. Неопределенный интеграл и его свойства 39
5.2. Таблица основных неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование 40
5.3. Метод замены переменной в неопределенном интеграле 43
5.4. Интегрирование по частям 45
5.5. Интегрирование рациональных дробей 48
5.6. Интегрирование простейших иррациональностей, дифференциального бинома (интегрирование некоторых иррациональных функций) 56
5.7 Интегрирование некоторых тригонометрических выражений 66

6. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ 71
6.1. Определенный интеграл и его свойства. Понятие определенного интеграла 71
6.2. Вычисление определенного интеграла 73
6.3. Интегрирование заменой переменной (подстановкой) и интегрирование по частям в определенном интеграле 73
6.4. Приложения определенного интеграла 77
6.4.1. Вычисление площадей плоских фигур 77
6.4.2. Вычисление длин дуг кривых 86
6.4.3. Вычисление объемов и поверхностей тел вращений 91
6.5. Несобственные интегралы 97

7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА 102
7.1. Уравнения с разделяющимися переменными 103
7.2. Однородные дифференциальные уравнения 106
7.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка 110
7.4. Уравнение Бернулли 115
7.5. Уравнения в полных дифференциалах 117

8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ 121
8.1. Основные понятия 121
8.2. Решение дифференциальных уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка 123
8.3. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 131
8.4. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и специальной правой частью 136
8.5. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) 149
8.6. Системы дифференциальных уравнений 156

9. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ 162
Тема 1. Функции нескольких переменных 162
Тема 2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности 164
Тема 3. Экстремумы функций двух переменных 164

Тема 4. Условный экстремум функции нескольких переменных 165
Тема 5. Наибольшее и наименьшее значения функции в заданной области 166
Тема 6. Непосредственное интегрирование, метод замены переменной и интегрирование по частям 167
Тема 7. Интегрирование рациональных дробей 169
Тема 8. Интегрирование иррациональных и тригонометрических функций..... 170
Тема 9. Определенный интеграл, его вычисление 172
Тема 10. Приложения определенного интеграла..... 173
Тема 11. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными 174
Тема 12. Однородные дифференциальные уравнения..... 175
Тема 13. Уравнения в полных дифференциалах 176
Тема 14. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли..... 176
Тема 15. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка 177
Тема 16. Однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами..... 178
Тема 17. Неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью 178
Тема 18. Метод вариации произвольной постоянной..... 180
Тема 19. Системы дифференциальных уравнений..... 181

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2 182

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК..... 192

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее издание является методическим руководством для изучения общего курса математики студентами инженерно-технических специальностей заочной формы обучения. В пособии содержатся общие рекомендации студенту заочной формы обучения по работе над освоением дисциплины «Математика», приводятся правила выполнения и оформления контрольных работ, представлена программа дисциплины «Математика», соответствующая учебным планам второго семестра обучения; изложены основные понятия, определения, свойства, теоремы и т. д., приведены образцы решения типовых примеров, задания для самостоятельной работы студентов.

Контрольная работа № 2 содержит семь заданий, в каждом из которых студенту нужно выполнить номер, соответствующий его варианту. Номер варианта определяется двумя последними цифрами шифра зачетной книжки, если это число не больше 30. Если оно больше 30, следует от него отнять число, кратное 30. Например, если шифр содержит две последние цифры 62, то номер варианта будет равен 2. Следовательно, задачами 2-го варианта будут 1.2; 2.2; 3.2; 4.2; 5.2; 6.2; 7.2.

1. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РАБОТЕ НАД КУРСОМ МАТЕМАТИКИ

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих этапов:

– изучение теоретического материала по учебникам, учебным пособиям, конспектам лекций и т. д.;

– решение задач и упражнений;

– выполнение контрольных работ.

В помощь студентам заочной формы обучения Белорусский национальный технический университет организует чтение установочных лекций и проведение практических занятий.

Завершающим этапом изучения отдельных разделов дисциплины «Математика» является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

Контрольные работы

1. В процессе изучения дисциплины «Математика» студент должен выполнить ряд контрольных работ, главная цель которых – оказать студенту помощь в освоении данного предмета. Рецензии на эти работы позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела дисциплины; указывают на имеющиеся пробелы в подготовке, на желательное направление дальнейшей работы; помогают сформулировать вопросы для постановки их перед преподавателем.

2. Не следует приступать к выполнению контрольной работы, не решив достаточного количества задач по материалу, соответствующему этому заданию. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольной работы вызывается тем, что студент не выполнил это требование.

3. Контрольная работа должна выполняться самостоятельно. Несамостоятельно выполненная работа не дает возможности преподавателю-рецензенту указать студенту на недостатки в его работе, пробелы в усвоении им учебного материала.

4. Прорецензированные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецен-

зента, следует сохранять. Без предъявления прорецензированных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета или экзамена.

Лекции и практические занятия

Во время экзаменационных сессий для студентов заочной формы обучения организуются лекции и практические занятия. Они носят преимущественно обзорный характер. Их цель – обратить внимание на общую схему построения соответствующего раздела дисциплины, подчеркнуть важнейшие места, указать главные практические приложения теоретического материала, привести факты из истории науки, обратить внимание студента на место математики в инженерном образовании. Кроме того, на этих занятиях могут быть более подробно рассмотрены отдельные вопросы программы, отсутствующие или недостаточно полно освещенные в рекомендуемых пособиях.

Зачеты и экзамены

На экзаменах и зачетах выясняется прежде всего усвоение всех теоретических и практических вопросов программы и умение применять полученные знания к решению практических задач. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела; решение задач в простейших случаях должно выполняться без ошибок и уверенно; всякая письменная и графическая работа должна быть сделана аккуратно и четко.

2. ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку ручкой синего или черного цвета, но не красного. Необходимо оставлять поля шириной 4–5 см для замечаний рецензента.

2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), название дисциплины, номер контрольной работы, номер варианта; здесь же следует указать название учебного заведения, дату отсылки работы в университет и адрес студента. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и подпись.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачи своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

Условие задачи должно быть написано так:

3.12. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' = 0$.

Р е ш е н и е

Ответ: $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-4x}$.

6. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, кратко и лаконично объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи. Каждую задачу желательно начинать с новой страницы. В конце работы следует привести список использованной литературы.

7. После получения прорецензированной работы, как допущенной к собеседованию, так и не допущенной, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации рецензента.

Если рецензент предлагает внести в решение задач те или иные исправления и дополнения, то в случае незачтенной контрольной работы ее следует представить на повторную рецензию в короткий срок.

При повторном представлении работы должна обязательно находиться прорецензированная работа и рецензия на нее. Поэтому при выполнении контрольной работы рекомендуется оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента.

3. ПРОГРАММА КУРСА «МАТЕМАТИКА» НА II СЕМЕСТР

Интегральное исчисление функции одной переменной

Комплексные числа и действия с ними. Модуль и аргумент; алгебраическая, показательная и тригонометрическая формы комплексного числа. Формула Эйлера. Многочлены. Теорема Безу. Основная теорема алгебры. Разложение рациональной дроби в сумму простейших дробей. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных интегралов, замена переменной. Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных функций, тригонометрических выражений и простейших иррациональностей.

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Несобственные интегралы. Вычисление площади плоской фигуры, длины кривой, объемов тел вращения и с известной площадью поперечного сечения.

Функции нескольких переменных

Понятие функции нескольких переменных (ФНП). Область определения, предел, непрерывность ФНП. Частные производные и дифференцируемость ФНП; полный дифференциал. Производные от сложной и неявной ФНП. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Экстремум ФНП. Условный экстремум; метод множителей Лагранжа. Наибольшее и наименьшее значение ФНП в замкнутой области.

Обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям (ДУ). ДУ первого порядка; постановка задачи Коши; теорема существования и единственности решения задачи Коши. Решение ДУ первого порядка: с разделяющимися переменными, однородных, линейных, Бернулли, в полных дифференциалах.

ДУ высших порядков; задача Коши. ДУ, допускающие понижение порядка. Линейные ДУ высших порядков. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных. Линейные однородные и неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами; со специальной правой частью. Нормальные системы ДУ; задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Методы решения систем ДУ.

4. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

4.1. Функции нескольких переменных. Определение. Предел

Определение. Переменная величина z называется *функцией двух переменных* x и y, если каждой паре значений (x, y) из данной области D соответствует определенное значение z. Переменные x, y называются *независимыми переменными*, или *аргументами*. Область D называется *областью определения функции*. Обозначение функции двух переменных: $z = f(x, y)$ или $z = z(x, y)$.

Частным значением функции $z = f(x, y)$ называется ее значение, соответствующее какой-либо определенной паре значений аргументов. Если, например, при $x = a$ и $y = b$ функция принимает частное значение c, то пишут $c = f(a, b)$. Каждая пара значений аргументов (x, y) геометрически определяет точку $P(x, y)$ на плоскости xOy, а значение функции в этой точке есть аппликата z пространственной точки $M(x, y, z)$. Геометрическое место всех точек M есть поверхность, взаимно однозначно проектирующаяся в область D на плоскости xOy (рис. 4.1). Эта поверхность служит геометрическим изображением функции $f(x, y)$.

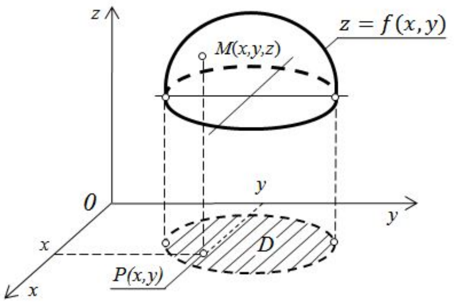

Рис. 4.1

Определение. Переменная величина *u* называется *функцией n независимых переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n,$ если каждой системе значений $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ этих переменных из данной области их изменения соответствует единственное значение величины *u*. Обозначение: $u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ или $u = u\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right).$ В случае функции трех переменных пишут $u = f\left(x, y, z\right);$ каждая система $\left(x, y, z\right)$ значений аргументов определяет некоторую точку $M\left(x, y, z\right)$ пространства, а функция $f\left(x, y, z\right)$ указывает некоторое число, отвечающее этой точке. Область определения функции трех переменных представляет собой некоторую пространственную область, под которой понимается часть пространства, ограниченная одной или несколькими поверхностями.

Пусть $P_0\left(x_0, y_0\right)$ – некоторая точка плоскости и $x \to x_0,\ y \to y_0,$ тогда точка $P\left(x, y\right)$ стремится к точке $P_0\left(x_0, y_0\right),$ то есть $P \to P_0.$ Это равносильно стремлению к нулю расстояния $\rho(P, P_0),$ которое мы будем обозначать буквой ρ:

$$\rho = \sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(\ y - y_0\right)^2}. \qquad (4.1)$$

Определение. Число *A* называется *пределом функции* $z = f\left(P\right) = f\left(x, y\right),$ если для любого сколь угодно малого числа

$\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0,$ что из неравенства $\rho = (P, P_0) < \delta$ следует неравенство

$$\left| f(P) - A \right| < \varepsilon. \qquad (4.2)$$

Иными словами, как только расстояние переменной точки $P\left(x, y\right)$ от фиксированной точки $P_0\left(x_0, y_0\right)$ станет достаточно малым, значение функции z в точке P будет отличаться от числа A меньше, чем на ε, где ε может быть выбрано сколь угодно малым. При этом пишут: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f\left(x, y\right) = A$ или $\lim\limits_{P \to P_0} f\left(P\right) = A.$

Пример 4.1. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \dfrac{\sqrt{x^2 + \left(y-2\right)^2 + 1} - 1}{x^2 + \left(y-2\right)^2}.$

Решение. Данный предел находится при условии $P\left(x, y\right) \to \left(0, 2\right).$ Расстояние между этими точками $\rho = \sqrt{x^2 + \left(y-2\right)^2}$, поэтому

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \frac{\sqrt{x^2 + \left(y-2\right)^2 + 1} - 1}{x^2 + \left(y-2\right)^2} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\sqrt{\rho^2 + 1} - 1}{\rho^2} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{\left(\sqrt{\rho^2 + 1} - 1\right)\left(\sqrt{\rho^2 + 1} + 1\right)}{\rho^2\left(\sqrt{\rho^2 + 1} + 1\right)} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\left(\rho^2 + 1\right) - 1}{\rho^2\left(\sqrt{\rho^2 + 1} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2}{\rho^2\left(\sqrt{\rho^2 + 1} + 1\right)} = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}.$

Пример 4.2. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{xy}$.

Решение. В данном случае $P\left(x,y\right)\to O\left(0,0\right)$, поэтому

$$\rho=(O,P)=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{xy}=\lim\limits_{\rho\to 0}\rho^2\sin\frac{1}{xy}=0,$$

так как произведение бесконечно малой величины ρ^2 на ограниченную $\left(\left|\sin\dfrac{1}{xy}\right|\le 1\right)$ есть бесконечно малая величина.

Ответ: 0.

4.2. Частные производные первого порядка

Пусть $z=f\left(x,y\right)$ – функция двух независимых переменных и D – область ее определения. Выберем произвольную точку $P_0(x_0,y_0)\in D$ и дадим x_0 приращение Δx, оставляя значение y_0 неизменным. При этом функция $f(x,y)$ получит приращение $\Delta_x z=\Delta_x f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$, которое называется *частным приращением функции* $f(x,y)$ по x.

Аналогично, считая x_0 постоянной и давая y приращение Δy, получим *частное приращение функции* $z=f(x,y)$ по y: $\Delta_y z=\Delta_y f(x_0,y_0)=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$.

Полным приращением функции $z=f(x,y)$ в точке $P_0(x_0,y_0)$ называют приращение Δz, вызываемое одновременным приращением обеих независимых переменных x и y:

$$\Delta z=\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

Частные производные функции $z = f(x, y)$ определяются следующим образом:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

то есть частная производная функции $z = f(x, y)$ по аргументу x есть производная этой функции по x при постоянном значении y. Аналогично $\frac{\partial z}{\partial y}$ есть производная функции $z = f(x, y)$ по y в предположении, что x является постоянным. Обозначаются частные производные одним из символов:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z'_x, f'_x, f'_x(x, y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, z'_y, f'_y, f'_y(x, y).$$

Частные производные функции нескольких переменных определяются как производные этой функции по одному из них при условии, что остальные переменные считаются постоянными. Например, производная функции $u = f(x, y, z)$ по x определяется формулой

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$

Частные производные функции $z = f(x, y)$ сами представляют собой некоторые функции переменных x и y. Поэтому, если нас интересуют значения частных производных в какой-либо точке $P_0(x_0, y_0)$, то нужно сначала по общим правилам найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, а затем подставить в полученные функции координаты точки P_0.

Значения частных производных в точке P_0 обозначаются одним из символов: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0}$, $\frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}$, $f'_x\left(x_0, y_0\right)$, и аналогично – для производных по y.

Пример 4.3. Найти частные производные функции $z = x^3 + y^3 - \ -3axy$. Вычислить их значения в точке $P_0\left(1;1\right)$.

Решение. Считая y постоянным, находим $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^3 + y^3 - 3axy\right)'_x = 3x^2 + 0 - 3ay \cdot 1 = 3x^2 - 3ay.$$

При нахождении $\frac{\partial z}{\partial y}$ фиксируется аргумент x

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^3 + y^3 - 3axy\right)'_y = 0 + 3y^2 + 0 - 3ax \cdot 1 = 3y^2 - 3ax.$$

Значения производных в точке $P_0\left(1;1\right)$ следующие:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0} = 3 - 3a, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_0} = 3 - 3a.$$

Ответ: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0} = 3 - 3a$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_0} = 3 - 3a$.

Пример 4.4. Найти значения частных производных в точке $P_0\left(0;1\right)$ функции $z = e^{-xy}$.

Решение. Находим сначала частные производные, используя формулу дифференцирования сложной функции $(e^u)' = e^u \cdot u'$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{-xy}\right)'_x = e^{-xy}\left(-xy\right)'_x = e^{-xy}\left(-y\right) = -ye^{-xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{-xy}\right)'_y = e^{-xy}\left(-xy\right)'_y = e^{-xy}\left(-x\right) = -xe^{-xy}.$$

Подставляя координаты точки P_0, получим

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0} = -1, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_0} = 0.$$

Ответ: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0} = -1, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_0} = 0.$

Пример 4.5. Найти частную производную по переменной z от функции трех переменных $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{xz}$.

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции, считая x и y постоянными, получим

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\operatorname{arctg}\frac{y}{xz}\right)'_z = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{xz}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{xz}\right)'_z = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2z^2}}\cdot\frac{y}{x}\left(\frac{1}{z}\right)'_z =$$

$$= \frac{x^2z^2}{x^2z^2+y^2}\cdot\frac{y}{x}\left(-\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{xy}{x^2z^2+y^2}.$$

Ответ: $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xy}{x^2z^2+y^2}$.

Пример 4.6. Доказать, что функция $z = \ln\left(x^2+xy+y^2\right)$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$.

Решение. Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^2+xy+y^2}\left(x^2+xy+y^2\right)'_x=\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x^2+xy+y^2}\left(x^2+xy+y^2\right)'_y=\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2}.$$

Подставляем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в данное уравнение:

$$x\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}+y\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2}=2;\quad \frac{2x^2+2xy+2y^2}{x^2+xy+y^2}=2;\quad 2=2;$$

полученное тождество показывает, что функция удовлетворяет данному уравнению.

4.3. Полный дифференциал функции двух переменных

Пусть $P(x,y)$ – данная точка, а $P_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ – близкая точка, отвечающая приращениям аргументов Δx и Δy. *Полное приращение функции* $z=f(x,y)$ *в точке* P:

$$\Delta z=f(P_1)-f(P)=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y).$$

Если приращение Δz можно представить в виде $\Delta z=A\Delta x+$ $+B\Delta y+\varepsilon,$ где ε – бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с расстоянием $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ между точками P и P_1 (то есть $\frac{\varepsilon}{\rho}\to 0$ при $\rho\to 0$), то функция z называется *дифференцируемой в точке* P, а главная линейная часть ее приращения $\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$ называется *полным дифференциалом функции* $z=f(x,y)$ в точке P.

Функция, имеющая дифференциал в каждой точке некоторой области D, называется *дифференцируемой в этой области*.

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема, то необходимо, чтобы $A = \frac{\partial z}{\partial x}$, $B = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Достаточным условием дифференцируемости является наличие непрерывных частных производных. Приращения независимых переменных Δx и Δy называют *дифференциалами независимых переменных* x и y и обозначают соответственно $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$. Тогда полный дифференциал функции двух переменных записывают также в виде:

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{4.3}$$

Важно подчеркнуть, что формула (4.3) остается справедливой также и в том случае, когда x и y в свою очередь являются функциями каких-либо других аргументов (свойство инвариантности первого дифференциала).

Аналогично определяется и вычисляется полный дифференциал функции любого числа переменных. Например, полный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ находится по формуле

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z. \tag{4.4}$$

Теоремы и формулы для дифференциалов функций одного аргумента полностью сохраняются и для дифференциалов функций двух, трех и т. д. аргументов. Так, независимо от того, от каких аргументов зависят функции u и v, всегда справедливы равенства

$$\begin{gathered}\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v, \quad \mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v, \\ \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}, \quad \mathrm{d}f(u) = f'(u)\mathrm{d}u.\end{gathered} \tag{4.5}$$

Пример 4.7. Найти полный дифференциал функции $z = x^2 y - y^2 x$.

Решение. Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 y - y^2 x\right)'_x = 2xy - y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 y - y^2 x\right)'_y = x^2 y - 2xy.$$

По формуле (4.3) имеем $\mathrm{d}z = \left(2xy - y^2\right)\mathrm{d}x + \left(x^2 y - 2x\right)\mathrm{d}y.$

Ответ: $\mathrm{d}z = \left(2xy - y^2\right)\mathrm{d}x + \left(x^2 y - 2x\right)\mathrm{d}y.$

Пример 4.8. Для функции $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ найти значение дифференциала в точке $P(1;0)$.

Решение. Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\left(x^2 + y^2\right)\right)'_x = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \left(x^2 + y^2\right)'_x = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln\left(x^2 + y^2\right)\right)'_y = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \left(x^2 + y^2\right)'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Подставляя координаты точки P, получим

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}} = \frac{2 \cdot 1}{1+0} = 2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}} = \frac{2 \cdot 0}{1+0} = 0.$$

По формуле (4.3) имеем

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}z(P) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P \mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x + 0\,\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x.$$

Ответ: $dz = 2dx.$

Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Приращение функции Δz и ее полный дифференциал $\mathrm{d}z$ связаны равенством $\Delta z = \mathrm{d}z + \varepsilon$, где ε – бесконечно малая более высокого порядка малости по сравнению с $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. При достаточно малых приращениях аргументов можно величиной ε пренебречь и считать $\Delta z \approx \mathrm{d}z$. Это приводит к приближенному равенству $\Delta z \approx \mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$, или (подробно)

$$f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x,y\right) \approx \mathrm{d}f\left(x,y\right) = \\ = \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}\Delta y \tag{4.6}$$

Этой формулой можно пользоваться для приближенного вычисления значения $f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right)$ по известным значениям функции $f\left(x,y\right)$ и ее частных производных в данной точке $P\left(x,y\right)$, то есть

$$f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) \approx f\left(x,y\right) + \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}\Delta y. \tag{4.7}$$

Пример 4.9. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала число $a = \left(1{,}04\right)^{2{,}03}$.

Решение. Рассмотрим функцию $z = f\left(x,y\right) = x^y$. Данное число a есть приращенное значение этой функции в точке $P\left(1;2\right)$ при $\Delta x = 0{,}04$, $\Delta y = 0{,}03$. Дифференциал данной функции $\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y.$

Его значение в точке $P\left(1;2\right)$ при данных приращениях

$$(dz)_P = yx^{y-1}\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} \cdot 0,04 + x^y \ln x\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} \cdot 0,03 =$$
$$= 2\cdot 1^{2-1}\cdot 0,04 + 1^2 \ln 1\cdot 0,03 = 2\cdot 1\cdot 0,04 + 1\cdot 0\cdot 0,03 = 0,08.$$

Поэтому по формуле (4.7) имеем

$$a = (1,04)^{2,03} \approx x^y\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} + yx^{y-1}\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} \cdot 0,04 + x^y \ln x\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} \cdot 0,03 =$$
$$= 1^2 + 2\cdot 1^{2-1}\cdot 0,04 + 1^2 \ln 1\cdot 0,03 = 1 + 2\cdot 1\cdot 0,04 + 1\cdot 0\cdot 0,03 =$$
$$= 1 + 0,08 + 0 = 1,08.$$

Ответ: $(1,04)^{2,03} \approx 1,08.$

Пример 4.10. Высота конуса $H = 10$ см, радиус основания $H = 10$ см. Как изменится объем конуса при увеличении высоты на 2 мм и уменьшении радиуса основания на 2 мм?

Решение. При данном условии объем конуса надо рассматривать как функцию двух переменных *R* и *H*. Объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Изменение объема приближенно заменим его дифференциалом

$$\Delta V \approx \mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial V}{\partial H}\Delta H = \frac{2}{3}\pi RH\cdot\Delta R + \frac{1}{3}\pi R^2\Delta H =$$
$$= \frac{1}{3}\pi\left(2RH\cdot\Delta R + R^2\Delta H\right).$$

Подставив значения (в см) $R = 5, H = 10, \Delta R = -0,2, \Delta H = 0,2,$ получим

$$\Delta V \approx \frac{1}{3}\pi\left(2\cdot 5\cdot 10\cdot(-0,2) + 25\cdot 0,2\right) = -5\pi \approx -15,7.$$

Таким образом, объем конуса уменьшится примерно на 15,7 см^3.

Ответ: $\Delta V \approx -15,7$ см^3.

4.4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) некоторой области $D \in R^2$. Геометрическим образом функции двух независимых переменных $z = f(x, y)$ в пространстве R^3 является некоторая поверхность Q. Выберем на ней точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Определение. *Касательной плоскостью* к поверхности Q в данной точке M_0 называется плоскость, которая содержит все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности Q, заданной явной функцией $z = f(x, y)$, имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Если уравнение поверхности Q задано неявно функцией $F(x, y, z) = 0$, то

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \; f'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (4.8)$$

Следовательно, уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид

$$\begin{gathered} F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \\ + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \end{gathered} \quad (4.9)$$

Точка, в которой $F'_x = F'_y = F'_z = 0$ или хотя бы одна из этих производных не существует, называется *особой точкой поверхности*. В такой точке поверхность может не иметь касательной плоскости.

Определение. *Нормалью к поверхности* Q в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной плоскости, проведенной в данной точке поверхности.

Уравнение нормали к поверхности Q, заданной явной функцией $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ получаем из условия перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \tag{4.10}$$

Если поверхность Q задана неявной функцией $F(x,y,z)=0,$ то уравнение (4.10) принимает вид

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}. \tag{4.11}$$

Формулы касательной плоскости и нормали к поверхности получены для обыкновенных, то есть не особых точек поверхности.

Пример 4.11. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=5-x^2-y^2$ в точке $M_0(1;\,1;\,3)$.

Решение. Уравнение поверхности задано явной функцией. Уравнение касательной плоскости находим по формуле (4.8). Для этого вычислим частные производные функции в точке M_0:

$$f'_x(x,y)=-2x,\quad f'_x(1;1)=-2,\quad f'_y(x,y)=-2y,\quad f'_y(1;1)=-2.$$

Тогда уравнение касательной плоскости примет вид:

$$z-3=-2(x-1)-2(y-1)\Rightarrow 2x+2y+z-7=0.$$

Уравнение нормали находим по формуле (4.10):

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}\Rightarrow\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{1}.$$

Ответ: касательная плоскость $2x+2y+z-7=0;$ уравнение нормали $\frac{x}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$

Пример 4.12. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+2y^2+3z^2=5$ в точке $M_0(0;1;1)$.

Решение. Уравнение поверхности задано неявно. Уравнение касательной плоскости находим по формуле (4.9). Вычислим частные производные функции в точке $M_0(0;1;1)$:

$$F'_x(x,y,z)=2x,\quad F'_y(x,y,z)=4y,\quad F'_z(x,y,z)=6z,$$

$$F'_x(0;1;1)=0,\quad F'_y(0;1;1)=4,\quad F'_z(0;1;1)=6.$$

Следовательно, уравнение касательной плоскости имеет вид

$$4(y-1)+6(z-1)=0\Rightarrow 2y+3z-5=0.$$

Уравнения нормали находим по формуле (4.11):

$$\frac{x-0}{0}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{6}\Rightarrow\frac{x}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

Так как проекция направляющего вектора $\vec{n}(0;2;3)$ нормали на ось Ox равна нулю, то нормаль перпендикулярна к оси Ox, а касательная плоскость параллельна этой оси.

4.5. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ в точке $P(x;y)\in D$. Эти производные, в свою очередь, являются функциями двух переменных x и y. Будем называть $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ *частными производными первого порядка*. Частные производные по x и y от частных производных первого порядка, если они существуют, называются *частными производными второго порядка* от функции $z=f(x,y)$ в точке $P(x;y)$ и обозначаются

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $f''_{xx}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, z''_{xx}, (f дифференцируется последовательно два раза по x);

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $f''_{xy}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$, z''_{xy}, (f дифференцируется сначала по x, а затем по y);

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $f''_{yx}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$, z''_{yx}, (f дифференцируется сначала по y, а затем по x);

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $f''_{yy}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$, z''_{yy}, (f дифференцируется последовательно два раза по y).

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по x, так и по y. В результате получим восемь *частных производных третьего порядка*: $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$.

Таким образом, частная производная от производной $(n-1)$-го порядка называется *частной производной n-го порядка* и обозначается $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y}$, $\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2}$ и далее.

Частные производные высших порядков функции z, взятые по различным переменным, например $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$, называются *смешанными производными*.

Среди частных производных второго порядка функции $z = f(x,y)$ имеются две смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Теорема о равенстве смешанных производных. Если функция $z = f(x,y)$ и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке $P_0(x_0;y_0)$, то $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$.

Пример 4.13. Найти частные производные второго порядка функции $z = e^{x^2y^2}$.

Решение. Вначале найдем частные производные первого порядка: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2y^2} \cdot 2xy^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2y^2} \cdot 2x^2y$. Продифференцируем их еще раз, получим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x^2y^2} \cdot 4x^2y^4 + e^{x^2y^2} \cdot 2y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x^2y^2} \cdot 4x^4y^2 + e^{x^2y^2} \cdot 2x^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{x^2y^2} \cdot 4x^3y^3 + e^{x^2y^2} \cdot 4xy, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^{x^2y^2} \cdot 4x^3y^3 + e^{x^2y^2} \cdot 4xy.$$

Сравнивая последние два выражения, видим, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Замечание. Все приведенные выше рассуждения, а также теорема о равенстве смешанных производных имеют место и для функции любого числа переменных: если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

Пример 4.14. Найти частные производные второго порядка функции $u = xyz - e^{x+y}$.

Решение. Функция определена и непрерывна на R^3.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz - e^{x+y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz - e^{x+y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = z - e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = z - e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = y, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Действительно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = z - e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = x.$$

Пусть $z = f(x, y)$ – функция двух независимых переменных x и y, дифференцируемая в области D. Придавая x и y приращения $\Delta x = \mathrm{d}x, \Delta y = \mathrm{d}y,$ в любой точке $P(x, y) \in D$ можно вычислить полный дифференциал $\mathrm{d}z = f'_x(x, y)\mathrm{d}x + f'_y(x, y)\mathrm{d}y,$ который, как сказано ранее, называют *дифференциалом первого порядка функции* $z = f(x, y)$.

Дифференциал от дифференциала первого порядка в любой точке $P(x, y) \in D,$ если он существует, называется *дифференциалом второго порядка* и обозначается $\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}(\mathrm{d}z).$ Найдем аналитическое выражение для $\mathrm{d}^2 z,$ считая dx и dy постоянными:

$$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}\left(f'_x(x, y)\mathrm{d}x + f'_y(x, y)\mathrm{d}y\right) =$$

$$= \mathrm{d}\left(f'_x(x, y)\right)\mathrm{d}x + \mathrm{d}\left(f'_y(x, y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \left(f''_{xx}(x, y)\mathrm{d}x + f''_{xy}(x, y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \left(f''_{yx}(x, y)\mathrm{d}x + f''_{yy}(x, y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}y =$$

$$= f''_{xx}(x, y)\mathrm{d}x^2 + 2 f''_{xy}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{yy}(x, y)\mathrm{d}y^2.$$

Поступая аналогично, получаем аналитическое выражение для *дифференциала третьего порядка* d^3z:

$$\mathrm{d}^3z = \mathrm{d}\left(\mathrm{d}^2z\right) = f'''_{xxx}(x,y)\mathrm{d}x^3 + 3f'''_{xxy}(x,y)\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y +$$
$$+3f'''_{xyy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + f'''_{yyy}(x,y)\mathrm{d}y^3.$$

Аналитические выражения для $\mathrm{d}z$, d^2z, и d^3z кратко записывают в виде следующих формул:

$$\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)z,\quad \mathrm{d}^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^2 z,$$

$$\mathrm{d}^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^3 z.$$

Тогда и для любого n справедливо соотношение $\mathrm{d}^nz = = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^n z$, причем правая часть этого равенства раскрывается формально по биномиальному закону.

Полученные формулы справедливы лишь в случае, когда переменные x и y функции $z = f(x,y)$ являются независимыми.

Пример 4.15. Найти полный дифференциал второго порядка функции $z = x^3 + y^3 + x^2y^2$.

Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^2,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 2x^2y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y + 2x^2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 4xy.$$

Следовательно, $\mathrm{d}^2z = (6x + 2y^2)\partial x^2 + 8xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (6y + 2x^2)\partial y^2$.

4.6. Локальные экстремумы функции двух переменных. Условный экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области

Определение. Множество всех точек $P(x,y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\rho(P,P_0)=$ $=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ называется δ*-окрестностью точки* $P(x_0, y_0)$. Другими словами, δ-окрестность точки P_0 – это все внутренние точки круга с центром P_0 и радиусом δ. Окрестность с удаленным центром называется *проколотой окрестностью* и обозначается $\overset{\circ}{O}_\delta(P_0)$.

Определение. Точка $P_0(x_0;y_0)$ называется *точкой локального максимума (минимума) функции* $z=f(x,y)$, если существует δ-окрестность этой точки, такая, что для всех $P(x,y)\in\overset{\circ}{O}_\delta(P_0)$ выполняется неравенство $f(x_0,y_0)>f(x,y)\big(f(x_0,y_0)<f(x,y)\big)$. Значение $f(x_0,y_0)$ называют *локальным максимумом (минимумом) функции* и пишут

$$\max_{P\in\overset{\circ}{O}_\delta(P_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)\left(\min_{P\in\overset{\circ}{O}_\delta(P_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)\right).$$

Точки максимума или минимума функции называют *точками экстремума функции*, а максимумы и минимумы функции – *экстремумами функции*.

Теорема (необходимые условия существования локального экстремума). Если в точке $P_0(x_0,y_0)$ дифференцируемая функция $f(x,y)$ имеет локальный экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю: $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$ или, по крайней мере, одна из них не существует.

Докажем только первое утверждение теоремы. Рассмотрим в $O_\delta(P_0)$ лишь те точки, для которых $y = y_0$. Получим функцию $z = f(x, y_0) = \varphi(x)$ одной переменной *x*. Эта функция имеет в точке x_0 экстремум, следовательно, $\varphi'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) = 0$. Аналогично доказывается, что $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Точка $P_0(x_0, y_0)$, в которой выполняются условия теоремы, называется *точкой возможного экстремума или критической*.

Точка $P_0(x_0, y_0)$, в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x, y)$ равны нулю, то есть $f'_x = 0, f'_y = 0,$ называется *стационарной точкой* функции *z*.

Равенство нулю частных производных первого порядка не является достаточным условием существования экстремума функции в точке $P_0(x_0, y_0)$.

Теорема (достаточное условие существования локального экстремума). Пусть $P_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка трижды дифференцируемой в $O_\delta(P_0)$ функции и пусть

$$H(P_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{xy}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда стационарная точка $P_0(x_0, y_0)$ является:

1) точкой локального максимума, если $H(P_0) > 0$ и $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$;

2) точкой локального минимума, если $H(P_0) > 0$ и $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$;

3) если $H(P_0) < 0$, то стационарная точка P_0 не является точкой локального экстремума функции.

Пример 4.16. Исследовать данную функцию на локальный экстремум: $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Решение. Для нахождения стационарных (критических) точек получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12 = 0. \end{cases}$$

Решаем систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 12, \end{cases}$ откуда $y = \dfrac{2}{x}$, $x^2 + \dfrac{4}{x^2} = 5$, $x^4 - 5x + 4 = 0$.

Получаем четыре стационарные точки: $M_1(1;2)$, $M_2(-1;-2)$, $M_3(2;1)$, $M_4(-2;-1)$. Находим:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x.$$

Тогда $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 36\left(x^2 - y^2\right)$. В точках M_1 и M_2 $\Delta(M_1) = \Delta(M_2) = -108 < 0$, т. е. в этих точках экстремума нет. В точке M_3 имеем: $\Delta(M_3) = 108 > 0$, $A = 12 > 0$; следовательно, в этой точке данная функция достигает локального минимума: $z_{\min} = z(2,1) = -28$. $\Delta(M_3) = 108 > 0$, $A = -12 < 0$, в этой точке данная функция достигает локального максимума: $z_{\max} = z(-2,-1) = 28$.

Пример 4.17. Исследовать данную функцию на локальный экстремум: $z = 3xy - x^2 - y^2 - 10x + 5y$.

Решение.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3y - 2x - 10 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x - 2y + 5 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 3y = 10, \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$$

Получаем одну стационарную точку $M(1;4)$, в которой

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 4 - 9 = -5 < 0.$$

Следовательно, точек экстремума нет.

Рассмотрим общую *задачу на отыскание условного экстремума* применительно к функции двух переменных. Пусть требуется найти локальный экстремум функции $z = f(x, y)$ при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x, y) = 0$.

Ели уравнение связи можно однозначно разрешить относительно переменной y, то есть выразить y как функцию x: $y = \psi(x)$, то, подставив в аналитическое выражение функции $z = f(x, y)$ вместо y функцию $\psi(x)$, получим функцию одной переменной $z = f(x, \psi(x))$. Вычислив значения x, при которых эта функция достигает экстремума, и, определив затем из уравнения связи соответствующие им значения y, мы найдем искомые точки условного экстремума. Тот же самый результат получится, если уравнение $\varphi(x, y) = 0$ можно однозначно разрешить относительно переменной x, то есть x выразить как функцию y. Очень просто решается задача нахождения условного экстремума, когда условие связи (линии L) задается параметрическими уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$. Подставляя x и y в аналитическое выражение функции $z = f(x, y)$, снова приходим к задаче отыскания экстремума функции одной переменной.

Пример 4.18. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению $x + y - 1 = 0$.

Решение. Уравнение $x + y - 1 = 0$ в R^3 определяет плоскость, параллельную оси Oz и пересекающую плоскость Oxy по прямой L.

Функция $z = x^2 + y^2$ определена на всей плоскости R^2, а ее экстремумы требуется найти только среди тех точек плоскости, которые лежат на прямой L: $x + y - 1 = 0$. Из уравнения связи находим $y = 1 - x$. Подставляя это выражение в уравнение $z = x^2 + y^2$, получаем функцию $z = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$ одной переменной x. Таким образом, задача свелась к задаче отыскания безусловных локальных экстремумов функции одной переменной. Найдем точки локальных экстремумов, лежащих на линии L. Так как $z'_x = 4x - 2$, то $x_0 = \frac{1}{2}$ – критическая точка. Она является точкой локального минимума, поскольку $z''(x_0) = z\left(\frac{1}{2}\right) = 4 > 0$, т. е. $z_{\min} = z\left(\frac{1}{2}\right) = 0,5$. Следовательно, функция $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y - 1 = 0$ имеет условный локальный минимум $z = \frac{1}{2}$ в точке $P_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Очевидно, что на поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$ безусловный минимум равен 0 и достигается в точке $O(0; 0)$, значит он не совпадает с точкой $P_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ условного минимума, лежащей на прямой $x + y - 1 = 0$.

Если уравнение связи нельзя разрешить относительно какой-либо одной из переменных или представить параметрическими уравнениями, задача значительно усложняется. Решим поставленную задачу, не разрешая уравнение связи $\varphi(x, y) = 0$ относительно x или y. Для этого используем *метод множителей Лагранжа*.

Суть данного метода заключается в следующем. Задача нахождения условного экстремума сводится к исследованию на безусловный экстремум *функции Лагранжа* $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, где вспомогательное число λ называется *множителем Лагранжа*. Необходимые условия условного экстремума выражаются системой трех уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=0, \\ \varphi(x,y)=0, \end{cases} \tag{4.12}$$

из которой можно определить координаты критических точек P возможного условного экстремума. Пусть $P_0(x_0,\, y_0)$, λ_0 – любое из решений системы (4.12). Функция $f(x,y)$ имеет условный максимум в точке $P_0(x_0,\, y_0)$, если $\mathrm{d}^2F(x_0,\, y_0)<0$, и условный минимум, если $\mathrm{d}^2F(x_0,\, y_0)>0$.

Пример 4.19. Найти условный экстремум функции $z=x+2y$ при $x^2+y^2=5$.

Решение. Составим функцию Лагранжа: $F(x,y,\lambda)=x+2y+$ $+\lambda\left(x^2+y^2-5\right)$. Система уравнений (4.12) принимает вид

$$\begin{cases} 1+2\lambda x=0 \\ 2+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2\lambda} \\ y=-\dfrac{1}{\lambda} \\ \dfrac{1}{4\lambda^2}+\dfrac{1}{\lambda^2}{}^{2}=5 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \lambda^2=\dfrac{1}{4} \\ \lambda_1=\dfrac{1}{2};\quad \lambda_2=-\dfrac{1}{2} \end{matrix}$$

Система имеет два решения: $x_1=-1,\ y_1=-2,\ \lambda_1=\dfrac{1}{2};\quad x_2=1,$ $y_2=2,\ \lambda_2=-\dfrac{1}{2}$. Так как $\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}=2\lambda,\ \dfrac{\partial^2F}{\partial x\partial y}=0,\ \dfrac{\partial^2F}{\partial y^2}=2\lambda,$ то $\mathrm{d}^2F=$ $=2\lambda\left(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\right)$. При $\lambda=\dfrac{1}{2}$ $\mathrm{d}^2F>0$. Поэтому функция имеет условный минимум в точке $P_1(-1;-2)$ и $z_{\min}=-5$. При

$\lambda = -\dfrac{1}{2}$ $d^2F < 0$. Поэтому функция имеет условный максимум в точке $P_2(1;2)$ и $z_{\max} = 5$.

4.7. Наибольшее и наименьшее значения (глобальные экстремумы) функции двух переменных в замкнутой области

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области *D*. Тогда в области *D* она достигает своих наименьшего и наибольшего значений, причем эти значения достигаются либо внутри области *D*, либо на ее границе. Точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения в ограниченной замкнутой области, называют также *точками абсолютного* или *глобального экстремума*. Если наибольшее или наименьшее значения достигаются во внутренних точках области, то это точки локального экстремума функции $z = f(x, y)$. Таким образом, точки, в которых функция z принимает наибольшее и наименьшее значения, являются либо точками локального экстремума, либо граничными точками области.

Следовательно, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в ограниченной замкнутой области *D*, следует вычислить значения функции в критических точках области *D*, а также наибольшее и наименьшее значения на ее границе.

Предположим, что граница области *D* задана уравнением $\varphi(x, y) = 0$. Задача нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на границе области *D* сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений (абсолютного экстремума) функции одной переменной, так как уравнение границы области *D* – $\varphi(x, y) = 0$ – связывает переменные x и y между собой. Значит, если разрешить это уравнение относительно одной из переменных или представить его в параметрическом виде и подставить выражения $x = x(t)$, $y = y(t)$ в уравнение $z = f(x, y)$, то придем к задаче нахождения наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной. Если же уравнение $\varphi(x, y) = 0$ нельзя разрешить ни относительно x, ни относительно y, а также невозможно представить его параметрически, то задача сводится к отысканию условного экстремума.

Пример 4.20. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2$.

Решение. Данная область – прямоугольник. Найдем стационарные точки. Найдем частные производные первого порядка и составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3\left(x^2 - y\right) = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3\left(y^2 - x\right) = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем две стационарные точки: $P_1(0; 0)$ и $P_2(1; 1)$. Значения функции в этих точках: $z(0; 0) = 0$, $z(1; 1) = -1$. Исследуем функцию на границах области.

а) При $x = 0$ имеем $z = y^3$. Эта функция монотонно возрастает и на концах отрезка $[-1; 2]$ принимает значения $z(0; -1) = -1$, $z(0; 2) = 8$.

б) При $x = 2$ имеем $z = 8 + y^3 - 6y$. Найдем значения этой функции в стационарной точке и на концах отрезка $[-1; 2]$. Имеем $z' = 3y^2 - 6$; $z' = 0$ при $y^2 = 2$, или, в данной области, при $y = \sqrt{2}$; $z\left(2; \sqrt{2}\right) = 8 + 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2}$; $z(2; -1) = 13$; $z(2; 2) = 4$.

в) При $y = -1$ имеем $z = x^3 - 1 + 3x$ и $z' = 3x^2 + 3 > 0$. Функция монотонно возрастает от $z(0; -1) = -1$ до $z(2; -1) = 13$.

г) При $y = 2$ имеем $z = x^3 + 8 - 6x$; $z' = 3x^2 - 6$; $z' = 0$, при $x = \sqrt{2}$; $z\left(\sqrt{2}, 2\right) = 8 - 4\sqrt{2}$; $z(0, 2) = 8$; $z(2, 2) = 4$.

Сравнивая все найденные значения функции, заключаем, что $z_{\text{наиб}} = 13$ в точке $(2; -1)$; $z_{\text{наим}} = -1$ в точках $(1; 1)$ и $(0; -1)$.

5. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

5.1. Неопределенный интеграл и его свойства

Интеграл – одно из важнейших математических понятий. Он широко применяется во всех областях науки, техники, экономики.

Как известно, дифференцированием называется нахождение производной, заданной произвольной функцией $y = f(x)$. Производная имеет ясный механический смысл: если $y(t)$ есть зависимость пройденного пути от времени, то $y'(t)$ есть скорость $v(t)$ в момент времени t, а $y''(t)$ (вторая производная) есть ускорение $a(t)$ в момент времени t.

Но часто приходится решать обратную задачу: если известна зависимость ускорения $a(t)$ от времени, то как найти скорость в момент t? Или если известна скорость $v(t)$, то какой был пройденный путь?

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на промежутке (a, b), если $F(x)$ дифференцируема на (a, b) и для любого $x \in (a, b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ (или $\mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$).

Например, первообразной функции $f(x) = x^3, x \in R,$ является функция $F(x) = \frac{x^4}{4}$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 = f(x)$.

Первообразными для функции $f(x) = x^3$ будут также любые функции $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$, где C – произвольная постоянная, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = x^3 = f(x).$$

Определение. Совокупность всех первообразных $\{F(x)+C\}$, где C – произвольная постоянная, для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* и обозначается

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C.$$

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)\mathrm{d}x$ – *подынтегральным выражением*, $\int$ – *знак* неопределенного интеграла.

Нахождение для функции $f(x)$ всех ее первообразных $F(x)+C$ называется *интегрированием*. Интегрирование есть действие, обратное дифференцированию.

Основные правила интегрирования:

1) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}f(x) = f(x)+C$; $\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}(F(x)+C) = f(x)\mathrm{d}x$;

2) $\int (f(x)\pm\varphi(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int \varphi(x)\mathrm{d}x$;

3) $\int af(x)\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x,\ a=\mathrm{const}$;

4) если $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$, то $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}F(ax+b)+C$, при условии, что a, b – постоянные числа, $a\neq b$;

5) если $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$ и $u=\varphi(x)$ – любая дифференцируемая функция, то $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C$.

Заметим, что правила интегрирования вытекают из определения неопределенного интеграла.

5.2. Таблица основных неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование

Для нахождения неопределенных интегралов используется таблица интегралов основных функций:

1. $\int \mathrm{d}u = u+C$; **2**. $\int u^{\alpha}\mathrm{d}u = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, где $\alpha\neq-1$;

3. $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|+C$; **4**. $\int a^{u}\mathrm{d}u = \dfrac{a^{u}}{\ln a}+C$;

5. $\int e^u \mathrm{d}u = e^u + C$;

6. $\int \sin u \mathrm{d}u = -\cos u + C$;

7. $\int \cos u \mathrm{d}u = \sin u + C$;

8. $\int \mathrm{tg}\, u \mathrm{d}u = -\ln|\cos u| + C$;

9. $\int \mathrm{ctg}\, u \mathrm{d}u = \ln|\sin u| + C$;

10. $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sin u} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right| + C$;

11. $\int \frac{\mathrm{d}u}{\cos u} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

12. $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C$;

13. $\int \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C$;

14. $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C$;

15. $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$;

16. $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$;

17. $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

В приведенной таблице буква u может обозначать как независимую переменную, так и непрерывно дифференцируемую функцию $u = \varphi(x)$ аргумента x.

Интегралы в приведенной таблице называются *табличными*. Их следует знать *наизусть*. Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения основных правил интегрирования сводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется *непосредственным интегрированием*.

Пример 5.1. Использование алгебраических преобразований и таблицы интегралов (пункты 1, 6) позволяет вычислить интеграл

$$\int (3x - \sqrt[7]{x^5} + 2\sin x - 3)\mathrm{d}x = 3\int x\mathrm{d}x - \int x^{\frac{5}{7}}\mathrm{d}x + 2\int \sin x\mathrm{d}x - 3\int \mathrm{d}x =$$

$$= 3\frac{x^2}{2} - \frac{x^{\frac{12}{7}}}{\frac{12}{7}} - 2\cos x - 3x + C = \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{12}x^{\frac{12}{7}} - 2\cos x - 3x + C.$$

Пример 5.2. Найдем

$$\int\left(3^{2x}+e^{x}+\cos 2x\right)\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix}\text{пункты 4, 5, 7 таблицы интегралов}\\ \text{и пункты 2, 4 правил интегрирования}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int 9^{x}\,\mathrm{d}x+\int e^{x}\mathrm{d}x+\int\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{9^{x}}{\ln 9}+e^{x}+\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

Пример 5.3. Найдем

$$\int \operatorname{tg}^2 u\mathrm{d}u=\left|\text{вспомним, что } 1+\operatorname{tg}^2 u=\frac{1}{\cos^2 u}\right|=\int\left(1-\frac{1}{\cos^2 u}\right)\mathrm{d}u=$$

$$=\int 1\mathrm{d}u-\int\frac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u=\left|\text{пункты 1, 13 таблицы}\right|=u-\operatorname{tg}u+C.$$

Пример 5.4. Вычислить $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-x^2}$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{1}{x^4-x^2}=\frac{1}{x^2\left(x^2-1\right)}=\frac{1-x^2+x^2}{x^2\left(x^2-1\right)}=\frac{1-x^2}{x^2\left(x^2-1\right)}+\frac{x^2}{x^2\left(x^2-1\right)}=$$

$$=\frac{-\left(1-x^2\right)}{x^2\left(x^2-1\right)}+\frac{x^2}{x^2-1}=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2-1}.$$

Тогда

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-x^2}=-\left(\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}+\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}\right)=\left|\text{применим пункты 2, 16 таблицы}\right|=$$

$$=-\left(\int x^{-2}\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}x}{1^2-x^2}\right)=-\left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+\frac{1}{2\cdot 1}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C\right)=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C.$$

Пример 5.5. Вычислить $\int\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^2+7}\right)\mathrm{d}x.$

Решение

$$\int\left(x^1\cdot x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{x^2+\left(\sqrt{7}\right)^2}\right)\mathrm{d}x=\int\left(x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{x^2+\left(\sqrt{7}\right)^2}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\left|\text{пункт. 2, 14 таблицы}\right|=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}+C=$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}+C.$$

5.3. Метод замены переменной в неопределенном интеграле

При вычислении неопределенных интегралов во многих случаях полезно введение новой переменной интегрирования, что позволяет свести нахождение данного интеграла к табличному. Метод замены переменной (метод подстановки) основан на следующей теореме.

Теорема. Пусть на интервале (a,b) определена сложная функция $f\left(\varphi(x)\right)$, а функция $t=\varphi(x)$ непрерывна на этом интервале и имеет производную во всех его внутренних точках и известно, что $\int f(t)\mathrm{d}t=G(t)+C.$ Тогда справедлива формула

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f(t)\mathrm{d}t\Big|_{t=\varphi(x)}=G\left(\varphi(x)\right)+C.$$

Пример 5.6. Вычислить $\int 2x\sqrt{x^2-3}\mathrm{d}x.$

Решение. Обозначим $x^2-3=u,$ тогда $2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}u.$ Запись вычислений можно осуществлять так:

$$\int 2x\sqrt{x^2-3}\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix} u=x^2-3, \\ \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x \end{bmatrix}=\int u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u=\frac{2}{3}u^{\frac{2}{3}}+C=$$

$$=\left|\text{возвращаемся к исходной переменной}\right|=$$

$$=\frac{2}{3}\left(x^2-3\right)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{\left(x^2-3\right)^3}+C.$$

В отдельных случаях вместо введения новой переменной применяется *метод подведения (поднесения) функции под знак дифференциала*, который основан на следующих соотношениях:

$$x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(x^2\right);\quad x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(x^3\right);\quad \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln x;\quad \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}\left(\sqrt{x}\right);$$

$$\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\left(\cos x\right);\quad \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\mathrm{tg}\, x\right)\ \text{и т. д.}$$

Подстановку и поднесение под знак дифференциала можно проводить одновременно.

Пример 5.7. Вычислить $\int \sin\left(5x+2\right)\mathrm{d}x$.

Решение. Сделаем преобразования:

$$\int \sin\left(5x+2\right)\mathrm{d}x=\int \sin\underbrace{\left(5x+2\right)}_{u}\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{5}\mathrm{d}\underbrace{\left(5x+2\right)}_{u}=\frac{1}{5}\int \sin u\mathrm{d}u=$$

$$=-\frac{1}{5}\cos u+C=-\frac{1}{5}\cos\left(5x+2\right)+C.$$

Пример 5.8. Найти $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{100x^2-1}}$.

Решение. Заметим, что:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{100x^2-1}}=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(10x\right)^2-1}}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{делаем поднесение } 10x \\ \text{под знак дифференциала: } \mathrm{d}x=\dfrac{1}{10}\mathrm{d}(10x)\end{array}\right]=\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}(10x)}{\sqrt{(10x)^2-1}}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{таблица интегралов:}\\ u=10x;\end{array}\right]=\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}}=\frac{1}{10}\ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{10}\ln\left|10x+\sqrt{(10x)^2-1}\right|+C=\frac{1}{10}\ln\left|10x+\sqrt{100x^2-1}\right|+C.$$

Пример 5.9. Найти $\int\frac{\sqrt[3]{4+5\ln x}}{x}\mathrm{d}x.$

Решение. Применим несложные преобразования:

$$\int\frac{\sqrt[3]{4+5\ln x}}{x}\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{l}\text{заметим, что}\\ \dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{5}\mathrm{d}(5\ln x)=\dfrac{1}{5}\mathrm{d}(4+5\ln x)-\\ \text{поднесение под знак дифференциала;}\\ u=4+5\ln x;\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{5}\int(4+5\ln x)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}(4+5\ln x)=[\text{таблица интегрирования}]=$$

$$=\frac{1}{5}\int u^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}u=\frac{1}{5}\cdot\frac{(4+5\ln x)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3}{20}(4+5\ln x)^{\frac{4}{3}}+C.$$

5.4. Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям основан на формуле:

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u, \qquad (5.1)$$

где $u=u(x), v=v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции.

Формула (5.1) называется *формулой интегрирования по частям*. Она используется в тех случаях, когда подынтегральное выражение $f(x)\mathrm{d}x$ можно представить в виде $u\mathrm{d}v$ так, что интеграл в правой части равенства (5.1) $\int v\mathrm{d}u$ будет проще исходного интеграла. При этом к u следует отнести множители, которые упрощаются при дифференцировании. Иногда формулу (5.1) приходится использовать несколько раз.

Рассмотрим основные классы функций, интегрируемых по частям.

1. $\int P_n(x)e^{\alpha x}\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)a^{\alpha x}\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\sin\alpha x\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\cos\alpha x\mathrm{d}x$,

где $P_n(x)$ – многочлен степени n, $\alpha \in R$. Следует принять $u = P_n(x)$, а за $\mathrm{d}v$ обозначить остальные сомножители.

2. $\int P_n(x)\arcsin\alpha x\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\arccos\alpha x\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\ln x\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\operatorname{arctg}\alpha x\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\operatorname{arcctg}\alpha x\mathrm{d}x$.

В этом случае через u обозначают обратные тригонометрические или логарифмические функции.

3. $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x$, $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\mathrm{d}x$, $\int a^{\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x$, $\int a^{\alpha x}\cos\beta x\mathrm{d}x$

и другие (здесь $\alpha, \beta \in R$). Это, так называемые, *циклические* интегралы. За u можно принять функцию $e^{\alpha x}$ $\left(a^{\alpha x}\right)$ или тригонометрическую функцию. В этом случае после двукратного применения формулы интегрирования по частям приходим к выражению, содержащему исходный интеграл, то есть получаем уравнение с искомым интегралом в качестве неизвестного.

Пример 5.10. Найти $\int (x+1)e^{2x}\mathrm{d}x$.

Решение. Применим формулу (5.1):

$$\int (x+1)e^{2x}\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x+1; & \mathrm{d}v = e^{2x}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; & v = \int e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right| = (x+1)\frac{1}{2}e^{2x} -$$

$$-\int \frac{1}{2}e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}(x+1) - \frac{1}{2}\int e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}(x+1) - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Пример 5.11. Найти $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Решение. По формуле (5.1):

$$\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln^2 x; & \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}; \\ \mathrm{d}u = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x; & v = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \end{vmatrix} =$$

$$= \ln^2 x \cdot 2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\ln^2 x - 4\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x =$$

$$= (\text{еще раз применим } 5.1) = \begin{vmatrix} u = \ln x; & \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}; \\ \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x; & v = 2\sqrt{x} \end{vmatrix} = 2\sqrt{x}\ln^2 x -$$

$$-4\left(\ln x \cdot 2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x\right) = 2\sqrt{x}\ln^2 x - 4\left(2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\right) =$$

$$= 2\sqrt{x}\ln^2 x - 8\sqrt{x}\ln x + 16\sqrt{x} + C.$$

Пример 5.12. Найти $\int e^{3x}\sin x\mathrm{d}x$.

Решение. Интегрируем по (5.1):

$$\int e^{3x}\sin x\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = e^{3x}; & \mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = 3e^{3x}; & v = \int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3x} \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot 3e^{3x}\mathrm{d}x = -e^{3x}\cos x + 3\int e^{3x}\cos x\mathrm{d}x =$$

$$= (\text{еще раз применяем } (5.1)) = \begin{vmatrix} u = e^{3x}; & \mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = 3e^{3x}; & v = \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= -e^{3x}\cos x + 3\left(e^{3x} \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 3e^{3x}\mathrm{d}x\right) =$$

$$= -e^{3x}\cos x + 3e^{3x} \cdot \sin x - 9\int e^{3x}\sin x\mathrm{d}x + C.$$

Получаем уравнение относительно искомого интеграла:

$$\int e^{3x}\sin x\mathrm{d}x = -e^{3x}\cos x + 3e^{3x}\cdot\sin x - 9\int e^{3x}\sin x\mathrm{d}x + C.$$

Из уравнения получаем: $10\int e^{3x}\sin x\mathrm{d}x = 3e^{3x}\cdot\sin x - e^{3x}\cos x + C.$

Тогда $\int e^{3x}\sin x\mathrm{d}x = \dfrac{e^{3x}\left(3\sin x - \cos x\right)}{10} + C.$

Пример 5.13. Найти $\int x\,\mathrm{arctg}\,2x\mathrm{d}x.$

Решение. Интегрируем по частям:

$$\int x\,\mathrm{arctg}\,2x\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u = \mathrm{arctg}\,2x; & dv = x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \dfrac{1}{1+4x^2}\cdot 2\mathrm{d}x; & v = \int x\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix}\right| =$$

$$= \mathrm{arctg}\,2x\cdot\frac{x^2}{2} - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2\mathrm{d}x}{1+4x^2} = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,2x - \int\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+4x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,2x - \frac{1}{4}\int\frac{4x^2\mathrm{d}x}{1+4x^2} = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,2x - \frac{1}{4}\int\frac{\left(4x^2+1\right)-1}{1+4x^2}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,2x - \frac{1}{4}\int\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2} = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,2x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(2x)}{1+4x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,2x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\cdot\mathrm{arctg}\,2x + C = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{8}\right)\mathrm{arctg}\,2x - \frac{1}{4}x + C.$$

5.5. Интегрирование рациональных дробей

Определение. *Рациональной функцией* (или *рациональной дробью*) называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n} \qquad (5.2)$$

где m, n – целые положительные числа;

$$a_i, b_j \in R,\ i = \overline{0,n},\ \ j = \overline{0,m},\ a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0.$$

Если $m < n$, то $R(x)$ называется *правильной дробью*, если $m \geq n$ – *неправильной дробью*.

Всякая неправильная рациональная дробь $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ путем деления числителя на знаменатель может быть представлена в виде суммы некоторого многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = K_{m-n}(x) + \frac{M_l(x)}{P_n(x)}, \qquad (5.3)$$

где $K_{m-n}(x)$, $M_l(x)$ – многочлены степеней $m-n$, l соответственно;

$\dfrac{M_l(x)}{P_n(x)}$ – правильная рациональная дробь, $l < n$.

Так как всякий многочлен легко интегрируется, то интегрирование рациональных функций сводится к интегрированию правильных дробей.

Выделение целой части неправильной рациональной дроби $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ производится делением числителя на знаменатель «уголком».

Пример 5.14. Выделить целую часть дроби $\dfrac{(x^3+1)(x^2-2)}{x^2-x+6}$.

Решение. Представим числитель в виде:

$$(x^3+1)(x^2-2) = x^5 - 2x^3 + x^2 - 2.$$

Получим: $\dfrac{x^5-2x^3+x^2-2}{x^2-x+6}$ – неправильная рациональная дробь ($m=5>n=2$).

Разделим числитель на знаменатель «уголком»:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^5-2x^3+x^2-2 & \,x^2-x+6 \\ \cline{2-2}
\underline{x^5-x^4+6x^3} & x^3+x^2-7x-12 \\
-\;x^4-8x^3+x^2-2 & \\
\underline{x^4-x^3+6x^2} & \\
-\;-7x^3-5x^2-2 & \\
\underline{-7x^3+7x^2-42x} & \\
-\;-12x^2+42x-2 & \\
\underline{-12x^2+12x-72} & \\
30x+70. &
\end{array}
$$

Получаем целую часть от деления $x^3+x^2-7x-12$ и остаток $30x+70$.

Таким образом, $\dfrac{x^5-2x^3+x^2-2}{x^2-x+6}=x^3+x^2-7x-12+\dfrac{30x+70}{x^2-x+6}$.

Рассмотрим *интегрирование правильных рациональных дробей*.

Известно, что всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, то есть многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}\ldots \\
\ldots\left(x^2+p_tx+q_t\right)^{s_t}.
\end{aligned}
\qquad (5.4)
$$

При этом $k_1+k_2+\ldots+k_r+2(s_1+s_2+\ldots+s_t)=n$ и все квадратные трехчлены не имеют действительных корней.

Числа $k_1, k_2, \ldots, k_r$ называются *кратностями действительных корней* $x_1, x_2, \ldots, x_r$ соответственно многочлена $P_n(x)$.

Доказано, что всякую правильную рациональную дробь $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, знаменатель которой разложен на множители по формуле (5.4), можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы дробей:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} +$$
$$+ \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{C_2 x + D_2}{\left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^2} + \ldots + \frac{C_{s_1} x + D_{s_1}}{\left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{s_1}} + \ldots \tag{5.5}$$
$$\ldots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_t x + q_t} + \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2 + p_t x + q_t\right)^2} + \ldots + \frac{M_{s_t} x + N_{s_t}}{\left(x^2 + p_t x + q_t\right)^{s_t}},$$

где $A_1,\ A_2, \ldots, B_1,\ B_2 \ldots,\ C_1,\ D_1 \ldots, M_1, N_1 \ldots$ – некоторые действительные числа.

Таким образом, интегрирование правильных рациональных дробей сводится к интегрированию четырех типов простейших рациональных дробей:

I) $\dfrac{A}{x-a}$; **II)** $\dfrac{A}{(x-a)^k}$; **III)** $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; **IV)** $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$,

где A, a, M, N, p, q – действительные числа;

$k \geq 2$, k – натуральное число, квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней ($p^2 - 4q < 0$).

Простейшие рациональные дроби интегрируются следующим образом:

I) $\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\int \frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$

II) $\int \frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x = A\int (x-a)^{-k}\,\mathrm{d}(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C,\ k \ge 2.$

III) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x.$

Учтем, что квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, то есть $p^2-4q<0$. Тогда $q-\frac{p^2}{4}>0$. Выделив в числителе производную квадратного трехчлена знаменателя, получим:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{x^2+px+q}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C;$$

IV) $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}\mathrm{d}x.$

После выделения в числителе производной квадратного трехчлена знаменателя и выделения полного квадрата в этом трехчлене интегрирование сводится к вычислению интеграла $I_k = \int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+a^2\right)^k}$ по рекуррентной формуле:

$$I_k = \int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{2(k-1)a^2}\left(\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + (2k-3)I_{k-1}\right). \quad (5.6)$$

Таким образом, для интегрирования правильной рациональной дроби необходимо:

1) разложить знаменатель дроби на линейные и квадратные множители в виде (5.4);

2) представить дробь в виде суммы простейших рациональных дробей с неопределенными коэффициентами (согласно (5.5));

3) найти эти коэффициенты;

4) проинтегрировать простейшие дроби.

Пример 5.15. Найти $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4-1}.$

Решение. Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь. Разложим знаменатель дроби на множители:

$$x^4-1 = \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right) = (x-1)(x+1)\left(x^2+1\right).$$

Тогда дробь может быть представлена в виде суммы простейших рациональных дробей:

$$\frac{x^2}{x^4-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{Mx+N}{\left(x^2+1\right)}.$$

Приведем к общему знаменателю сумму трех простейших рациональных дробей:

$$\frac{x^2}{x^4-1}=\frac{A(x+1)\left(x^2+1\right)+B(x-1)\left(x^2+1\right)+(Mx+N)\left(x^2-1\right)}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}.$$

Приравняем числители левой и правой частей записанного равенства:

$$x^2=A(x+1)\left(x^2+1\right)+B(x-1)\left(x^2+1\right)+(Mx+N)\left(x^2-1\right), \text{ или}$$

$$x^2=A\left(x^3+x^2+x+1\right)+B\left(x^3-x^2+x-1\right)+M\left(x^3-x\right)+N\left(x^2-1\right).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа последнего равенства, имеем:

$$\left.\begin{aligned} x^3:&\quad 0=A+B+M,\\ x^2:&\quad 1=A-B+N,\\ x^1:&\quad 0=A+B-M,\\ x^0:&\quad 0=A-B-N,\end{aligned}\right\}$$

откуда $A=\frac{1}{4}$; $B=-\frac{1}{4}$; $M=0$; $N=\frac{1}{2}$.

Тогда: $\frac{x^2}{x^4-1}=\frac{\frac{1}{4}}{x-1}-\frac{\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}$. Окончательно интегрируем:

$$\int\frac{x^2}{x^4-1}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x-1}-\frac{\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

□**Пример 5.16.** Найти $\int \frac{x^5+x^3-1}{x^4+2x^3+2x^2}\mathrm{d}x.$

Решение. Подынтегральная функция является неправильной дробью. Путем деления числителя на знаменатель выделим целую часть рациональной дроби и правильную рациональную дробь:

$$\frac{x^5+x^3-1}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+\frac{3x^3+4x^2-1}{x^4+2x^3+2x^2}.$$

Эту дробь $\frac{3x^3+4x^2-1}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{3x^3+4x^2-1}{x^2\left(x^2+2x+2\right)}$ представим в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{3x^3+4x^2-1}{x^2\left(x^4+2x^3+2x^2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

Приведя дроби к общему знаменателю и приравняв числители дробей в левой и правой частях записанного равенства, получим:

$$3x^3+4x^2-1=A\left(x^3+2x^2+2x\right)+B\left(x^2+2x+2\right)+Cx^3+Dx^2.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем:

$$\left.\begin{aligned} x^3 &: \quad 3=A+C,\\ x^2 &: \quad 4=2A+B+D,\\ x^1 &: \quad 0=2A+2B,\\ x^0 &: \quad -1=2B, \end{aligned}\right\}$$

откуда $A=\frac{1}{2};\ B=-\frac{1}{2};\ C=\frac{5}{2};\ D=\frac{7}{2}.$

В итоге получаем:

$$\int \frac{x^5+x^3-1}{x^4+2x^3+2x^2}\mathrm{d}x = \int (x-2)\mathrm{d}x + \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2} + \frac{\frac{5}{2}x+\frac{7}{2}}{x^2+2x+2} \right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \int \frac{\frac{5}{4}(2x+2)+1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2x} + \frac{5}{4}\int \frac{(2x+2)}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2x} + \frac{5}{4}\ln\left|x^2+2x+2\right| + \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

5.6. Интегрирование простейших иррациональностей, дифференциального бинома (интегрирование некоторых иррациональных функций)

Определение. Будем называть *иррациональной* функцию, которая получена из рациональной дроби заменой некоторых слагаемых в числителе или знаменателе корнями от рациональных дробей (в том числе от многочленов).

Это определение иррациональной функции не совсем строгое, но для наших целей оно подходит. Например, иррациональная функция $f(x) = \dfrac{x+\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x^2+1}}$ является в то же время рациональной функцией от x и радикалов $\sqrt{x};\ \sqrt[3]{x^2-1};\ \sqrt{x^2+1}$:

$$f(x) = R\left(x;\sqrt{x};\ \sqrt[3]{x^2-1};\ \sqrt{x^2+1}\right).$$

Определение. Будем говорить, что *интеграл* от рассматриваемого выражения *рационализируется* данной подстановкой, если с помощью этой подстановки исходный интеграл сводится к интегралу от рациональной дроби.

Рассмотрим некоторые *типичные интегралы от иррациональных функций*, которые сводятся к интегралам от рациональных функций.

I. Интегралы вида

$$\int R\left(x,\ x^{\frac{r_1}{s_1}},\ x^{\frac{r_2}{s_2}},\ \dots,\ x^{\frac{r_l}{s_l}}\right)\mathrm{d}x,$$

где R – рациональная функция;

$r_i,\ s_i$ – целые положительные числа, $i=\overline{1,l}$.

Пусть k – общий знаменатель дробей $\frac{r_1}{s_1},\ \frac{r_2}{s_{21}},\ \dots,\ \frac{r_l}{s_l},$ то есть $k = \text{НОК}\left(s_1,\ s_2,\ \dots,\ s_l\right).$

Сделаем подстановку

$$x = t^k \tag{5.7}$$

откуда

$$\mathrm{d}x = k\cdot t^{k-1}\mathrm{d}t. \tag{5.8}$$

Тогда каждая дробная степень x и dx выразятся через целую степень переменной t. Следовательно, подынтегральная функция преобразуется в рациональную функцию от t:

$$R^*\left(t\right) = R\left(t^k, t^{p_1}, \dots, t^{p_l}\right)\cdot k\cdot t^{k-1},$$

и мы приходим к вычислению интеграла $\int R^*\left(t\right)\mathrm{d}t,$ от рациональной дроби.

Для того, чтобы найти выражение для исходного интеграла, надо после вычисления интеграла $\int R^*\left(t\right)\mathrm{d}t,$ сделав обратную замену переменной $t=\sqrt[k]{x}=x^{\frac{1}{k}},$ вернуться к первоначальной переменной x.

В дальнейшем в аналогичных ситуациях мы не будем каждый раз оговаривать необходимость обратного перехода к исходной переменной x.

Пример 5.17. Вычислить $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\mathrm{d}x.$

Решение. Применим формулы (5.7, 5.8):

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\mathrm{d}x=\int \frac{x+x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{6}}}{x\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)}\mathrm{d}x=\begin{vmatrix} k=\text{НОК}(3,6)=6; \\ x=t^6; \quad dx=6t^5\mathrm{d}t \end{vmatrix}=$$

$$=\int \frac{t^6+t^4+t}{t^6\left(1+t^2\right)}\cdot 6t^5\mathrm{d}t=6\int \frac{t^6\left(t^5+t^3+1\right)}{t^6\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t=6\int \frac{t^5+t^3+1}{t^2+1}\mathrm{d}t=$$

$$=\left|\begin{array}{l|l} \_t^5+t^3+1 & t^2+1 \\ \cline{2-2} \underline{t^5+t^3} & t^3 \\ \qquad 1 & \end{array}\right|=6\cdot\int\left(t^3+\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t=6\cdot\left(\frac{t^4}{4}+\operatorname{arctg} t+C\right)=$$

$$=\left|t=\sqrt[6]{x}\right|=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

II. Интегралы вида

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}};\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_2}{s_2}};\ \ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_l}{s_l}}\right)\mathrm{d}x,$$

где R – рациональная функция;

r_i, s_i – целые положительные числа, $i=\overline{1,l}$.

В частности, при $b=0;\ a=1;\ c=0;\ d=1$ получаем случай **I**. Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки:

$$t^k = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ где } k = \text{НОК}\left(s_1, \ldots, s_l\right) \tag{5.9}$$

Отсюда получаем:

$$x = \frac{dt^k - b}{a - ct^k}. \tag{5.10}$$

Следовательно, x является рациональной функцией переменной t, поэтому и $x'(t)$ также будет рациональной функцией от t. Подставляя (5.9), (5.10) и dx, найденный из формулы (5.10), в подынтегральное выражение рассматриваемого интеграла **II**, получим интеграл вида $\int \overline{R}(t)\mathrm{d}t$, где $\overline{R}(t)$ – рациональная функция переменной t.

Пример 5.18. Вычислить $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}\mathrm{d}x$.

Решение. Применим формулы (5.9, 5.10):

$$\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}\mathrm{d}x = \int \frac{(2x-3)^{1/2}}{(2x-3)^{1/3}+1}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} k = \text{НОК}(2;3) = 6 \\ t^6 = 2x-3 \\ x = \dfrac{t^6+3}{2} \\ \mathrm{d}x = 3t^5\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{t^3}{t^2+1}\cdot 3t^5\mathrm{d}t =$$

$$= 3\int \frac{t^8}{t^2+1}\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{l|l} -t^8 & \;\; t^2+1 \\ \cline{2-2} \underline{t^8+t^6} & t^6-t^4+t^2-1 \\ \quad -t^6 & \\ \quad \underline{-t^6-t^4} & \\ \qquad -t^4 & \\ \qquad \underline{-t^4-t^2} & \\ \qquad\; -t^2 & \\ \qquad\; \underline{-t^2-1} & \\ \qquad\quad 1 & \end{array} \right| = 3\int\left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t =$$

$$=3\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg}t\right)+C=\frac{3}{7}(2x-1)^{\frac{7}{6}}-\frac{3}{5}(2x-1)^{\frac{5}{6}}+(2x-1)^{\frac{1}{2}}-$$

$$-3(2x-1)^{\frac{1}{6}}+3\operatorname{arctg}\sqrt[4]{2x-1}+C.$$

III. Интегралы от дифференциальных биномов, то есть

$$\int x^m\cdot\left(a+bx^n\right)^p\,\mathrm{d}x,$$

где $a\neq 0; b\neq 0; m, n, p$ – некоторые рациональные числа;

a и b – действительные числа.

Определение. Выражение вида $x^m\cdot\left(a+bx^n\right)^p$ $(a\neq 0; b\neq 0)$ называется *дифференциальным биномом*. Данный интеграл сводится к интегралу от рациональной дроби только в трех случаях:

Первый случай: p – целое число. Данный дифференциальный бином представляет собой иррациональность вида $R\left(x, \sqrt[k]{x}\right)$, где k – наименьшее общее кратное знаменателей рациональных чисел m и n (общий знаменатель), (см. вид **I**). Подстановка, рационализирующая интеграл, в этом случае имеет вид:

$$t^k=x, \tag{5.11}$$

где k – общий знаменатель рациональных чисел m и n.

Второй случай*:* пусть $\dfrac{m+1}{n}$ – целое число.

Рационализирующая подстановка имеет вид:

$$t^s=a+bx^n, \tag{5.12}$$

где s –знаменатель рационального числа p.

Третий случай*:* пусть $\dfrac{m+1}{n}+p$ – целое число.

В этом случае интеграл рационализируется с помощью подстановки

$$t^s = \frac{a + bx^n}{x^n} = ax^{-n} + b, \qquad (5.13)$$

где s –знаменатель рационального числа p.

Пример 5.19. Вычислить $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x.$

Решение. Применим формулу (5.12):

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{2}{3}}\left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{l} m = -\dfrac{2}{3};\ n = \dfrac{1}{3};\ p = \dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{m+1}{n} = 1 - \text{целое число; } s = 2 - \text{знаменатель числа } p; \\ t^2 = 1 + \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = \left(t^2 - 1\right)^3;\ \mathrm{d}x = 3\left(t^2-1\right)^2 \cdot 2t\mathrm{d}t = 6\left(t^2-1\right)^2 t\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t}{\left(t^2-1\right)^2} \cdot 6\left(t^2-1\right)^2 t\mathrm{d}t = 6\int t^2 \mathrm{d}t = 2t^3 + C = 2\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

IV. Интегралы вида $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x,$ где M, N, a, b, c – некоторые постоянные, а квадратный трехчлен не имеет равных корней, так как иначе корень из этого квадратного трехчлена может быть заменен рациональным выражением.

IV.1. Рассмотрим сначала интеграл ($M = 0;\ N = 1$):

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Преобразуем подкоренное выражение, выделив в нем полный квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a^2}\right).$$

Здесь возможны три случая (они определяются необходимостью существования квадратного трехчлена):

1) пусть $a > 0$; $c - \dfrac{b^2}{4a} > 0$. Обозначим через $m^2 = a$; $n^2 = c - \dfrac{b^2}{4a}$; $t = x + \dfrac{b}{2}$; $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Наш интеграл преобразуется к виду:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{m^2t^2 + n^2}} = \frac{1}{m}\ln\left|mt + \sqrt{m^2t^2 + n^2}\right| + C; \qquad (5.14)$$

2) пусть $a > 0$; $c - \dfrac{b^2}{4a} < 0$. Обозначим $m^2 = a$; $-n^2 = c - \dfrac{b^2}{4a}$; $t = x + \dfrac{b}{2}$. Получим:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{m^2t^2 - n^2}} = \frac{1}{m}\ln\left|mt + \sqrt{m^2t^2 - n^2}\right| + C; \qquad (5.15)$$

3) пусть $a < 0$; $c - \dfrac{b^2}{4a} > 0$. Обозначим $-m^2 = a$; $n^2 = c - \dfrac{b^2}{4a}$; $t = x + \dfrac{b}{2}$. Следовательно,

$$I = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{n^2 - m^2t^2}} = \frac{1}{m}\arcsin\frac{mt}{n} + C. \qquad (5.16)$$

IV.2. Рассмотрим теперь интеграл $I = \int \frac{(Mx+N)\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Технически вычисление таких интегралов повторяет способ интегрирования простейших дробей третьего вида (п. 5.5; **III**).

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \mathrm{d}\left(ax^2+bx+c\right) = \\ = (2ax+b)\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{\frac{M}{2a}\left((2ax+b)-b\right)+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{M}{2a}\int \frac{(2ax+b)\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= \frac{M}{2a}\int \frac{\mathrm{d}\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right)I = \frac{M}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right)I,$$

где I – интеграл из пункта IV.1.

Пример 5.20. Вычислить $\int \frac{(x+3)\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$.

Решение. Сначала мы получим в числителе дроби с помощью слагаемого x производную подкоренного выражения. Затем разобьем полученный интеграл на сумму двух интегралов, первый из которых вычислим поднесением под дифференциал, а второй преобразуем по пункту IV.1.

$$\int \frac{(x+3)\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+4x-3}} = \left|\mathrm{d}\left(4x^2+4x-3\right) = (8x+4)\mathrm{d}x\right| = \int \frac{\left(\frac{1}{8}(8x+4-4)+3\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+4x-3}} =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{(8x+4)}{\sqrt{4x^2+4x-3}}\mathrm{d}x + \left(3 - \frac{1}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+4x-3}} = \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}\left(4x^2+4x-3\right)}{\sqrt{4x^2+4x-3}}\mathrm{d}x +$$

$$+ \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4\left(x^2+x\right)-3}} = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x-3} + \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4\left(x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)-3}} =$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x-3}+\frac{5}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-4}}=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x-3}+$$

$$+\frac{5}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1}}=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x-3}+\frac{5}{4}\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2+x-\frac{3}{4}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x-3}+\frac{5}{4}\ln\left|(2x+1)+\sqrt{4x^2+4x-3}\right|+C.$$

V. Интегралы вида

$$I=\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x,$$

где R – рациональная функция от x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$; a, b, c – некоторые константы, причем квадратный трехчлен не имеет равных корней, так как в противном случае корень из этого квадратного трехчлена может быть заменен рациональным выражением.

Интегралы данного вида рационализируются либо одной из трех подстановок Эйлера, либо с помощью тригонометрических подстановок.

Рассмотрим *применение тригонометрических подстановок* для вычисления рассматриваемых интегралов, то есть приведения их к интегралу вида

$$\int\tilde{R}(\sin z,\cos z)\mathrm{d}z. \tag{5.17}$$

Преобразуя подкоренное выражение исходного интеграла, как и в случае IV.1, мы сведем рассматриваемый интеграл к одному из следующих трех видов (см. (5.14), (5.15), (5.16)):

1.

$$\int R\left(t,\sqrt{m^2t^2+n^2}\right)\mathrm{d}t, \tag{5.18}$$

при этом подстановка, приводящая данный интеграл к (5.12) такова:

$$t = \frac{n}{m} \operatorname{tg} z. \tag{5.19}$$

2. Для интегралов

$$\int R\left(t, \sqrt{m^2 t^2 - n^2}\right) \mathrm{d}t \tag{5.20}$$

подстановка будет

$$t = \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{\cos z}. \tag{5.21}$$

3. Для интегралов

$$\int R\left(t, \sqrt{n^2 - m^2 t^2}\right) \mathrm{d}t \tag{5.22}$$

подстановка будет

$$t = \frac{n}{m} \cdot \sin z. \tag{5.23}$$

Пример 5.21. Вычислить $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(5 + 2x + x^2\right)^3}}$.

Решение. Выделим в квадратном трехчлене полный квадрат:

$$x^2 + 2x + 5 = \left(x^2 + 2x + 1\right) - 1 + 5 = \left(x^2 + 1\right)^2 + 4.$$

Тогда

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(5 + 2x + x^2\right)^3}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\left(x+1\right)^2 + 4\right)^3}} = \left| \begin{matrix} t = x + 1; \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(t^2 + 4\right)^3}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{случай (5.13);} \quad m = 1; n = 2; \\ t = 2 \operatorname{tg} z; dt = \dfrac{2}{\cos^2 z} \mathrm{d}z; \ \ z = \operatorname{arctg} \dfrac{t}{2} \end{matrix} \right| = \int \frac{2\mathrm{d}z}{\cos^2 z \sqrt{\left(4 \operatorname{tg}^2 z + 4\right)^3}} =$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}z}{\cos^2 z\sqrt{\left(\operatorname{tg}^2 z+1\right)^3}}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}z}{\cos^2 z\sqrt{\left(\dfrac{1}{\cos^2 z}\right)^3}}=\frac{1}{4}\int\cos z\,\mathrm{d}z=$$

$$=\frac{1}{4}\sin z+C=\frac{1}{4}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right)+C=\frac{1}{4}\cdot\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{t}{2}\right)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{t}{2}\right)}}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\dfrac{t}{2}}{\sqrt{1+\dfrac{t^2}{4}}}+C=\frac{1}{4}\cdot\frac{t}{\sqrt{4+t^2}}+C=\frac{1}{4}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}+C.$$

5.7 Интегрирование некоторых тригонометрических выражений

I. Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$, где R – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$.

Подстановка

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2};\quad -\pi<x<\pi, \tag{5.24}$$

которая называется *универсальной тригонометрической*, сводит рассматриваемый интеграл к интегралу от рациональной дроби, если использовать следующие соотношения:

$$\sin x=\frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}, \tag{5.25}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{5.26}$$

Из (5.24) $x = 2\operatorname{arctg} t$; $\quad \mathrm{d}x = \dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$, поэтому

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\mathrm{d}x = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Следовательно, получен интеграл от рациональной функции.

Следует, однако, иметь ввиду, что хотя с принципиальной точки зрения рассматриваемые интегралы всегда можно привести к интегралу от рациональной дроби указанным методом, при практическом применении он часто приводит к громоздким вычислениям. Тогда удобнее использовать более эффективные подстановки, которые мы рассмотрим в следующих пунктах. Тем не менее, некоторые интегралы быстро находятся с помощью универсальной подстановки. В частности, это относится к интегралам вида $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x + c}$, где a или b не равны нулю.

Пример 5.22. Вычислить $\displaystyle\int\frac{dx}{1+2\cos x}$.

Решение. Применим универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+2\cos x} = \left|\begin{array}{ll} t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}; & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}; \\ x = 2\operatorname{arctg} x; & \mathrm{d}x = \dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} \end{array}\right| = \int\frac{\dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{1+2\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int\frac{\mathrm{d}t}{3-t^2} =$$

$$= -2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-3} = -2\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\sqrt{3}}\right| + C.$$

I.1 $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$. Здесь целесообразно применить подстановку $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$, учитывая, что $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$; $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$.

I.2 Если $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то рационализирующая подстановка $t = \cos x$.

I.3 Если $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, тогда подстановка $t = \sin x$.

Пример 5.23. Вычислить $\int \dfrac{dx}{\cos^4 x}$.

Решение. Данный интеграл представляет случай I.1.

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x; \quad \dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt \\ \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + t^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(1 + t^2\right) dt = t + \frac{t^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

Пример 5.24. Вычислить $\int \sin^3 x dx$.

Решение. Имеем случай I.2.

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx = \int \sin^2 x d(-\cos x) = |t = \cos x| =$$

$$= -\int \left(1 - t^2\right) dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

II. Интегралы вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$, где m и n – рациональные числа.

Такие интегралы интегрируются только в следующих случаях:

1) если n – целое нечетное число, то подстановка $t = \sin x$;

2) если m – целое нечетное число, то подстановка $t = \cos x$;

3) m и n – числа неотрицательные и четные, тогда используются формулы понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \qquad (5.27)$$

4) m и n – числа четные, причем хотя бы одно из них – отрицательное.

Замена $t = \operatorname{tg} x$, или $t = \operatorname{ctg} x$.

Этот случай соответствует пункту I.1.

Пример 5.25. Вычислить $\int \cos^4 x \mathrm{d}x$.

Решение. Имеем случай II.3 (5.27). Тогда

$$\int \cos^4 x \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int \left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{4} \left(x + \sin 2x + \frac{1}{2} \int \left(1 + \cos 4x \right) \mathrm{d}x \right) = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x +$$
$$+ \frac{1}{8} \left(x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

Пример 5.26. Вычислить $\int \sin^3 x \cdot \sqrt{\cos x} \mathrm{d}x$.

Решение. Имеем случай m – целое (II.2).

$$\int \sin^3 x \cdot \sqrt{\cos x} \mathrm{d}x = \int \sin^2 x \cdot \sqrt{\cos x} \cdot \sin x \mathrm{d}x =$$
$$= \int \left(1 - \cos^2 x \right) \cdot \sqrt{\cos x} \mathrm{d}\left(-\cos x \right) = \left| t = \cos x \right| = -\int \left(1 - t^2 \right) \sqrt{t} \mathrm{d}t =$$
$$= -\int \left(t^{\frac{1}{2}} - t^5 \right) \mathrm{d}t = -\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7} t^{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{7} \sqrt{\cos^7 x} - \frac{2}{3} \sqrt{\cos^3 x} + C.$$

III. Интегралы вида $\int \sin nx \cdot \cos mx \mathrm{d}x$; $\int \sin x \cdot \sin mx \mathrm{d}x$; $\int \cos nx \cdot \cos mx \mathrm{d}x$ непосредственно вычисляются, если их подынтегральные функции преобразовать по формулам:

$$\sin nx\cdot\cos mx=\frac{1}{2}\big(\sin(n+m)x+\sin(n-m)x\big);$$
$$\sin nx\cdot\sin mx=\frac{1}{2}\big(\cos(n-m)x-\cos(n+m)x\big);\qquad(5.28)$$
$$\cos nx\cdot\cos mx=\frac{1}{2}\big(\cos(n+m)x+\cos(n-m)x\big).$$

Пример 5.27. Вычислить $\int\sin 2x\cdot\cos x\mathrm{d}x$.

Решение. Применяем известные формулы (5.28):

$$\int\sin 2x\cdot\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\sin 3x+\sin x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{2}\cos x+C.$$

IV. Интегралы вида $\int R(\operatorname{tg}x)\mathrm{d}x$ и $\int R(\operatorname{ctg}x)\mathrm{d}x,$, где R – рациональная функция, вычисляются с помощью подстановок $t=\operatorname{tg}x$, или $t=\operatorname{ctg}x$.

Пример 5.28. Вычислить $\int\operatorname{tg}^5 x\mathrm{d}x$.

Решение. Применяем подстановку $t=\operatorname{tg}x$:

$$\int\operatorname{tg}^5 x\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}x;\\ x=\operatorname{arctg}t;\\ \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.\end{array}\right|=\int\frac{t^5}{t^2+1}\mathrm{d}t=\left|\begin{array}{r|l} {}_{-}t^5 & t^2+1\\ \cline{2-2} \underline{t^5+t^3} & t^3-t\\ -t^3 & \\ \underline{-t^3-t} & \\ t & \end{array}\right|=$$

$$=\int\left(t^3-t+\frac{t\mathrm{d}t}{t^2+1}\right)=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(t^2+1\right)}{t^2+1}=$$

$$=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right|+C=\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}^2 x+1\right|+C=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\cos^2 x}\right|+C=\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C.$$

6. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

6.1. Определенный интеграл и его свойства. Понятие определенного интеграла

Пусть дана функция $y=f(x)$, определенная на отрезке $[a,b]$, $a<b$. Разобьем отрезок $[a,b]$ точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ на n элементарных отрезков $[a,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{k-1},x_k],\ldots,[x_{n-1},x_n]$, длины которых обозначим через Δx_k, то есть $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $k=\overline{1,n}$. На каждом из элементарных отрезков $[x_k,x_{k-1}]$ выберем произвольную точку ξ_k и составим *интегральную сумму* для функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$:

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_n)\Delta x_k. \tag{6.1}$$

Обозначим через λ длину наибольшего из элементарных отрезков $[x_k,x_{k-1}]$, то есть $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$.

Определение. *Определенным интегралом* от функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется конечный предел ее интегральной суммы (6.1), когда число элементарных отрезков неограниченно возрастает, а длина наибольшего из них стремится к нулю.

Следовательно, по определению

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_n)\Delta x_k=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{6.2}$$

Символ $\int\limits_a^b$ в правой части (6.2) читается так: определенный интеграл от a до b; $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, x – *переменной интегрирования*; a – *нижним пределом интегрирования*; b – *верхним пределом интегрирования*.

Из определения следует, что величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Определение. Функция, для которой существует предел (6.2), называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$.

С геометрической точки зрения определенный интеграл от неотрицательной функции равен площади криволинейной трапеции (рис. 6.1): $S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

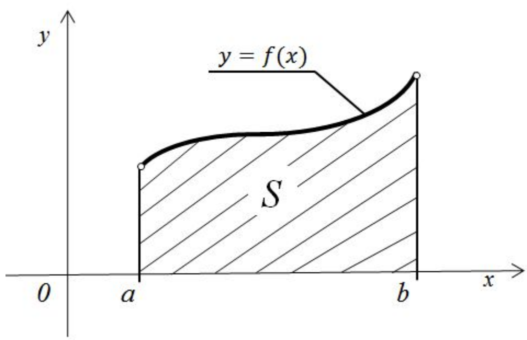

Рис. 6.1

Основные свойства определенного интеграла:

1. Если $a = b$, то $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

2. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$

3. $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a.$

4. Для $\forall \alpha,\ \beta \in R$ $\int_a^b \left(\alpha f(x) \pm \beta g(x)\right)\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

5. Для $\forall\, a, b, c$ справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x +$ $+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$ если все три интеграла существуют.

6.2. Вычисление определенного интеграла

Фундаментальной для математического анализа является формула Ньютона–Лейбница, связывающая определенный интеграл с первообразной подынтегральной функцией:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \tag{6.3}$$

где $f(x)$ – функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$;

F – любая первообразная функция.

Часто разность $F(b) - F(a)$ записывается символом $F(x)\Big|_a^b$. Выражение $\Big|_a^b$ читается как *знак двойной подстановки*. В этих обозначениях формула Ньютона–Лейбница приобретает вид:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 6.1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -(0-1) = 1.$

Ответ: 1.

6.3. Интегрирование заменой переменной (подстановкой) и интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема. Пусть $y = f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция, а $x = \varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[\alpha, \beta]$, так, что $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(b) = b$. Тогда справедлива *формула замены переменной в определенном интеграле*:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6.4}$$

Отметим, что при вычислении определенного интеграла методом замены переменной возвращаться к старой переменной не требуется.

Пример 6.2. Вычислить $\int\limits_0^9 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$.

Решение. Вводим замену $x = t^2$, $t > 0$. При $x = 0$ имеем $t = 0$, при $x = 9$ получим $t = 3$, $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. По формуле (6.4)

$$\int_0^9 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \int_0^3 \frac{2t\mathrm{d}t}{1+t} = 2\int_0^3 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = 2\left(t - \ln|t+1|\right)\Big|_0^3 =$$
$$= 2\left(3 - \ln 4 - \left(0 - \ln|1|\right)\right) = 6 - 2\ln 4.$$

Ответ: $6 - 2\ln 4$.

Пример 6.3. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \cdot \sin^6 x\mathrm{d}x$.

Решение. Сделаем замену $\sin x = t$, $\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Заметим, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. При $x = 0$ имеем $t = 0$, при $x = \frac{\pi}{2}$ получим $t = 1$. По формуле (6.4)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \cdot \sin^6 x\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)t^6\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t^6 - t^8\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^9}{9}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{7} - \frac{1}{9} = \frac{2}{63}.$$

Ответ: $\frac{2}{63}$.

Пример 6.4. Вычислить $\int\limits_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x.$

Решение. Сделаем замену $x = t^6$, $\mathrm{d}t = 6t^5\mathrm{d}t$. При $x = 1$ имеем $t = 1$, при $x = 64$ имеем $t = 2$. По формуле (6.4)

$$\int\limits_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x = \int\limits_1^{2} \frac{6t^5\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int\limits_1^{2} \frac{t^3\mathrm{d}t}{t+1^2} = \begin{bmatrix} \text{выделим целую часть у дроби} \\ \text{путем деления числителя} \\ \text{на знаменатель} \end{bmatrix} =$$

$$= 6\int\limits_1^{2}\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right)\Bigg|_1^2 = 6\left(\frac{4}{3} + \ln\frac{2}{3}\right).$$

Ответ: $6\left(\frac{4}{3} + \ln\frac{2}{3}\right)$.

Теорема. Если функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула *интегрирования по частям в определенном интеграле*:

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

или

$$\int\limits_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\mathrm{d}u. \tag{6.5}$$

Пример 6.5. Вычислить $\int\limits_0^{\ln 3} xe^x\mathrm{d}x.$

Решение. По формуле (6.5) $u = x$, $\mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x$. Следовательно, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $v = e^x$.

$$\int\limits_0^{\ln 3} xe^x \mathrm{d}x = xe^x\Big|_0^{\ln 3} - \int\limits_0^{\ln 3} e^x \mathrm{d}x = \ln 3 \cdot 3 - e^x\Big|_0^{\ln 3} = 3\ln 3 = 3 + 1 = 3\ln 3 - 2.$$

Ответ: $3\ln 3 - 2.$

Пример 6.6. Вычислить $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x.$

Решение. Применим формулу (6.5)

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} & v = -\operatorname{ctg} x \end{matrix} \right| = -x\operatorname{ctg} x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\sqrt{3} + \ln\left|\sin x\right|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\sqrt{3} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}\sqrt{3} - \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}\sqrt{3} - \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}.$

Пример 6.7. Вычислить $\int\limits_1^2 \ln x^2 \mathrm{d}x.$

Решение. По формуле (6.5)

$$\int\limits_1^2 \ln x^2 \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \ln x^2 & \mathrm{d}u = \left(\dfrac{1}{x^2}\cdot 2x\right)\mathrm{d}x = \dfrac{2}{x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= x\ln x^2\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{2}{x} x \mathrm{d}x = 2\ln 4 - 2x\Big|_1^2 = 2\ln 4 - \left(4 - 1\right) = 2\ln 4 - 3.$$

Ответ: $2\ln 4 - 3.$

6.4. Приложения определенного интеграла

6.4.1. Вычисление площадей плоских фигур

Вычисление площадей плоских фигур
в декартовой системе координат

Исходя из определения определенного интеграла, площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $y = f(x),\ f(x) > 0$ и прямыми $x = a;\ x = b;\ y = 0,$ вычисляется по формуле (в соответствии с рис. 6.2):

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.6}$$

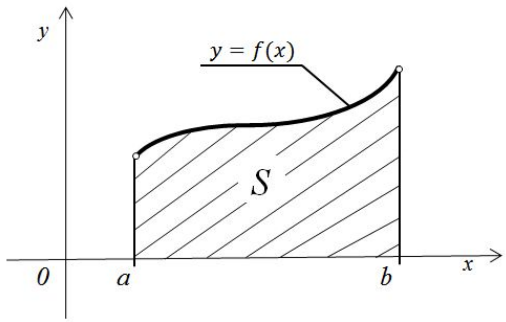

Рис. 6.2

Если $f(x) < 0$ при $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < 0,$ значит площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $y = f(x),\ f(x) < 0$ и прямыми $x = a;\ x = b;\ y = 0,$ вычисляется по формуле (в соответствии с рис. 6.3):

$$S = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|. \tag{6.7}$$

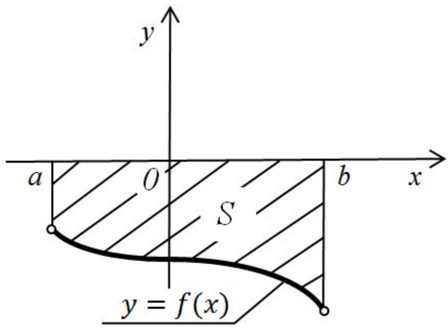

Рис. 6.3

Пример 6.8. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $y = 4 - x^2$ и прямой $y = 0$.

Решение. $y = 4 - x^2$ – график параболы; $a = -1 < 0$ – ветви параболы направлены вниз; $(0; 4)$ – вершина параболы, $y = 0$ – ось Ox. Найдем точки пересечения $y = 4 - x^2$ и $y = 0$: $4 - x^2 = 0$; $x^2 = 4$, $x = \pm 2$. Следовательно, точки пересечения $(-2; 0)$; $(2; 0)$. Сделаем чертеж (рис. 6.4).

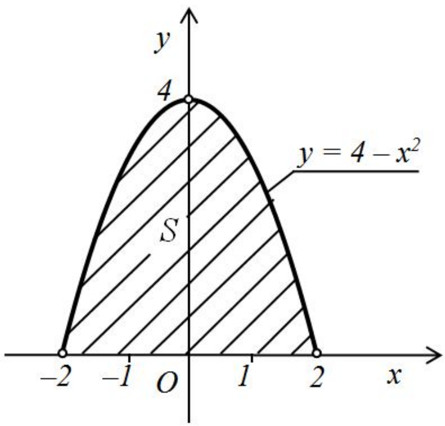

Рис. 6.4

Значит,

$$S=\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx=\left(4x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)=16-\frac{16}{3}=10\frac{2}{3}\,(\text{кв. ед.})$$

Ответ: $10\frac{2}{3}$ кв. ед.

Пример 6.9. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $y=\cos x$ и прямыми $x=\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{3\pi}{2}$; $y=0$.

Решение. Построим график кривой $y=\cos x$ на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ (рис. 6.5).

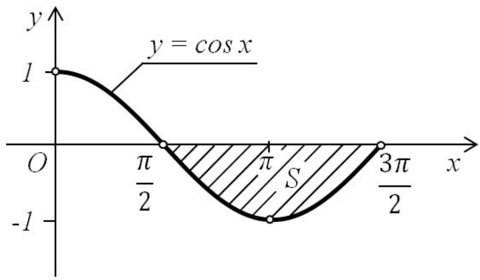

Рис. 6.5

Значит, $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=\sin\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}=-2.$

Следовательно, $S=|-2|=2$ (кв. ед.)

Ответ: 2 кв. ед.

Если кривая $y=f(x)$ пересекает отрезок $[a;b]$ в точке $(c;0)$, то в этом случае площадь плоской фигуры, ограниченной кривой

$y = f(x)$ и прямыми $x = a$; $x = b$; $y = 0$, вычисляется по формуле (в соответствии с рис. 6.6):

$$S = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \left|\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|. \tag{6.8}$$

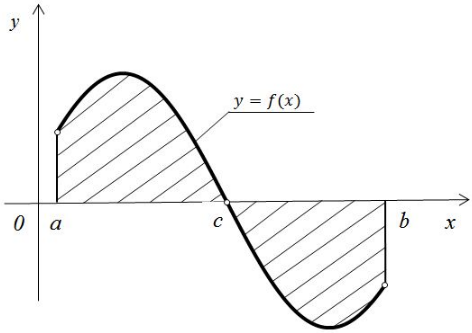

Рис. 6.6

Если известно, что $f(x) > g(x) > 0$ при $x \in [a, b]$, то площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = f(x)$, $y = g(x)$ и прямыми $x = a$; $x = b$, вычисляется по формуле (в соответствии с рис. 6.7):

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x. \tag{6.9}$$

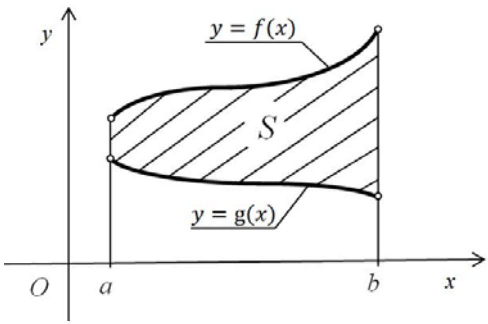

Рис. 6.7

Пример 6.10. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $y = \sin 2x$ и прямыми $x = 0$; $x = \pi$; $y = 0$.

Решение. Сделаем чертеж кривой $y = \sin 2x$ на отрезке $[0; \pi]$ (рис. 6.8).

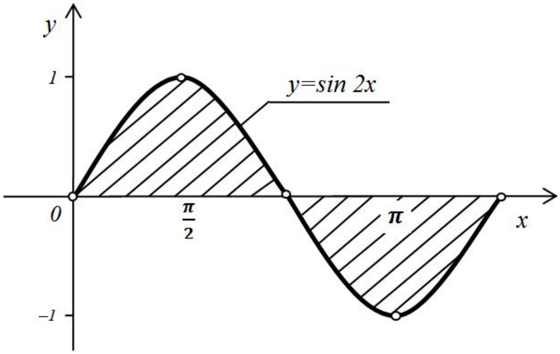

Рис. 6.8

В соответствии с формулой (6.8) получаем

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx + \left| \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x dx \right| = -\frac{1}{2}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left| -\frac{1}{2}\cos 2x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos\pi - \cos 0) + \left| -\frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos\pi) \right| = -\frac{1}{2}\cdot(-2) + \left| -\frac{1}{2}\cdot 2 \right| = 2 \ (\text{кв. ед.}).$$

Ответ: 2 кв. ед.

Пример 6.11. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = 5 - x^2$ и $y = x^2 + 3$.

Решение. $y = 5 - x^2$ – график параболы; $a = -1 < 0$ – ветви параболы направлены вниз; $(0; 5)$ – вершина параболы.

$y = x^2 + 3$ – график параболы; $a = 1 > 0$ – ветви параболы направлены вверх; $(0; 3)$ – вершина параболы.

Найдем точки пересечения парабол: $y = 5 - x^2$ и $y = x^2 + 3$.

$$5 - x^2 = x^2 + 3; \quad 2x^2 = 2; \quad x^2 = 1.$$

Сделаем чертеж (рис. 6.9).

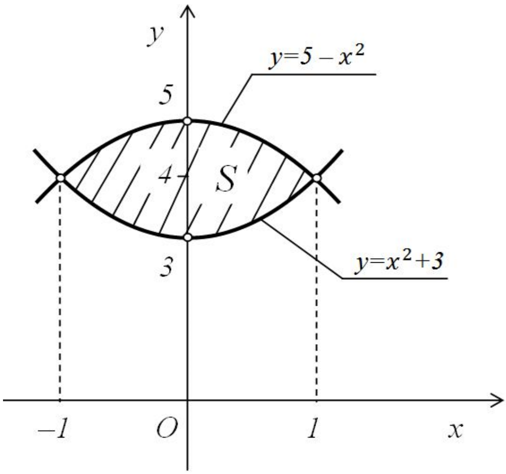

Рис. 6.9

В соответствии с формулой (6.9) получаем:

$$\int_{-1}^{1} \left(5 - x^2\right) - \left(x^2 + 3\right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(2 - 2x^2\right) \mathrm{d}x = 2\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= 2\left[1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right] = 2\left[2 - \frac{2}{3}\right] = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: $2\frac{2}{3}$ кв. ед.

Вычисление площади криволинейной трапеции в случае, когда кривая задана в параметрической форме

В данном случае, в соответствии с рис. 6.2, имеем формулу (6.6), только при этом кривая $y = f(x)$ задана в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta].$$

Следовательно, формула (6.6) принимает вид:

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b y\mathrm{d}x = \left[\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t\right] = \int_\alpha^\beta \psi(t)\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Значит,

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{6.10}$$

Пример 6.12. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin 2t, \end{cases} \quad t \in [0; \pi].$

Решение. В соответствии с формулой (6.10), получаем:

$$x' = -2\sin 2t,\ \int_0^\pi \sin 2t(-2\sin 2t)\mathrm{d}t = -2\int_0^\pi \sin^2 2t\mathrm{d}t =$$

$$= -\int_0^\pi (1 - \cos 4t)\mathrm{d}t = -\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^\pi = -\pi.$$

Значит,

$$S = |-\pi| = \pi\,(\text{кв. ед.}).$$

Ответ: π кв. ед.

Вычисление площадей плоских фигур в полярной системе координат

Пусть кривая в полярной системе координат задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$. Необходимо найти площадь плоской фигуры, ограниченной этой кривой и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (в соответствии с рис. 6.10).

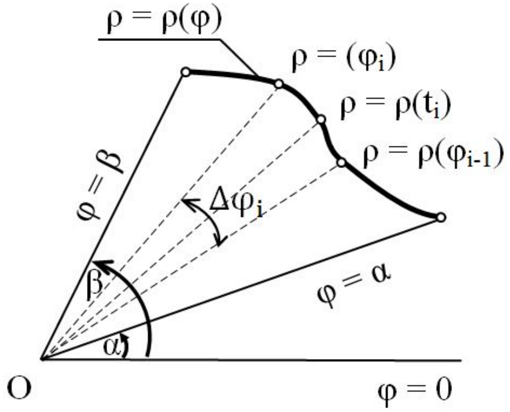

Рис. 6.10

Разобьем криволинейный сектор n-лучами на элементарные секторы: $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$.

Тогда площадь элементарного сектора можно считать равной площади кругового сектора, то есть $S_i \approx \frac{1}{2}\rho^2(t_i)\Delta\varphi_i$.

Значит, $\lim\limits_{\max\Delta\varphi_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho^2(t_i)\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi = S.$ Таким образом, площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi. \tag{6.11}$$

Пример 6.13. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 1 + \cos\varphi$.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 6.11).

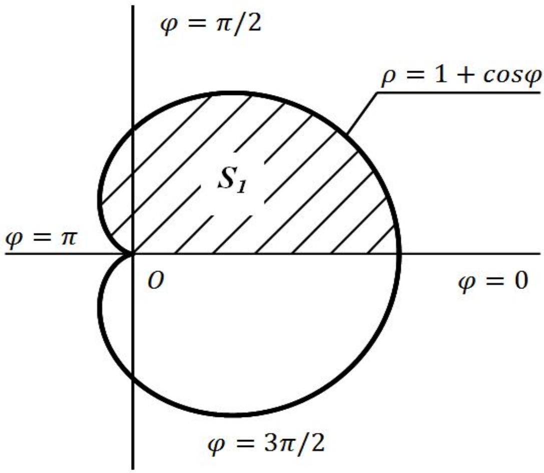

Рис. 6.11

Очевидно, что кардиоида симметрична относительно прямой $\varphi = 0$, площадь фигуры будет равна: $S = 2S_1$, где S_1 вычислим по формуле 6.11.

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{0}^{\pi} = \frac{3}{4}\pi\,(\text{кв. ед.}).$$

Ответ: $\dfrac{3}{2}\pi$ кв. ед.

6.4.2. Вычисление длин дуг кривых

Вычисление длин дуг кривых в декартовой системе координат

Пусть в декартовой системе координат на плоскости задана кривая уравнением $y = f(x)$. Необходимо найти длину дуги AB этой кривой, заключенной между прямыми $x = a$; $x = b$ (в соответствии с рис. 6.12).

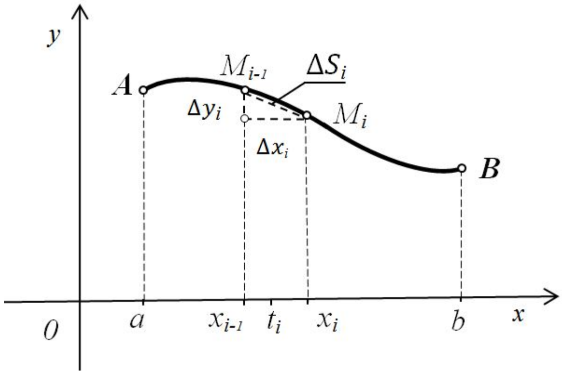

Рис. 6.12

Разобьем дугу AB точками $A, M_1, M_2, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, B$ с абсциссами $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < b$ на элементарные дуги.

Очевидно, что длина элементарной дуги $M_{i-1}M_i$ мало чем отличается от длины хорды $M_{i-1}M_i = \Delta S_i$.

Очевидно, что $\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$. Но, $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(t_i)$, $\quad t_i \in (x_{i-1}; x_i)$. Значит, $\Delta S_i = \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(t_i))^2}$. Тогда

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(t_i))^2}\, \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x = l.$$

Таким образом, длина дуги кривой $y=f(x)$, заключенная между прямыми $x=a$, $x=b$, вычисляется по формуле

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x. \tag{6.12}$$

Пример 6.14. Найти длину дуги кривой $f(x)=\ln\sin x$, заключенной между прямыми $x=\dfrac{\pi}{2}$ и $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

Решение. Для того, чтобы использовать формулу (6.12), найдем $f'(x)$.

$$f'(x)=(\ln\sin x)'=\frac{1}{\sin x}(\sin x)'=\frac{\cos x}{\sin x}=\operatorname{ctg}x;\quad a=\frac{\pi}{2};\quad b=\frac{3\pi}{4}.$$

Тогда

$$l=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2x}\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\left[\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right]\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\left(\sin\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\left(\cos\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}}=$$

$$=\left(\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right|=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\right|.$$

Ответ: $\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{8}\right|$.

Вычисление длины дуги кривой в случае, когда кривая задана в параметрической форме

Пусть кривая $y=f\left(x\right)$ задана в параметрической форме:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in[\alpha;\beta], \quad a=\varphi(\alpha), \quad b=\varphi(\beta).$$

Тогда $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$ и $\mathrm{d}x=x'_t\cdot\mathrm{d}t.$ Подставляем полученные выражения для y'_x и dx в формулу (6.12), получаем:

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2}\cdot x'_t\mathrm{d}t=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Значит, длина дуги кривой в случае, когда кривая задана в параметрической форме, вычисляется по формуле:

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2}\,\mathrm{d}t. \qquad (6.13)$$

Пример 6.15. Найти длину дуги кривой, заданной в параметрической форме: $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t^3, \end{cases} \quad t\in[0;1].$

Решение. Вычислим x'_t и y'_t: $x'_t=2t;$ $y'_t=3t^2.$ Подставим полученное выражение в формулу (6.13), получаем:

$$l=\int\limits_0^1\sqrt{4t^2+9t^4}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 t\sqrt{4+9t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(4+9t^2\right)^{1/2}\mathrm{d}t^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}\left(4+9t^2\right)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{1}{27}\left(13^{3/2}-4^{3/2}\right)=\frac{13\sqrt{13}-8}{27}.$$

Ответ: $\dfrac{13\sqrt{13}-8}{27}.$

Вычисление длин дуг кривых в полярной системе координат

Пусть необходимо найти длину дуги кривой $\rho=\rho(\varphi)$, где $\alpha\le\varphi\le\beta$.

Известны формулы перехода от полярных координат к декартовым: $\begin{cases} x=\rho(\varphi)\cos\varphi, \\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$

Эти уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения кривой. Значит, для вычисления длины дуги кривой $\rho=\rho(\varphi)$ будем использовать формулу (6.13), предварительно вычислив $x'(\varphi)$ и $y'(\varphi)$:

$$x'(\varphi)=\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi,$$

$$y'(\varphi)=\rho'(\varphi)\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi.$$

Тогда

$$\left[x'(\varphi)\right]^2+\left[y'(\varphi)\right]^2=\left(\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi\right)^2+$$
$$+\left(\rho'(\varphi)\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi\right)^2=\left(\rho'(\varphi)\right)^2\cos^2\varphi+\rho^2(\varphi)\sin^2\varphi-$$
$$-2\rho'(\varphi)\cos\varphi\rho(\varphi)\sin\varphi+\left(\rho'(\varphi)\right)^2\sin^2\varphi+\rho^2(\varphi)\cos^2\varphi+$$
$$+2\rho'(\varphi)\sin\varphi\rho(\varphi)\cos\varphi=\left(\rho'(\varphi)\right)^2+\rho^2(\varphi).$$

Таким образом, формула для вычисления длины дуги кривой в полярной системе координат имеет вид:

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\rho'(\varphi)\right)^2+\rho^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi. \qquad (6.14)$$

Пример 6.16. Найти длину дуги кардиоиды $\rho = 2(1 - \sin\varphi)$.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 6.13).

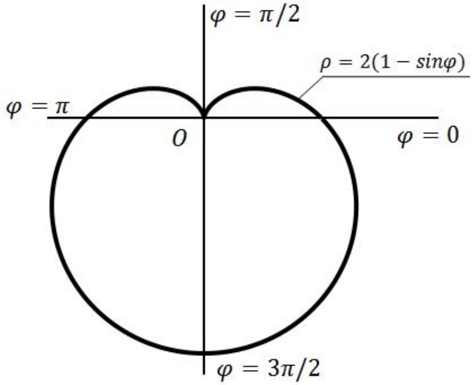

Рис. 6.13

Исходя из рисунка 6.13 и формулы (6.14), длина дуги кардиоиды равна: $l = 2l_1$, где $l_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\,d\varphi$. Значит,

$$l_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\cos^2\varphi + 4(1 - \sin\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\cos^2\varphi + 4 - 8\sin\varphi + 4\sin\varphi^2}\,d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8 - 8\sin\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16\sin^2\varphi/2}\,d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin\varphi/2\,d\varphi =$$

$$= -4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin\varphi/2\,d\varphi + 4\int\limits_{-}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi/2\,d\varphi = 8\cos\varphi/2\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - 8\cos\varphi/2\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 8\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 8\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

Следовательно, $l = 2l_1 = 16\left(2 - \sqrt{2}\right)$.

Ответ: $16\left(2 - \sqrt{2}\right)$.

6.4.3. Вычисление объемов и поверхностей тел вращений

Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f\left(x\right)$ и прямыми $y = 0,\ x = a,\ x = b$ в соответствии с рис. 6.14.

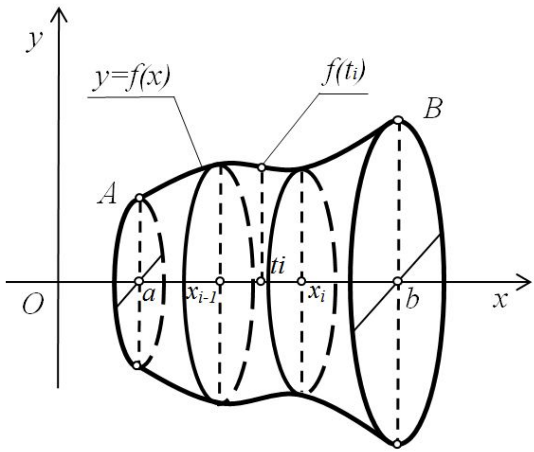

Рис. 6.14

Разобьем тело плоскостями $x = x_i$, где $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$, на элементарные тела.

Так как элементарное тело будет мало чем отличаться от цилиндра, то его объем будет равен $V_i = \pi f^2(t_i)\Delta x_i$, где $t_i \in (x_{i-1}; x_i)$. Значит, $V = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \pi f^2(t_i)\Delta x_i = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. Следовательно, объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = b$, $x = a$, вычисляется по формуле

$$V_{Ox} = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x. \tag{6.15}$$

Пример 6.17. Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y^2 = 8x$ и прямой $x = 1$ вокруг оси Ox.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 6.15).

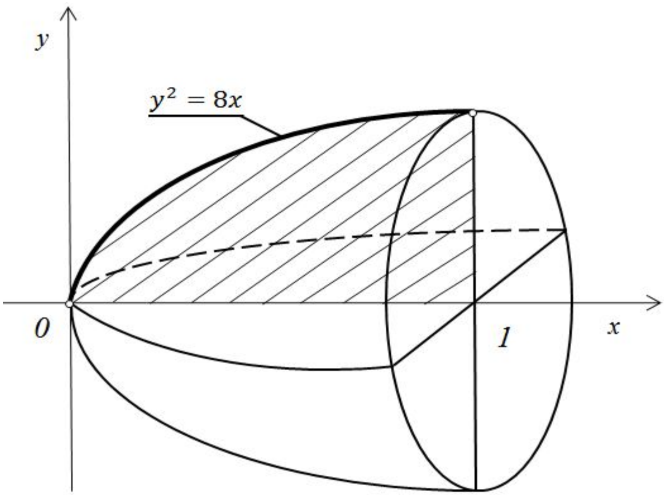

Рис. 6.15

Очевидно, что $x \in [0;1]$, тогда, применяя формулу (6.15), получаем

$$V = \pi\int_0^1 8x\mathrm{d}x = 4\pi x^2\Big|_0^1 = 4\pi \text{ (куб. ед.)}.$$

Ответ: 4π куб. ед.

Если необходимо найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$, то, проведя аналогичные рассуждения, как при выводе формулы (6.15), получаем:

$$V_{Oy} = \pi\int_c^d \varphi^2(y)\mathrm{d}y. \qquad (6.16)$$

Пример 6.18. Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = \dfrac{1}{x}$ и прямыми $y = 1$; $y = 3$; $x = 0$, вокруг оси Oy.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 6.16).

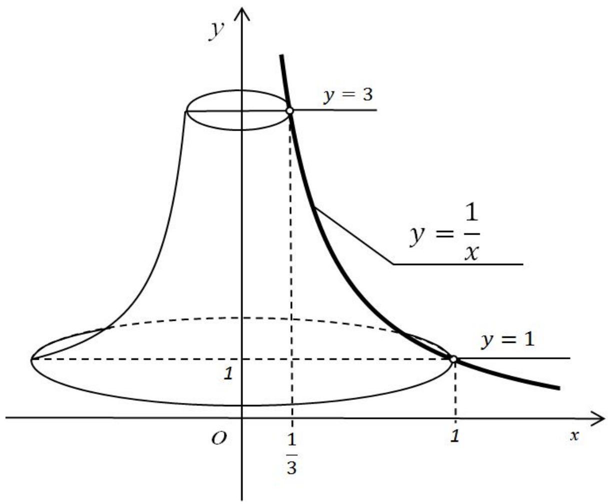

Рис. 6.16

Очевидно, что $y \in [1; 3]$, тогда, применяя формулу (6.16), получаем

$$V = \pi \int_1^3 \left(\frac{1}{y}\right)^2 \mathrm{d}y = \pi \int_1^3 y^{-2} \mathrm{d}y = -\pi \cdot \frac{1}{y}\Bigg|_1^3 = -\pi\left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{2\pi}{3} \text{ (куб.ед.).}$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$ куб.ед.

Пример 6.19. Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y^2 = 4x$ и прямыми $y = -2$; $y = 2$; $x = 0$, вокруг оси Oy.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 6.17).

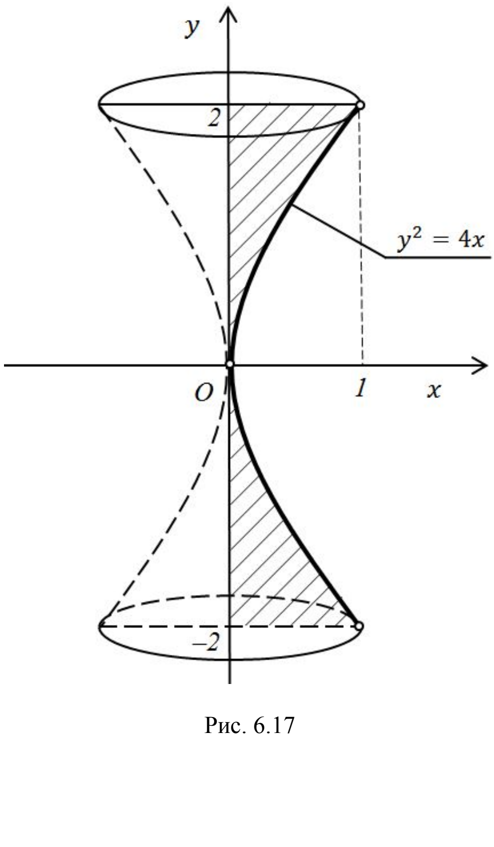

Рис. 6.17

Используем формулу (6.16). Так как $y^2 = 4x$, то $x = \frac{1}{4}y$. Значит,

$$V = \pi \int_{-2}^{2} \frac{1}{16} y^4 \mathrm{d}y = \frac{\pi}{80} y^5 \Big|_{-2}^{1} = \frac{\pi}{80}\left(2^5 + 2^5\right) =$$

$$= \frac{\pi}{40} \cdot 2^5 = \frac{\pi \cdot 32}{40} = \frac{4\pi}{5} \text{ (куб. ед.).}$$

Ответ: $\frac{4\pi}{5}$ куб. ед.

6.20. Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y^2 = 4x$ и прямой $x = 1$, вокруг оси Oy.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 6.18).

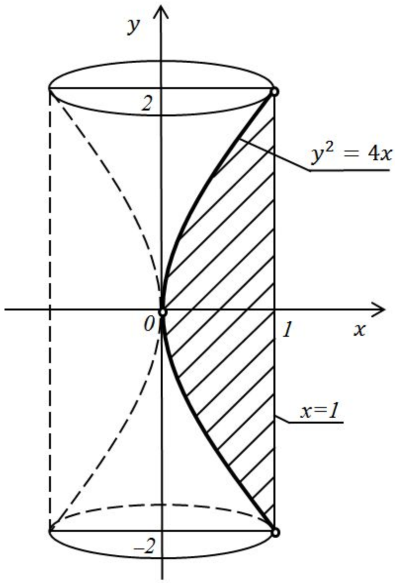

Рис. 6.18

Используем формулу (6.16) и тот факт, что $V = V_1 - V_2$, где $V_1 = \pi\int\limits_{-2}^{2} 1\mathrm{d}y = \pi y\Big|_{-2}^{2} = 4\pi$ (куб. ед.), $x = \frac{1}{4}y^2$, тогда

$$V_2 = \pi\int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{1}{4}y^2\right)^2 \mathrm{d}y = \frac{\pi}{16}\int\limits_{-2}^{2} y^4\mathrm{d}y = \frac{4\pi}{5} \text{ (куб. ед.)}.$$

Следовательно, $V = 4\pi - \frac{4\pi}{5} = \frac{16\pi}{5}$ (куб. ед.).

Ответ: $\frac{16\pi}{5}$. куб. ед.

Используя рисунок (6.13), нетрудно показать, что площадь поверхности тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вычисляется по формуле $S_{Ox} = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}l$, где $\mathrm{d}l = \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\mathrm{d}x$ – дифференциал дуги AB. Таким образом,

$$S_{Ox} = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\mathrm{d}x. \qquad (6.17)$$

Если вращение происходит вокруг оси Oy, то формула (6.17) принимает вид:

$$S_{Oy} = 2\pi\int\limits_c^d \varphi(y)\sqrt{1 + \left(\varphi'(x)\right)^2}\mathrm{d}y. \qquad (6.18)$$

Пример 6.21. Определить площадь поверхности параболоида, образованного вращением вокруг оси Ox дуги параболы $y^2 = 4x$ при $x \in [0; 4]$.

Решение. $y^2 = 4x \Rightarrow y = 2\sqrt{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Значит, $\sqrt{1+\left(y'\right)^2} =$ $= \sqrt{1+\dfrac{1}{x}} = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$. Используя формулу (6.17), получаем

$$S_{Oy} = 2\pi\int_c^d 2\sqrt{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\mathrm{d}x = 4\pi\int_0^4 \left(x+1\right)^{1/2}\mathrm{d}x = 4\pi\left.\frac{\left(x+1\right)^{1/2}}{3/2}\right|_0^4 =$$

$$= \frac{8\pi}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right) \text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: $\dfrac{8\pi}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)$ кв. ед.

6.5. Несобственные интегралы

Понятие определенного интеграла предполагает, что подынтегральная функция ограничена и отрезок интегрирования имеет конечную длину. Можно обобщить понятие определенного интеграла, устранив эти ограничения, то есть распространив понятие интеграла на случай бесконечных пределов интегрирования или неограниченной подынтегральной функции.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $\left[a, +\infty\right)$.

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_a^B f(x)\mathrm{d}x$, то его называют *несобственным интегралом первого рода* и обозначают $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)\mathrm{d}x. \qquad (6.19)$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *сходится*. Если предел в правой части (6.19) не существует или равен бесконечности, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *расходится.*

Аналогично вводятся несобственные интегралы вида:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{b} f(x)\mathrm{d}x, \tag{6.20}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{C} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{C}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \tag{6.21}$$

где C – произвольное число.

Интеграл (6.21) слева сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла справа.

Геометрически сходящийся интеграл (6.20) означает, что фигура, ограниченная кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $y = 0$, бесконечно вытянутая вдоль оси Ox, имеет конечную площадь S (рис. 6.19).

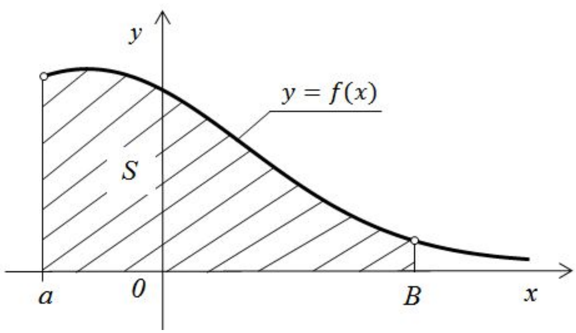

Рис. 6.19

Аналогично сходящиеся интегралы (6.19) и (6.20) определяют конечную площадь фигур, изображенных на рис. 6.20 и рис. 6.21 соответственно.

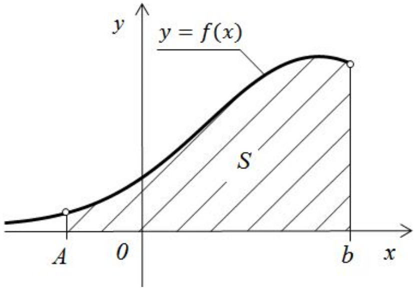

Рис. 6.20

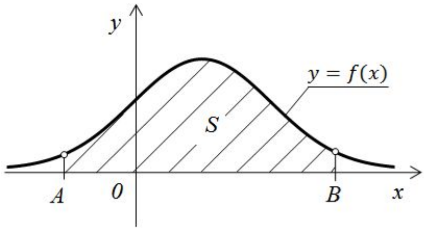

Рис. 6.21

Пример 6.22. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$.

Решение.

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \lim_{B\to\infty} \int\limits_1^{B} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \lim_{B\to\infty} -\frac{1}{2x^2}\Bigg|_1^B = \left(\lim_{B\to\infty}\left(\frac{1}{2\cdot\infty}\right) - \frac{1}{2}\right) = -\left(0-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} < \infty$$

$\Rightarrow$ интеграл сходится.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x=b$ (рис. 6.22).

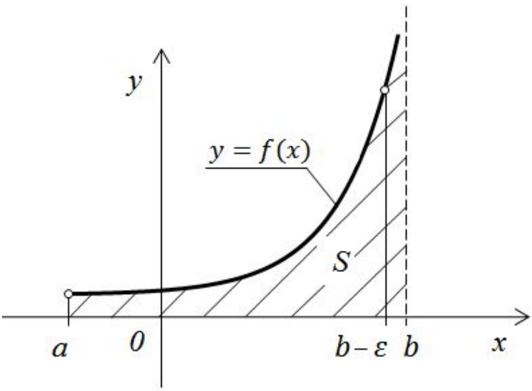

Рис. 6.22

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$, то его называют *несобственным интегралом второго рода* и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Таким образом, по определению

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x. \qquad (6.22)$$

Если предел в правой части (6.22) существует и конечен, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *сходится*. Если же указанный предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *расходится*.

Аналогично определяется несобственный интеграл, если:

1) $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$, то полагают (рис. 6.23).

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x; \qquad (6.23)$$

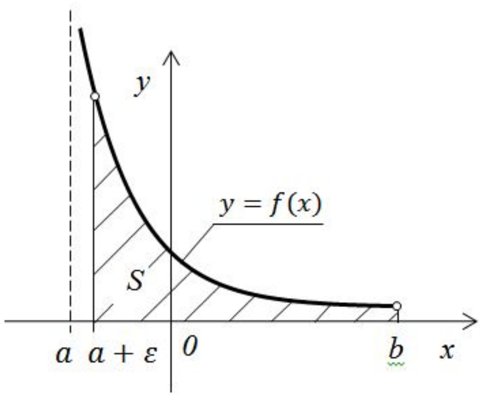

Рис. 6.23

2) $f(x)$ терпит разрыв во внутренней точке $x = c$, $a < c < b$, то (рис. 6.24)

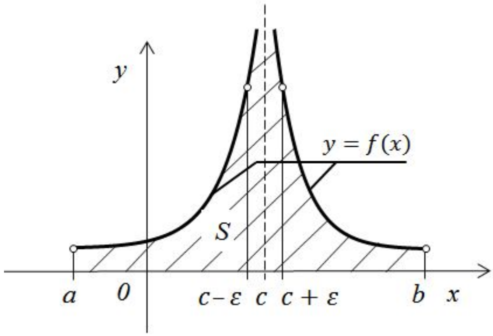

Рис. 6.24

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad (6.24)$$

Интеграл слева в (6.24) называют *сходящимся*, если оба интеграла, стоящих справа, сходятся.

С геометрической точки зрения сходящийся несобственный интеграл второго рода означает, что фигура, ограниченная кривой $f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$. бесконечно вытянута в направлении оси Oy.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: интеграл сходится.

7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Определение. *Дифференциальным уравнением* первого порядка называется уравнение вида

$$F(x,\ y,\ y') = 0, \tag{7.1}$$

где x – независимая переменная;

$y(x)$ – неизвестная функция;

$y'(x)$ – производная.

Если уравнение (7.1) можно записать в виде

$$y'(x) = f(x, y), \tag{7.2}$$

то оно называется уравнением, *разрешенным относительно производной*.

Если в уравнении (7.2) положить $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, то его можно привести к уравнению, записанному в дифференциальной форме $\mathrm{d}y = f(x,\ y)\mathrm{d}x$ или к более общему виду:

$$M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{7.3}$$

Решением (или интегралом) дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y = y(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в верное равенство.

Задача Коши для дифференциальных уравнений (7.2) и (7.3) ставится следующим образом: найти решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, где x_0, y_0 – заданные числа.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция

$$y = \varphi(x, C), \tag{7.4}$$

содержащая произвольную постоянную C и удовлетворяющая следующим условиям:

а) $y = \varphi(x, C)$ является решением уравнения;

б) для любого допустимого начального условия $y(x_0) = y_0$ найдется такое значение постоянной $C = C_0$, что $y = \varphi(x, C_0)$ является решением уравнения (7.2) или (7.3).

Общее решение дифференциального уравнения, записанное в виде

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{7.5}$$

называется *общим интегралом* этого уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C_0)$, полученная из общего решения (7.4) при конкретном значении $C = C_0$.

Частным интегралом $\Phi(x, y, C_0) = 0$ называется функция, полученная из общего интеграла (7.5) при конкретном значении $C = C_0$.

Теорема (о существовании и единственности решения задачи Коши). Если в дифференциальном уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f_y'(x, y)$ непрерывны в некоторой области *D*, содержащей точку (x_0, y_0), то существует единственное решение $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Некоторые дифференциальные уравнения могут иметь такие решения, которые не получаются из общего ни при каких значениях произвольной постоянной. Эти решения называются *особыми*.

7.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Уравнение вида

$$M(x)\,\mathrm{d}x + N(y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{7.6}$$

называется *уравнением с разделенными переменными*. Отличительной чертой такого уравнения является то, что одно слагаемое зависит только от переменной *x*, а второе – от переменной *y*.

Общим интегралом этого уравнения является:

$$\int M(x)\,\mathrm{d}x + \int N(y)\,\mathrm{d}y = C,$$

где C – произвольная постоянная.

Пример 7.1. Решить уравнение $x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{y}\mathrm{d}y = 0.$

Решение. Это уравнение вида (7.6), где $M(x) = x$, $N(y) = \frac{1}{y}$.

Общий интеграл имеет вид:

$$\int x\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = C \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \ln|y| = C.$$

Ответ: $\frac{x^2}{2} + \ln|y| = C.$

Определение. Уравнения вида

$$M_1(x)\cdot N_1(y)\,\mathrm{d}x + M_2(x)\cdot N_2(y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{7.7}$$

или вида

$$y' = f_1(x)\cdot f_2(y) \tag{7.8}$$

называются *дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными*. Особенность этих уравнений состоит в том, что, например, в уравнении (7.7) при $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$ стоят произведения двух функций, одна из которых зависит только от переменной x, а вторая только от переменной y. Аналогично в уравнении (7.8) справа стоит произведение функции, зависящей только от переменной x на функцию, зависящую только от переменной y. Уравнение с разделяющимися переменными (7.7) сводится к уравнению с разделенными переменными (7.6) путем деления уравнения на $N_1(y)\cdot M_2(x) \neq 0$:

$$\frac{M_1(x)\cdot N_1(y)}{N_1(y)\cdot M_2(x)}\mathrm{d}x + \frac{M_2(x)\cdot N_2(y)}{N_1(y)\cdot M_2(x)}\mathrm{d}y = 0.$$

В результате придем к уравнению с разделенными переменными

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\mathrm{d}x + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\mathrm{d}y = 0.$$

Общий интеграл полученного уравнения имеет вид:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}\mathrm{d}x + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\mathrm{d}y = C. \tag{7.9}$$

Отметим, что при проведении почленного деления уравнения (7.7) на $N_1(y) \cdot M_2(x) \neq 0$ могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует решить отдельно уравнения $N_1(y) = 0$ и $M_2(x) = 0$. Если найденные решения не входят в общий интеграл (7.9), то они являются особыми решениями уравнения (7.7).

Уравнение (7.8) сводится к уравнению (7.7) путем подстановки $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Пример 7.2. Решить уравнение $y' = \dfrac{y^2+1}{x^2+1}$.

Решение. Представим уравнение в виде: $y' = \dfrac{1}{x^2+1} \cdot (y^2+1)$.

Отсюда видно, что это уравнение вида (7.8), где $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $f_2(y) = y^2+1$. Выполним подстановку:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2+1}{x^2+1} \Rightarrow \mathrm{d}y = \frac{y^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x; \quad \frac{y^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $y^2+1 \neq 0$: $\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \dfrac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = 0.$

Получили уравнение с разделенными переменными. Интегрируя, получаем:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = C \Rightarrow \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = C.$$

Так как мы делим уравнение на функцию $y^2+1,$ которая не обращается в 0, то особых решений исходное уравнение не имеет.

Пример 7.3. Найти частное решение уравнения $(x^2+1)\mathrm{d}y - 2xy\,\mathrm{d}x = 0,\ y(0)=1.$

Решение. Разделим уравнение на $(x^2+1)\cdot y \neq 0.$ Получаем

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x = 0,\quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} - \int \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x = C \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} - \int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1} = C,$$

$$\ln|y| - \ln(x^2+1) = C.$$

Так как C – это любое действительное число, а $\ln|C|,$ где $C \neq 0$ также принимает значение любого действительного числа, то для упрощения преобразований вместо C будем писать $\ln|C|.$

$$\ln\left|\frac{y}{x^2+1}\right| = \ln|C| \Rightarrow \frac{y}{x^2+1} = C \Rightarrow y = C(x^2+1).$$

Найдем значение C, используя условие $y(0)=1$: $C=1 \Rightarrow y = x^2+1.$

Ответ: $y = x^2+1.$

7.2. Однородные дифференциальные уравнения

Функция $f(x,y)$ называется *однородной функцией n-го порядка*, если справедливо равенство

$$f(tx,\ ty) = t^n f(x,y), \tag{7.10}$$

где t – произвольный множитель.

Например, функция $f(x,y)=x^2+xy$ является однородной функцией 2-го порядка, так как $f(tx,\ ty)=(tx)^2+tx\cdot ty=t^2x^2+t^2\cdot xy=$ $=t^2(x^2+xy)=t^2f(x,y),$ а функция $f(x,y)=x^2+y$ не является однородной, так как невозможно выполнение равенства (7.5): $f(tx,\ ty)=(tx)^2+ty=t^2x^2+ty.$ В частности, функция $f(x,y)$ является *однородной нулевой степени*, если $f(tx,\ ty)=f(x,y).$

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y=0 \tag{7.11}$$

называется *однородным уравнением*, если функции $M(x,\ y)$ и $N(x,\ y)$ являются однородными функциями одного и того же порядка.

Дифференциальное уравнение

$$y'=f(x,y) \tag{7.12}$$

будет *однородным*, если функция $f(x,y)$ – однородная функция нулевого порядка.

Отметим, что константа является функцией нулевого порядка.

Однородное уравнение (7.12) может быть приведено к виду

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{7.13}$$

Однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными с помощью замены $y(x)=u\cdot x,$ $y'(x)=u'\cdot x+u$ или $\mathrm{d}y=x\mathrm{d}u+u\mathrm{d}x,$ где $u=u(x)$ новая неизвестная функция. Выполняя указанную подстановку в уравнении (7.13) получаем: $u'(x)\cdot x+u=\varphi(u)\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot x+u=\varphi(u)\Rightarrow x\cdot\mathrm{d}u=(\varphi(u)-u)\cdot\mathrm{d}x.$ Это уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 7.4. Решить уравнение $(x+y)\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$.

Решение. Это уравнение вида (7.11), где $M(x,y) = x+y$, $N(x,y) = -x$.

Проверим эти функции на однородность:

$$M(tx,ty) = tx + ty = t(x+y) = t\cdot M(x,y),\ n=1;$$

$$N(tx,\,ty) = -tx = t(-x) = t\cdot N(x,y),\ n=1.$$

Следовательно, уравнение однородное. Сделаем замену $y = u\cdot x$, $\mathrm{d}y = u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u$. Уравнение принимает вид:

$$(x+ux)\mathrm{d}x - x(u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u) = 0,\quad (x+ux)\mathrm{d}x - xu\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}u = 0,$$

$$(x+ux-ux)\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}u = 0,\quad x\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}u = 0.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{x\mathrm{d}x}{x^2} - \frac{x^2\mathrm{d}u}{x^2} = 0 \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}x}{x} - \mathrm{d}u = 0 \Rightarrow\ \int\frac{\mathrm{d}x}{x} - \int\mathrm{d}u = \ln|C|,$$

где C − это любое действительное число.

$\ln|x| - u = \ln|C| \ \Rightarrow\ u = \ln\left|\dfrac{x}{C}\right|$ и так как $u = \dfrac{y}{x}$, окончательно получаем: $\dfrac{y}{x} = \ln\left|\dfrac{x}{C}\right|, \Rightarrow \dfrac{x}{C} = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}, \Rightarrow x = C\cdot\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$ − общий интеграл. Так как мы делили на $x^2 \neq 0$, то потеряли решение $x = 0$. Это решение не может быть получено из общего интеграла ни при каком значении C, следовательно, $x = 0$ особое решение уравнения.

Ответ: общее решение уравнения: $x = C\cdot\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$.

Пример 7.5. Найти частное решение уравнения $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Определим тип уравнения. Для этого приведем его к виду $y' = f(x,y)$: $\frac{y}{x} = \ln\left|\frac{x}{C}\right|, \Rightarrow \frac{x}{C} = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}, \Rightarrow x = C\cdot \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$, где $f(x,y) = \frac{y}{x} + \mathrm{tg}\frac{y}{x}$.

Это уравнение вида (7.13). Сделаем замену: $y = u\cdot x \Rightarrow u = \frac{y}{x}$, $y' = u'x + y$ и подставим в уравнение $y' = \frac{y}{x} + \mathrm{tg}\frac{y}{x}$. Получаем:

$$u'x + u = u + \mathrm{tg}\,u \Rightarrow u'x = \mathrm{tg}\,u \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot x = \mathrm{tg}\,u, \Rightarrow \mathrm{d}u\cdot x = \mathrm{tg}\,u\,\mathrm{d}x.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{\mathrm{d}u\cdot x}{x\cdot \mathrm{tg}\,u} = \frac{\mathrm{tg}\,u}{x\cdot \mathrm{tg}\,u}\mathrm{d}x, \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{tg}\,u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}, \Rightarrow \int\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{tg}\,u} = \int\frac{\mathrm{d}x}{x} + \ln|C|.$$

Найдем $\int\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{tg}\,u} = \int\frac{\mathrm{d}u}{\frac{\sin u}{\cos u}} = \int\frac{\cos u}{\sin u} = \int\frac{\mathrm{d}\sin u}{\sin u} = \ln|\sin u|$. Окончательно:

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|C|;\ \ \ln|\sin u| = \ln|x\cdot C|, \Rightarrow \sin u = x\cdot C, \Rightarrow \sin\frac{y}{x} = x\cdot C.$$

Найдем C, используя начальное условие $y(1) = \frac{\pi}{2}$: $\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{1} = 1\cdot C \Rightarrow$ $C = 1$ и частное решение принимает вид: $\sin\frac{y}{x} = x$.

Ответ: частное решение уравнения: $\sin\frac{y}{x} = x$.

7.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если его можно записать в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{7.14}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – известные функции.

Искомая функция y и ее производная y' входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

Рассмотрим два метода решения линейных дифференциальных уравнений: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Бернулли.

Решение уравнения (7.14) ищем в виде $y = u(x) \cdot v(x)$, подставляя которое в исходное уравнение (7.14) получаем верное равенство: $u'\nu + u\nu' + P(x)u\nu = Q(x)$, или

$$u'\nu + u(\nu' + P(x)\nu) = Q(x). \tag{7.15}$$

Функцию $v(x)$ подбираем так, чтобы $\nu' + p(x)\nu = 0$ (берем частное решение, постоянная интегрирования равна 0). Тогда (7.15) запишется как $u'\nu = Q(x)$ и получаем систему для нахождения неизвестных функций $u(x)$ и $\nu(x)$:

$$\begin{cases} \nu' + P(x)\nu = 0, \\ u'\nu = Q(x). \end{cases}$$

Найдя $u(x)$ и $\nu(x)$, $u(x)$ и $\nu(x)$, получим искомое решение для дифференциального уравнения $y = u(x) \cdot \nu(x)$.

Пример 7.6. Найти решение уравнения $y' + 2xy = x\mathrm{e}^{-x^2}$.

Решение. Решение ищем в виде $y = u(x) \cdot \nu(x)$. Подставляя y, y' в данное уравнение, получим: $u'\nu + u\nu' + 2xu\nu = x\mathrm{e}^{-x^2}$, $u'\nu + u(\nu' + {}$ $+2x\nu) = x\mathrm{e}^{-x^2}$.

Потребовав, чтобы выражение в скобках было равно нулю, имеем:

$$\begin{cases} \nu' + 2x\nu = 0, \\ u'\nu = xe^{-x^2}, \end{cases} \quad C = 0. \qquad (*)$$

Решаем первое из уравнений системы. Находим частное решение: $\nu' = -2x\nu$, $\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}x} = -2x\nu$, $\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\nu} = -2x\mathrm{d}x$ − разделили переменные.

Проинтегрируем данное соотношение: $\int \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\nu} = -2\int x\,\mathrm{d}x$, $\ln\nu = -x^2$ $(C = 0)$. Тогда $\nu = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Подставим полученное $\nu = \mathrm{e}^{-x^2}$ во второе уравнение системы (*), получим: $u'\mathrm{e}^{-x^2} = x\mathrm{e}^{-x^2}$, $u' = x$, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x$, $\mathrm{d}u = x\mathrm{d}x$, $\int \mathrm{d}u = \int x\mathrm{d}x + C$, $u = \dfrac{x^2}{2} + C$.

Следовательно, искомое решение y будет иметь вид:

$$y = u(x)\cdot\nu(x) = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)\cdot\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Ответ: $y = \left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)\cdot\mathrm{e}^{-x^2}$ − общее решение уравнения.

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной).

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение без правой части: $y' + P(x)y = 0$, которое называют *линейным однородным уравнением*. Разделяя переменные, получаем $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x$. Интегрируя уравнение с разделенными переменными, получаем: $\int\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -\int P(x)\mathrm{d}x + \ln C$, или $\ln y - \ln C = -\int P(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \ln\left|\dfrac{y}{C}\right| = -\int P(x)\mathrm{d}x$, откуда получаем общее решение однородного дифференциального уравнения $y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$.

Метод вариации произвольной постоянной состоит в том, что постоянную C, полученную в решении, заменяем функцией $C(x)$ и ищем общее решение уравнения (7.14) в виде: $y = C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$. Для нахождения неизвестной функции $C(x)$ подставляем y и y' в исходное уравнение.

Пример 7.7. Решить уравнение $(1+y^2)\mathrm{d}y = (\mathrm{arctg}\, x - y)$ методом Лагранжа.

Решение. Разделим переменные: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{arctg}\, x - y}{1+x^2}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x^2+1}y = \frac{\mathrm{arctg}\, x}{1+x^2}$. Получили линейное уравнение.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение:

$$y' + \frac{1}{x^2+1}y = 0, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x^2+1}, \quad \int\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1},$$

$$\ln y = -\mathrm{arctg}\, x + \ln|C|, \quad \ln\frac{y}{C} = -\mathrm{arctg}\, x, \quad \frac{y}{C} = e^{-\mathrm{arctg}\, x}, \quad y = Ce^{-\mathrm{arctg}\, x}.$$

Метод вариации произвольной постоянной состоит в том, что постоянную C в полученном решении заменяем функцией $C(x)$ и решение исходного уравнения ищем в виде:

$$y = C(x)e^{-\mathrm{arctg}\, x} \tag{*}$$

Так как это решение, то при его подстановке в (7.14) получаем верное равенство. Для этого находим

$$y' = C(x)e^{-\mathrm{arctg}\, x} + C(x)e^{-\mathrm{arctg}\, x}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right).$$

Подставляем y и y' в (7.14):

$$C'(x)e^{-\operatorname{arctg} x} - \frac{C(x)}{1+x^2}e^{-\operatorname{arctg} x} + \frac{C(x)e^{-\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2},$$

$$C'(x)e^{-\operatorname{arctg} x} = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$C'(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}e^{\operatorname{arctg} x}, \qquad \int dC(x) = \int\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}e^{\operatorname{arctg} x}\right)\mathrm{d}x,$$

$$C(x) = \int \operatorname{arctg} x e^{\operatorname{arctg} x}\mathrm{d}\operatorname{arctg} x = \int \operatorname{arctg} x\mathrm{d}e^{\operatorname{arctg} x} =$$

$$= \int \operatorname{arctg} x\mathrm{d}e^{\operatorname{arctg} x} = \begin{vmatrix} \operatorname{arctg} x = u & \mathrm{d}u = \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ e^{\operatorname{arctg} x} = \nu & \end{vmatrix} =$$

$$= \operatorname{arctg} x \cdot e^{\operatorname{arctg} x} - \int e^{\operatorname{arctg} x}\mathrm{d}\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x \cdot e^{\operatorname{arctg} x} - e^{\operatorname{arctg} x} + \tilde{C},$$

то есть

$$C(x) = \operatorname{arctg} x \cdot e^{\operatorname{arctg} x} - e^{\operatorname{arctg} x} + \tilde{C}$$

или

$$C(x) = e^{\operatorname{arctg} x}(\operatorname{arctg} x - 1) + \tilde{C}.$$

Подставляя $C(x)$ в (*), получим решение (7.14)

$$y = e^{-\operatorname{arctg} x}\left[e^{-\operatorname{arctg} x}(\operatorname{arctg} x - 1) + \tilde{C}\right],$$

или

$$y = \operatorname{arctg} x - 1 + \tilde{C}e^{-\operatorname{arctg} x}.$$

Ответ: общее решение имеет вид $y = \operatorname{arctg} x - 1 + \tilde{C}e^{-\operatorname{arctg} x}$.

Пример 7.8. Решить задачу Коши или найти частное решение дифференциального уравнения $y' + 3\operatorname{tg} 3xy = \sin 6x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \frac{1}{3}$.

Решение. Пусть $y = u(x)\cdot \nu(x)$: $u'\nu + u\nu' 3\operatorname{tg} 3x \cdot u\nu = \sin 6x$,

$$u'\nu + u\left(\nu' + 3\operatorname{tg} 3x \cdot \nu\right) = \sin 6x, \quad \begin{cases} \nu' + 3\operatorname{tg} 3x \cdot \nu = 0 \quad (C = 0) \\ u'\nu = \sin 6x \end{cases} \qquad (*)$$

$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}x} = -3\operatorname{tg} 3x \cdot \nu$, затем разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu} = \frac{-3\sin 3x\,\mathrm{d}x}{\cos 3x} = \frac{-\sin 3x\,\mathrm{d}3x}{\cos 3x} = \frac{\mathrm{d}\cos 3x}{\cos 3x}, \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}\nu}{\nu} = \int \frac{\mathrm{d}\cos 3x}{\cos 3x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln \nu = \ln \cos 3x \Rightarrow \nu = \cos 3x.$$

Подставляем полученное $\nu = \cos 3x$ во второе уравнение системы (*). Получаем:

$$u' \cos 3x = 2\sin 3x \cos 3x, \quad u' = 2\sin 3x, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2\sin 3x,$$

$$\mathrm{d}u = 2\sin 3x dx = -\frac{2}{3}\mathrm{d}\cos 3x, \quad \int \mathrm{d}u = -\frac{2}{3}\int \mathrm{d}\cos 3x, \quad u = -\frac{2}{3}\cos 3x + C.$$

Тогда $y = u \cdot \nu$ и $y = \left(-\frac{2}{3}\cos 3x + C\right)\cos 3x$ − общее решение исходного уравнения.

Для поиска частного решения используем начальное условие $y(0) = \frac{1}{3}$. В нашем случае: $\frac{1}{3} = \left(-\frac{2}{3}\cos 0 + C\right)\cos 0$, так как $\cos 0 = 1$, то $-\frac{2}{3} + C = \frac{1}{3}$, $C = 1$.

Следовательно, искомое частное решение имеет вид:

$$y = \left(-\frac{2}{3}\cos 3x + 1\right)\cos 3x.$$

Ответ: частное решение уравнения $y = \left(-\frac{2}{3}\cos 3x + 1\right)\cos 3x.$

7.4. Уравнение Бернулли

Определение. Уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m, \tag{7.16}$$

где $m \neq 0,\ m \neq 1$ называется уравнением Бернулли.

Разделим обе части уравнения на y^m, получим:

$$y^{-m}y' + P(x)y^{1-m} = Q(x). \tag{7.17}$$

Введя замену $z = y^{1-m}$, получим

$$z' = (1-m)y^{1-m-1} \cdot y' = (1-m)y^{-m} \cdot y'.$$

Тогда $y^{-m} \cdot y' = \dfrac{z'}{1-m}$ и, преобразуя, получим, что (7.17) примет вид: $z' + (1-m)P(x)z = (1-m)Q(x).$

Таким образом, мы свели уравнение Бернулли к линейному дифференциальному уравнению, которое может решаться методом Бернулли или методом Лагранжа.

Пример 7.9. Найти частное решение дифференциального уравнения $(y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0,$ удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0.$

Решение. Перепишем это уравнение в виде:

$$(y^2 + 2y + x^2)\mathrm{d}y + 2x\mathrm{d}x = 0,$$

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}x^2=-y^2-2y-x^2;\;\; x=x(y),\;\; 2xx'+x^2=-y^2-2y.$$

Для определения типа уравнения введем замену $z=x^2$, $z'=2x\,x'$: $z'+z=-y^2-2y.$ Это линейное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $z=z(y).$ Ищем решение полученного уравнения методом Бернулли в виде $z=u(y)\cdot \nu(y),$ тогда

$$u'\nu+u\nu'+u\nu=-y^2-2y,\Rightarrow u'\nu+u\left(\nu'+\nu\right)=-y^2-2y\;\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\nu'+\nu=0,\\ u'\nu=-y^2-2y.\end{cases}$$

Интегрируя первое из уравнений системы, получим $\nu=\mathrm{e}^{-y}$, которое подставляем во второе уравнение системы: $u'\,\mathrm{e}^{-y}=-y^2-2y,$ $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=-(y^2+2y)\,\mathrm{e}^{y}.$ Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \mathrm{d}u=\int -(y^2+2y)\,\mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}y\Rightarrow u=-\int (y^2+2y)\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{y}=-\Big[(y^2+2y)\,\mathrm{e}^{y}-$$

$$\int \mathrm{e}^{y}\,(2y+2)\mathrm{d}y\Big]=-(y^2+2y)\,\mathrm{e}^{y}+\int (2y+2)\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{y}=-(y^2+2y)\,\mathrm{e}^{y}+$$

$$+2\int (y+1)\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{y}=-(y^2+2y)\,\mathrm{e}^{y}+(2y+2)\,\mathrm{e}^{y}-2\,\mathrm{e}^{y}+C=$$

$$=\mathrm{e}^{y}(-y^2-2y+2y+2-2)+C\Rightarrow u=-y^2\,\mathrm{e}^{y}+C;\Rightarrow$$

$u=-y^2\,\mathrm{e}^{y}+C;$ окончательно $z=\mathrm{e}^{-y}\left(-y^2\,\mathrm{e}^{y}+C\right)=-y^2+C\,\mathrm{e}^{-y}=x^2.$

Таким образом, получили общее решение исходного уравнения. Найдем частное решение, используя начальное условие $y(1)=0$:

$$x=\pm\sqrt{-y^2+\mathrm{e}^{-y}},\; 1=\pm\sqrt{0+C\,\mathrm{e}^{0}},\; 1=\sqrt{C}\Rightarrow C=1.$$

Тогда частное решение запишется в виде:

$$x^2=-y^2+\mathrm{e}^{y}\;\text{ или }\; x^2+y^2=\mathrm{e}^{-y}.$$

Ответ: частное решение уравнения Бернулли: $x^2+y^2=\mathrm{e}^{-y}$.

Пример 7.10. Найти решение уравнения Бернулли $y' + \frac{1}{x} y = -xy^2$.

Решение. Найдем решение методом Бернулли в виде $y = u \cdot \nu$. Тогда, подставив выражение для y в исходное уравнение, имеем:

$$u'\nu + u\nu' + \frac{1}{x} u\nu = -xu^2\nu^2, \quad u'\nu + u\left(\nu' + \frac{\nu}{x}\right) = -xu^2\nu^2,$$

$$\begin{cases} \nu' + \dfrac{\nu}{x} = 0, \\ u'\nu = -xu^2\nu^2. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}x} = -\frac{\nu}{x}, \ \frac{\mathrm{d}\nu}{\nu} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}, \ \ln\nu = -\ln x, \ \nu = \frac{1}{x}; \ u' = -xu^2\nu;$$

$$u' = -xu^2\frac{1}{x}, \ \frac{u'}{u^2} = -1, \quad \int u^{-2}\mathrm{d}u = \int -\mathrm{d}x, \quad -\frac{1}{u} = -x + C, \quad \frac{1}{u} = x - C,$$

что аналогично выражению $\frac{1}{u} = x + C$, $u = \frac{1}{x+C}$. Тогда $y = u \cdot \nu = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+C}\right)$.

Ответ: общее решение уравнения $y = \dfrac{1}{x(x+C)}$.

7.5. Уравнения в полных дифференциалах

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{7.18}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах,* если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y),$ то есть

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в односвязной области D.

Теорема. Для того, чтобы уравнение (7.18) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in D. \tag{7.19}$$

Для нахождения неизвестной функции $u(x, y) = C$ составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y), \end{cases}$$

решив ее получим общее решение уравнения в полных дифференциалах в виде: $u(x, y) = C,$ где C – произвольная постоянная.

Пример 7.11. $(x + y)\,\mathrm{d}x + (x + 2y)\,\mathrm{d}y = 0.$

Решение. Пусть $P = x + y,$ а $Q = x + 2y,$ Определим тип уравнения. Проверим условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(x + y) = 1, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x + 2y) = 1. \end{cases}$$

Соотношение (7.19) выполняется, следовательно, это уравнение в полных дифференциалах, то есть существует такая функция $u(x, y)$, что

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = x + y, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x + 2y. \end{cases} \qquad (*)$$

Из первого уравнения (*) найдем функцию u:

$$u = \int (x + y)\mathrm{d}x + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y).$$

Для нахождения $\varphi(y)$ воспользуемся вторым условием (*):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'(y) = x + 2y \Rightarrow \varphi'(y) = 2y,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y, \ \int \mathrm{d}\varphi = \int 2y\mathrm{d}y, \ \varphi = y^2 + C_1.$$

Следовательно, общее решение запишется в виде:

$$u = \frac{x^2}{2} + xy + y^2 + C_1 = C \ \text{ или } \ \frac{x^2}{2} + xy + y^2 = C.$$

Ответ: общее решение уравнения: $\dfrac{x^2}{2} + xy + y^2 = C.$

Пример 7.12. Найти решение дифференциального уравнения $(xy + \sin y)\,\mathrm{d}x + (\frac{1}{2}x^2 + x\cos y)\,\mathrm{d}y = 0,$ удовлетворяющее начальному условию $y(1) = \dfrac{\pi}{2}.$

Решение. Пусть $P = xy + \sin y,$ $Q = \frac{1}{2}x^2 + x\cos y.$ Проверим уравнение на условие существования полного дифференциала:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(xy + \sin y) = x + \cos y, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{2}x^2 + x\cos y\right) = x + \cos y, \end{cases}$$

то есть

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Перед нами уравнение в полных дифференциалах, Следовательно, существует такая функция $u(x, y),$ что

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = xy + \sin y, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2}x^2 + x\cos y. \end{cases}$$

Найдем $u(x, y)$ из второго соотношения:

$$u = \int\left(\frac{1}{2}x^2 + x\cos y\right)\mathrm{d}y + \varphi(x), \quad u = \frac{1}{2}x^2 y + x\sin y + \varphi(x).$$

Для поиска $\varphi(x)$ имеем: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = xy + \sin y = xy + \sin y + \varphi'(x),$ то есть $\varphi'(x) = 0,$ значит $\varphi = C$ и искомое решение $u(x, y)$ запишется как $u = \dfrac{1}{2}x^2 y + x\sin y + C.$ Следовательно, общее решение запишется в виде: $\dfrac{1}{2}x^2 y + x\sin y = C.$

Для поиска частного решения подставим значения $x=1,\ y=\dfrac{\pi}{2}$ в общее решение из которого получим $C=\dfrac{\pi}{4}+1$.

Следовательно, решение задачи Коши имеет вид:

$$\frac{1}{2}x^2y+x\sin y=\frac{\pi}{4}+1.$$

Ответ: частное решение имеет вид: $\dfrac{1}{2}x^2y+x\sin y=\dfrac{\pi}{4}+1$.

8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

8.1. Основные понятия

Определение. *Дифференциальным уравнением n-го* порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y и ее производные до n-го порядка включительно.

$$F\left(x,y,y',y'',\ \ldots,\ y^{(n)}\right)=0. \tag{8.1}$$

Если из уравнения можно выразить старшую производную, то такое дифференциальное уравнение называется *разрешенным относительно старшей производной*. Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',y'',\ \ldots,\ y^{(n-1)}\right). \tag{8.2}$$

Определение. Функция $y=\varphi(x)$ называется решением дифференциального уравнения (8.1) или (8.2), если при подстановке ее и ее производных оно обращается в верное равенство.

Пример 8.1. Показать, что функция $y = \sin 2x$ является решением ДУ $y'' + 5y = \sin 2x$.

Решение. Найдем y'': $y'' = -4\sin 2x$. Подставив в уравнение y, y'', получим верное равенство $-4\sin 2x + 5\sin 2x = \sin 2x$; $\sin 2x = \sin 2x$. Действительно функция $y = \sin 2x$ является решением.

Определение. *Порядком дифференциального уравнения* называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Задача Коши: найти решение дифференциального уравнения (8.1) или (8.2), удовлетворяющее *начальным условиям*:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ y''(x_0) = y''_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (8.3)$$

Определение. Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)$ называется *общим решением дифференциального уравнения* (8.1) или (8.2), если она удовлетворяет двум условиям:

– является решением дифференциального уравнения;

– какие бы ни были начальные условия (8.3), всегда можно найти произвольные постоянные $C_1 = C_1^*, C_2 = C_2^*, \quad C_3 = C_3^*, \ldots, C_n = C_n^*$ так, что функция $y = \varphi\left(x, C_1^*, C_2^*, C_3^*, \ldots, C_n^*\right)$ будет являться частным решением дифференциального уравнения.

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения *n*-го порядка).

Если в дифференциальном уравнении $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ функция f непрерывна вместе с частными производными $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \dfrac{\partial f}{\partial y''}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ в некоторой области D, содержащей точку $M\left(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$, то существует и притом единственное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (8.3).

8.2. Решение дифференциальных уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка

Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка – это дифференциальные уравнения, которые с помощью подходящих замен приводятся к дифференциальным уравнениям первого порядка.

1) Решение дифференциальных уравнений вида $\boldsymbol{y^{(n)} = f(x)}$.

Отличительной чертой данного типа дифференциальных уравнений является то, что старшая производная является функцией от аргумента x. Данное уравнение приводится к дифференциальному уравнению первого порядка с помощью замены $y^{(n-1)} = p(x)$, $y^{(n)} = p'(x)$. В принятых обозначениях исходное дифференциальное уравнение примет вид $p' = f(x)$. Это дифференциальное уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными. Решаем его и находим функцию $p(x)$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = f(x),\ \mathrm{d}p = f(x)\mathrm{d}x,\ \int \mathrm{d}p = \int f(x)\mathrm{d}x,\ p = \int f(x)\mathrm{d}x + C_1.$$

В результате этих действий порядок дифференциального уравнения понизился на единицу $y^{(n-1)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C_1$. Снова делаем замену $y^{(n-2)} = p(x)$, тогда $y^{(n-1)} = p'(x)$. Получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$p' = \int f(x)\mathrm{d}x + C_1, \quad p(x) = \int\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + C_1x + C_2,$$

$$\text{но } p(x) = y^{(n-2)}, \quad \text{тогда } y^{(n-2)} = \ = \int\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + C_1x + C_2.$$

Так делаем замены до тех пор, пока не получим решение $y(x)$.

Описанные выше действия равносильны n-кратному интегрированию функции $f(x)$, стоящей в правой части уравнения.

$$y(x)=\int\left(\int\left(\ldots\int f(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\ldots\right)\mathrm{d}x+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}. \quad (8.4)$$

Рассмотрим примеры решения дифференциальных уравнений данного вида.

Пример 8.2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''=x^2$.

Решение. Введем замену $p(x)=y'(x)$, тогда $y''=p'$, $p'=x^2$. Получили ДУ с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=x^2; \quad \mathrm{d}p=x^2\mathrm{d}x; \quad \int\mathrm{d}p=\int x^2\mathrm{d}x; \quad p=\frac{x^3}{3}+C_1.$$

Заменим p на y':

$$y'=\frac{x^3}{3}+C_1; \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^3}{3}+C_1; \quad \mathrm{d}y=\left(\frac{x^3}{3}+C_1\right)\mathrm{d}x;$$

$$\int\mathrm{d}y=\int\left(\frac{x^3}{3}+C_1\right)\mathrm{d}x; \quad y=\frac{x^4}{12}+C_1x+C_2.$$

Ответ: общее решение уравнения $y=\dfrac{x^4}{12}+C_1x+C_2$.

Пример 8.3. Найти решение дифференциального уравнения $y''=\cos^2 x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Решение. Интегрируем уравнение и находим y'.

$$y'=\int\cos^2 x\mathrm{d}x=\int\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)+C_1.$$

Интегрируем y' и находим y (общее решение ДУ).

$$y = \int\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + C_1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\cos 2x}{4}\right) + C_1 x + C_2$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям. Для этого в общее решение и производную общего решения подставим из начальных условий $x = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ и получим систему для нахождения C_1 и C_2.

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{2}\left(0 - \dfrac{\cos 0}{4}\right) + C_1 \cdot 0 + C_2, \\ 1 = C_1 \dfrac{1}{2}\left(0 + \dfrac{\sin 0}{2}\right) + C_1, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} C_2 = \dfrac{1}{8}, \\ C_1 = 1. \end{cases}$$

Подставив найденные значения C_1 и C_2 в общее решение, мы получим

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\cos 2x}{4}\right) + x + \frac{1}{8}.$$

Ответ: частное решение уравнения $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\cos 2x}{8} + x + \dfrac{1}{8}$.

2) Решение дифференциальных уравнений второго порядка вида $F(x, y', y'') = 0$.

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y', y'') = 0. \tag{8.5}$$

Отличительной чертой данного уравнения является то, что оно не содержит в явном виде неизвестную функцию $y(x)$.

Дифференциальное уравнение $F\left(x, y', y''\right) = 0$ приводится к дифференциальному уравнению первого порядка с помощью замены

$$y'\left(x\right) = p\left(x\right); \quad y'' = \left(y'\right)' = p'\left(x\right). \tag{8.6}$$

Подставив в исходное дифференциальное уравнение, мы получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $p\left(x\right)$. Решая его, мы найдем функцию $p\left(x\right)$, а по ней найдем и $y\left(x\right)$.

Аналогично решаются дифференциальные уравнения вида $F\left(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$, с помощью замены $y^{n-1} = p\left(x\right)$ приводится к дифференциальному уравнению первого порядка.

Пример 8.4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - \dfrac{2y'}{x} = 0$.

Решение. Сделаем замену $y' = p\left(x\right)$, тогда $y'' = p'$. В результате получаем дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными $p' - \dfrac{2p}{x} = 0$. Решаем его

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{2p}{x}; \quad \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{2\mathrm{d}x}{x}; \quad \int \frac{\mathrm{d}p}{p} = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x};$$

$$\ln\left|p\right| = 2\ln\left|x\right| + \ln C_1; \quad p = C_1 x^2.$$

Учитывая, что $p = y'$, имеем $y' = C_1 x^2$. Интегрируя его, получим общее решение $y = C_1 \dfrac{x^3}{3} + C_2$.

Ответ: общее решение уравнения $y = C_1 \dfrac{x^3}{3} + C_2$.

Пример 8.5. Найти решение дифференциального уравнения $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Решение. Сделаем замену $p(x) = y'$, тогда $y'' = p'$. В результате получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка $p' + p \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

Решаем линейное дифференциальное уравнение: $p = uv$, $p' = = u'v + uv'$, $u'v + uv' + uv \operatorname{tg} x = \sin 2x$, $u'v + u(v' + v \operatorname{tg} x) = \sin 2x$.

Функцию $v(x)$ найдем из условия, что выражение в скобках обращается в 0, то есть $v' + v \operatorname{tg} x = 0$. Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -v \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\operatorname{tg} x \mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}v}{v} =$$

$$= -\int \operatorname{tg} x dx \Rightarrow \ln|v| = \ln|\cos x| \Rightarrow v = \cos x.$$

Функцию $u(x)$ найдем из уравнения

$$u'v = \sin 2x; \quad u' \cos x = 2 \sin x \cos x;$$

$$u' = 2 \sin x; \quad u = \int 2 \sin x \mathrm{d}x = -2 \cos x + C_1;$$

$$p(x) = uv = \cos x (C_1 - 2\cos x) = C_1 \cos x - 2\cos^2 x.$$

Интегрируя $y' = p(x) = C_1 \cos x - 2\cos^2 x$, мы найдем общее решение

$$y = \int \left(C_1 \cos x - 2\cos^2 x\right) \mathrm{d}x = C_1 \sin x - \int (1 + \cos 2x) \mathrm{d}x =$$

$$= C_1 \sin x - x - \frac{\sin 2x}{2} + C_2.$$

Найдем $y' = C_1 \cos x - 1 - \cos 2x.$ Используя начальные условия, получаем систему алгебраических уравнений для нахождения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} y(0) = 1 = C_1 0 - 0 - 0 + C_2, \\ y'(0) = 2 = C_1 \cdot 100 - 1 - \cos 0 = C_1 - 1 - 1, \end{cases} \begin{cases} C_2 = 1, & C_2 = 1, \\ 2 = C_1 - 2, & C_1 = 4. \end{cases}$$

Решение задачи Коши имеет вид: $y = 4\sin x - x - \dfrac{\sin 2x}{2} + 1.$

Ответ: частное решение уравнения $y = 4\sin x - x - \dfrac{\sin 2x}{2} + 1.$

3) Решение дифференциальных уравнений вида $\boldsymbol{F(y, y', y'') = 0}$.

Рассмотрим дифференциальные уравнения вида

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{8.7}$$

Отличительной чертой данных дифференциальных уравнений является отсутствие в явной записи независимой переменной x. Уравнения данного вида приводятся к дифференциальному уравнению первого порядка с помощью замены

$$y' = p(y); \quad y'' = \big(p(y)\big)' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}. \tag{8.8}$$

Подставив в исходное дифференциальное уравнение, мы получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $p(y)$.

$$F\left(y,\ p,\ p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right) = 0.$$

Решая полученное дифференциальное уравнение, мы найдем функцию $p(y)$, а по ней найдем $y(x)$.

Аналогично решаются дифференциальные уравнения вида $F\left(y, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0.$ Они приводятся к дифференциальным уравнениям первого порядка с помощью замены

$$y^{(n-1)} = p(y); \quad y^{(n)} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}. \tag{8.9}$$

Рассмотрим примеры решения дифференциальных уравнений данного вида.

Пример 8.6. Найти общее решение дифференциального уравнения $yy'' = (y')^2$.

Решение. Исходное дифференциальное уравнение с помощью замены

$$y' = p(y); \quad y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

примет вид

$$py\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^2; \quad p\left(y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p\right) = 0; \quad p = 0; \quad y' = 0; \quad y = C_1; \quad y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}; \;\; \ln|p| = \ln|y| + \ln C_1; \;\; p = C_1 y, \;\; y' = C_1 y; \;\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1 y;$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = C_1\mathrm{d}x; \;\; \ln|y| = C_1 x + \ln C_2; \;\; \ln\frac{|y|}{C_2} = C_1 x; \quad \frac{y}{C_2} = \mathrm{e}^{C_1 x}; \quad y = C_2\,\mathrm{e}^{C_1 x}.$$

Ответ: общее решение уравнения $y = C_2\,\mathrm{e}^{C_1 x}$.

Пример 8.7. Найти решение дифференциального уравнения $e^y\left(y''+(y')^2\right)=2$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=0$, $y'(0)=2$.

Решение. Сделаем замену $y'=p(y)$; $y''=p\dfrac{dp}{dy}$, тогда уравнение примет вид: $e^y\left(p\dfrac{dp}{dy}+p^2\right)=2$; $p\dfrac{dp}{dy}+p^2=2e^{-y}$; $\dfrac{dp}{dy}+p=\dfrac{2e^{-y}}{p}$.

Мы получили уравнение Бернулли. Решаем его и находим $p(y)$:

$$p=uv,\quad p'=u'v+uv';\quad u'v+uv'+uv=\frac{2e^{-y}}{uv};$$

$$u'v+u(v'+v)=\frac{2e^{-y}}{uv}.$$

Функцию $v(y)$ найдем из условия $v'+v=0$. Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dy}=-v;\quad \frac{dv}{v}=-dy;\quad \int\frac{dv}{v}=-\int dy;\quad \ln|v|=-y;\quad v=e^{-y}.$$

Подставив в уравнение, мы получим

$$u'e^{-y}=\frac{2e^{-y}}{ue^{-y}};\ u'e^{-y}=\frac{2}{u};\ u\,du=2e^y dy;\ \int u\,du=2\int e^y dy;$$

$$\frac{u^2}{2}=2e^y+C_1;\ u^2=4e^y+2C_1;\ u=\pm\sqrt{4e^y+2C_1}.$$

Решение $p(y)=uv=\pm e^{-y}\sqrt{4e^y+2C_1}$. Найдем произвольную постоянную C_1 из условия $y'(0)=2$. Получим уравнение $2=\pm\sqrt{4+2C_1}$; $4=4+2C_1$; $C_1=0$. $y'=\pm e^{-y}\cdot 2e^{y/2}=\pm 2e^{-y/2}$.

Решаем это уравнение и находим неизвестную функцию $y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \pm 2\,e^{-y/2}; \quad e^{y/2}\,dy = \pm 2dx;$$

$$\int e^{y/2}\,dy = \pm 2\int dx; \quad 2\,e^{y/2} = \pm 2x + C_2.$$

Определим C_2 из условия $y(0) = 0.$ $2 = \pm 2 \cdot 0 + C_2;$ $C_2 = 2.$
Подставив найденное $C_2,$ мы получим решение задачи Коши

$$2\,e^{y/2} = \pm 2x + 2_2; \quad e^{y/2} = 1 \pm x; \quad y = 2\ln(1 \pm x).$$

Ответ: частное решение уравнения $y = 2\ln(1 \pm x)$.

8.3. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + a_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x) = f(x)$$

называется *линейным дифференциальным уравнением n-го порядка*, где $a_0(x) \neq 0,$ $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ – некоторые заданные функции, которые называются *коэффициентами*. Если в уравнении $f(x) \equiv 0,$ то такое дифференциальное уравнение называется *линейным однородным*. Если в уравнении все коэффициенты являются действительными числами, то такое дифференциальное уравнение называется *линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами*.

Будем рассматривать линейные однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами вида

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a, b, c \in R. \qquad (8.10)$$

Определение. Две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно независимыми*, если их отношение не равно постоянному числу

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{const}. \tag{8.11}$$

Теорема (о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения). Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два линейно независимых решения (8.10), то общее решение этого уравнения будет равно их линейной комбинации, $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Отметим, что общее решение линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка равно линейной комбинации *n* линейно независимых решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, то есть

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Будем искать решение уравнения (8.10) методом Эйлера в виде $y = \mathrm{e}^{kx}$, тогда $y' = k\,\mathrm{e}^{kx}$; $y'' = k^2\,\mathrm{e}^{kx}$. Подставив y, y', y'' в уравнение (8.10), будем иметь:

$$ak^2\,\mathrm{e}^{kx} + bk\,\mathrm{e}^{kx} + c\,\mathrm{e}^{kx} = 0,\ \mathrm{e}^{kx}\left(ak^2 + bk + c\right) = 0,$$

так как $\mathrm{e}^{kx} \neq 0$, то

$$ak^2 + bk + c = 0. \tag{8.12}$$

Уравнение (8.12) называется *характеристическим уравнением* для дифференциального уравнения (8.10).

При решении характеристического уравнения возможны следующие случаи:

1) Корни характеристического уравнения (8.12) – действительные и различные $k_1 \neq k_2,\ k_1, k_2 \in R$. В этом случае $y_1(x) = \mathrm{e}^{k_1 x}$,

$y_2(x) = \mathrm{e}^{k_2 x}$ являются линейно независимыми решениями и общее решение имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \mathrm{e}^{k_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{k_2 x}. \tag{8.13}$$

Пример 8.8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни

$$k^2 + 3k - 4 = 0; \quad D = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25;$$

$$k_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \left[\begin{matrix} 1 \\ -4 \end{matrix}\right.; \Rightarrow \quad y_1 = \mathrm{e}^{x}; \quad y_2 = \mathrm{e}^{-4x};$$

$$\text{тогда } y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{-4x}.$$

Ответ: общее решение уравнения $y = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{-4x}$.

Пример 8.9. Найти решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$; $y'(0) = 3$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 - 3k = 0; \; k_1 = 0; \; k_2 = 3; \; y_1 = \mathrm{e}^{0x} = 1; \; y_2 = \mathrm{e}^{3x} \Rightarrow$$

$$\text{общее решение имеет вид } y = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{3x}.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 найдем используя начальные условия

$$\left.\begin{aligned} & y(0) = 1; \Rightarrow 1 = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{0} = C_1 + C_2, \\ & y'(0) = 3 \Rightarrow 3 = 3C_2 \mathrm{e}^{0} = 3C_2. \end{aligned}\right\}$$

Решая систему, находим C_1 и C_2. Тогда решение задачи Коши имеет вид $y = \mathrm{e}^{3x}$.

Ответ: частное решение уравнения $y = \mathrm{e}^{3x}$.

2) Корни характеристического уравнения (8.12) – действительные кратные: $k_1 = k_2 = k$. В этом случае линейно независимыми являются решения $y_1 = \mathrm{e}^{kx}$, $y_2 = x\mathrm{e}^{kx}$ и общее решение имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = \mathrm{e}^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right). \tag{8.14}$$

Пример 8.10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$ и найдем его корни $\left(k-3\right)^2 = 0, k_1 = k_2 = 3$. Частные линейно независимые решения $y_1 = \mathrm{e}^{3x}$, $y_2 = x\mathrm{e}^{3x}$. Общее решение имеет вид $y = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2 x\mathrm{e}^{3x}$.

Ответ: общее решение уравнения $y = \mathrm{e}^{3x}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

Пример 8.11. Найти решение дифференциального уравнения $4y'' - 4y' + y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y\left(0\right) = 0$; $y'\left(0\right) = 1$.

Решение. Решаем характеристическое уравнение

$$4k^2 - 4k + 1 = 0;\ \left(2k-1\right)^2 = 0;\ k_1 = k_2 = \frac{1}{2};$$

следовательно, частные решения имеют вид $y_1 = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$; $y_2 = x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$. Общее решение имеет вид $y = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

Определим произвольные постоянные C_1 и C_2 используя начальные условия. Так как $y' = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x/2}\left(C_1 + C_2 x\right) + C_2\mathrm{e}^{x/2}$, то $y\left(0\right) = = 0 = C_1$; $y'\left(0\right) = 1 = \frac{1}{2}C_1 + C_2; \Rightarrow C_1 = 0;\quad C_2 = 1.$

Решение задачи Коши имеет вид $y = x\mathrm{e}^{x/2}$.

Ответ: частное решение уравнения $y = x\mathrm{e}^{x/2}$.

3) Корни характеристического уравнения (8.12) – комплексные $k_{1,2} = a \pm bi$. Линейно независимые решения исходного уравнения представляются в виде: $y_1 = \mathrm{e}^{ax}\cos bx$, $y_2 = \mathrm{e}^{ax}\sin bx$ и общее решение имеет вид

$$y = \mathrm{e}^{ax}\left(C_1\cos bx + C_2\sin bx\right). \qquad (8.15)$$

Пример 8.12. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 10y = 0$.

Решение. Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 - 6k + 10 = 0;\ \ D = 36 - 40 = -4 < 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i;\ \ a = 3;\ \ b = 1.$$

Линейно независимые решения: $y_1 = \mathrm{e}^{3x}\cos x$, $y_2 = \mathrm{e}^{3x}\sin x$. Общее решение имеет вид $y = e^{3x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right)$.

Ответ: общее решение уравнения $y = \mathrm{e}^{3x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right)$.

Пример 8.13. Найти решение дифференциального уравнения $y'' + 4y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$; $y'(0) = 4$.

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$k^2 + 4 = 0; k^2 = -4 = 0; k_{1,2} = \pm 2i; a = 0; b = 2; y_1 = \cos 2x; y_2 = \sin 2x; \Rightarrow$$

общее решение уравнения имеет вид: $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.

Определим произвольные постоянные C_1 и C_2, используя начальные условия. Так как $y' = -2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x$, то $y(0) = 1 \Rightarrow 1 = C_1 \Rightarrow\ C_1 = 1;\ \ y'(0) = 4 \Rightarrow 4 = 2C_2 \Rightarrow C_2 = 2$.

Решение задачи Коши имеет вид $y = \cos 2x + 2\sin 2x$.

Ответ: частное решение уравнения $y = \cos 2x + 2\sin 2x$.

8.4. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Определение. *Линейным неоднородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами и специальной правой частью* называется уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \tag{8.16}$$

где $f(x) \neq 0,\ a_i \in R.$

Теорема (о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения)

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (8.16) имеет вид:

$$y = \overline{y} + y^*, \tag{8.17}$$

где $\overline{y} = \overline{y}(x)$ – общее решение однородного уравнения, соответствующее исходному уравнению (при $f(x) = 0$);

$y^* = y^*(x)$ – частное решение исходного неоднородного уравнения.

Выражение для y^* записывается в общем виде (с буквенными коэффициентами) в зависимости от корней k_i характеристического уравнения и функции $f(x)$.

Для определения неизвестных коэффициентов y^* поступаем следующим образом:

1) в исходное уравнение подставляем y^* и ее производные;

2) составляем систему уравнений путем приравнивания коэффициентов при одинаковых функциях слева и справа от знака равно;

3) решаем полученную систему и определяем числовые значения неизвестных коэффициентов;

4) подставляем найденные числовые значения коэффициентов в выражение y^* и записываем общее решение исходного неоднородного уравнения.

Рассмотрим примеры выбора функции y^* и определения общего решения уравнения.

1) Правая часть $f(x) = P_n(x)$ – многочлен порядка n. Частное решение в этом случае ищется в виде

$$y^* = Q_n(x) \cdot x^m, \tag{8.18}$$

где $Q_n(x)$ – многочлен n-ной степени с неопределенными коэффициентами;

m – количество корней характеристического уравнения, равных нулю.

Пример 8.14. Найти общее решение уравнения $y'' - 7y' + 6y =$ $= 2x^2 + 3x + 1.$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид: $k^2 - 7k +$ $+6 = 0.$ Откуда $k_1 = 6,$ $k_2 = 1.$ Общее решение однородного уравнения $y'' - 7y' + 6y = 0$ будет иметь вид: $\overline{y} = C_1 e^{6x} + C_2\, \mathrm{e}^x$.

Выбираем выражение для y^*. Правая часть исходного неоднородного уравнения есть многочлен второго порядка и все $k_i \neq 0,$ $(m = 0).$ Следовательно, $y^* = Ax^2 + Bx + C,$ то есть тоже многочлен 2-го порядка, что и $f(x).$ Находим все нужные производные от y^*: $(y^*)' = 2Ax + B,$ $(y^*)'' = 2A.$

Подставляем y^* и ее производные в исходное уравнение:

$$2A - 7(2Ax + B) + 6\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 2x^2 + 3x + 1.$$

Преобразуем:

$$2A - 14Ax - 7B + 6Ax^2 + 6Bx + 6C = 2x^2 + 3x + 1.$$

или

$$6Ax^2 + x(6B - 14A) + (2A - 7B + 6C) = 2x^2 + 3x + 1.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\left.\begin{aligned} x^0 &: 2A-7B+6C=1 \\ x^1 &: 6B-14A=3 \\ x^2 &: 6A=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{gathered} C=\frac{1-2A+7B}{6}=\frac{1-\frac{2}{3}+\frac{161}{18}}{6}=\frac{167}{108}; \\ 6B=3+\frac{14}{3}=\frac{23}{3};\quad B=\frac{23}{18}; \\ A=\frac{1}{3}. \end{gathered}$$

Следовательно, $y^*=\frac{1}{3}x^2+\frac{23}{18}x+\frac{167}{108}.$

Общее решение исходного неоднородного уравнения:

$$y=\overline{y}+y^*=C_1\,\mathrm{e}^{6x}+C_2\,\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{3}x^2+\frac{23}{18}x+\frac{167}{108}.$$

Ответ: общее решение уравнения: $y=C_1\,\mathrm{e}^{6x}+C_2\,\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{3}x^2+$ $+\frac{23}{18}x+\frac{167}{108}.$

Пример 8.15. Найти общее решение уравнения $y''-7y=3x-4.$

Решение. Характеристическое уравнение однородного уравнения будет иметь вид: $k^2-7k=0.$ Откуда $k_1=0,$ $k_2=7.$

Общее решение однородного уравнения: $\overline{y}=C_1\,\mathrm{e}^{0x}+C_2\,\mathrm{e}^{7x}=$ $=C_1+C_2\,\mathrm{e}^{7x}.$

Частное решение исходного неоднородного уравнения $y^*=(Ax+B)\cdot x,$ $(m=1)$ или $y^*=Ax^2+Bx.$ Тогда $(y^*)'=2Ax+B,$ $(y^*)''=2A.$ Подставляем в исходное уравнение: $2A-7(2Ax+B)=$ $=3x-4$ или $2A-14Ax-7B=3x-4.$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\left.\begin{array}{l} x^0: 2A-7B=-4 \\ x^1: -14A=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} B=\dfrac{2A+4}{7}=\dfrac{-\dfrac{6}{14}+4}{7}=\dfrac{25}{49}; \\ A=-\dfrac{3}{14}. \end{array}$$

Следовательно, $y^*=-\dfrac{3}{14}x^2+\dfrac{25}{49}$.

Общее решение исходного уравнения:

$$y=\overline{y}+y^*=C_1+C_2\,\mathrm{e}^{7x}-\frac{3}{14}x^2+\frac{25}{49}.$$

Ответ: общее решение уравнения $y=C_1+C_2\,\mathrm{e}^{7x}-\dfrac{3}{14}x^2+\dfrac{25}{49}$.

Пример 8.16. Решить задачу Коши для уравнения $y'''-2y''=$ $=x^2$, если $y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=0$.

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$k^3-2k^2=0,\ k^2(k-2)=0,\ k_{1,2}=0,\ k_3=2,$$

$$\overline{y}=C_1\,\mathrm{e}^{0x}+C_2\cdot x\cdot \mathrm{e}^{0x}+C_3e^{2x}=C_1+C_2x+C_3\,\mathrm{e}^{2x},$$

$$y^*=\left(Ax^2+Bx+C\right)\cdot x^2,\ (m=2).$$

Или $y^*=Ax^4+Bx^3+Cx^2$. Находим производные $(y^*)'=4Ax^3+$ $+3Bx^2+2Cx$, $(y^*)''=12Ax^2+6Bx+2C$, $(y^*)'''\,24Ax+6B$ и подставляем их в исходное уравнение. Получим

$$24Ax+6B-24Ax^2-12Bx-4C=x^2.$$

Группируем: $-24Ax^2+\left(24A-12B\right)\cdot x+\left(6B-4C\right)=x^2$ и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\left.\begin{aligned} &x^0: 6B-4C=0\\ &x^1: 24A-12B=0\\ &x^2: -24A=1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \quad \begin{aligned} &C=\frac{6}{4}B=\frac{3}{2}B=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{12}\right)=-\frac{3}{24}=-\frac{1}{8}\\ &12B=24A,\quad B=2A=-\frac{2}{24}=-\frac{1}{12}\\ &A=-\frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Получили, что $y^*=-\dfrac{1}{24}x^4-\dfrac{1}{12}x^3-\dfrac{1}{8}x^2$.

Общее решение исходного неоднородного уравнения:

$$y=\overline{y}+y^*=C_1+C_2x+C_3\,\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{8}x^2.$$

Из начальных условий получаем:

$$0=C_1+C_3\Rightarrow C_1=-C_3.$$

$$y'=C_2+2C_3\,\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x \text{ или } 1=C_2+2C_3\Rightarrow C_2=1-2C_3.$$

$$y''=4C_3\,\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4} \text{ или } 0=4C_3-\frac{1}{4},$$

следовательно,

$$C_3=\frac{1}{16},\ C_1=-\frac{1}{16},\ C_2=\frac{7}{8}.$$

Частное решение уравнения имеет вид:

$$y=-\frac{1}{16}+\frac{7}{8}x+\frac{1}{16}\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{8}x^2.$$

Ответ: частное решение уравнения $y=-\dfrac{1}{16}+\dfrac{7}{8}x+\dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{24}x^4-$ $-\dfrac{1}{12}x^3-\dfrac{1}{8}x^2$.

2) Правая часть имеет вид $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot P_n(x)$.

В этом случае

$$y^* = \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot Q_n(x) \cdot x^m, \qquad (8.19)$$

где $Q_n(x)$ – многочлен n-ной степени с неопределенными коэффициентами;

m – количество корней характеристического уравнения, равных α.

Пример 8.17. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = = \mathrm{e}^{5x} \cdot x^2$.

Решение. Характеристическое уравнение: $k^2 - 2k + 1 = 0$. Корни $k_{1,2} = 1$. Общее решение однородного уравнения: $\overline{y} = C_1 e^x + C_2 \cdot x \cdot \mathrm{e}^x$.

Выбираем выражение для y^*: $y^* = \mathrm{e}^{5x} \cdot \left(Ax^2 + Bx + C\right)$. Производные y^* равны:

$$(y^*)' = \mathrm{e}^{5x} \cdot 5\left(Ax^2 + Bx + C\right) + \mathrm{e}^{5x}\left(2Ax + B\right) =$$

$$= \mathrm{e}^{5x}\left(5Ax^2 + 5Bx + 5C + 2Ax + B\right),$$

$$(y^*)'' = \mathrm{e}^{5x} \cdot 5\left(5Ax^2 + 5Bx + 5C + 2Ax + B\right) + \mathrm{e}^{5x}\left(10Ax + 5B + 2A\right) =$$

$$= \mathrm{e}^{5x}\left(25Ax^2 + 25Bx + 25C + 10Ax + 5B + 10Ax + 5B + 2A\right) =$$

$$= \mathrm{e}^{5x}\left(25Ax^2 + 25Bx + 25C + 20Ax + 2A + 10B\right).$$

Подставляем y^* и ее производные в исходное уравнение:

$$\mathrm{e}^{5x}\left(25Ax^2 + 25Bx + 25C + 20Ax + 2A + 10B\right) -$$

$$-2\,\mathrm{e}^{5x}\left(5Ax^2 + 5Bx + 5C + 2Ax + B\right) + \mathrm{e}^{5x} \cdot \left(Ax^2 + Bx + C\right) = \mathrm{e}^{5x} \cdot x^2.$$

Сокращаем на e^{5x}:

$$25Ax^2+25Bx+25C+20Ax+2A+10B-$$

$$25Ax^2+25Bx+25C+20Ax+2A+10B-10Ax^2-10Bx-10C-4Ax-$$

$$-10A^2-10Bx-10C-4Ax-2B+Ax^2+Bx+C=x^2,$$

$$\text{или } 16Ax^2+16Bx+16C+16Ax+2A+8B=x^2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\left.\begin{array}{l} x^0: 16C+2A+8B=0 \\ x^1: 16B+16A=0 \\ x^2: 16A=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} C=\dfrac{-A-4B}{8}=\dfrac{-\dfrac{1}{16}+\dfrac{4}{16}}{8}=\dfrac{3}{128}, \\ B=-A=-\dfrac{1}{16}, \\ A=\dfrac{1}{16}. \end{array}$$

Следовательно, $y^*=\mathrm{e}^{5x}\left(\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{16}x+\frac{3}{128}\right)$.

Общее решение исходного неоднородного уравнения:

$$y=\overline{y}+y^*=C_1\,\mathrm{e}^x+C_2\cdot x\cdot \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{5x}\left(\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{16}x+\frac{3}{128}\right).$$

Ответ: общее решение уравнения $y=C_1\,\mathrm{e}^x+C_2\cdot x\cdot \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{5x}\left(\frac{1}{16}x^2-\right.$ $\left.-\frac{1}{16}x+\frac{3}{128}\right)$. ⊗

Пример 8.18. Найти общее решение уравнения $y''-3y'=$ $=\mathrm{e}^{3x}(5-x)$.

Решение. Характеристическое уравнение: $k^2 - 3k = 0$, откуда $k_1 = 0$, $k_2 = 3$. Общее решение однородного уравнения: $\overline{y} = C_1\,\mathrm{e}^{0x} + {}$ $+ C_2\,\mathrm{e}^{3x} = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{3x}$.

Среди корней k_i есть корень $k_2 = 3 = \alpha$. Следовательно, $y^* = \mathrm{e}^{3x} \cdot (Ax + B) \cdot x$, $(m = 1)$ или $y^* = \mathrm{e}^{3x} \cdot \left(Ax^2 + Bx\right)$.

Находим нужные нам производные:

$$(y^*)' = \mathrm{e}^{3x} \cdot 3\left(Ax^2 + Bx\right) + \mathrm{e}^{3x}(2Ax + B) = \mathrm{e}^{3x}\left(3Ax^2 + 3Bx + 2Ax + B\right),$$

$$(y^*)'' = \mathrm{e}^{3x} \cdot 3\left(3Ax^2 + 3Bx + 2Ax + B\right) + \mathrm{e}^{3x}(6Ax + 3B + 2A) =$$

$$= \mathrm{e}^{3x}\left(9Ax^2 + 9Bx + 6Ax + 3B + 6Ax + 3B + 2A\right) =$$

$$= \mathrm{e}^{3x}\left(9Ax^2 + 9Bx + 12Ax + 6B + 2A\right).$$

Подставляем y^* и ее производные в исходное уравнение:

$$\mathrm{e}^{3x}\left(9Ax^2 + 9Bx + 12Ax + 6B + 2A\right) - 3\mathrm{e}^{3x}\left(3Ax^2 + 3Bx + 2Ax + B\right) =$$

$$= \mathrm{e}^{3x}(5 - x).$$

Сокращаем на e^{3x}:

$$9Ax^2 + 9Bx + 12Ax + 6B + 2A - 9Ax^2 - 9Bx - 6Ax - 3B = 5 - x.$$

Составляем систему для определения неизвестных коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned} x^0 &: 2A + 3B = 5 \\ x^1 &: 6A = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} B &= \frac{5 - 2A}{3} = \frac{5 + \frac{1}{3}}{3} = \frac{16}{9}. \\ A &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Следовательно, $y^* = \mathrm{e}^{3x}\left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{16}{9}x\right)$.

Общее решение исходного неоднородного уравнения:

$$y = \overline{y} + y^* = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{3x}\left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{16}{9}x\right).$$

Ответ: общее решение уравнения $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{3x}\left(-\frac{1}{6}x^2 + \right.$ $\left. + \frac{16}{9}x\right)$.

Пример 8.19. Решить задачу Коши для уравнения $y'' + y' = = \mathrm{e}^{-x} \cdot x^2$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение будет иметь вид: $k^2 + +k = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = -1$. Общее решение однородного уравнения $y'' + y' = 0$ запишется в виде:

$$\overline{y} = C_1\,\mathrm{e}^{k_1 x} + C_2\,\mathrm{e}^{k_2 x} = C_1\,\mathrm{e}^{0x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Выбираем выражение для y^*:

$$y^* = \mathrm{e}^{-x}\left(Ax^2 + Bx + C\right)\cdot x, \quad \left(m = 1\right)$$

$$\text{или} \quad y^* = \mathrm{e}^{-x}\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right).$$

Производные y^* будут равны:

$$\left(y^*\right)' = \mathrm{e}^{-x}\left(-1\right)\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right) + \mathrm{e}^{-x}\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) =$$

$$= \mathrm{e}^{-x}\left(-Ax^3 - Bx^2 - Cx + 3Ax^2 + 2Bx + C\right),$$

$$= \mathrm{e}^{-x}\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx - 3Ax^2 - 2Bx - C - 3Ax^2 - 2Bx - C + 6Ax + 2B\right) =$$

$$= \mathrm{e}^{-x}\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx - 6Ax^2 - 4Bx - 2C + 6Ax + 2B\right).$$

$$(y^*)'' = \mathrm{e}^{-x}(-1)\left(-Ax^3 - Bx^2 - Cx + 3Ax^2 + 2Bx + C\right) +$$

$$+\mathrm{e}^{-x}\left(-3Ax^2 - 2Bx - C + 6Ax + 2B\right) =$$

Подставляем y^* и ее производные в исходное уравнение:

$$\mathrm{e}^{-x}\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx - 6Ax^2 - 4Bx - 2C + 6Ax + 2B\right) +$$

$$+\mathrm{e}^{-x}\left(-Ax^3 - Bx^2 - Cx + 3Ax^2 + 2Bx + C\right) = \mathrm{e}^{-x} \cdot x^2$$

Сокращаем на e^{-x} и приводим подобные члены:

$$-3Ax^3 - 2Bx + 6Ax + 2B - C = x^2.$$

Составляем систему путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x слева и справа от знака равно:

$$\left.\begin{aligned} &x^0 : 2B - C = 0, \\ &x^1 : -2B + 6A = 0, \\ &x^2 : -3A = 1, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} C &= 2B = -2, \\ B &= 3A = -1, \\ A &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Тогда $y^* = \mathrm{e}^{-x}\left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x\right)$. Общее решение исходного неоднородного уравнения:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x\right).$$

Из начальных условий имеем:

$$1 = C_1 + C_2, \quad y' = -C_2\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x\right) + \mathrm{e}^{-x}\left(-x^2 - 2x - 2\right).$$

Или $0=-C_2-2$. Откуда $C_2=-2$; $C_1=3$. Частное решение:

$$y=3-2\,\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}\left(-\frac{1}{3}x^3-x^2-2x\right).$$

Ответ: частное решение уравнения $y=3-2\,\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}\left(-\frac{1}{3}x^3-\right.$ $\left.-x^2-2x\right)$.

3) Правая часть уравнения $f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\left(R_k(x)\cos\beta x+Q_p(x)\sin\beta x\right)$, где $R_k(x)$ и $Q_p(x)$ – многочлены порядка k и p.

В этом случае частное решение имеет вид:

$$y^*=\mathrm{e}^{ax}\left(N_l(x)\cos\beta x+M_l(x)\sin\beta x\right)\cdot x^m, \qquad (8.20)$$

где $l=\max\{k;p\}$, $N_l(x)$, $M_l(x)$ – многочлены l-ой степени с неопределенными коэффициентами;

m – количество пар характеристических корней $k=\alpha\pm\beta_i$.

Пример 8.20. Найти общее решение уравнения

$$y''-y=\mathrm{e}^{2x}\left(3\cos 3x+4\sin 3x\right).$$

Решение. Имеем: $k^2-1=0$, $k_{1,2}=\pm 1$, $\overline{y}=C_1\,\mathrm{e}^{-x}+C_2\,\mathrm{e}^{x}$ − общее решение линейного однородного уравнения.

Среди корней k_i нет равных $2\pm 3i$, $(m=0)$. Поэтому

$$y^*=e^{2x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right).$$

Находим производные от y^*:

$$\left(y^*\right)' = e^{2x}\cdot 2\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + e^{2x}\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right) =$$
$$= e^{2x}\left(2A\cos 3x + 2B\sin 3x - 3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right) =$$
$$= e^{2x}\left(\cos 3x\cdot\left(2A + 3B\right) + \sin 3x\cdot\left(2B - 3A\right)\right);$$
$$\left(y^*\right)'' = e^{2x}\cdot 2\left(\cos 3x\cdot\left(2A + 3B\right) + \sin 3x\cdot\left(2B - 3A\right)\right) +$$
$$+ e^{2x}\left(-\sin 3x\cdot 3\left(2A + 3B\right) + \cos 3x\cdot 3\left(2B - 3A\right)\right) =$$
$$= e^{2x}\left(\cos 3x\left(4A + 6B + 6B - 9A\right) + \sin 3x\left(4B - 6A - 6A - 9B\right)\right) =$$
$$= e^{2x}\left(\cos 3x\left(-5A + 12B\right) + \sin 3x\left(-12A - 5B\right)\right).$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$e^{2x}\left(\cos 3x\left(-5A + 12B\right) + \sin 3x\left(-12A - 5B\right)\right) -$$
$$- e^{2x}\left(\cos 3x\left(2A + 3B\right) + \sin 3x\left(2B - 3A\right)\right) = e^{2x}\left(3\cos 3x + 4\sin 3x\right).$$

Сокращаем на e^{2x} и приводим подобные члены в левой части равенства:

$$\cos 3x\left(-5A + 12B - 2A - 3B\right) + \sin 3x\left(-12A - 5B + 2B - 3A\right) =$$
$$= 3\cos 3x + 4\sin 3x$$

или $\cos 3x\left(-7A + 9B\right) + \sin 3x\left(-15A - 3B\right) = 3\cos 3x + 4\sin 3x.$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых функциях слева и справа от знака равно:

$$\left.\begin{aligned}\cos 3x &: -7A + 9B = 3,\\ \sin 3x &: -15A - 3B = 4,\end{aligned}\right\} \quad \text{откуда} \quad A = -\frac{15}{52};\ B = \frac{17}{156}.$$

Следовательно, $y^* = e^{2x}\left(-\dfrac{15}{52}\cos 3x + \dfrac{17}{156}\sin 3x\right).$

Общее решение исходного уравнения будет равно:

$$y = \overline{y} + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + e^{2x}\left(-\frac{15}{52}\cos 3x + \frac{17}{156}\sin 3x\right).$$

Ответ: общее решение уравнения $y = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{2x}\left(-\frac{15}{52}\cos 3x + \right.$ $\left. + \frac{17}{156}\sin 3x\right).$

Теорема (о наложении решений). Если $f(x)$ представляет собой сумму двух функций, т. е. $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а y_1^* и y_2^* – частные решения неоднородных уравнений при $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в правой части соответственно, то частное решение исходного уравнения находится по формуле

$$y^* = y_1^* + y_2^*, \tag{8.21}$$

Пример 8.21. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \cos 3x + x.$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид: $k^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ $k_{1,2} = \pm i.$

Общее решение однородного уравнения $y'' + y = 0$ имеет вид $\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$ В правой части *сумма двух различных функций*. Следовательно, будут $y*$ и $y_2^*.$

$$y_1^* = A\cos 3x + B\sin 3x \;\left(\text{для } f_1(x) = \cos 3x\right),$$

$$y_2^* = Ax + B \;\left(\text{для } f_2(x) = x\right).$$

Находим нужные производные от $y*$:

$$\left(y_1^*\right)' = -A\sin 3x \cdot 3 + B\cos 3x \cdot 3,$$

$$\left(y_1^*\right)'' = -3A\cos 3x \cdot 3 - 3B\sin 3x \cdot 3 = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x.$$

Подставляем в исходное уравнение при $f_1(x) = \cos 3x$:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + A\cos 3x + B\sin 3x = \cos 3x$$

$$\text{или } \cos 3x(-8A) + \sin 3x(-8B) = \cos 3x.$$

Составляем систему:

$$\left.\begin{aligned}\cos 3x: -8A = 1,\\ \sin 3x: -8B = 0,\end{aligned}\right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{8};\ B = 0.$$

Тогда $y_1^* = -\frac{1}{8}\cos 3x.$ Для $y_2^* = Ax + B$: $\left(y_2^*\right)' = A, \left(y_2^*\right)'' = 0.$

Подставляем в исходное уравнение при $f_2(x) = x$: $Ax + B = x$, откуда $A = 1$, $B = 0$. Частное решение $y_2^* = x$. Общее решение исходного неоднородного уравнения:

$$y = \overline{y} + y_1^* + y_2^* = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{8}\cos 3x + x.$$

Ответ: общее решение уравнения $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{8}\cos 3x + x.$

8.5. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \tag{8.22}$$

где $p_1(x)$ и $p_2(x)$ – непрерывные функции на интервале $(a;b)$.

Пусть общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad (8.23)$$

имеет вид $\overline{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – частные линейно независимые решения однородного уравнения (8.23).

Для нахождения общего решения уравнения (8.22) необходимо найти частное решение y^*. Будем искать частное решение в виде уравнения (8.22) методом Лагранжа в виде

$$y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2, \qquad (8.24)$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ − неизвестные функции, которые находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1(x) + C_2'(x)\cdot y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)\cdot y_1'(x) + C_2'(x)\cdot y_2(x) = f(x). \end{cases} \qquad (8.25)$$

Определитель этой системы $\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ называется *определителем Вронского* $W(x) \neq 0$ уравнения (8.24). Поэтому система имеет единственное решение $C_1'(x) = \psi_1(x)$; $C_2'(x) = \psi_2(x)$.

Интегрируя, найдем $C_1(x)$ и $C_2(x)$. После этого, имеем:

$$y^* = C_1(x)\cdot y_1(x) + C_2(x)\cdot y_2(x).$$

Общее решение уравнения (8.22) имеет вид:

$$y = \overline{y} + y^* = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x). \qquad (8.26)$$

Пример 8.22. Найти решение дифференциального уравнения $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

Решение. Соответствующее однородное уравнение имеет вид $y'' + y = 0$. Его характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$, корни $k_1 = i$, $k_2 = -i$. Общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Ищем частное решение исходного уравнения методом вариации произвольных постоянных в виде $y^* = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$.

Система (8.25) в данном случае принимает вид:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot\cos x + C_2'(x)\cdot\sin x = 0, \\ C_1'(x)\cdot(\cos x)' + C_2'(x)\cdot(\sin x)' = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot\cos x + C_2'(x)\cdot\sin x = 0, \\ C_1'(x)\cdot(-\sin x) + C_2'(x)\cdot\cos x = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения этой системы $C_2'(x)$ через $C_1'(x)$:

$$C_2'(x) = -C_1'(x)\frac{\cos x}{\sin x}.$$

Подставим $C_2'(x)$ во второе уравнение:

$$C_1'(x)\cdot(-\sin x) + C_1'(x)\cdot\left(\frac{-\cos^2 x}{\sin x}\right) = \frac{1}{\sin x},$$

$$C_1'(x)\cdot\left(-\sin x - \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right) = \frac{1}{\sin x},\quad C_1'(x)\cdot\left(\frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x}\right) = \frac{1}{\sin x},$$

$$C_1'(x)\cdot\left(\frac{-1}{\sin x}\right) = \frac{1}{\sin x}.$$

Отсюда получаем $C_1'(x) = -1.$ Интегрируя, получим

$$C_1'(x) = \int(-1)\,\mathrm{d}x = -x + C_3.$$

Константу C_3 можно взять равной 0. Имеем $C_1(x) = -x.$ Далее, подставляя значение $C_1'(x),$ найдем $C_2'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}.$ Интегрируя, получим

$$C_2'(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x} = \ln\left|\sin x\right| + C_4.$$

Значение постоянной C_4 можно взять равное 0, $C_2(x) = \ln\left|\sin x\right|.$

Таким образом, $y^* = -x \cdot \cos x + \ln\left|\sin x\right| \cdot \sin x.$

Общее решение линейного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = \overline{y} + y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x\cos x + \ln\left|\sin x\right| \cdot \sin x.$$

Ответ: Общее решение уравнения $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x\cos x +$ $+\ln\left|\sin x\right| \cdot \sin x.$

Пример 8.23. Найти решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 10y = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{\cos x},$ удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2.$

Решение. Соответствующее однородное уравнение имеет вид $y'' - 6y' + 10y = 0.$ Его характеристическое уравнение: $k^2 - 6k +$ $+10 = 0,\ \ D = 36 - 40 = -4,\ \ D = (2i)^2.$

Дискриминант меньше нуля, значит корни комплексные:

$$k_1 = \frac{6 + 2i}{2} = 3 + i,\ \ k_2 = \frac{6 - 2i}{2} = 3 - i.$$

Линейно независимые решения однородного дифференциального уравнения имеют вид: $y_1 = \mathrm{e}^{3x}\cos x$, $y_2 = \mathrm{e}^{3x}\sin x$.

Общее решение однородного линейного уравнения запишем в виде $\overline{y} = C_1\,\mathrm{e}^{3x}\cos x + C_2\,\mathrm{e}^{3x}\sin x$.

Ищем частное решение исходного неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных:

$$y^* = C_1(x)\cdot\mathrm{e}^{3x}\cos x + C_2(x)\cdot\mathrm{e}^{3x}\sin x.$$

Для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ получаем систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot\mathrm{e}^{3x}\cos x + C_2'(x)\cdot\mathrm{e}^{3x}\sin x = 0, \\ C_1'(x)\cdot(\mathrm{e}^{3x}\cos x)' + C_2'(x)\cdot(\mathrm{e}^{3x}\sin x)' = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{\cos x} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot\mathrm{e}^{3x}\cos x + C_2'(x)\cdot\mathrm{e}^{3x}\sin x = 0, \\ C_1'(x)\cdot(3\mathrm{e}^{3x}\cos x - \mathrm{e}^{3x}\sin x) + C_2'(x)\cdot(3\mathrm{e}^{3x}\sin x + \mathrm{e}^{3x}\cos x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{\cos x}. \end{cases}$$

Из первого уравнения выражаем $C_2'(x)$: $C_2'(x) = -C_1'(x)\dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Подставив $C_2'(x)$ во второе уравнение, получим:

$$C_1'(x)\cdot 3\mathrm{e}^{3x}\cos x - C_1'(x)\cdot\mathrm{e}^{3x}\sin x -$$

$$-C_1'(x)\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\cdot(3\mathrm{e}^{3x}\sin x + \mathrm{e}^{3x}\cos x) = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\cos x},$$

$$C_1'(x)\cdot 3\mathrm{e}^{3x}\cos x - C_1'(x)\cdot\mathrm{e}^{3x}\sin x - 3C_1'(x)\cdot\mathrm{e}^{3x}\cos x -$$

$$-C_1'(x)\cdot\mathrm{e}^{3x}\frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\cos x},$$

$$-C_1'(x)\cdot\mathrm{e}^{3x}\left(\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right) = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\cos x}.$$

Приведя выражение в скобках к общему знаменателю, получим:

$$C_1'(x)\cdot e^{3x}\cdot\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin x}=\frac{e^{3x}}{\cos x},$$

$$-C_1'(x)\cdot e^{3x}\cdot\frac{1}{\sin x}=\frac{e^{3x}}{\cos x}.$$

Выразим из этого уравнения $C_1'(x)$: $C_1'(x)=-\dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Интегрируя, найдем $C_1(x)$:

$$C_1(x)=-\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}=\ln\left|\cos x\right|+C_3.$$

Постоянную C_3 положим равной нулю: $C_1(x)=\ln\left|\cos x\right|$.

Подставив значение $C_1'(x)=-\dfrac{\sin x}{\cos x}$ в уравнение $C_2'(x)=$ $=-C_1'(x)\dfrac{\cos x}{\sin x}$, получим $C_2'(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}=1$. Интегрируя, найдем $C_2(x)=\int\mathrm{d}x=x+C_4$.

Постоянную C_4 положим равной нулю: $C_2(x)=x$.

Таким образом, частное решение исходного уравнения таково:

$$y^*=\ln\left|\cos x\right|e^{3x}\cos x+xe^{3x}\sin x.$$

Общее решение имеет вид:

$$y=\bar{y}+y^*=C_1 e^{3x}\cos x+C_2 e^{3x}\sin x+\ln\left|\cos x\right|\cdot e^{3x}\cos x+xe^{3x}\sin x.$$

Решим еще задачу Коши, то есть найдем частное решение исходного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=2$. Подставив в общее решение дифференциального уравнения $x=0$, $y=1$, получим $1=C_1\Rightarrow C_1=1$. Для того, чтобы использовать второе начальное условие $y'(0)=2$, нужно продифференцировать общее решение y:

$$y'(x) = 3C_1\,\mathrm{e}^{3x}\cos x - 3C_1\,\mathrm{e}^{3x}\sin x + 3C_2\,\mathrm{e}^{3x}\sin x + C_2\,\mathrm{e}^{3x}\cos x +$$

$$+\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)\cdot \mathrm{e}^{3x}\cos x + \ln|\cos x|\cdot 3\mathrm{e}^{3x}\cos x - \ln|\cos x|\cdot \mathrm{e}^{3x}\sin x +$$

$$+\mathrm{e}^{3x}\sin x + 3\mathrm{e}^{3x}\,x\sin x + x\cdot \mathrm{e}^{3x}\cos x.$$

Подставляя $x = 0,$ $y' = 2,$ получим: $2 = 3C_1 + C_2.$

Итак, получили систему уравнений для нахождения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ 3C_1 + C_2 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Итак, $C_1 = 1,$ $C_2 = -1.$

Частное решение ДУ, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид: $y = \mathrm{e}^{3x}\cos x - \mathrm{e}^{3x}\sin x + \ln|\cos x|\mathrm{e}^{3x}\cos x + x\mathrm{e}^{3x}\sin x.$

Ответ: частное решение уравнения $y = \mathrm{e}^{3x}\cos x - \mathrm{e}^{3x}\sin x +$ $+\ln|\cos x|\mathrm{e}^{3x}\cos x + x\mathrm{e}^{3x}\sin x.$

Метод вариации произвольных постоянных легко распространяется на линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка:

$$y^n + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y = f(x), \qquad (8.27)$$

где $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x), f(x)$ − заданные непрерывные функции на интервале $(a;\, b)$.

Неизвестные функции $C_i(x)$ находятся из системы:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1(x) + C_2'(x)\cdot y_2(x) + C_3'(x)\cdot y_3(x) + \ldots + C_n'(x)\cdot y_n(x) = 0 \\ C_1'(x)\cdot y_1'(x) + C_2'(x)\cdot y_2'(x) + C_3'(x)\cdot y_3'(x) + \ldots + \dot{C}_n'(x)\cdot y_n'(x) = 0 \\ C_1'(x)\cdot y_1''(x) + C_2'(x)\cdot y_2''(x) + C_3'(x)\cdot y_3''(x) + \ldots + \dot{C}_n'(x)\cdot y_n''(x) = 0 \\ \ldots \\ C_1'(x)\cdot {y_1}^{(n-1)}(x) + C_2'(x)\cdot {y_2}^{(n-1)}(x) + C_3'(x)\cdot {y_3}^{(n-1)}(x) + \ldots + \\ +C_n'(x)\cdot {y_n}^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}$$

8.6. Системы дифференциальных уравнений

Для решения многих задач математики, физики, техники (задач динамики криволинейного движения, задач электротехники для нескольких электрических цепей и других) требуется несколько функций. Нахождение этих функций может привести к нескольким дифференциальным уравнениям, образующим систему.

Определение. *Системой дифференциальных уравнений* называется совокупность дифференциальных уравнений, каждое из которых содержит независимую переменную, неизвестные функции и их производные. Система дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \\ \ldots \\ F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \end{cases} \tag{8.28}$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots \\ \dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{8.29}$$

Система вида (8.29) называется *нормальной* системой дифференциальных уравнений. Предполагается, что в нормальной системе число уравнений равно числу искомых функций.

Определение. *Решением системы* (8.29) называется набор из n функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющих каждому из уравнений этой системы.

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений (8.29): найти решение системы (8.29), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \ldots, y_n(x_0) = y_n^0. \qquad (8.30)$$

Общее решение системы (8.29) имеет вид: $y_1 = \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, \ldots, C_n), \ldots, y_n = \varphi_n(x, C_1, \ldots, C_n)$, где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Решение, получающееся из общего решения при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, называется *частным решением.*

Условия существования и единственности решения задачи Коши описывает следующая теорема.

Теорема (Коши). Если в системе (8.29) все функции $f_i(x_i, y_1, \ldots, y_n)$ непрерывны вместе со всеми своими частными производными по y_i в некоторой области $D\,(n+1)$-мерного пространства, то в каждой точке $M_0(x_0, y_1{}^0, y_2{}^0, \ldots, y_n{}^0)$ этой области существует единственное решение $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x), \ldots,$ $y_n = \varphi_n(x)$ системы (8.29), удовлетворяющее начальным условиям (8.30).

Одним из основных методов решения нормальной системы дифференциальных уравнений является *метод сведения к одному дифференциальному уравнению высшего порядка (метод исключения)*.

Рассмотрим метод сведения к уравнению высшего порядка для нормальной системы из двух уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = f_1(x, y_1, y_2) \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases} \qquad (8.31)$$

Продифференцируем первое уравнение этой системы по x:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}.$$

Значения производных $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}$ подставим из системы (8.31):

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 \tag{8.32}$$

или

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2).$$

Из первого уравнения системы (8.31) выразим функцию y_2 через независимый аргумент x, функцию y_1 и ее производную y_1'. Получим

$$y_2 = \psi_2(x, y_1, y_1'). \tag{8.33}$$

Это значение y_2 подставим в уравнение (8.32) и получим уравнение 2-го порядка: $\frac{d^2y_1}{dx^2} = \Phi(x, y_1, y_1')$.

Пусть его общее решение имеет вид: $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2)$.

Дифференцируя это решение и подставив значение производной в уравнение (8.33), найдем функцию y_2.

В итоге, получим решение системы в виде: $\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2). \end{cases}$

Пример 8.24. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 5x + 3y, \\ y' = -3x - y. \end{cases}$

Решение. Дифференцируем первое уравнение еще раз по независимому аргументу t: $x'' = 5x' + 3y'$. Подставляя y' из второго уравнения, получим: $x'' = 5x' + 3(-3x - y) = 5x' - 9x - 3y$.

Выразим y из первого уравнение: $y = \frac{x' - 5x}{3}$, получим: $x'' =$ $= 5x' - 9x - 3 \cdot \left(\frac{x' - 5x}{3}\right) = 5x' - 9x - x' + 5x = 4x' - 4x$. Перенеся все слагаемые в одну сторону, получим уравнение: $x'' - 4x' + 4x = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид: $k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow$ $k_1 = 2,\ k_2 = 2$. Тогда $x(t) = C_1\,\mathrm{e}^{2t} + C_2 t\,\mathrm{e}^{2t}$. Подставив это решение в уравнение $y = \dfrac{x' - 5x}{3}$, получим:

$$y = \frac{2C_1\,\mathrm{e}^{2t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t} + 2C_2 t\,\mathrm{e}^{2t} - 5C_1\,\mathrm{e}^{2t} - 5C_2 t\,\mathrm{e}^{2t}}{3} =$$

$$= \frac{-3C_1\,\mathrm{e}^{2t} - 3C_2 t\,\mathrm{e}^{2t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t}}{3} = -C_1\,\mathrm{e}^{2t} - C_2 t\,\mathrm{e}^{2t} + \frac{C_2}{3}\mathrm{e}^{2t}.$$

Ответ: общее решение системы $\begin{cases} x = C_1\,\mathrm{e}^{2t} + C_2 t\,\mathrm{e}^{2t}, \\ y = -C_1\,\mathrm{e}^{2t} - C_2 t\,\mathrm{e}^{2t} + \dfrac{C_2}{3}\mathrm{e}^{2t}. \end{cases}$

Пример 8.25. Найти решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = 3y_1 + 3y_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = \ \ y_1 + 5y_2, \end{cases}$$

с начальными условиями $y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 2$.

Решение. Поскольку неизвестными функциями являются y_1 и y_2, будем считать, что независимой переменной является x. Продифференцируем первое уравнение по x: $y_1'' = 3y_1' + 3y_2'$.

Подставим в это уравнение выражение $y_2' = y_1 + 5y_2$. Получим: $y_1'' = 3y_1' + 3(y_1 + 5y_2)$. Раскрыв скобки, имеем: $y_1'' = 3y_1' + 3y_1 + 15y_2$.

Выразим y_2 из первого уравнения системы: $y_2 = \dfrac{y_1' - 3y_1}{3}$.

Подставив это выражение вместо y_2 в предыдущее уравнение, получим: $y_1'' = 3y_1' + 3y_1 + \dfrac{15(y_1' - 3y_1)}{3}$. Раскрыв скобки, имеем: $y_1'' = 3y_1' + 3y_1 + 5y_1' - 15y_1$. Приведя подобные, получим: $y_1'' = 8y_1' - 12y_1$.

Перенеся все слагаемые в одну сторону, получим: $y_1'' - 8y_1' + 12y_1 = 0$.

Характеристическое уравнение для этого дифференциального уравнения второго порядка имеет вид: $k^2 - 8k + 12 = 0$. Находим его корни: $k_1 = 6$, $k_2 = 2$. Теперь можем выписать функцию y_1:

$$y_1 = C_1 e^{6x} + C_2 e^{2x}. \quad y_2 = \frac{(C_1 e^{6x} + C_2 e^{2x})' - 3(C_1 e^{6x} + C_2 e^{2x})}{3} \Rightarrow$$

$$y_2 = \frac{6C_1 e^{6x} + 2C_2 e^{2x} - 3C_1 e^{6x} - 3C_2 e^{2x}}{3} \Rightarrow y_2 = C_1 e^{6x} - \frac{C_2}{3} e^{2x}.$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{6x} + C_2 e^{2x}, \\ y_2 = C_1 e^{6x} - \dfrac{C_2}{3} e^{2x}. \end{cases}$$

Найдем решение задачи Коши, то есть найдем константы C_1 и C_2 так, чтобы выполнялись начальные условия: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

Для этого, подставим $x = 0$ в общее решение системы:

$$y_1(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = 1, \quad y_2(0) = C_1 e^0 - \frac{C_2}{3} e^0 = 2.$$

Учитывая, что $e^0 = 1$, получим систему линейных алгебраических уравнений: $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 - \dfrac{C_2}{3} = 2. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, получим: $\frac{4}{3}C_2 = -1 \Rightarrow C_2 = -\frac{3}{4}$. Подставляя $C_2 = -\frac{3}{4}$ в первое уравнение системы, получим: $C_1 - \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4}$.

Итак, решение задачи Коши имеет вид: $\begin{cases} y_1 = \frac{7}{4}e^{6x} - \frac{3}{4}e^{2x}, \\ y_2 = \frac{7}{4}e^{6x} - \frac{1}{4}e^{2x}. \end{cases}$

Ответ: частное решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} y_1 = \frac{7}{4}e^{6x} - \frac{3}{4}e^{2x}, \\ y_2 = \frac{7}{4}e^{6x} - \frac{1}{4}e^{2x}. \end{cases}$

9. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Тема 1. Функции нескольких переменных

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}-2}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{x^3-y}{x^2+y^2}$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \dfrac{x^3-y^3}{x-y}$; д) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{x^4+y^4}$.

2. Найти частные производные функций:

а) $z=2x^2y+3xy^2+x^3$; б) $z=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$;

в) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; г) $z=\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$.

3. Вычислить значения частных производных функции в указанной точке:

а) $z=\dfrac{x+y}{x-y}, M_0(3,2)$; б) $z=\dfrac{xy}{x+y}, M_0(4;\,5)$;

в) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ M_0(1;\,2,2)$.

4. Найти полные дифференциалы функций:

а) $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; б) $u=\operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z^2}$.

5. Найти значение полного дифференциала функции в точке M_0:

а) $z=\ln(x^2+y^2), M_0(1,0)$;

б) $u=(x+y+z)^2, M_0(1;\,1,2)$, если $\mathrm{d}x=0,2$, $\mathrm{d}y=0,1$, $\mathrm{d}z=0,1$.

6. Вычислить приближенно выражение, заменив приращение функции дифференциалом:

а) $\sqrt{(1,03)^2+(2,98)^2}$; б) $1,98^{2,02}$;

в) $\sqrt{(2,02)^2+(1,03)^2+(1,97)^2}$; г) $1,003\cdot(1,998)^2\cdot(3,005)^2$.

Ответы к теме 1.

1. а) -4; б) -1; в) $-\dfrac{1}{5}$; г) 12; д) $+\infty$.

2. а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4xy+3y^2+3x^2,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^2+6xy;$

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x^2}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x},$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x};$

в) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-xy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}};$

г) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2\cos^2\dfrac{y}{x}},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x\cos^2\dfrac{y}{x}}.$

3. а) $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x}=-4;$ $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial y}=6;$ б) $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x}=25;$ $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial y}=16;$

в) $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial x}=\dfrac{1}{3};$ $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial y}=-\dfrac{2}{3};$ $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial z}=\dfrac{2}{3}.$

4. а) $\mathrm{d}z=\dfrac{4}{\left(x^2+y^2\right)^2}\left(xy^2\mathrm{d}x-x^2y\mathrm{d}y\right);$

б) $\mathrm{d}u=\dfrac{z^2}{y^2x^2+z^4}\left(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-\dfrac{2xy}{z}\mathrm{d}z\right).$

5. а) $d(M_0)=2\mathrm{d}x;$ б) $\mathrm{d}(M_0)=1,6.$

6. а) 3,153; б) 3,976; в) 3,003; г) 108,648.

Тема 2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к следующим поверхностям в указанных точках:

1. $z = \sin x \cos y$ в точке $M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

2. $z = \mathrm{e}^{x \cos y}$ в точке $M\left(1, \pi, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

3. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0$ в точке $M(1, 2, 3)$.

4. $x^2y^2 - xyz + x^2yz - xz^2 + 8 = 0$ в точке $M(2, 1, 3)$.

5. $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$ в точке $M(2, 2, 1)$.

Ответы к теме 2.

1. $x - y - 2z + 1 = 0$; $\quad \dfrac{x - \frac{\pi}{4}}{1} = \dfrac{y - \frac{\pi}{4}}{-1} = \dfrac{z - \frac{1}{2}}{-2}$.

2. $x - \mathrm{e}z - 2 = 0$; $\quad \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-\pi}{0} = \dfrac{z - \frac{1}{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}$.

3. $x - 6y + 9z - 16 = 0$; $\quad \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-6} = \dfrac{z-3}{9}$.

4. $2x + 7y - 5z + 4 = 0$; $\quad \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{7} = \dfrac{z-3}{-5}$.

5. $x + y - 4z = 0$; $\quad \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-4}$.

Тема 3. Экстремумы функций двух переменных

Найти экстремумы функций двух переменных:

1. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

2. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

3. $z = xy^2(1 - x - y)$, $(x > 0,\ y > 0)$.

4. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

5. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Ответы к теме 3.

1. $z_{\min} = -1$ при $x = 1$, $y = 1$. В стационарной точке (0, 0) экстремума нет.

2. $z_{\min} = -9$ при $x = 0$, $y = 3$.

3. $z_{\min} = \dfrac{1}{64}$ при $x = \dfrac{1}{4}$, $y = \dfrac{1}{2}$.

4. $z_{\min} = -\dfrac{4}{3}$ при $x = 0$, $y = -\dfrac{2}{3}$. В стационарной точке $(2, \ -\dfrac{2}{3})$ экстремума нет.

5. $z_{\min} = -28$ при $x = 2$, $y = 1$; $z_{\max} = 28$ при $x = -2$, $y = -1$. В стационарных точках (1, 2), (−1, −2) экстремумов нет.

Тема 4. Условный экстремум функции нескольких переменных

Найти условные экстремумы функций:

1. $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$.

2. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$.

3. $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при $x + y = 2$.

4. $z = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 1$.

5. $z = \dfrac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$.

Ответы к теме 4.

1. $z_{\min} = 0$ при $x = 1$, $y = 0$; $z_{\max} = \dfrac{1}{27}$ при $x = y = \dfrac{1}{3}$.

2. $z_{\min} = -\dfrac{19}{4}$ при $x = y = -\dfrac{3}{2}$.

3. $z_{\min} = 2$ при $x = y = 1$.

4. $z_{\min} = \sqrt{5}$ при $x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $z_{\max} = \sqrt{5}$ при $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

5. $z_{\min} = -1 - 2\sqrt{2}$ при $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $z_{\max} = 1 - 2\sqrt{2}$ при $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Тема 5. Наибольшее и наименьшее значения функции в заданной области

1. Найти наибольшее значение функции $z = x - 2y + 5$ в областях:

а) $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$;

б) $x \leq 0, y \geq 0, y - x \leq 1$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в области $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 3$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy$ в области $x^2 + y^2 \leq 1$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy^2$ в области $x^2 + y^2 \leq 1$.

Ответы к теме 5.

1. а) $z_{\text{наиб.}} = 6$ при $x = 1,\ y = 0$; б) $z_{\text{наиб}} = 5$ при $x = y = 0$.

2. $z_{\text{наиб.}} = 6$ при $x = 3,\ y = 0$ и при $x = 0,\ y = 3$; $z_{\text{наим.}} = -1$ при $x = y = 1$.

3. $z_{\text{наиб.}} = \frac{1}{2}$ при $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $z_{\text{наим.}} = -\frac{1}{2}$ при $x = -y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. $z_{\text{наиб.}} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ при $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $z_{\text{наим.}} = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ при $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Тема 6. Непосредственное интегрирование, метод замены переменной и интегрирование по частям

1. Найти неопределенные интегралы, пользуясь таблицей интегралов:

а) $\int(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)\,\mathrm{d}x$; б) $\int\dfrac{(1+4\sqrt[3]{x^2})^2}{x}\mathrm{d}x$;

в) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}$; г) $\int\sin^2\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$;

д) $\int\dfrac{4x^2+2x-8}{x^2}\mathrm{d}x$; е) $\int(2x+3)^7\,\mathrm{d}x$;

ж) $\int\mathrm{ctg}^2\,x\mathrm{d}x$; з) $\int\dfrac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x$;

и) $\int\dfrac{2^{x+1}-7^{x-1}}{14^x}\mathrm{d}x$; к) $\int\dfrac{1}{\sqrt{3-3x^2}}\mathrm{d}x$.

2. Найти неопределенные интегралы методом замены переменной (поднесением под знак дифференциала):

а) $\int\cos x\cdot 3^{\sin x}\,\mathrm{d}x$; б) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)^2}$;

в) $\int\dfrac{\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$; г) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\,\mathrm{arctg}\,x}$;

д) $\int\mathrm{e}^{5x-9}\,\mathrm{d}x$; е) $\int x\sqrt{x^2-6}\,\mathrm{d}x$;

ж) $\int x^2\sqrt{2x^3+11}\,\mathrm{d}x$; з) $\int\dfrac{\sin(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$;

и) $\int\dfrac{5^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$; к) $\int x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

3. Применяя формулу интегрирования по частям, найти неопределенные интегралы:

а) $\int xe^{2x}\mathrm{d}x$; б) $\int \ln 3x\,\mathrm{d}x$;

в) $\int \operatorname{arctg} 4x\,\mathrm{d}x$; г) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$;

д) $\int \arccos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$; е) $\int x\sin nx\,\mathrm{d}x$;

ж) $\int x9^x\,\mathrm{d}x$; з) $\int x\ln\frac{x}{2}\mathrm{d}x$;

и) $\int \frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x$; к) $\int x^2\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$.

Ответы к теме 6.

1. а) $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$; б) $\ln|x|+12\sqrt[3]{x}+12\sqrt[3]{x^4}+C$;

в) $-2\operatorname{ctg}2x+C$; г) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$;

д) $4x+2\ln|x|+\frac{8}{x}+C$; е) $\frac{1}{16}(2x+3)^8+C$;

ж) $-x-\operatorname{ctg}x+C$; з) $x-\operatorname{arctg}x+C$;

и) $2\cdot\frac{7^x}{\ln 7}-\frac{1}{7}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+C$; к) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x+C$.

2. а) $-\frac{3^{\sin x}}{\ln 3}+C$; б) $-\frac{1}{\ln|x|+1}+C$;

в) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+C$; г) $\ln|\operatorname{arctg}x|+C$;

д) $\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x-9}+C$; е) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-6)^3}+C$;

ж) $\frac{1}{9}\sqrt{(2x^3+11)^3}+C$; з) $-\cos(\ln x)+C$;

и) $\frac{2\cdot 5^{\sqrt{x}}}{\ln 5}+C$; к) $-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}+C$.

3. а) $\dfrac{1}{4}e^{2x}(2x-1)+C$; б) $x(\ln 3x-1)+C$;

в) $x\,\mathrm{arctg}\,4x-\dfrac{1}{8}\ln(16x^2+1)+C$; г) $x\sin x+\cos x+C$;

д) $x\arccos\dfrac{x}{2}-2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}+C$; е) $\dfrac{1}{n^2}(\sin nx+nx\cos nx)+C$;

ж) $9^x\left(\dfrac{x}{\ln 9}-\dfrac{1}{\ln^2 9}\right)+C$; з) $\dfrac{x^2}{4}\left(2\ln\dfrac{x}{2}-1\right)+C$;

и) $\dfrac{2\ln x+1}{4x^2}+C$; к) $x^2\sin x-2\sin x+2x\cos x+C$.

Тема 7. Интегрирование рациональных дробей

1. Записать разложение дроби на сумму простейших рациональных дробей: $\dfrac{1}{(x-3)(x+4)}$.

2. Выделить целую часть и остаток рациональной дроби $\dfrac{x^4+x^3+2}{x^3-4x}$.

3. Найти $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+4)}$.

4. Найти $\displaystyle\int\frac{x^4+x^3+2}{x^3-4x}\mathrm{d}x$.

5. Найти $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}\mathrm{d}x$.

Ответы к теме 7.

1. $\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{1}{x+4}$.

2. $x+1+\dfrac{4x^2+4x+2}{x^3-4x}$.

3. $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{8}\ln\left|x^2+4\right|+C.$

4. $\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{13}{4}\ln|x-2|+\frac{5}{4}\ln|x+2|+C.$

5. $x+\frac{1}{x}+2\ln|x-1|-\ln|x|+C.$

Тема 8. Интегрирование иррациональных и тригонометрических функций

Вычислить интегралы:

1. $\int\frac{3\sqrt{x}}{1-x^{3/2}}\mathrm{d}x;$

2. $\int\frac{\sqrt{x}}{x(x-1)}\mathrm{d}x;$

3. $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x;$

4. $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x-2}};$

5. $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{2+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x;$

6. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-3-x^2}};$

7. $\int\frac{2x+5}{\sqrt{x^2-2x-1}}\mathrm{d}x;$

8. $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-12x+2}};$

9. $\int(3\cos^2 x-2\sin^2 x)\mathrm{d}x;$

10. $\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x};$

11. $\int\frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x};$

12. $\int\frac{3\mathrm{d}x}{2\sin^2 x++\sin x\cos x+1};$

13. $\int\left(\sin^3 2x+\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x;$

14. $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\mathrm{d}x;$

15. $\int\cos^3 x\cdot\sin^3 x\,\mathrm{d}x;$

16. $\int(3-\mathrm{ctg}^2 x)\mathrm{d}x;$

17. $\int\mathrm{tg}^3 x\,\mathrm{d}x;$

18) $\int(\sin 2x\cdot\cos 4x-\cos x\cdot\cos 3x)\mathrm{d}x.$

Ответы к теме 8.

1. $-2\ln\left|1-x^{3/2}\right|+C$; 2. $\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C;$

3. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{12}{5}\sqrt[12]{x^5}+\frac{12}{5}\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|+C;$

4. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2}-3\sqrt[3]{x-2}+3\ln\left|\sqrt[3]{x-2}+1\right|+C;$

5. $\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}-\frac{12}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+8\sqrt{x+1}-48\sqrt[6]{x+1}-$

$-16\ln\left|\sqrt[3]{x+1}+2\right|+48\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{2}}+C;$

6. $\arcsin(x-2)+C;$

7. $2\sqrt{x^2-2x-1}+7\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right|+C;$

8. $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-12x+2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}(x-2)+\sqrt{3x^2-12x+2}\right|+C;$

9. $\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\sin 2x+C;$

10. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+C;$

11. $\frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C;$

12. $2\sqrt{3}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}(2\operatorname{tg}x+1))+C;$

13. $-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{6}\cos^3 2x-\frac{1}{\sin x}+C;$

14. $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}+C;$

15. $-\frac{1}{16}\cos 2x+\frac{1}{48}\cos^3 2x+C;$

16. $4x+\operatorname{ctg}x+C;$

17. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln\left|\cos x\right|+C;$

18. $-\frac{1}{12}\cos 6x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C.$

Тема 9. Определенный интеграл, его вычисление

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$; б) $\int\limits_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$; в) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\,\mathrm{d}x$;

г) $\int\limits_2^3\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$; д) $\int\limits_1^2\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

2. Вычислить интегралы методом подстановки:

а) $\int\limits_0^3\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_0^{5/3}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{3x+4}}$; в) $\int\limits_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+2}}$;

г) $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\ln x\frac{\sqrt[3]{2+\ln^2 x}}{x}\mathrm{d}x$; д) $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$.

3. Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_1^2\ln 3x\,\mathrm{d}x$; в) $\int\limits_0^1\mathrm{e}^{2x}\cdot x\,\mathrm{d}x$;

г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{18}}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 6x}$; д) $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}x\,\mathrm{d}x$.

Ответы к теме 9.

1. а) $\frac{\pi}{3}$; б) $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1\right)$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2}$; д) $\ln^2 2$.

2. а) $\frac{9\pi}{4}$; б) $\frac{2}{3}\left(1-\ln\frac{3}{4}\right)$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $\frac{3\sqrt[3]{3}}{8}$; д) $2-\frac{\pi}{2}$.

3. а) $\pi-\frac{1}{2}$; б) $2\ln 6-\ln 3$; в) $\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$; г) $\frac{\sqrt{3}}{162}(\pi+9\sqrt{3})$;

д) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{1}{2}\ln 4$.

Тема 10. Приложения определенного интеграла

1. Найти площадь криволинейной фигуры, ограниченной следующими кривыми:

а) $y=4-x^2$, $y=0$;

б) $y=(x+2)^3$, $x=0$, $x=3$, $y=0$;

в) $y=3-x^2$, $y=x^2-5$;

г) $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sin 2t \end{cases}$ $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$;

д) $\begin{cases} x=t \\ y=t^2-2 \end{cases}$ $t\in[0;2]$;

е) $\rho=2\sin\varphi$;

ж) $\rho=2-\cos\varphi$, $\varphi\in[0;\pi]$.

2. Найти длину дуги кривой:

а) $\begin{cases} x=5\cos^3 t, \\ y=5\sin^3 t, \end{cases}$ $t\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$;

б) $\rho=2+2\cos\varphi$;

в) $y=\operatorname{ch}x-4$, $x=0$, $x=1$;

г) $x^2+y^2=16$ от точки $A(0;\ 0)$ до точки $B(2;\ 2\sqrt{3})$.

3. Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной кривыми:

а) $y=2x^3$, $x=1$, $x=2$, $y=0$ вокруг оси Ox;

б) $y=x^3$, $y=8$, $x=0$ вокруг оси Oy;

в) $y=x^2$, $y=8-x^2$ вокруг оси Oy;

г) $y = 1 + \dfrac{1}{x-1}$, $x = 2$, $x = 4$ вокруг оси Ox;

д) $y = (x-2)^2$, $y = x$ вокруг оси Ox.

Ответы к теме 10.

1. а) $21\frac{1}{3}$; б) $152\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{\pi}{2}$; д) $1\frac{1}{3}$; е) π; ж) $\frac{9\pi}{4}$.

2. а) $\frac{15\pi}{2}$; б) 16; в) $\operatorname{sh} 1$; г) $\frac{2\pi}{3}$.

3. а) $72\frac{4}{7}\pi$; б) $2\sqrt[3]{4}\pi$; в) 24π; г) $2\frac{2}{3} + 2\ln 3$; д) $18\frac{2}{3}\pi$.

Тема 11. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $(x^2+1)\,\mathrm{d}y - 2xy\,\mathrm{d}x = 0$;

б) $y' = x^2 \cos^2 y$;

в) $y' - x^3 y = 0$;

г) $(3 + 2\cos^3 x)\,\mathrm{d}x - \cos^2 x\,\mathrm{d}y = 0$;

д) $x\,\mathrm{d}y - (1+\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x = 0$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения:

а) $(xy - x)\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$, $y(0) = 2$;

б) $y' = x \cdot \mathrm{e}^{x-y}$, $y(0) = 0$;

в) $y' = y$, $y(0) = 1$.

Ответы к теме 11.

1. а) $y = C(x^2+1)$; б) $\left\{\begin{array}{l} y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^3}{3} + C\right), \\ y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z \end{array}\right.$ в) $\left\{\begin{array}{l} y = e^{\frac{x^4}{4}+C}, \\ y = 0 \end{array}\right.$,

г) $\begin{cases} y = 3\,\mathrm{tg}\,x + 2\sin x + C, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z \end{cases}$ д) $\begin{cases} y = \ln x + 4\sqrt{x} + x + C, \\ x = 0 \end{cases}$

2. а) $y = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + 1;$ б) $\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^x(x-1) + 2;$ в) $y = \mathrm{e}^x$.

Тема 12. Однородные дифференциальные уравнения

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $x\mathrm{d}y - (y + x)\,\mathrm{d}x = 0;$

б) $(x^2 - 2y^2)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = 0;$

в) $y' = \dfrac{x + 2y}{x};$

г) $y' = \dfrac{y}{x + y}.$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения:

а) $y' = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}, \quad y(1) = 0;$

б) $x^2 y' + xy - x^2 - y^2 = 0, \quad y(1) = 0;$

в) $y' = 2\dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{y}{x}, \quad y(1) = 1;$

г) $xy' = y\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right), \quad y(1) = \mathrm{e}.$

Ответы к теме 12.

1. а) $\begin{cases} y = x \cdot \ln|x \cdot C|; \\ x = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = C \cdot \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{x^2}}; \\ x = 0 \end{cases}$

в) $y = Cx^2 - x;$ г) $\begin{cases} C = y \cdot e^{-\frac{x}{y}}. \\ x = 0 \end{cases}$

2. а) $e^{-\frac{y}{x}} = 1 - \ln|x|$; б) $\dfrac{x}{x-y} = \ln|x| + 1$;

в) $2\ln|x| + \dfrac{x}{y} = 1$; г) $\ln\left|\dfrac{y}{x}\right| = x$.

Тема 13. Уравнения в полных дифференциалах

1. Найти решения уравнений:

а) $y^2\mathrm{d}x - (2xy+3)\,\mathrm{d}y = 0$;

б) $(x+y-1)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^y + x)\,\mathrm{d}y = 0$;

в) $(x^2+y^2+y)\mathrm{d}x + (2xy + x + \mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y = 0$;

г) $y\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + (y + \mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y = 0$;

д) $(y + x\ln y)\,\mathrm{d}x + \left(\dfrac{x^2}{2y} + x + 1\right)\mathrm{d}y = 0$.

Ответы к теме 13.

1. а) $Cy^2 - \dfrac{1}{y} = x$; б) $\mathrm{e}^y + \dfrac{1}{2}x^2 + xy - x = C$;

в) $\dfrac{1}{3}x^3 + xy^2 + xy + \mathrm{e}^y = C$; г) $y\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{2}y^2 = C$;

д) $x^2\ln y + 2y(x+1) = C$.

Тема 14. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли

1. Найти решения линейных уравнений:

а) $y' + 2xy = x\mathrm{e}^{-x^2}$; б) $y' - \dfrac{1}{x}y = x\sin x$;

в) $y' - \dfrac{1}{x\ln x}y = \dfrac{1}{x}$; г) $x\ln x y' + y = 5x$;

д) $(1-x^2)y' - xy = 1$.

2. Найти решение уравнений Бернулли:

а) $y' + \frac{1}{x} y = -xy^2$;   б) $y' - \frac{1}{\sqrt{x}} y = \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}\, y^2$;

в) $y' - 7y = \mathrm{e}^{3x}\, y^2$;   г) $y' - 2y \operatorname{tg} x = -\sin^2 x \cdot y$;

д) $4xy' + 3y = -\mathrm{e}^{x}\, x^4 y^5$;

Ответы к теме 14.

1. а) $y = \mathrm{e}^{-x^2}\left(C + \frac{x^2}{2}\right)$;   б) $y = x(C - \cos x)$;

в) $y = (\ln x + C)\ln(\ln x)$;   г) $y = \frac{C + 5x}{\ln x}$;   д) $y = \frac{\arcsin x + C}{\sqrt{1 - x^2}}$.

2. а) $y(x^2 + Cx) = 1$;   б) $y = \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\mathrm{e}^{4\sqrt{x}} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{4\sqrt{x}} + C\right)$;

в) $y = \frac{-10\,\mathrm{e}^{7x}}{\mathrm{e}^{10x} + C}$;   г) $y = \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x - x + C}$;   д) $y^{-4} = x^3(\mathrm{e}^{x} + C)$.

Тема 15. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

1. Найти общие решения дифференциальных уравнений, где даны начальные условия – решить задачу Коши:

а) $y'' = x \cdot 2\sin x$;   б) $\mathrm{e}^{x}(y'' + \mathrm{e}^{x}) = 1$;

в) $y'' = \frac{1}{x}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$;   г) $xy'' + y' = 1 + x$;

д) $y'' = \frac{y'}{x}\left(1 + \ln\frac{y'}{x}\right)$;   е) $xy'' = y' \ln y'$, $y(1) = y'(1) = \mathrm{e}$;

ж) $y^3 y'' = 1$;   з) $y'' = 2yy'$, $y(0) = y'(0) = 1$;

и) $1 - y''y = (y')^2$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = -1$.

Ответы к теме 15.

1. а) $y=\dfrac{x^3}{6}+2\sin x+C_1x+C_2$; б) $y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+C_1x+C_2$;

в) $y=x\ln x+2$; г) $y=\dfrac{x^2}{4}+x+C_1\ln|x|+C_2$;

д) $y=\dfrac{x}{C_1}\mathrm{e}^{C_1x}+\dfrac{1}{C_1^2}\mathrm{e}^{C_1x}+C_2$; е) $y=\mathrm{e}^x$;

ж) $\dfrac{C_1y^2-1}{2C_1^2}=(C_2\pm x)^2$; з) $y=\dfrac{1}{1-x}$; и) $y=x$.

Тема 16. Однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Найти общее решение заданных дифференциальных уравнений, где даны начальные условия – решить задачу Коши:

а) $2y''-3y'+y=0$; б) $2y''+y'=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$;

в) $y''+2y'+y=0$; г) $9y''+6y'+y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$;

д) $y''+3y'+4y=0$; е) $y''+y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Ответы к теме 16.

1. а) $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$; б) $y=5-4\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$;

в) $y=\mathrm{e}^{-x}(C_1+C_2x)$; г) $y=2x\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$;

д) $y=\mathrm{e}^{-\frac{3x}{2}}(C_1\cos\dfrac{\sqrt{7}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{7}}{2}x$; е) $y=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$.

Тема 17. Неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

1. Найти общее решение уравнения:

а) $3y''-4y'+y=5-3x$; б) $y''-9y=6x+2$;

в) $y'' - 4y = x^2 + 3x - 7$;

г) $y'' + 2y' = 3 - x^2$;

д) $y'' - 3y' = x + 5$;

е) $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{3x} \cdot 4x$;

ж) $2y'' - 5y' + 3y = \mathrm{e}^{x}(x + 5)$;

з) $y'' - y' = 2\cos x + 3\sin x$;

и) $2y'' - y = \mathrm{e}^{2x}(\cos 3x + x \cdot \sin 3x)$;

к) $y'' - y' = \mathrm{e}^{3x} \cdot x + x^2 \cdot \mathrm{e}^{x}$.

Ответы к теме 17.

1. а) $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x} - 3x - 2$;

б) $y = C_1\,\mathrm{e}^{-3x} + C_2\,\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{9}$;

в) $y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{13}{8}$;

г) $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{5}{4}x$;

д) $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{16}{9}x$;

е) $y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{3x}\left(\dfrac{2}{5}x - \dfrac{2}{5}\right)$;

ж) $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} + \mathrm{e}^{x}\left(-\dfrac{1}{2}x^2 - 7x\right)$;

з) $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{5}{2}\sin x$;

и) $y = C_1\,\mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} + C_2\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} + \mathrm{e}^{2x}((-0{,}03x - 0{,}35)\cos 3x +$
$+(-0{,}01x - 0{,}11)\sin 3x)$;

к) $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{3x}\left(\dfrac{x}{11} + \dfrac{5}{33}\right) + \mathrm{e}^{x}\left(\dfrac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right)$.

Тема 18. Метод вариации произвольной постоянной

1. Решить уравнения:

а) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{9 - x^2}}$; б) $y'' + 16y = \dfrac{1}{\cos 4x}$;

в) $y'' + 2y' + 10y = \dfrac{e^{-x}}{\sin 3x}$; г) $y'' + 4y = \dfrac{3}{\sin^2 2x}$;

д) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}\sqrt{x+1}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

е) $y'' - 4y' = e^{5x} \cdot \sin e^x$; ж) $y'' + 4y = \operatorname{tg}^2 2x$.

Ответы к теме 18.

1. а) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \sqrt{9 - x^2} \cdot e^x + \arcsin\dfrac{x}{3} \cdot x \cdot e^x$;

б) $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + \dfrac{1}{16} \ln|\cos 4x| \cdot \cos 4x$;

в) $y = C_1 e^{-x} \cos 3x + C_2 e^{-x} \sin 3x - \dfrac{1}{3} x e^{-x} \cos 3x +$

$+\dfrac{1}{9} \ln|\sin 3x| \cdot e^{-x} \sin 3x$;

г) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \dfrac{3}{2} \ln|\operatorname{tg} x| \cdot \cos 2x - \dfrac{3}{2}$;

д) $y = -\dfrac{8}{15} e^{-x} - \dfrac{1}{3} x e^{-x} + \left(-\dfrac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + \dfrac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \right) \cdot e^{-x} +$

$+\dfrac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \cdot x \cdot e^{-x}$;

е) $y = C_1 + C_2 e^{4x} - e^{3x} \sin e^x - 3e^{2x} \cos e^x + 6e^x \sin e^x + 6\cos e^x$;

ж) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \left(-\dfrac{1}{4\cos 2x} - \dfrac{1}{4} \cos 2x \right) \cos 2x +$

$+\left(\dfrac{1}{4} \ln\left| \dfrac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1} \right| - \dfrac{1}{4} \sin 2x \right) \cdot \sin 2x.$

Тема 19. Системы дифференциальных уравнений

1. Решить следующие системы:

а) $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x' = -2x + \ \ y, \\ y' = -3x + 2y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = \ \ y, \\ y' = -x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x' = \ \ x + y, \\ y' = -x + y; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x' = 4x + 3y, \\ y' = 3x + 4y; \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 0$;

е) $\begin{cases} x' = 5x - 3y + 2\,\mathrm{e}^{3t}, \\ y' = \ \ x + \ \ y; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x' = \ \ 4x - 8y, \\ y' = -8x + 4y; \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 2$;

з) $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = -x + 3t; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x' = 4x - \ \ y, \\ y' = -x + 4y; \end{cases}$

к) $\begin{cases} x' = \ \ y - \cos t, \\ y' = -x. \end{cases}$

Ответы к теме 19.

1. а) $x = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{2t}, \quad y = -C_1\,\mathrm{e}^t - \dfrac{3}{2}C_2\,\mathrm{e}^{2t}$;

б) $x = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{-t}, \quad y = 3C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{-t}$;

в) $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$;

г) $x = C_1\,\mathrm{e}^t \cos t + C_2\,\mathrm{e}^t \sin t, \quad y = -C_1\,\mathrm{e}^t \sin t + C_2\,\mathrm{e}^t \cos t$;

д) $x = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{7t}, \quad y = -\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{7t}$;

е) $x = C_1\,\mathrm{e}^{2t} + C_2\,\mathrm{e}^{4t} - 4\,\mathrm{e}^{3t}, \quad y = C_1\,\mathrm{e}^{2t} + \dfrac{C_2}{3}\mathrm{e}^{4t} - 2\,\mathrm{e}^{3t}$;

ж) $x = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{12t} + \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-4t}, \quad y = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{12t} + \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-4t}$;

з) $x = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{-t} + 3t, \quad y = -C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{-t} - 3$;

и) $x = C_1\,\mathrm{e}^{3t} + C_2\,\mathrm{e}^{5t}, \quad y = C_1\,\mathrm{e}^{3t} - C_2\,\mathrm{e}^{5t}$;

к) $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \dfrac{1}{2} t \cos t,$

$y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + \tfrac{1}{2} t \sin t + \dfrac{1}{2}\cos t.$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Задание 1. Найти неопределенные интегралы:

1. а) $\int \sin^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x$; б) $\int x^2 \sqrt{4-8x^3} \mathrm{d}x$; в) $\int x \ln \frac{x}{2} \mathrm{d}x$.

2. а) $\int x \mathrm{e}^{\frac{x}{7}} \mathrm{d}x$; б) $\int \sin 3x \mathrm{e}^{\cos 3x} \mathrm{d}x$; в) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-8}$.

3. а) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} \mathrm{d}x$; б) $\int x 9^x \mathrm{d}x$; в) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{3x+1}} \mathrm{d}x$.

4. а) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$; б) $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+2x-3}} \mathrm{d}x$; в) $\int \arcsin 2x \, \mathrm{d}x$.

5. а) $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{3} \mathrm{d}x$; б) $\int \cos^2 \frac{x}{3} \mathrm{d}x$; в) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-16}$.

6. а) $\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$; б) $\int x \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x$; в) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x}$.

7. а) $\int x^2 \mathrm{e}^{x^3} \mathrm{d}x$; б) $\int 5^x \cdot 3^{2x} \mathrm{d}x$; в) $\int \sqrt{x} \cdot \ln x \, \mathrm{d}x$.

8. а) $\int \frac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}} \mathrm{d}x$; б) $\int x \cdot \sin \frac{\pi x}{2} \mathrm{d}x$; в) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)(x-5)}$.

9. а) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$; б) $\int \frac{x+2}{x^2+x} \mathrm{d}x$; в) $\int \frac{\cos^3 2x \, \mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}}$.

10. а) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+6x-1}$; б) $\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\cos^2(4+x^3)}$; в) $\int \frac{3x+2}{x^2(x+4)} \mathrm{d}x$.

1 а) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$; б) $\int \operatorname{arctg} 2x \, \mathrm{d}x$; в) $\int \frac{x \, \mathrm{d}x}{x^2+4x+13}$.

12. а) $\int \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+4}$; б) $\int \frac{\ln x}{x^3} \mathrm{d}x$; в) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \mathrm{d}x$.

13. а) $\int x^2 \cos(x^3+6) \mathrm{d}x$; б) $\int x \cdot 3^x \mathrm{d}x$; в) $\int \cos 5x \cdot \sin 3x \mathrm{d}x$.

14. а) $\int \frac{e^{\frac{x}{2}}\, dx}{\sqrt{16-e^x}}$; б) $\int \arcsin\frac{x}{2}\, dx$; в) $\int \frac{x-2}{x^2+4x+5}\, dx$.

15. а) $\int \cos(\sin x)\cdot\cos x\, dx$; б) $\int x^2 e^x\, dx$; в) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

16. а) $\int \frac{3\, dx}{x\ln^3 x}$; б) $\int x\cdot\cos 4x\, dx$; в) $\int \sin 3x\cdot\cos 2x\, dx$.

17. а) $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$; б) $\int (x^2+1)\ln x\, dx$; в) $\int \frac{2x\, dx}{x^2+2x+5}$.

18. а) $\int \frac{5x^3}{(x^4+4)^6}\, dx$; б) $\int \arccos x\, dx$; в) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-4x-5}}\, dx$.

19. а) $\int \frac{dx}{\operatorname{arctg} x\cdot(x^2+1)}$; б) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[4]{x}}\, dx$; в) $\int \sin^2 x\cdot\cos^3 x\, dx$.

20. а) $\int \frac{x-\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$; б) $\int x^3\ln x\, dx$; в) $\int \cos^4 x\cdot\sin^3 x\, dx$.

2 а) $\int e^{\sin^2 x}\cdot\sin 2x\, dx$; б) $\int \frac{\lg x}{x^2}\, dx$; в) $\int \frac{x-4}{x^2-7x+10}\, dx$.

22. а) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}})\, dx$; б) $\int x^2 e^{-x}\, dx$; в) $\int \frac{2-x}{x-x^2-2{,}5}\, dx$.

23. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x}$; б) $\int x\operatorname{arctg} x\, dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$.

24. а) $\int \frac{(1+x)\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int \operatorname{arcctg} x\, dx$; в) $\int \sin^3 x\cdot\cos^3 x\, dx$.

25. а) $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}\, dx$; б) $\int x^2\sin x\, dx$; в) $\int \frac{x\, dx}{(x+1)(2x-3)}$.

26. а) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$; б) $\int x\cos\frac{\pi x}{3}\, dx$; в) $\int \frac{dx}{x(x^2+7)}$.

27. а) $\int \frac{dx}{x^3+2x^2+x}$; б) $\int 7^x 16^{\frac{x}{2}}\,dx$; в) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}\,dx$.

28. а) $\int \mathrm{ctg}\, 3x\,dx$; б) $\int \frac{3x+7}{\sqrt[3]{4x+5}}\,dx$; в) $\int \frac{x^3\,dx}{\sin^2(5+x^4)}$.

29. а) $\int \cos^2 \frac{3}{5}x\,dx$; б) $\int \sin(\cos x)\sin x dx$; в) $\int x\cdot 5^{\frac{x}{2}}\,dx$.

30. а) $\int \sin 4x\cdot \sin\frac{x}{2}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{x^3+64}$; в) $\int \frac{dx}{x^3-5x}$.

Задание 2. Приложения определенного интеграла. В номерах 1–10 вычислить площадь фигур, ограниченных линиями:

1. $y=\sin x, \quad x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], y=0.$

2. $y=\cos x, \quad x\in[0;\pi], y=0.$

3. $y=4x-x^2, y=0.$

4. $y=6x-x^2, y=5.$

5. $y=e^x, y=e^{-x}, y=1.$

6. $y=e^x, y=e^{-2x}, y=e.$

7. $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=3\sin t; \end{cases} \quad t\in[0;2\pi].$

8. $\begin{cases} x=1+\cos t, \\ y=2\sin t; \end{cases} \quad t\in[0;2\pi].$

9. $\rho=2\sin\varphi..$

10. $\rho=2(1+\cos\varphi).$

В номерах 11–16 найти длину дуги кривой.

11. $y=\ln\cos x, x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right].$

12. $y = \ln \sin x,\ x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right].$

13. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t; \end{cases} t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

14. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3; \end{cases} t \in [1; 2].$

15. $\rho = 1 + \sin \varphi,\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$

16. $\rho = 1 - \cos \varphi,\ \ \varphi \in [0; \pi].$

В номерах 17–23 найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной линиями:

17. $y = \sin x,\ y = 0,\ x \in [0; \pi].$

18. $y = 2\cos x,\ y = 0,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$

19. $y = -x^2 + 4, y = 0.$

20. $y = 6x - x^2, y = 0.$

21. $y = \frac{1}{x},\ x = 1,\ x = 2,\ y = 1.$

22. $y = 2^x,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0.$

23. $y = \mathrm{e}^{-2x},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 0.$

В номерах 24–30 найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *Oy*, фигуры, ограниченной линиями:

24. $x = 4 - y^2,\ x = 0.$

25. $x = \frac{1}{y},\ x = 0,\ x = 1,\ y = 2.$

26. $x = 2y - y^2,\ x = 0.$

27. $x = \frac{2}{y},\ y = 1,\ y = 2,\ x = 2.$

28. $x=\dfrac{1}{y},\ y=1,\ y=2,\ x=1.$

29. $x=9-y^2,\ x=0.$

30. $x=7-y^2,\ x=2.$

Задание 3. Найти полный дифференциал первого порядка указанных функций:

1. $z=(x^2+xy+y^3)^4.$
2. $z=x^2y^3\sin(xy).$
3. $z=xy\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}.$
4. $z=x^2y^2\,\mathrm{e}^{xy}.$
5. $z=\mathrm{e}^{x+y}\sin(xy).$
6. $z=xy\cdot\ln(x^2+y^2).$
7. $z=(x^3+2y^2-x^2y^2)^5.$
8. $z=(x^2+y^2)\operatorname{tg}(x^3y^2).$
9. $z=xy\cdot\operatorname{ctg}(x^2+y).$
10. $z=(x^2+y^3)\,\mathrm{e}^{xy}.$
11. $z=\ln(x^2+\mathrm{e}^y).$
12. $z=\operatorname{arctg}(x^2+y^3).$
13. $z=\arcsin\sqrt{xy}.$
14. $z=\operatorname{tg}(x^4+y^3).$
15. $z=\mathrm{e}^{x^2+xy+y^2}.$
16. $z=\ln(4x^3-y^5).$
17. $z=\operatorname{tg}\dfrac{x^2}{y}.$
18. $z=\cos^2(x+y).$
19. $z=xy\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}.$
20. $z=\sin^3(x^2+y^2).$
21. $z=(x^3+y^2+x^2y^2)^5.$
22. $z=xy\sin(x^2y^3).$
23. $z=(x+y)\,\mathrm{e}^{x^2y^3}.$
24. $z=(x^4+y^2)\operatorname{ctg}(xy).$
25. $z=xy^2\ln(x^2+y^2).$
26. $z=\mathrm{e}^{xy}\sin(xy).$
27. $z=xy\sin^2(x^2+y^2).$
28. $z=(x-y)^2\,\mathrm{e}^{xy}.$
29. $z=x^2y^3\arcsin(xy).$
30. $z=x\sqrt{y}-y\sqrt{x}.$

Задание 4. Исследовать на экстремум следующие функции:

1. $z=2x^3+6xy^2-60x-36y.$

2. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy.$

3. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$

4. $z = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y.$

5. $z = 2x^3 + 6xy^2 - 156x - 60y.$

6. $z = 3xy - x^3 - y^3.$

7. $z = 2x^3 + 6xy^2 - 222x - 72y.$

8. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 10.$

9. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10.$

10. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 10.$

11. $z = 2x^3 + 6xy^2 - 300x - 84y.$

12. $z = 2x^3 + 6xy^2 - 78x - 72y.$

13. $z = 6xy - x^2 y - xy^2 + 10.$

14. $z = 2x^3 + 6xy^2 - 174x - 120y + 20.$

15. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2 + 1.$

16. $z = -2x^3 - 6xy^2 + 60x + 36y.$

17. $z = 6xy - 2x^3 - 2y^3.$

18. $z = 6xy - x^3 - 8y^3.$

19. $z = -x^3 - 3xy^2 + 51x + 24y.$

20. $z = -2x^3 - 6xy^2 + 156x + 60y.$

21. $z = x^3 + y^3 - 3xy.$

22. $z = -2x^3 - 6xy^2 + 222x + 72y.$

23. $z = 6xy + 39x - 18y - 10 - x^3 - y^2.$

24. $z = 9xy - 10 - 3x^3 - 3y^3.$

25. $z = 6xy - 10 - x^3 - 8y^3.$

26. $z = 300x + 84y - 2x^3 - 6xy^2.$

27. $z = 78x + 72y - 2x^3 - 6xy^2$.

28. $z = x^2 y + xy^2 - 6xy - 10$.

29. $z = 174x + 120y - 2x^3 - 6xy^2 - 20$.

30. $z = xy^2 - 2x^3 - 5x^2 - y^2 - 1$.

Задание 5. Найти общее решение (общий интеграл, где нужно) дифференциальных уравнений первого порядка.

1. $y' = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.
2. $(x - y)\,\mathrm{d}x + (x + y)\,\mathrm{d}y = 0$.
3. $y' + 2xy = x\mathrm{e}^{-x}$.
4. $(xy - 1)\,\mathrm{d}x + \left(\dfrac{1}{2}x^2 + 2\right)\mathrm{d}y = 0$.
5. $(y + yx)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$.
6. $(2x + y)\,\mathrm{d}y + (x + 3y)\,\mathrm{d}x = 0$.
7. $y' + \operatorname{ctg} x \cdot y = \dfrac{1}{\cos x}$.
8. $(\cos x + 2xy)\mathrm{d}x + (x^2 + \sin y)\mathrm{d}y = 0$.
9. $y' = \dfrac{\sin y \cdot \sin x}{\cos y}$.
10. $2xy\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y = 0$.
11. $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2$.
12. $(y - \mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x + (x + 2y)\mathrm{d}y = 0$.
13. $y\,\mathrm{d}x + (x + yx)\,\mathrm{d}y = 0$.
14. $(2x + 5y)\,\mathrm{d}y - (x - 4y)\,\mathrm{d}x = 0$.
15. $y' - 2y = \mathrm{e}^x - x$.
16. $\left(y + \dfrac{4}{x^2}\right)\mathrm{d}x + \left(x - \dfrac{5}{y^2}\right)\mathrm{d}y = 0$.

17. $e^x \sin y\,dx + \cos y\,dy = 0.$

18. $(y-2x)\,dx - (3y+5x)\,dy = 0.$

19. $2xyy' + y^2 = -x^2 - 2x.$

20. $(3x+4yx-1)\,dx + (2x^2 - 3y + 2)\,dy = 0.$

21. $y' = x \cdot \operatorname{tg} y.$

22. $(2x+4y)\,dx - (4x-y)dy = 0.$

23. $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3 y^2.$

24. $(e^y + \cos x)\,dx + (x\,e^y - \sin y)\,dy = 0.$

25. $\sqrt{1-y^2} \cdot x\,dx + x^2\,dy = 0.$

26. $(x-4y+3)\,dx + (y-4x+5)\,dy = 0.$

27. $xy' + y - e^x = 0.$

28. $(\cos x + \sin y - 4)\,dx + (5 + x\cos y - x)\,dy = 0.$

29. $y' = \dfrac{e^x+1}{e^y+1}.$

30. $(3x-5y)\,dx - (y+5x)\,dy = 0.$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y'' = x\ln x.$
2. $xy'' - y' = 0.$
3. $xy'' - 2y' = x^2.$
4. $yy'' + 1 = (y')^2.$
5. $x^2 y'' = 4(y')^2.$
6. $y'' = x + \sin^2 3x.$
7. $yy'' = y'(y'+1).$
8. $xy'' - 2y' = x^3.$
9. $yy'' = (y')^2.$
10. $y'' x\ln x = y'.$
11. $xy'' = 4.$
12. $y'' - \dfrac{3(y')^2}{x^2} = 0.$
13. $(y-1)y'' = 3(y')^2.$
14. $yy'' = (y')^2 - y'.$
15. $(1+\sin x)y'' = \cos x \cdot y'.$
16. $y'' = x\,e^{-x}.$
17. $y'' \operatorname{tg} y = (y')^2.$
18. $xy'' - 4y' = 0.$

19. $y'' = \sqrt{1+(y')^2}$.

20. $xy'' - y' = x^5$.

21. $xy'' + \operatorname{ctg} y' = 0$.

22. $y'' = (x+1)\mathrm{e}^{2x}$.

23. $y'' = y'(1+y')$.

24. $xy'' + y' = x+1$.

25. $xy'' = y' \ln y'$.

26. $y'' = 2yy'$.

27. $x(y'' - x) = y'$.

28. $(y-1)y'' = 3(y')^2$.

29. $y'' - \dfrac{2y'}{x} = x^2$.

30. $y'' = (x-1)\cos 2x$.

Задание 7. Решить задачу Коши для уравнений со специальной правой частью.

1. $y'' - 4y' + 4y = 2x^2$, если $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.
2. $y'' + 8y' = 2x + 1$, если $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.
3. $y'' + 4y' + 4y = 4\mathrm{e}^{-2x}$, если $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$.
4. $y'' - 4y' + 3y = 2\mathrm{e}^{-3x}$, если $y(0) = 3,\ y'(0) = -1$.
5. $4y'' - y' = 14x$, если $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$.
6. $y'' + 2y' = 3x\mathrm{e}^{-3x}$, если $y(0) = 0,\ y'(0) = 3$.
7. $y'' + 5y' - 6y = (1-x)\mathrm{e}^{-2x}$, если $y(0) = 3,\ y'(0) = 1$.
8. $y'' + 2y' + 2y = 4 + x$, если $y(0) = 3,\ y'(0) = 2$.
9. $y'' - 3y' + 2y = 2x\mathrm{e}^{x}$, если $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.
10. $y'' + y' - 2y = 3x^2\mathrm{e}^{4x}$, если $y(0) = -1,\ y'(0) = -1$.
11. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + 4)\mathrm{e}^{3x}$, если $y(0) = 0,\ y'(0) = 4$.
12. $y'' - 2y' + y = 2x + 3$, если $y(0) = 3,\ y'(0) = 3$.
13. $y'' - 4y' - 5y = (2x-1)\mathrm{e}^{-4x}$, если $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.
14. $y'' - 4y' + 3y = 5\mathrm{e}^{3x}$, если $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$.
15. $y'' + 4y' = -2x\mathrm{e}^{-4x}$, если $y(0) = -1,\ y'(0) = 1$.
16. $y'' + 4y' + 4y = 3x\mathrm{e}^{-2x}$, если $y(0) = 3,\ y'(0) = 2$.
17. $y'' + y' - 6y = x\mathrm{e}^{2x}$, если $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

18. $y'' - y' + y = x^2 + 6,$ если $y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$

19. $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-4x},$ если $y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$

20. $y'' + 3y' - 10y = x^2 + 4x,$ если $y(0) = 0,\ y'(0) = 4.$

21. $y'' - 2y' - 10y = 4x - 1,$ если $y(0) = 3,\ y'(0) = 1.$

22. $3y'' + y' - 10y = x^2 + 5,$ если $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

23. $2y'' - 3y' + y = x\mathrm{e}^{3x},$ если $y(0) = 4,\ y'(0) = 1.$

24. $4y'' - 3y' = 2x\mathrm{e}^{x},$ если $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

25. $y'' - 4y' = (2x + 1) \cdot \mathrm{e}^{3x},$ если $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

26. $y'' + 7y' - 8y = 5x,$ если $y(0) = 2,\ y'(0) = 2.$

27. $3y'' - 4y' + 5y = \mathrm{e}^{x},$ если $y(0) = 0,\ y'(0) = 4.$

28. $y'' + y' = 3 - x,$ если $y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$

29. $y'' - y' + 3y = x \cdot \mathrm{e}^{2x},$ если $y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

30. $3y'' - y' = 5x,$ если $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гусак, А. А. Высшая математика: в 2 ч. / А. А.Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – Ч. 2. – 240 с.

2. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления (для втузов): в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М.: Наука, 2009. – Т. 2. – 300 с.

3. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – М.: Айрис Пресс, 2010. – 640 с.

4. Сборник задач по математике для втузов: в 2 ч. / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М.: Наука, 1985. – Ч. 2. – 200 с.

5. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П. Е. Данко [и др.]. – М.: Оникс, 2005. – Ч. 2. – 200 с.

6. Белько, И. В. Высшая математика для инженеров: в 2 ч. / И. В. Белько [и др.]. – М.: Новое знание, 2007. –Ч. 2. – 300 с.

7. Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Математика». Часть II. Рег. Номер: БНТУ/ФИТР 48-143, зарег. 01.08.2014. Бричикова Е.А. и др.

Учебное издание

ВОРОНОВИЧ Галина Константиновна
ГАБАСОВА Ольга Рафаиловна
ЗУБКО Ольга Леонидовна [и др.]

МАТЕМАТИКА

Пособие для студентов специальности
1-36 01 01 «Технология машиностроения»

в 4 частях

Часть 2

Редактор *В. И. Акуленок*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 25.05.2020. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 11,22. Уч.-изд. л. 8,77. Тираж 300. Заказ 648.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.