ЖУРНАЛ ПРИКЛАДНОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

Том XXI, выпуск 3 Сентябрь 1974 г.

УДК 535.36 : 523.035

Н. Н. Роговцов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МОМЕНТОВ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКОВ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ И СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЙ РАССЕИВАЮЩИХ СРЕДАХ

В ряде задач теории переноса излучения представляет интерес найти распределение поля излучения внутри рассеивающего объема. Однако иногда имеет смысл находить не само распределение поля излучения, а его пространственные моменты. Они зачастую не только представляют собой удобные параметры, характеризующие рассеивающую среду при известных источниках возбуждения, но и имеют непосредственный физический смысл. Моменты определялись, в частности, в работах [1, 2], но применительно только к бесконечным средам.

В настоящей работе предложена методика расчета пространственных моментов функции источника (в частности, среднего числа рассеяний фотона [3]) в плоской и сферически симметричной средах любой оптической толщины. Получены рекуррентные соотношения, которые сводят определение моментов к нахождению интенсивностей излучения, выходящего из среды. Они дают возможность судить о поле излучения внутри среды по выходящему излучению, которое для целого ряда задач можно найти аналитически или численно [2, 4, 5], и полезны при вычислении среднего числа рассеяний фотона. Полученные соотношения проиллюстрированы на конкретных задачах.

Выведем рекуррентные формулы для плоского слоя. Задача о расчете поля излучения в плоском рассеивающем слое для случая монохроматического изотропного рассеяния сводится к решению следующего уравнения переноса [5]:

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = I(\tau, \mu) - \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{1} I(\tau, \mu')\, d\mu' - f(\tau) \tag{1}$$

с граничными условиями

$$I(0, \mu)|_{\mu<0} = 0, \qquad I(\tau_0, \mu)|_{\mu>0} = 0. \tag{2}$$

Здесь $I(\tau, \mu)$ — интенсивность излучения на оптической глубине τ в направлении $\theta = \arccos \mu$ (θ — угол между внешней нормалью и направлением распространения излучения); λ — вероятность выживания кванта; τ_0 — оптическая толщина слоя; $f(\tau)$ — функция, описывающая первичные источники излучения. Функция источников $S(\tau)$ в уравнении (1) определяется соотношением

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{1} I(\tau, \mu)\, d\mu + f(\tau). \tag{3}$$

Введем в рассмотрение следующие величины:

$$\Phi(p, \ldots) = \int_0^{\tau_0} e^{-p\tau}\Phi(\tau, \ldots)\, d\tau, \tag{4}$$

где $\Phi(\tau, \ldots)$ может быть любой из функций, определенных выше. Учитывая (2) — (4) и применяя к уравнению (1) конечное интегральное преобразование Лапласа, получим

$$\begin{aligned} \bar{I}(p, \mu)|_{\mu<0} &= \frac{\bar{S}(p) + \mu e^{-p\tau_0} I(\tau_0, \mu)}{1-\mu p}, \\ \bar{I}(p, \mu)|_{\mu>0} &= \frac{\mu I(0, \mu) - \bar{S}(p)}{\mu p - 1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Принимая во внимание (3) — (5), будем иметь следующее соотношение:

$$\left(1 + \frac{\lambda}{2p}\ln\frac{1-p}{1+p}\right)\bar{S}(p) = \bar{f}(p) + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{\mu I(0, \mu)}{\mu p - 1)}\, d\mu -$$

$$-\frac{\lambda}{2}e^{-p\tau_0}\int_0^1 \frac{\mu I(\tau_0, -\mu)}{\mu p + 1}\, d\mu. \tag{6}$$

Все интегралы в (6) понимаем в обычном смысле, поскольку интересуемся полуотрезком $0 \leqslant p < 1$.

Разложим функции, входящие в (6), в ряды по параметру p в окрестности $p=0$. В результате получаем

$$\begin{gathered} \bar{S}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} M_k p^k, \qquad M_k = \int_0^{\tau_0} \tau^k S(\tau)\, d\tau; \\ \eta(p) = 1 + \frac{\lambda}{2p}\ln\frac{1-p}{1+p} = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\eta}_i p^i, \quad \bar{\eta}_0 = 1-\lambda, \\ \bar{\eta}_i|_{i\geqslant 1} = -\frac{\lambda}{2(i+1)}[1+(-1)^i]; \qquad \bar{f}(p) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!} M_i^0 p^i, \\ M_i^0 = \int_0^{\tau_0} \tau^i f(\tau)\, d\tau. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь M_k по определению представляет собой k-й пространственный момент функции источников $S(\tau)$. Учитывая, что степенные ряды (7) сходятся равномерно и абсолютно в некоторой окрестности $p=0$, и то, что разложение функции в степенной ряд единственно, получаем после подставки (7) в (6) следующую систему соотношений между интегральными величинами:

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!}\bar{\eta}_{m-k} M_k \equiv F_m \equiv \frac{(-1)^m}{m!} M_m^0 -$$

$$-\frac{\lambda}{2}\int_0^1 \mu^{m+1} I(0,\ \mu)\,d\mu-(-1)^m\frac{\lambda}{2}\sum_{k=0}^{m}\frac{\tau_0^{m-k}}{(m-k)!}\int_0^1 \mu^{k+1} I(\tau_0,\ -\mu)\,d\mu, \tag{8}$$

$$m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Легко заметить, что при $\lambda<1$ из (8) вытекают рекуррентные формулы для моментов M_n

$$M_0=\frac{F_0}{\bar{\eta}_0},$$

$$M_m=(-1)^m\,\frac{m!}{\bar{\eta}_0}\left\{F_m-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{k!}\,\bar{\eta}_{m-k}M_k\right\}, \tag{9}$$

$$m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Если рассеяние консервативно и, следовательно, $\bar{\eta}_0=0$, то из (8) получим рекуррентные соотношения

$$M_0=\frac{F_2}{\bar{\eta}_2},\quad M_1=-\frac{F_3}{\bar{\eta}_2},$$

$$M_{m-2}=(-1)^{m-2}\frac{(m-2)!}{\bar{\eta}_2}\left\{F_m-\sum_{k=0}^{m-4}\frac{(-1)^k}{k!}\,\bar{\eta}_{m-k}M_k\right\} \tag{10}$$

$$(m\geqslant 4).$$

С помощью (8) — (10) можно найти все пространственные моменты функции источников, если известны угловые моменты интенсивностей излучения, выходящего из слоя. Угловые же моменты могут быть иногда найдены более простым способом по сравнению с задачей об определении поля излучения внутри среды. Это имеет место, например, при отыскании асимптотик.

Рассмотрим теперь задачу о переносе излучения в шаре при монохроматическом изотропном рассеянии. Покажем, что и в этом случае можно найти формулы, аналогичные (8) — (10). Как известно [6], эта задача сводится к решению интегрального уравнения для функции источников $B(\tau)$, которая теперь определяется формулой

$$B(\tau)=\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} I(\tau,\ \mu)\,d\mu+f(\tau), \tag{11}$$

где $I(\tau,\ \mu)$ — интенсивность излучения на оптическом расстоянии τ от центра шара в направлении $\theta=\arccos\mu$ между направлением распространения излучения и радиусом, проведенным в точку наблюдения.

Для расчета поля излучения в шаре иногда полезно использовать уравнение переноса для плоского слоя [7—9]. Введем следующее уравнение для вспомогательной функции $I'(\tau,\ \mu)$:

$$\mu\,\frac{dI'(\tau,\ \mu)}{d\tau}=I'(\tau,\ \mu)-\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} I'(\tau,\ \mu')\,d\mu'-\tau f(|\tau|) \tag{12}$$

с граничными условиями

$$I'(-\tau_0,\ \mu)|_{\mu<0}=0;\qquad I'(\tau_0,\ \mu)|_{\mu>0}=0. \tag{13}$$

Все обозначения в (12) имеют формально тот же смысл, что и для уравнения (1). Вспомогательная функция источников $B'(\tau)$ определяется таким образом:

$$B'(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{1} I'(\tau, \mu') d\mu' + \tau f(|\tau|), \tag{14}$$

$$-\tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0.$$

Легко показать, что функция источников $B(\tau)$ для шара связана с $B'(\tau)$ соотношением

$$B(\tau) = \frac{B'(\tau)}{\tau} = \frac{\lambda}{2\tau} \int_{-1}^{1} I'(\tau, \mu) d\mu + f(\tau),$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0. \tag{15}$$

После этих предварительных сведений перейдем к нахождению моментов $B(\tau)$. Изложим вначале метод расчета четных моментов. Введем обозначения

$$\overline{I}'(p, \mu) = \int_{-\tau_0}^{\tau_0} e^{-p\tau} I'(\tau, \mu) d\tau, \quad \overline{B}'(p) = \int_{-\tau_0}^{\tau_0} e^{-p\tau} B'(\tau) d\tau,$$

$$\overline{f}(p) = \int_{-\tau^0}^{\tau_0} \tau f(|\tau|) e^{-p\tau} d\tau. \tag{16}$$

Теперь по аналогии с предыдущим применим к уравнению (12) конечное интегральное преобразование Лапласа на отрезке $[-\tau_0, \tau_0]$. Учитывая (13) и проделывая те же преобразования, что и в задаче для плоского слоя, получим интегральные соотношения

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \bar{\eta}_{m-k} M'_k = \frac{(-1)^m}{m!} M_m^{0'} - \frac{\lambda}{2} \sum_{k=0}^{m} [1 - (-1)^m] \times$$

$$\times \frac{\tau_0^{m-k}}{(m-k)!} \int_0^1 \mu^{k+1} I'(-\tau_0, \mu) d\mu \equiv F'_m, \tag{17}$$

где

$$M'_k = 2M_{k+1} = 2 \int_0^{\tau_0} \tau^{k+1} B(\tau) d\tau \quad \text{при} \quad k = 2r+1,$$

$$M'_k = 0 \quad \text{при} \quad k \neq 2r+1,$$

$$M_m^{0'} = 2 \int_0^{\tau_0} \tau^{m+1} f(\tau) d\tau \quad \text{при} \quad m = 2r+1, \tag{18}$$

$$M_m^{0'} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq 2r+1,$$

$$r = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Величины M_n в (18) по определению представляют собой пространственные моменты функции источников $B(\tau)$ шара. При выводе (17) было учтено легко проверяемое тождество

$$I'(\tau_0, -|\mu|) \equiv -I'(-\tau_0, |\mu|). \tag{19}$$

Из (18) видно, что (17) дает возможность найти M_n при четных значениях n.

Учитывая (7), (18), из (17) нетрудно получить рекуррентные формулы для моментов M_n

$$M_2 = -\frac{F_1'}{2\bar{\eta}_0},$$

$$\frac{M_{m+1}}{m!}\bar{\eta}_0 + \bar{\eta}_2\frac{M_{m-1}}{(m-2)!} = -\frac{1}{2}F_m' + \sum_{k=0}^{m-3}\bar{\eta}_{m-k}\frac{(-1)^k}{k!}M_{k+1}$$

$$\text{при} \quad m = 2r + 1 \quad (r = 1, 2, 3, \ldots). \tag{20}$$

Выражения (20) дают возможность рассчитать пространственные моменты функции источников $B(\tau)$ шара (в частности, среднее число рассеяний фотона), если определена $I'(-\tau_0, |\mu|)$. Но определение функции $I'(-\tau_0, |\mu|)$ сводится к решению соответствующего уравнения переноса излучения для плоского слоя.

Что же касается случая определения нечетных моментов $B(\tau)$, то ограничимся следующим замечанием. Нечетные моменты по аналогии с четными можно выразить через угловые моменты вспомогательной функции $I'(\tau, \mu)$, но только в точках $\tau=0$ и $\tau=-\tau_0$. В свою очередь $I'(0, \mu)$ можно рассчитать методами, изложенными в [6, 7], а затем найти нечетные моменты по формулам, аналогичным (17), которые ради краткости выписывать не будем.

В качестве приложения полученных соотношений найдем несколько первых пространственных моментов для следующей задачи. Рассмотрим полубесконечный рассеивающий слой, который возбуждается изотропным излучением интенсивности I_0. Тогда, как известно [5], интенсивность выходящего излучения $I(0, \mu)$ равна

$$I(0, \mu) = I_0(1 - \sqrt{1-\lambda}\,\varphi(\mu)), \tag{21}$$

где $\varphi(\mu)$ — функция Амбарцумяна [4]. Подставим это выражение в формулу (9), учтем (7) и положим $\tau_0 = \infty$. В итоге получим, например, для первых моментов M_0, M_1, M_2 и $\bar{\tau} = M_1/M_0$ следующие формулы:

$$M_0 = \frac{\lambda}{2}I_0\frac{\alpha_1}{\sqrt{1-\lambda}}, \quad M_1 = \frac{\lambda I_0}{2(1-\lambda)}\left(\frac{2}{3} - \sqrt{1-\lambda}\,\alpha_2\right),$$

$$M_2 = \frac{\lambda I_0}{1-\lambda}\left(\frac{\lambda\alpha_1}{3\sqrt{1-\lambda}} + \sqrt{1-\lambda}\,\alpha_3\right), \quad \bar{\tau} = \frac{\frac{2}{3} - \sqrt{1-\lambda}\,\alpha_2}{\alpha_1\sqrt{1-\lambda}}, \tag{22}$$

где α_i представляют собой моменты функции Амбарцумяна $\varphi(\mu)$ [4, 5], а величина $\bar{\tau}$ определяет среднее отклонение распределения поля излучения от границы рассеивающего слоя. Нетрудно заметить, что по формулам (9) можно довольно просто получить моменты и более высокого порядка.

Теперь найдем асимптотические формулы для M_n в случае консервативного рассеяния при возбуждении слоя большой оптической толщины изотропным излучением интенсивности I_0, падающего на одну границу. Выражения для интенсивностей излучения, выходящего из слоя, для указанной задачи имеют вид [5]

$$I(0,\ \mu)|_{\mu>0} = I_0 \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) \varphi(\mu) - \frac{\beta_0}{2} \psi(\mu) \right) \right],$$

$$I(\tau_0,\ \mu)|_{\mu<0} = I_0 \left[\frac{\beta_0}{2} \varphi(|\mu|) + \left(1 - \frac{\alpha_0}{2} \right) \psi(|\mu|) - e^{-\frac{\tau_0}{|\mu|}} \right]. \tag{23}$$

Здесь $\psi(\mu)$ и β_i — соответственно вторая функция Амбарцумяна и ее моменты [5]. Если подставить (23) в (10) и учесть асимптотические формулы для $\varphi(\mu)$, $\psi(\mu)$ и α_i, β_i при $\tau_0 \gg 1$ [10], то, проделав элементарные вычисления, получаем следующие простые асимптотики:

$$M_i|_{\tau_0 \gg 1} \sim I_0 \frac{\tau_0^{i+1}}{(i+2)(i+1)} \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{24}$$

Из формулы (24), если учесть определение среднего числа рассеяний фотона N [3], следует физически очевидный результат

$$N \sim 2\tau_0 \qquad \text{при} \qquad \tau_0 \gg 1. \tag{25}$$

Полученные соотношения были проиллюстрированы на простых задачах для плоского слоя. В следующем сообщении предполагается применить эти результаты для отыскания среднего числа рассеяний фотона, пространственных моментов, функции источников, интенсивностей излучения для ряда более сложных случаев. Приведенные в работе соотношения особенно полезны при нахождении асимптотик величин, упомянутых выше.

Используя метод, подобный изложенному, можно рассмотреть задачи с учетом неизотропности рассеяния и слоистости среды.

В заключение автор выражает глубокую признательность А. М. Самсону за ряд критических замечаний и внимание к работе.

Литература

1. У. Фано, Л. Спенсер, М. Бергер. Перенос гамма-излучения. М., Госатомиздат, 1963.
2. К. Кейз, П. Цвайфель. Линейная теория переноса. М., «Мир», 1972.
3. В. В. Соболев. Астрофизика, **2**, 135, 239, 1966.
4. В. А. Амбарцумян. Научные труды, т. 1. Ереван, Изд. АН АрмССР, 1960.
5. В. В. Соболев. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М., Гостехиздат, 1956.
6. Г. И. Марчук, В. И. Лебедев. Численные методы в теории переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1971.
7. А. А. Шкурпелов, Ю. И. Ершов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 7, № 6, 1402, 1967.
8. Н. Н. Роговцов. Материалы II республиканской конференции молодых ученых по физике, вып. 2. Минск, 1973, стр. 68.
9. Н. Н. Роговцов. Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук, № 3, 97, 1973.
10. В. В. Иванов. Перенос излучения и спектры небесных тел. М., «Наука», 1969.

Поступило в редакцию 10 декабря 1973 г.