nance of the reflected light rises the more sharply, the more absorption is in the glass. It is found experimentally that $r_{диф} > r_д$ where $r_{диф}$ is the diffuse-reflection coefficient for the diffusely incident light and $r_д$ is that for $\alpha = 0°$.

Литература

1. **Амбарцумян В. А.**— ЖЭТФ, 1943, т. 13, № 9—10, с. 323—354.
2. **Соболев В. В.**— Астрофизика, 1968, т. 4, № 3, с. 325—335.
3. **Розенберг Г. В.**— В кн.: Спектроскопия светорассеивающих сред. Минск: Изд-во АН БССР, 1963, с. 5—36.
4. **Войшвилло Н. А.**— Опт. и спектр., 1975, т. 39, № 4, с. 777—779.
5. Каталог светорассеивающих стекол (оптических).— Составитель Войшвилло Н. А.— Л.: Изд-во ГОИ им. С. И. Вавилова, 1975.—56 с.
6. **Войшвилло Н. А.**— Светотехника, 1980, № 10, с. 11—13.
7. **Войшвилло Н. А., Артюх Е. П.**— ОМП, 1977, № 1, с. 37—39.
8. **Войшвилло Н. А.**— ЖПС, 1981, т. 35, № 1, с. 182—183.
9. **Войшвилло Н. А.**— Опт. и спектр., 1974, т. 36, № 6, с. 1161—1164.
10. **H. C. van de Hulst.**— J. Computat. Physics, 1968, v. 3, N 2, p. 291—300.
11. **Danielson R. E., Moore D. R., H. C. van de Hulst.**— J. Atmosph. Sci., 1969, v. 26, N 5, p. 1078—1087.
12. **Ueskgi A., Irvin W. M.**— J. Atmosph. Sci., 1970, v. 159, N 1, p. 127—137.
13. **Иванов А. П.** Оптика рассеивающих сред.— Минск: Наука и техника, 1969.— 591 с.
14. **Minnaert M.**— Astrophys. J., 1941, v. 93, N 3, p. 403—410.
15. **Яновицкий Э. Г.**— Астрометрия и астрофизика, 1972, № 15, с. 63—76.
16. **Покровский Г. И.** Физические основы маскировки.— М.: Изд-во Воен.-инж. Акад. РККА В. В. Куйбышева, 1939.—115 с.
17. **Самсон А. М.**— ИФЖ, 1958, т. 1, № 1, с. 65—74.
18. **Зеге Э. П., Бушмакова О. В., Кацев И. Л., Коновалов М. В.**— ЖПС, 1969, т. 30, № 6, с. 900—907.
19. **Соболев В. В.** Рассеяние света в атмосферах планет.— М.: Наука, 1972.—335 с.
20. **Романова Л. М.**— Опт. и спектр., 1963, т. 14, № 2, с. 262—269.

Поступило в редакцию 09.11.81,
после доработки — 14.09.82.

УДК 535.36

Н. Н. Роговцов

ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В ПОГЛОЩАЮЩИХ, РАССЕИВАЮЩИХ СРЕДАХ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Геометрические и физические характеристики границ реальных и модельных рассеивающих, поглощающих сред могут быть весьма разнообразными и в существенной степени определять закономерности переноса излучения. Поэтому важным вопросом является исследование влияния свойств границы рассеивающего, поглощающего тела на процесс переноса в нем. Один из возможных аналитических методов решения такого типа проблем был предложен в работах [1—6]. Этот подход в значительной степени основан на получении следствий из общих соотношений инвариантности, которые связывают между собой решения различных или однотипных задач. Следует подчеркнуть, что указанные соотношения, выведенные в [1—5] из физических соображений или на основе метода инвариантного доопределения прямо из уравнения переноса, можно применять для исследования переноса излучения в объектах произвольной конфигурации, которые не обладают какой-либо содержательной симметрией. Ряд конкретных следствий упомянутых выше соотношений для таких сред был найден в [4—6]. Наличие же определенной симметрии задачи приводит к существенным упрощениям и позволяет с большей пользой использовать общие соотношения инвариантности при расчете характеристик полей излучения.

В настоящей работе на основе общих соотношений инвариантности найден ряд аналитических решений стационарных и нестационарных уравнений переноса излучения для случая рассеивающих, поглощающих объектов, имеющих форму слоя, шара, цилиндра или правильных многогранников. Данные результаты позволяют в определенной степени оценить влияние конфигурации объекта и подстилающих поверхностей на характеристики полей излучения.

Пусть рассеивающее тело V_0 ограничено невогнутой полностью прозрачной для излучения границей σ и содержит внутри себя нестационарные источники, задаваемые функцией $g(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$ $(g(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)\equiv 0$ при $t<0$; здесь и далее будут использоваться обозначения, принятые в работах [2—5]). Тогда из соотношений (4), (7) статьи [5] для случая консервативного рассеяния нетрудно получить следующее общее выражение для среднего времени t^* выхода энергии излучения через границу σ:

$$t^* = (M_1/M_0) = t_0^* + \Big(\iiint\limits_{\overset{0}{V_0}} dV' \int\limits_{\Omega} \overline{g}(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}', 0)\, d\Omega'\Big)^{-1} \times$$

$$\times \iiint\limits_{V} \frac{dV}{v} \int\limits_{\Omega} d\Omega \iiint\limits_{\overset{0}{V_0}} dV' \int\limits_{\Omega} G_*(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}', \mathbf{\Omega}', V_0)\, \overline{g}(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}', 0)\, d\Omega', \tag{1}$$

где

$$t_0^* = \iiint\limits_{\overset{0}{V_0}} dV' \int\limits_{\Omega} d\Omega' \int\limits_0^\infty t g(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}', t)\, dt \Big(\iiint\limits_{\overset{0}{V_0}} dV' \int\limits_{\Omega} \overline{g}(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}', 0)\, d\Omega'\Big)^{-1};$$

M_0 и M_1 — соответственно временные моменты нулевого и первого порядков от энергии излучения, выходящего в единицу времени из тела V_0; v — скорость распространения излучения в среде; $G_*(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}', \mathbf{\Omega}', V_0)$ — объемная функция Грина стационарного уравнения переноса для V_0; $\overline{g}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, 0) = \int\limits_0^\infty g(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)\, dt$; $\overset{0}{V}_0 = V_0 \setminus \sigma$ — внутренняя часть тела V_0 (т. е. множество точек, принадлежащих V_0, но не лежащих на σ).

Предположим теперь, что тело V_0 однородно и имеет форму правильного многогранника (т. е. тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра). Пусть m граней правильного многогранника облучаются изотропным излучением, имеющим интенсивность $\chi(t)$, не зависящую от положения на этих гранях. В этом случае из (1) с учетом симметрии тела V_0 и закона сохранения энергии получаем такое выражение для

$$t^* = t_0^* + 4\mu/(vS), \tag{2}$$

где $\mu(V_0)$ и S — соответственно объем и площадь границы правильного многогранника; $t_0^* = \int\limits_0^\infty t\chi(t)dt / \int\limits_0^\infty \chi(t)\, dt$. С учетом явных выражений для μ и S [7] находим следующие соотношения для второго слагаемого в (2): $a\sqrt{2}/3\sqrt{3}v$ (тетраэдр), $2a/3v$ (куб), $2a\sqrt{2}/3v\sqrt{3}$ (октаэдр), $(15 + 7\sqrt{5})a/3v\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$ (додекаэдр), $(3+\sqrt{5})a/3v\sqrt{3}$ (икосаэдр) (a — длина ребра соответствующего правильного многогранника). Заметим, что t^* совершенно не зависит от коэффициента рассеяния.

Если $\chi(t) = \text{const} = I_0$ (т. е. m граней облучаются стационарным излучением с указанными выше свойствами), то непосредственно из стационарного аналога уравнения (4), выведенного в работе [2], с учетом симметрии задачи находим для случая консервативного рассеяния следующее выражение для средней интенсивности излучения в центре описанной сферы правильного многогранника:

$$I^{\text{ср}} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} I(\theta, \mathbf{\Omega}, V_0)\, d\Omega = mI_0/n, \tag{3}$$

где θ — нулевой радиус-вектор, определяющий центр описанной сферы, $I(...)$ — интенсивность излучения ($n=4$, 6, 8, 12, 20; $1 \leqslant m \leqslant n$). Формулы (2), (3), помимо того, что представляют самостоятельный интерес, могут служить тестами для апробации численного метода. Частный случай формулы (3) для изотропного рассеяния и $n=6$ был получен другим способом ранее в [8]. Выражения (2), (3) справедливы для любых индикатрис рассеяния.

Предположим, что рассеивающий объект V обладает плоскопараллельной, сферической или цилиндрической симметрией свойств элементарного объема (в случае плоскопараллельной среды будем дополнительно считать, что имеет место еще и симметрия относительно середины слоя). Пусть граница σ тела V является изотропно отражающей с альбедо $C(|\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Omega}|)$, где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к σ.

Если распределение источников в теле V тоже обладает указанной выше симметрией, то из соотношения инвариантности (9) работы [2] с помощью элементарных преобразований нетрудно получить следующее выражение для образа по Лапласу $\overline{I}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, p, V)$ от интенсивности излучения в теле V:

$$\overline{I}(\mathbf{r},\ \mathbf{\Omega},\ p,\ V) = \overline{I}(\mathbf{r},\ \mathbf{\Omega},\ p,\ V_0) +$$
$$+\ \omega \iint\limits_{\sigma_1} d\sigma_1' \int\limits_{\Omega_-} |\mathbf{n}'\cdot\mathbf{\Omega}'|\,\overline{G}_*(\mathbf{r},\ \mathbf{\Omega},\ \mathbf{r}',\ \mathbf{\Omega}',\ p,\ V_0)\,d\Omega'; \tag{4}$$

$$\omega = (1/\pi\omega_1) \int\limits_{\Omega_+} C(|\mathbf{n}'\cdot\mathbf{\Omega}'|)|\mathbf{n}'\cdot\mathbf{\Omega}'|\,\overline{I}(\mathbf{r}',\ \mathbf{\Omega}',\ p,\ V_0)\,d\Omega',$$

$$\omega_1 = 1 - (1/\pi)\iint\limits_{\sigma_1} d\sigma_1'' \int\limits_{\Omega_-} |\mathbf{n}''\cdot\mathbf{\Omega}''|\,d\Omega'' \int\limits_{\Omega_+} C(|\mathbf{n}'\cdot\mathbf{\Omega}'|) \times$$
$$\times\ |\mathbf{n}'\cdot\mathbf{\Omega}'|\,\overline{G}_*(\mathbf{r}',\ \mathbf{\Omega}',\ \mathbf{r}'',\ \mathbf{\Omega}'',\ p,\ V_0)\,d\Omega'. \tag{5}$$

Здесь V_0 — тело V, в котором изотропно отражающая граница заменена полностью прозрачной для излучения поверхностью σ_1; радиус-вектор $\mathbf{r}'$ в (5) задает точки на σ_1; $\overline{I}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, p, V_0)$ и $\overline{G}_*(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}', \mathbf{\Omega}', p, V_0)$ — преобразования Лапласа соответственно от интенсивности излучения в объекте V_0 (когда он содержит такие же источники, как и тело V) и функции Грина нестационарного уравнения переноса для случая тела V_0; $\mathbf{r}$ задает точки внутри V или V_0. Итак, формула (4) сводит решение задач теории переноса излучения в рассеивающем, поглощающем теле V (при наличии указанной симметрии), ограниченном изотропно отражающей границей, к расчету полей излучения в среде V_0, не имеющей подстилающей поверхности.

Если в среде имеет место консервативное рассеяние, а $C(|\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Omega}|) = \pi\rho = \mathrm{const}$, то из соотношения (13) работы [4] с учетом закона сохранения энергии нетрудно найти для t_1^* (среднее время поглощения энергии излучения границей тела V) такое выражение:

$$t_1^* = t^* + \rho w (1 - \pi\rho)^{-1}, \tag{6}$$

где величина w равна $2\pi D/v$, $2\pi D/3v$, $\pi D/v$ соответственно для слоя, шара, цилиндра ($v \equiv \mathrm{const}$, D — толщина слоя или диаметр шара, цилиндра); t^* надо вычислять по формуле (1), причем в последней под V_0 надо понимать тело V, в котором изотропно отражающая граница заменена на полностью прозрачную для излучения поверхность. Формула (6) справедлива для любого распределения первичных источников $g(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$ в V и сводит вычисление t_1^* к расчету t^* для тела V_0, уже не имеющего в отличие от V подстилающей поверхности.

Рассмотрим однородный шар V_0, ограниченный полностью прозрачной границей σ и содержащий внутри себя любые стационарные источники $g(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$. В данном случае из стационарных аналогов соотношений инвариантности (9) или (1), выведенных соответственно в работах [2] и [4], с учетом асимптотики функции Грина для бесконечной однородной среды V_∞ (см., например, [9]) можно получить ряд оценок и асимптотик для интенсивности излучения в центре шара (в указанных соотношениях в качестве V^* надо брать V_∞). Выпишем здесь для примера только асимптотику для средней интенсивности излучения в центре оптически толстого консервативно рассеивающего шара для случая сферической индикатрисы рассеяния. Она имеет вид

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} I(\theta, \mathbf{\Omega}, V_0)\, d\Omega = I_\infty^{\text{ср}}(\theta) - 3\alpha^2(16\pi^2\tau_0)^{-1} \times$$

$$\times (1-(\varkappa^*/\tau_0))\, F + O(\alpha^2 F/\tau_0^3), \quad \tau_0 \to \infty, \tag{7}$$

где $I_\infty^{\text{ср}}(\theta)$ — средняя интенсивность излучения в центре шара V_0, «погруженного» в V_∞ вместе с источниками; α — коэффициент ослабления; $F = \iiint\limits_{V_0} dV \int\limits_{\Omega} g(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})\, d\Omega$; τ_0 — оптический радиус шара; θ — нулевой вектор, задающий центр шара; $\varkappa^* = \iint\limits_{\sigma} d\sigma' \int\limits_{\Omega_+} (\mathbf{n}'\cdot\mathbf{\Omega}')^2 I(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}', V_0)\, d\Omega'/F$ $(0 \leqslant \varkappa^* \leqslant 1)$.

Формулу (7) можно использовать при расчете среднего времени t_1^* поглощения энергии излучения изотропно отражающей границей (с постоянным альбедо) консервативно рассеивающего оптически толстого однородного шара, когда в его центре находится импульсный точечный изотропный источник. Соответствующая асимптотика имеет вид

$$t_1^* = \tau_0^2(2\alpha v)^{-1} + (\varkappa^* + 4\pi\rho(3(1-\pi\rho))^{-1})(\tau_0/\alpha v) +$$

$$+ O(1/\alpha v), \quad \tau_0 \to \infty. \tag{8}$$

Заметим, что при $1-\pi\rho \ll 1$ неопределенность для значений $\varkappa^*$ практически не влияет на величину второго члена в (8).

Приведем еще асимптотическое выражение для t_1^* в случае однородного оптически толстого консервативно рассеивающего шара, ограниченного изотропно отражающей границей σ с альбедо $\pi\rho = \text{const}$ и имеющего на внутренней стороне σ изотропный полусферический точечный источник (он испускает излучение в полусферу Ω_-, которая определяется условием $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Omega})<0$). Из (1), (6) с учетом формулы (25) работы [10] получаем такое выражение для главного члена асимптотики

$$t_1^* \sim 2[3^{-\frac{1}{2}} + 2\pi\rho(3(1-\pi\rho))^{-1}](\alpha v)^{-1}\tau_0,$$

$$\tau_0 \to \infty. \tag{9}$$

Найдем теперь явные выражения для t_1^*, когда внутри плоскопараллельных, сферически или цилиндрически симметричных однородных поглощающих сред, ограниченных изотропно отражающими границами с альбедо $\pi\rho = \text{const}$, находится точечный мононаправленный источник. Посредством элементарных преобразований из соотношений (13), (14) работы [4] находим следующие формулы для t_1^* соответственно для слоя, шара, цилиндра:

$$t_1^* = t_0^* + \xi^* v^{-1} + 2\pi\rho\tau_0(\varkappa v b_1)^{-1} E_2(\tau_0), \tag{10}$$

$$b_1 = 1 - 2\pi\rho E_3(\tau_0);$$

$$t_1^* = t_0^* + \xi^* v^{-1} + \frac{\pi\rho}{\varkappa v b_2 \tau_0^2}[1-(1+2\tau_0+2\tau_0^2)\exp(-2\tau_0)],$$

$$b_2 = 1 + \frac{\pi\rho}{2\tau_0^2}[(1+2\tau_0)\exp(-2\tau_0)-1];$$

$$t_1^* = t_0^* + \xi^* v^{-1} + \frac{8\rho\tau_0}{\varkappa v b_3}\int\limits_0^{(\pi/2)}\cos^2\varphi d\varphi \int\limits_0^{(\pi/2)}\sin\theta \exp\left(-\frac{2\tau_0\cos\varphi}{\sin\theta}\right)d\theta,$$

$$b_3 = 1 - 4\rho \int\limits_0^{(\pi/2)}\cos\varphi d\varphi \int\limits_0^{(\pi/2)}\sin^2\theta \exp\left(-\frac{2\tau_0\cos\varphi}{\sin\theta}\right)d\theta,$$

где ξ^* — расстояние от источника до границы тела вдоль луча, исходящего из него в направлении испускания излучения; t_0^* — средняя длительность импульса источника; τ_0 — оптическая толщина слоя или оптический радиус шара, цилиндра; $\varkappa$ — коэффициент поглощения; $E_n(x) = \int\limits_0^1 \mu^{n-2}\exp(-x/\mu)\,d\mu$. При отсутствии поглощения ($\varkappa = 0$) последние слагаемые в формулах для t_1^* будут равны $2\pi\rho D/(v(1-\pi\rho))$ (слой), $2\pi\rho D/(3v(1-\pi\rho))$ (шар), $\pi\rho D/(v(1-\pi\rho))$ (цилиндр). Эти выражения наглядно демонстрируют влияние формы границы на величину t_1^*.

Если мононаправленный точечный источник стационарен, то из соотношений (13), (14) работы [4] следует, что отношения энергии излучения E, поглощенной в единицу времени границей тела, к мощности источника E_0 имеют вид

$$(E/E_0) = (1-\pi\rho)\, b_1^{-1}\exp(-\varkappa\xi^*) \quad \text{(слой)},$$

$$(E/E_0) = (1-\pi\rho)\, b_2^{-1}\exp(-\varkappa\xi^*) \quad \text{(шар)},$$

$$(E/E_0) = (1-\pi\rho)\, b_3^{-1}\exp(-\varkappa\xi^*) \quad \text{(цилиндр)}.$$

Формулы, приведенные в данной работе, в явном виде иллюстрируют влияние конфигурации среды и наличия подстилающих поверхностей на перенос излучения в ней. Полученные здесь и в [4—6] результаты показывают, что подход, предложенный в [1—6] (см. также ссылки в них), позволяет аналитическими средствами решить достаточно широкий круг задач теории переноса излучения в рассеивающих поглощающих средах различной формы.

Summary

Using the general invariance relations, a series of exact and asymptotic solutions is found to steady- and unsteady-state equations of radiation transfer for the case of scattering and absorbing objects having the form of a layer, sphere, cylinder or regular polyhedrons. The obtained results allow estimation to a certain extent of the effect of the medium configuration and properties of underlying surfaces on characteristics of radiation fields.

Литература

1. **Роговцов Н. Н.**— Изв. АН СССР, ФАО, 1980, т. 16, № 3, с. 244—253.
2. **Роговцов Н. Н.**— ЖПС, 1981, т. 34, № 2, с. 335—342.
3. **Роговцов Н. Н.**— Докл. АН БССР, 1981, т. 25, № 5, с. 420—423.
4. **Роговцов Н. Н.**— ЖПС, 1981, т. 35, № 6, с. 1044—1050.
5. **Роговцов Н. Н.**— Докл. АН БССР, 1983, т. 27, № 1, с. 34—37.
6. **Роговцов Н. Н.**— Докл. АН БССР, 1983, т. 27, № 10, с. 901—903.
7. **Рывкин А. А., Рывкин А. З., Хренов Л. С.** Справочник по математике.— М.: Высшая школа, 1964.—520 с.
8. **Crosbie A. L., Schrenker R. G.**— JQSRT, 1982, v. 28, N 6, p. 507—526.
9. **Долин Л. С.**— В кн.: Оптика моря / Под ред. К. С. Шифрина. М.: Наука, 1983, с. 118—122.
10. **Роговцов Н. Н.**— ЖПС, 1975, т. 22, № 6, с. 1086—1092.

Поступило в редакцию 01.02.84.