

УДК 535.3914

Т. С. Биба, Н. С. Петров, И. З. Джилавдари

ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА ОТ НЕОДНОРОДНО-ИНВЕРСНОЙ СРЕДЫ С ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТЬЮ УСИЛЕНИЯ

При теоретическом рассмотрении вопросов отражения света от инверсных сред обычно исходят из модели полубесконечной усиливающей среды (однородной либо неоднородной) [1—6]. Эта модель инверсной среды далека от реальности, и при таком подходе возникает известная трудность, связанная с проблемой выбора правильного решения для поля излучения в инверсной среде. Для ее разрешения в рамках рассматривавшихся до сих пор моделей инверсных сред приходится вводить некоторые дополнительные физические критерии, например требование непрерывного по поглощению (усилению) перехода решений для усиливающей среды в соответствующие решения для прозрачной среды [1, 2, 4, 5], что вызывает определенную неудовлетворенность. По-видимому, предположение о полубесконечности усиливающей среды является грубым приближением и может рассматриваться лишь как первый шаг в построении правильной теории явления отражения света от инверсных сред.

Данная работа посвящена решению задачи об отражении света инверсной (усиливающей) средой в более реальной постановке, а именно в предположении, что область усиления ограничена по глубине.

Рассмотрим среду, которая характеризуется комплексной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + i\bar{\tau}, \quad (1)$$

где

$$\bar{\tau} = \tau - (\tau_0 + \tau) e^{-2k\gamma z}; \quad \tau_0, \tau > 0; \quad \varepsilon_0 = \text{const}, \quad (2)$$

причем соотношение между τ_0 и τ в общем случае может быть любым. Здесь z — расстояние от границы раздела двух сред ($z \geq 0$); γ — некоторый параметр², характеризующий скорость изменения мнимой части ε , ответственной за поглощение (усиление), с глубиной z ; τ и $-\tau_0$ — соответственно значения $\bar{\tau}$ на бесконечно большом удалении от границы раздела ($z \rightarrow \infty$) и вблизи границы ($z \simeq 0$); $k = \omega/c$ — волновое число в вакууме (введено для удобства расчетов.) Естественно, что в общем случае здесь следует учитывать и неоднородность показателя преломления (зависимость ε_0 от z), который может иметь убывающий либо нарастающий с глубиной профиль. Однако мы ограничимся пока учетом неоднородности среды по поглощению (усилению), поскольку она в данном случае более существенна.

¹ В стационарной электродинамической задаче об отражении света усиливающей средой строгого обоснования этого физически вполне естественного требования, однако, не получено.

² Величину γ можно связать с толщиной h инверсного слоя (см. ниже).

Согласно (2), в этом случае существует некая плоскость $z = h = (1/2k\gamma) \ln [(\tau_0 + \tau)/\tau]$ внутри неоднородной среды, для которой $\bar{\tau} = 0$, при этом для $z \leq h$ $\bar{\tau} \leq 0$, а для $z \geq h$ $\bar{\tau} \geq 0$. Таким образом, область усиления ($\bar{\tau} < 0$) в рассматриваемой модели неоднородной среды ограничена, т.е. здесь мы фактически имеем дело с усилением в некоем инверсном слое. Такая ситуация на опыте может реализоваться при «накачке» рабочей среды со стороны границы раздела, что имело место, например, в реальном эксперименте [7—9].

Итак, рассмотрим граничную задачу об отражении плоской электромагнитной волны, падающей из прозрачной среды с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , на границу раздела ее с неоднородно-инверсной средой вида (1), (2). Для простоты ограничимся случаем, когда падающее излучение линейно поляризовано перпендикулярно плоскости падения (*s*-компонент). Дальнейшее решение поставленной граничной задачи будем проводить аналогично [5]. При этом из волнового уравнения для амплитуды поля $f(z)$ в неоднородно-инверсной среде получаем следующее уравнение (см. также [4])

$$f''_z + k^2 g(z) f(z) = 0, \tag{3}$$

$$g(z) = A + B e^{-2k\gamma z},$$

$$A = \epsilon_0 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha + i\tau, \quad B = -i(\tau_0 + \tau).$$

Решением данного уравнения является функция Бесселя I рода с комплексными аргументом (ξ) и индексом (ν), причем

$$\nu^2 = -\frac{A}{\gamma^2}, \quad \xi = \frac{\sqrt{B}}{\gamma} e^{-k\gamma z}. \tag{4}$$

Представляя ν в виде $\nu = \nu_1 - i\nu_2$, из (4) находим

$$\nu_1 = \frac{1}{\gamma\sqrt{2}} \sqrt{-a + \sqrt{a^2 + \tau^2}}, \quad \nu_2 = \frac{1}{\gamma\sqrt{2}} \sqrt{a + \sqrt{a^2 + \tau^2}}, \tag{5}$$

где $a = \epsilon_0 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha$ и, согласно (5), $\nu_1 \nu_2 \sim \tau > 0$, т.е. ν_1 и ν_2 — одного знака. В данном случае эти знаки выбраны из требования затухания поля излучения в неоднородно-инверсной среде на бесконечности, так как при этом ($z \rightarrow \infty$) $\epsilon = \epsilon_0 + i\tau$, т.е. среда становится поглощающей. Поскольку в этом случае переменная $\xi \rightarrow 0$, то поведение поля излучения на бесконечности определяется соответствующей асимптотикой функции Бесселя $J_\nu(\xi) \sim e^{-k\gamma\nu z}$ при $\xi \rightarrow 0$. Очевидно, что затухающий характер поля на бесконечности автоматически обеспечивается сделанным выше выбором знаков ν_1 и ν_2 (5). Таким образом, указанная выше трудность в выборе решения для поля излучения в инверсной среде устраняется, и эта проблема решается однозначно.

Из граничных условий (непрерывность тангенциальных составляющих **E** и **H** соответственно падающей, отраженной и преломленной волн на границе раздела) при этом получаем следующее выражение для амплитудного коэффициента отражения *s*-поляризации (см. также [4]):

$$r_s = \frac{(\eta_0 - \eta) I_\nu(\xi_0) + i\sqrt{B} I_{\nu+1}(\xi_0)}{(\eta_0 + \eta) I_\nu(\xi_0) - i\sqrt{B} I_{\nu+1}(\xi_0)}. \tag{6}$$

где $\eta_0 = \sqrt{\varepsilon_1} \cos \alpha$; $\eta = \eta_1 + i\eta_2 = i\gamma v$; $\xi_0 = \sqrt{B}/\gamma$, α — угол падения. Анализ этого выражения связан с проблемой вычисления функции $I_\nu(\xi)$ и $I_{\nu+1}(\xi_0)$. Здесь мы воспользуемся результатами, полученными в [10].

В случае плавной неоднородности усиливающего слоя, т. е. при достаточно малых γ ($\gamma \ll 1$), параметры v и ξ_0 — велики. Поэтому можно использовать асимптотические разложения функции Бесселя для больших аргументов (ξ_0) и индексов (ν). Эти разложения существенно зависят от отношения [10]

$$\frac{v}{\xi_0} = \text{ch } \delta = X + iY. \quad (7)$$

В нашем случае

$$X = \frac{1}{\sqrt{2(\tau_0 + \tau)}} \sqrt{\tau + \sqrt{a^2 + \tau^2}}, \quad (7)$$

$$Y = \mp \frac{1}{\sqrt{2(\tau_0 + \tau)}} \sqrt{-\tau + \sqrt{a^2 + \tau^2}},$$

причем здесь $|\arg \xi_0| < \pi/2$, а верхний и нижний знаки Y соответственно отвечают $a \geq 0$ ($\alpha \leq \alpha_0$, $\alpha_0 = \arcsin \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_1}$) и $a \leq 0$ ($\alpha \geq \alpha_0$). При заданных τ_0 и τ величины X и Y , как видно, определяются параметром $a = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 \sin^2 \alpha$. Нас в основном будет интересовать область углов падения, близких к предельному углу ($\alpha \approx \alpha_0$, $|a| \rightarrow 0$), так как именно при этом, как показывают проведенные ранее расчеты [2—6] и результаты экспериментов [7—9], коэффициенты отражения от инверсной среды оказываются максимальными. Если интервал изменения углов падения невелик, а именно таков, что X и Y лежат внутри параллелограмма, заданного соотношением

$$|Y| = \frac{\pi}{2} |X - 1|, \quad (8)$$

то асимптотическое разложение для $I_\nu(\xi_0)$ имеет вид

$$I_\nu(\xi) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi i v \text{th } \delta}} \left\{ e^{v(\text{th } \delta - \delta) - \frac{i\pi}{4}} + e^{-v(\text{th } \delta - \delta) + \frac{i\pi}{4}} \right\}, \quad (9)$$

где $\delta = \ln(1 + \sqrt{1 - (\xi_0/v)^2}) v/\xi_0$, причем знак квадратного корня в выражении для δ выбирается из условия, что $0 < \text{Im } \delta < \pi$ [10].

Можно показать, что при тех же предположениях, а именно когда τ_0 очень мало и углы падения близки к предельному ($\alpha \approx \alpha_0$), аналогичное разложение имеет место и для $I_{\nu+1}(\xi_0)$ лишь с заменой v на $v+1$.

Раскрывая далее соотношение (8), находим интервал углов падения вблизи предельного, где справедливо разложение (9). Он определяется неравенствами

$$\varepsilon_0 - 2\sqrt{\tau_0(\tau_0 + \tau)} < \varepsilon_1 \sin^2 \alpha < \varepsilon_0 + 2\sqrt{\tau_0(\tau_0 + \tau)}. \quad (10)$$

Выражение (9) значительно упрощается, если предположить, что $\tau_0 \leq \tau$. Такое соотношение между этими параметрами вполне реально и может иметь место для некоторых инверсных сред. В этом случае $|\sqrt{1 - (\xi_0/v)^2}| \ll 1$ и выражение для δ приближенно можно записать в виде

$$\delta \approx \ln \frac{v}{\xi_0} + \sqrt{1 - (\xi_0/v)^2}. \quad (11)$$

Тогда

$$I_v(\xi_0) \approx \frac{1}{\sqrt{-2\pi i v \operatorname{th} \delta}} \left[\left(\frac{v}{\xi_0} \right)^{-v} e^{-\frac{i\pi}{4}} + \left(\frac{v}{\xi_0} \right)^v e^{\frac{i\pi}{4}} \right]. \quad (12)$$

Заметим, что это выражение справедливо во всем интервале углов падения вблизи предельного, определяемом неравенствами (10). При этом, однако, параметр $\rho = |v/\xi_0| = \sqrt{(V a^2 + \tau^2)/(\tau_0 + \tau)}$, как нетрудно видеть, может быть и больше единицы и меньше. В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда $\rho \lesssim 1$. Физически это неравенство означает, что мы будем

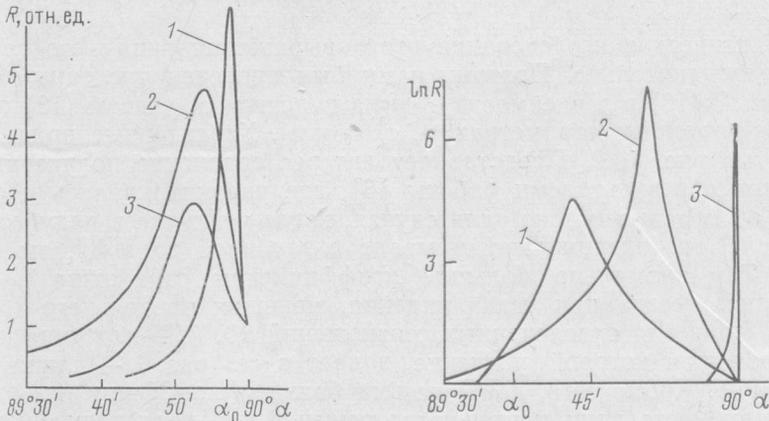


Рис. 1. Зависимость коэффициента отражения R от угла падения α вблизи предельного угла полного внутреннего отражения при различных значениях параметров граничащих сред: $\Delta \epsilon = 10^{-6}$; $\alpha_0 = 89^\circ 57' 42''$; $\tau = 10^{-4}$ (1, 3) и 10^{-3} (2); $\tau_0 = 10^{-5}$ (1); 10^{-4} (2) и $5 \cdot 10^{-5}$ (3)

Рис. 2. Зависимость $\ln R$ от α вблизи предельного угла полного внутреннего отражения. $\Delta \epsilon = 10^{-4}$ (1, 2) и 10^{-6} (3); $\alpha_0 = 89^\circ 37' 05''$ (1, 2) и $89^\circ 57' 42''$ (3); $\tau = 10^{-4}$ (1); 10^{-3} (2) и 10^{-5} (3); $\tau_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ (1); 10^{-4} (2) и 10^{-6} (3)

рассматривать более узкий интервал углов падения вблизи предельного, нежели тот, что задан неравенствами (10), а именно:

$$\epsilon_0 - \sqrt{\tau_0(\tau_0 + 2\tau)} \leq \epsilon_1 \sin^2 \alpha \leq \epsilon_0 + \sqrt{\tau_0(\tau_0 + \tau)}. \quad (13)$$

В этом случае в пределе очень малых γ ($\gamma \rightarrow 0$), т. е. для больших толщин инверсных слоев, экспонента со знаком (-) в выражении (12) будет расти, а со знаком (+) — убывать (поскольку $\operatorname{Re} v = v_1 > 0$), т. е. вторым слагаемым при расчетах можно пренебречь.

Таким образом, окончательно получим

$$I_v(\xi_0) \approx \frac{1}{\sqrt{-2\pi i v \operatorname{th} \delta}} \left(\frac{v}{\xi_0} \right)^{-v}. \quad (14)$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что

$$I_{v+1}(\xi_0) \approx \frac{1}{\sqrt{-2\pi i v \operatorname{th} \delta}} \left(\frac{v}{\xi_0} \right)^{-(v+1)}. \quad (14')$$

Подставляя полученные выражения в (6), для амплитудного коэффициента отражения достаточно толстых инверсных слоев находим

$$r_s = \frac{\eta_0 - \eta + i\sqrt{B}(v/\xi_0)^{-1}}{\eta_0 + \eta - i\sqrt{B}(v/\xi_0)^{-1}} = \frac{\eta(\eta_0 - \eta) - B}{\eta(\eta_0 + \eta) + B} \quad (15)$$

Отсюда получаем выражение для энергетического коэффициента отражения таких слоев

$$R_s = |r_s|^2 = \frac{|\eta|^2 [(\eta_0 - \eta_1)^2 + \eta_2^2] + (\tau_0 + \tau)[\tau_0 + \tau + 2\eta_2(\eta_0 - 2\eta_1)]}{|\eta|^2 [(\eta_0 + \eta_1)^2 + \eta_2^2] + (\tau_0 + \tau)[\tau_0 + \tau - 2\eta_2(\eta_0 + 2\eta_1)]} \quad (16)$$

Аналитическое исследование этого выражения ввиду его громоздкости затруднительно. Поэтому нами был проведен численный расчет значений R (16) в зависимости от угла падения с учетом (13) при некоторых заданных параметрах τ_0 , τ , ε_0 и ε_1 . Характерные кривые приведены на рис. 1, 2. Представляет интерес сравнение полученных результатов с результатами работы [6], где рассматривалась подобная задача об отражении, но для случая, когда усиление в полубесконечной среде экспоненциально убывало с глубиной до нуля, не меняя знака. Там аномально большие коэффициенты отражения (~ 1000) получались всегда при углах падения, меньших предельного ($\alpha < \alpha_0$), причем лишь для определенных соотношений d/λ (d — толщина инверсного слоя, при которой усиление падает в « e » раз, λ — длина волны излучения). Кроме того, в [6] весьма большие коэффициенты отражения имели место лишь тогда, когда решение для поля излучения в неоднородной усиливающей среде представляло собой сумму двух волн с противоположными направлениями распространения (как, например, в случае плоскопараллельного слоя). Это решение аналогично нашей формуле (12), в которой слагаемые в скобках можно интерпретировать как две такие волны (отходящую от границы раздела и подходящую к ней). В нашем же случае, как следует из расчетов (см. рис. 1, 2), аномально большие коэффициенты отражения (~ 1000) получаются и при наличии только одной волны (формула (14)), причем в отличие от [6] они имеют место как раз при углах падения, больших предельного ($\alpha > \alpha_0$). Однако как у нас, так и в [6], угловая ширина пиков сильного отражения весьма мала (порядка десятков секунд), в то время как, по данным экспериментов [9], она составляет несколько угловых минут. Таким образом, вопрос о коэффициентах отражения от неоднородных усиливающих сред вблизи предельного угла полного отражения требует дальнейших исследований.

Summary

A rigorous solution is given to the problem of reflection of a plane electromagnetic wave incident from a transparent uniform medium onto the boundary with a non-uniform inverse medium having a limited inversion region the gain coefficient of which decreases exponentially over the depth with a change in sign. It is shown that in such physically realistic model of the amplifying medium the problem of choosing the solution for the radiation field in an inversed medium is solved unambiguously which up to now has presented certain difficulties.

An exact formula is obtained for the amplitude reflection coefficient in the case of s-polarization and numerical calculation of the energetic reflection coefficients near the limiting angle of complete reflection at certain parameters of the boundary media is given. It is shown that then abnormally large reflection coefficients (~ 1000) are also possible for the incidence angles larger than the limiting one.

Литература

1. Романов Г. Н., Шахиджанов С. С.— Письма в ЖЭТФ, 1972, 16, с. 298.
2. Бойко Б. Б., Петров Н. С., Джилавдари И. З.— ЖПС, 1973, 18, с. 727; В сб.: Квантовая электроника и лазерная спектроскопия. Мн., Наука и техника, 1974, с. 449.
3. Лебедев С. А., Волков В. М., Коган Б. Я.— Опт. и спектр., 1973, 35, с. 976.
4. Петров Н. С., Бойко Б. Б., Джилавдари И. З.— ЖПС, 1975, 23, с. 705; 1976, 24, 1038.
5. Бойко Б. Б., Джилавдари И. З., Петров Н. С.— ЖПС, 1976, 25, с. 148.
6. Cybulski R. F., Cagniglia C. K.— J. Opt. Soc. Am., 1977, 67, p. 1620.
7. Коган Б. Я., Волков В. М., Лебедев С. А.— Письма в ЖЭТФ, 1972, 16, с. 144.
8. Лебедев С. А., Кизель В. А., Коган Б. Я.— Квантовая электроника, 1976, 3, 2446.
9. Лебедев С. А. Автореф. канд. дис.— М., 1977.
10. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, т. 1.— М., ИЛ, 1949.

Поступило в редакцию 05.04.79.