ЖУРНАЛ ПРИКЛАДНОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

Том XXIII, выпуск 5 Ноябрь 1975 г.

УДК 535.42

Б. Б. Бойко, И. З. Джилавдари, Н. С. Петров

ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ ОТ НЕЛИНЕЙНОЙ ПРОЗРАЧНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Известно, что под действием мощного светового излучения показатель преломления ряда жидкостей и стекол изменяется по закону [1]

$$\tilde{n}=n+\sigma\bar{\mathbf{E}}^2, \tag{1}$$

где $\bar{\mathbf{E}}^2$ — среднее по времени значение квадрата напряженности электрического поля световой волны, σ — параметр нелинейности (10^{-11}–10^{-14} *см³/эрг*). В связи с тем, что в настоящее время часто приходится иметь дело со световыми потоками большой плотности (~ 1 *Гвт/см²* и более), решение задачи об отражении света для сред с такой зависимостью показателя преломления представляет практический интерес. Различные поверхностные эффекты, которые могут влиять на процесс отражения света наряду с нелинейным изменением показателя преломления, здесь, как и в других подобных задачах, не учитываются.

Отражение света с вектором E, перпендикулярным плоскости падения (s-поляризация). Пусть из однородной прозрачной среды с показателем преломления n_1 на границу раздела с другой полубесконечной прозрачной средой, показатель преломления которой $\tilde{n}_2$ зависит от интенсивности излучения по закону (1), падает плоская электромагнитная волна с вектором $\mathbf{E}_0$, перпендикулярным плоскости падения

$$\mathbf{E}_0 = A_0 \cos(\omega t - k\mathbf{m}_0\mathbf{r})\,\mathbf{s}. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{s}$—единичный вектор нормали к плоскости падения; $\mathbf{m}_0=\xi_0\mathbf{b}+\eta_0\mathbf{q}$— вектор рефракции волны [2], где $\mathbf{b}$ и $\mathbf{q}$ — соответственно единичные векторы вдоль границы раздела и перпендикулярно к ней, $\eta_0=n_1\cos\alpha$, $\xi_0=n_1\sin\alpha$, α — угол падения; A_0—амплитудный множитель; $k=\frac{\omega}{c}$—волновое число в вакууме. При этом с точностью до линейных по σ членов поле преломленной волны будет описываться волновым уравнением вида

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\,(n_2^2 + 2n_2\sigma\bar{\mathbf{E}}^2)\,\ddot{\mathbf{E}} = 0. \tag{3}$$

При решении этого уравнения будем различать два случая: частичное отражение и полное.

Частичное отражение. В этом случае решение уравнения (3) естественно искать в виде однородной волны

$$\mathbf{E} = A\cos(\omega t - k\mathbf{m}\mathbf{r})\,\mathbf{s}, \tag{4}$$

где $A=\mathrm{const}$, $\mathbf{m}=\xi\mathbf{b}+\eta\mathbf{q}$ — вектор рефракции преломленной волны. Подставляя (4) в (3), получим

$$\eta^2+\xi^2=n_2^2+n_2\sigma A^2. \tag{5}$$

Амплитуду преломленной волны, коэффициент отражения и параметр ξ можно найти из граничных условий. При этом для ξ получается обычное, как и в случае линейной среды, выражение

$$\xi=\xi_0=n_1\sin\alpha. \tag{6}$$

Используя (5), с учетом (6) получим, что проекция фазовой нормали на ось z (направлена вдоль $\mathbf{q}$) удовлетворяет соотношению

$$\eta^2=n_2^2+n_2\sigma A^2-n_1^2\sin^2\alpha. \tag{7}$$

Полагая $\eta=0$, находим условие для предельного угла полного отражения α_{1s} $(n_1>n_2)$

$$n_1^2\sin^2\alpha_{1s}=n_2^2+n_2\sigma A^2. \tag{8}$$

Из (4), (7) видно, что при углах падения излучения, меньших или равных предельному, нелинейная среда ведет себя подобно линейной в том смысле, что преломленная волна, как и падающая, является однородной с той лишь разницей, что для нее показатель преломления $\tilde{n}_2=$ $=n_2+\frac{\sigma}{2}A_2$ зависит от интенсивности падающей волны и от угла падения. Однако решение в виде плоской однородной волны в нелинейной среде, как известно, является неустойчивым [3]. Поэтому на опыте однородное решение будет реализоваться (ввиду однородных граничных условий) лишь вблизи границы раздела. По мере распространения преломленной волны в глубь нелинейной среды однородное распределение поля будет непрерывно переходить в какое-либо устойчивое неоднородное распределение.

Полное отражение. Следует ожидать, что в этом случае проекция фазовой нормали преломленной волны на ось z при углах падения, больших или равных предельному, обращается в нуль. Поэтому решение уравнения (3) можно искать в виде неоднородной волны, распространяющейся вдоль границы раздела

$$\mathbf{E}=f(z)\cos(\omega t-k\xi x+\delta)\,\mathbf{s}, \tag{9}$$

где δ определяется из граничных условий (ось x направлена вдоль $\mathbf{b}$). Подставляя (9) в (3), имеем

$$\frac{d^2f}{dz^2}=k^2n_2\sigma\left(\frac{a^2}{2}-f^2\right)f, \tag{10}$$

где $a^2=\frac{2(\xi^2-n_2^2)}{n_2\sigma}$. Умножая обе части этого уравнения на $\frac{df}{dz}$ и интегрируя, получим

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^2=k^2\,\frac{n_2\sigma}{2}\left[(a^2-f^2)f^2+C\right]. \tag{11}$$

Очевидно, при полном отражении света преломленная волна должна затухать вглубь от границы раздела. В нашем случае затухающее решение уравнения (11) возможно лишь при условии, что постоянная интегрирования $C=0$. При этом для амплитуды преломленной волны находим

$$f(z)=\frac{2aC_1e^{-k\gamma z}}{1+C_1^2e^{-2k\gamma z}}, \tag{12}$$

где $\gamma=\sqrt{\xi^2-n_2^2}$, $C_1=\frac{a-\sqrt{a^2-A^2}}{A}$, $A=f(0)$. Нетрудно показать, что полученное выражение при $\sigma\to0$ $(a\to\infty)$ переходит в известное выражение для амплитуды поля преломленной волны при полном отражении в линейной среде, а именно $f(z)=A\exp(-k\gamma z)$. Из граничных условий имеем

$$A^2=\frac{n_1^2-n_2^2-\sqrt{(n_1^2-n_2^2)^2-8A_0^2n_1^2n_2\sigma\cos^2\alpha}}{n_2\sigma}, \tag{13}$$

где знак перед радикалом следует из условия $A=0$ при $A_0=0$ (A_0 — амплитуда падающей волны).

Очевидно, (12) имеет смысл лишь для таких углов падения, для которых выполняется условие $a^2\geqslant A^2$. Угол падения $\alpha=\alpha_{2s}$, при котором имеет место равенство $a^2=A^2$, соответствует предельному углу полного отражения. При этом из (13) получим, что, как и в случае отражения света под предельным углом от линейной среды, $A=2A_0$, а из равенства $a^2=A^2$ найдем, что

$$n_1^2\sin^2\alpha_{2s}=n_2^2+\frac{n_2\sigma}{2}A^2=n_2^2+2n_2\sigma A_0^2. \tag{14}$$

В этом случае выражение (12) принимает вид

$$f(z)=\frac{A}{\operatorname{ch}(k\gamma z)}. \tag{15}$$

Таким образом, при полном отражении под предельным углом в нелинейной среде в отличие от линейной преломленная волна остается неоднородной волной, затухающей вглубь от границы раздела. При этом она представляет собой волну с минимальным затуханием, которая еще может существовать в нелинейной среде.

Если сравнить выражения (8) и (14), то видно, что предельный угол α_{1s} со стороны частичного отражения больше предельного угла α_{2s} со стороны полного отражения. Наличие такого «гистерезиса» связано с тем, что характер преломленной волны в обоих случаях оказывается разным: при отражении света под углом α_{1s} преломленная волна является однородной, в то время как при отражении под углом α_{2s} она неоднородна. Если принять во мнимание зависимость показателя преломления нелинейной среды от интенсивности излучения (1), то ясно, что во втором случае первоначально однородная нелинейная среда становится неоднородной. Таким образом, отражение света в обоих случаях происходит, вообще говоря, от различных сред. Следовательно, и предельные углы полного отражения при этом оказываются различными. На опыте же существование такого «гистерезиса» невозможно ввиду неустойчивости однородной волны. Здесь полное отражение будет происходить под углом α_{2s}.

Следует отметить, что уравнение (11) при $C\neq0$ имеет периодическое по z решение. Это решение является аналогом волноводного решения в случае линейной среды и возможно лишь при наличии когерентных волн, распространяющихся под углом друг к другу [4]. Ввиду устойчивости такого периодического решения в нелинейной среде не исключено, что но может реализоваться здесь в условиях полного отражения. На опыте это может проявиться в том, что предельный угол полного отражения окажется несколько меньше угла α_{2s}. Более того, оказывается, что при этом возможен целый интервал углов падения $(\alpha_{2s} - \alpha_0)$, аналогичных предельному углу полного отражения для линейной среды.

Отражение света с вектором E, параллельным плоскости падения (p-поляризация). В этом случае поле преломленной волны будет описываться волновым уравнением

$$\Delta\mathbf{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\ddot{D} = 0, \tag{16}$$

где $\mathbf{D} = \tilde{n}_2^2\mathbf{E}$. При решении (16) будем различать те же два случая: частичное отражение и полное.

Частичное отражение. Как и раньше, решение волнового уравнения при этом будем искать в виде однородной волны

$$\mathbf{E} = B\cos(\omega t - k\mathbf{mr})\,\mathbf{p}, \tag{17}$$

где $\mathbf{p} = M\mathbf{b} + N\mathbf{q}$, $\mathbf{p}^2 = M^2 + N^2 = 1$, $B = \mathrm{const}$. Подставляя (17) в (16), получим систему двух однородных уравнений относительно M и N

$$\begin{aligned} (n_2^2 + n_2\sigma B^2 - \eta^2)M + \xi\eta N &= 0, \\ \xi\eta M + (n_2^2 + n_2\sigma B^2 - \xi^2)N &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Из равенства нулю определителя этой системы находим, что

$$\eta^2 = n_2^2 + n_2\sigma B^2 - \xi^2, \tag{19}$$

причем $M^2 = \dfrac{\eta^2}{n_2^2 + n_2\sigma B^2}$, $N^2 = \dfrac{\xi^2}{n_2^2 + n_2\sigma B^2}$. Это соотношение по виду совпадает с (7). Поэтому соответствующее выражение для предельного угла полного отражения α_{1p} по виду будет совпадать с аналогичным выражением для предельного угла α_{1p}, а именно

$$n_1^2\sin^2\alpha_{1p} = n_2^2 + n_2\sigma B^2. \tag{20}$$

Однако сами эти углы не совпадают ввиду различия амплитуд A и B полей преломленной волны.

Полное отражение. Решение волнового уравнения (16) в этом случае будем искать в виде неоднородной волны, распространяющейся вдоль границы раздела

$$\mathbf{E} = f(z)\,[M\sin(\omega t - k\xi x + \delta)\cdot\mathbf{b} + N\cos(\omega t - k\xi x)\cdot\mathbf{q}]. \tag{21}$$

Подставив (21) в (16), путем несложных операций получаем дифференциальное уравнение второго порядка для $f(z)$

$$\frac{d^2f}{dz^2} = k^2\,\frac{(n_2^2 + n_2\sigma f^2)(\xi^2 - n_2^2 - 3n_2\sigma f^2)}{n_2^2 + 3n_2\sigma f^2}. \tag{22}$$

Умножая обе части (22) на $\dfrac{df}{dz}$ и интегрируя, имеем

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^2 = k^2\left\{\left(\frac{\xi^2}{3} - n_2^2 - \frac{n_2\sigma f^2}{2}\right)f^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{9}\,\frac{n_2}{\sigma}\ln(n_2^2 + 3n_2\sigma f^2) + C\right\}. \tag{23}$$

Если воспользоваться малостью величины σf^2 по сравнению с n_2^2, то последнее уравнение можно привести к виду

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^2 = k^2\left(\xi^2 - n_2^2 - \frac{n_2\sigma}{2} f^2\right) f^2 + C'. \quad (24)$$

Таким образом, для преломленной волны в случае p-поляризации получается уравнение, аналогичное уравнению для s-поляризации. Поэтому все соотношения, полученные для s-поляризации, перейдут в соответствующие соотношения для p-поляризации. Все различие будет заключаться лишь в амплитуде преломленной волны на границе раздела. Для точного определения этой амплитуды нужно было бы решить довольно громоздкую граничную задачу. Но, как мы видели, в случае s-поляризации выражение для амплитуды преломленной волны при предельном угле падения совпадает с аналогичным выражением для линейной среды. В случае p-поляризации, если и будет какая-то разница между полями на границе раздела в линейном и нелинейном приближении, поправка к линейному приближению, однако, невелика (пропорциональна σ). Но так как в полученные соотношения амплитуда преломленной волны входит в виде произведения $\sigma f^2(0)$, то эта поправка будет уже пропорциональна σ^2, т. е. более высокого порядка, чем требует рассматриваемое приближение. Поэтому в качестве значения $f(0)$ при предельном угле полного отражения здесь можно взять его значение в линейном приближении, т. е. $f(0) = B = 2B_0\frac{n_1}{n_2}$, где B_0 — амплитуда падающей волны для p-поляризации. Тогда для предельного угла полного отражения α_{2p} имеем

$$n_1^2 \sin^2\alpha_{2p} = n_2^2 + 2n_2\sigma\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 B_0^2. \quad (25)$$

Из сравнения выражения (14) и (25) следует, что предельный угол полного отражения для излучения с p-поляризацией больше предельного угла для излучения с s-поляризацией.

В заключение приведем оценку сдвига предельных углов полного отражения для нелинейной и линейной сред с одинаковыми показателями преломления n_2. Ввводя в рассмотрение мощность падающего потока в вакууме W_0, для величины отклонения $\delta\alpha$ от предельного угла α_0 ($\sin\alpha_0 = n$, где $n = \frac{n_2}{n_1}$), согласно (14) и (25), получаем в случае s- и p-поляризаций соответственно

$$\delta\alpha_s = \frac{8\pi\sigma W_0}{n_1^2 c\sqrt{1-n^2}}, \quad \delta\alpha_p = \frac{8\pi\sigma W_0}{n_2^2 c\sqrt{1-n^2}}. \quad (26)$$

Так как $n_2 < n_1$, то $\delta\alpha_p > \delta\alpha_s$.

Расчет показывает, что, например, для нитробензола ($n_2 \simeq 1{,}55$, $\sigma \approx 10^{-11}$ *см³/эрг* [1]) при угле падения $\alpha_0 \simeq 84°$ и мощности $W_0 \simeq 1$ *Гвт/см²* величина $\delta\alpha_p \simeq 1{,}2'$.

В заключение авторы выражают благодарность В. Н. Белому за полезные обсуждения.

Литература

1. Действие лазерного излучения. М., «Мир», 1968.
2. Ф. И. Федоров. Оптика анизотропных сред. Минск, Изд. АН БССР, 1958.
3. Нелинейная оптика. Новосибирск, «Наука», 1968, стр. 443.
4. В. П. Емельянов, А. П. Хапалюк. ЖПС, 14, 1012, 1971.

Поступило в редакцию 12 декабря 1974 г.