https://doi.org/10.21122/2227-1031-2020-19-5-372-376

УДК 539.3

Действие сосредоточенной силы на 1/8 однородного изотропного пространства

Докт. техн. наук, проф. С. В. Босаков[1], асп. П. Д. Скачёк[1]

[1]Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2020
Belarusian National Technical University, 2020

Реферат. На примере вертикальных перемещений показано, что, комбинируя решение задачи об определении вертикальных перемещений от действия четырех симметрично приложенных на упругое полупространство одинаковых сосредоточенных сил и двух симметрично приложенных на упругое четвертьпространство одинаковых сосредоточенных сил, можно получить решение о действии одной силы на 1/8 упругого пространства со свободными гранями. Для нахождения вертикальных перемещений в упругом полупространстве используется решение Буссинеска, а вертикальных перемещений в упругом четвертьпространстве – интегральное уравнение, полученное Я. С. Уфляндом для определения вертикальных перемещений грани однородного упругого изотропного четвертьпространства, для которого модуль деформаций и коэффициент Пуассона являются постоянными величинами. Однако интегральное уравнение Я. С. Уфлянда весьма неудобно для практического использования, поэтому в статье для нахождения вертикальных перемещений грани упругого четвертьпространства от действия сосредоточенной силы предложено приближенное выражение, записанное через элементарные функции. Для получения последнего применяется метод специальной аппроксимации. Искомое решение выражается также через элементарные функции. При этом точный расчет получается для несжимаемого материала при коэффициенте Пуассона 1/8 пространства $\nu = 0{,}5$. Поскольку решение получено в случае действия на 1/8 упругого пространства сосредоточенной силы, то легко найти выражение для определения вертикальных перемещений грани 1/8 упругого пространства от действия любой распределенной нагрузки путем интегрирования по участку действия данной нагрузки от функции влияния, в качестве которой берется искомое решение. Предлагаются рекомендации по повышению точности расчетов. Изложенный подход может быть также использован для определения напряженно-деформированного состояния 1/8 пространства как с шарнирно опертыми, так и со свободными гранями.

Ключевые слова: упругое полупространство, упругое четвертьпространство, 1/8 упругого пространства, метод специальной аппроксимации, напряженно-деформированное состояние

Для цитирования: Босаков, С. В. Действие сосредоточенной силы на 1/8 однородного изотропного пространства / С. В. Босаков, П. Д. Скачёк // *Наука и техника*. 2020. Т. 19, № 5. С. 372–376. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2020-19-5-372-376

Concentrated Force Action on 1/8 Homogeneous Isotropic Space

S. V. Bosakov[1], P. D. Skachok[1]

[1]Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. Using the example of vertical displacements, it is shown that by combining a solution to the problem of determining vertical displacements from the action of four identical concentrated forces symmetrically applied to an elastic half-space and two identical concentrated forces symmetrically applied to an elastic quarter-space, one can obtain a solution about the action of one force on 1/8 of the elastic space with free edges. To find vertical displacements in an elastic half-space, the Boussinesq solution is used, and vertical displacements in an elastic quarter-space – an integral equation obtained

Адрес для переписки
Босаков Сергей Викторович
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-93-04
sevibo@yahoo.com

Address for correspondence
Bosakov Siarhei V.
Belarusian National Technical University
65, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-93-04
sevibo@yahoo.com

by Ya. S. Uflyand to determine vertical displacements in the face of a homogeneous elastic isotropic quarter-space, for which a deformation modulus and Poisson's ratio are constant. However, an integral equation of Ya. S. Uflyand is very inconvenient for practical use, therefore, in the paper, an approximate expression written in terms of elementary functions is proposed to find vertical displacements in the face of an elastic quarter-space from the action of a concentrated force. To obtain the latter, a special approximation method is used. The desired solution is also expressed in terms of elementary functions. In this case, an accurate calculation is obtained for an incompressible material with Poisson's ratio 1/8 of the space ν = 0.5. Since the solution is obtained in the case of a concentrated force acting on 1/8 of the elastic space, it is easy to find an expression for determining the vertical displacements of the edge of 1/8 of the elastic space from the action of any distributed load by integrating over the area of action of this load from the influence function, which is taken as required decision. Recommendations for improving the accuracy of calculations are offered. The described approach can also be used to determine the stress-strain of 1/8 of the space with both hingedly supported and free edges.

Keywords: elastic half-space, elastic quarter-space, 1/8 of elastic space, special approximation method, stress-strain state

For citation: Bosakov S. V., Skachok P. D. (2020) Concentrated Force Action on 1/8 Homogeneous Isotropic Space. *Science and Technique*. 19 (5). 372–376. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2020-19-5-372-376 (in Russian)

В [1] на основании результатов Я. С. Уфлянда [2] в цилиндрических координатах получено выражение для определения вертикальных перемещений грани упругого однородного изотропного четвертьпространства с постоянными E, ν от действия сосредоточенной вертикальной силы P (рис. 1) в следующем виде:

$$W(x,y)=\frac{2P\left(1-\nu^2\right)}{\pi^3 E}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2\pi\tau}{\Delta}e^{-\sigma a \operatorname{ch} t}\times \times\cos\sigma z\cos\tau t\,K_{i\tau}\left(\sigma r\right)dt\,d\sigma\,d\tau, \tag{1}$$

где $\Delta=\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\tau-\left[\tau-2\left(1-2\nu\right)\frac{\operatorname{th}\frac{\pi}{4}\tau}{\operatorname{ch}2t}\right]^2$; a – точка приложения сосредоточенной силы; $K_{i\tau}(\sigma r)$ – функция Бесселя мнимого аргумента [3].

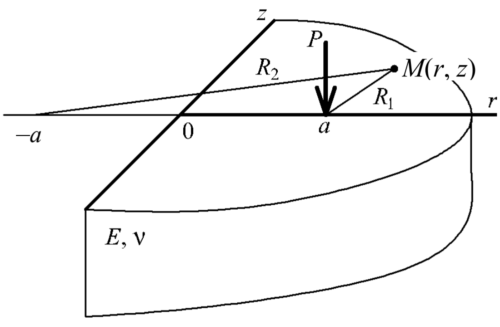

Рис. 1. Действие сосредоточенной силы на упругое четвертьпространство

Fig. 1. Action of concentrated force on elastic quarter-space

Разложим $1/\Delta$ в ряд по степеням $1-2\nu<1$, получим

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\tau-\tau^2}-4\left(1-2\nu\right)\frac{\tau\operatorname{th}\frac{\pi}{4}\tau}{\left(\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\tau-\tau^2\right)^2\operatorname{ch}2t}+ +4\left(1-2\nu\right)^2\frac{\left(3\tau^2+\operatorname{sh}^2\frac{\pi\tau}{2}\right)\operatorname{th}^2\frac{\pi}{4}\tau}{\left(\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\tau-\tau^2\right)^3\operatorname{ch}2t}-\dots. \tag{2}$$

Ряд (2) – знакопеременный, поэтому в дальнейшем ограничимся первым членом ряда. Представим:

$$\frac{\operatorname{sh}^2\pi\tau}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\tau-\tau^2}=2\left(1+\operatorname{ch}\pi\tau\right)\left(1+\frac{\tau^2}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\tau-\tau^2}\right);$$

$$\frac{\tau^2}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\tau-\tau^2}\approx\frac{a_0+a_1\tau^2}{\operatorname{ch}\pi\tau};\ a_0=\frac{4}{\pi^2-4};$$

$$a_1=2{,}1.$$

Относительная погрешность аппроксимации $\tau^2/\left(\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}\tau-\tau^2\right)$ не превышает 10 % на интервале $0\le\tau\le\infty$.

Последовательно используем интегралы [2, 3]:

$$\int_0^\infty e^{-\sigma a\operatorname{ch}t}\cos\tau t\,dt=K_{i\tau}\left(\sigma a\right);$$

$$\int_0^\infty\cos\left(\sigma z\right)K_{i\tau}\left(\sigma a\right)K_{i\tau}\left(\sigma r\right)d\sigma= =\frac{\pi^2}{4\operatorname{ch}\pi\tau\sqrt{ar}}P_{i\tau-1/2}\left(\operatorname{ch}\mu\right);$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\beta\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau} P_{i\tau-1/2}(\operatorname{ch}\mu)\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\mu+\cos\beta)}};$$

$$\int_0^\infty \frac{\tau^2}{\operatorname{ch}\pi\tau} P_{i\tau-1/2}(\operatorname{ch}\mu)\,d\tau = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{(\operatorname{ch}\mu+1)^{3/2}};$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\beta\tau}{\operatorname{ch}^2\pi\tau} P_{i\tau-1/2}(\operatorname{ch}\mu)\,d\tau = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}\mu-\cos\beta}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}\mu-\cos\beta}{1+\cos\beta}};$$

$$\int_0^\infty \frac{\tau^2}{\operatorname{ch}^2\pi\tau} P_{i\tau-1/2}(\operatorname{ch}\mu)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{\operatorname{ch}\mu-1}-\frac{\sqrt{2}}{(\operatorname{ch}\mu-1)^{3/2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}\mu-1}{2}}\right],$$

где $P_{i\tau-1/2}(\operatorname{ch}\mu)$ – функция Лежандра [3].

В итоге после интегрирования (1) можно получить удобное для инженерных приложений приближенное выражение для определения вертикальных перемещений границы четвертьпространства, на которую действует сила (рис. 1)

$$W(r,z) = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi E}\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1+a_0}{R_2}+\frac{2a_0}{\pi R_1}\operatorname{arctg}\frac{R_1}{2\sqrt{ar}}+ a_1\frac{ar}{R_2^3}+\frac{a_1}{\pi}\left(\frac{\sqrt{ar}}{R_1^2}-\frac{2ar}{R_1^3}\operatorname{arctg}\frac{R_1}{2\sqrt{ar}}\right)\right]. \quad (3)$$

Если нагрузить поверхность упругого полупространства четырьмя симметрично расположенными вертикальными силами, то, очевидно, это будет эквивалентно нагружению 1/8 пространства с шарнирно опертыми гранями одной сосредоточенной силой (рис. 2).

В этом случае в декартовых координатах вертикальные перемещения точки $M(x, y)$ грани 1/8 пространства с шарнирно опертыми двумя гранями, где приложена сила, будут равны

$$W_0(x,y) = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi E}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right). \quad (4)$$

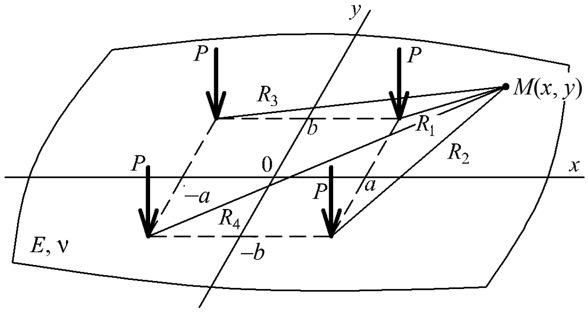

Рис. 2. Действие симметрично расположенных четырех сил на упругое полупространство

Fig. 2. Action of symmetrically located four forces on elastic half-space

Нагрузим четвертьпространство двумя симметрично приложенными силами P (рис. 3). Такое нагружение соответствует действию сосредоточенной силы P на 1/8 пространства с шарнирно опертой гранью $y = 0$. В этом случае на основании (3) вертикальные перемещения грани 1/8 пространства с одной шарнирно опертой гранью $y = 0$ выражаются формулой

$$W_1(x,y) = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi E}\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+(a_0+1)\times\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)+\frac{2a_0}{\pi}\left(\frac{\operatorname{arctg}\frac{R_1}{2\sqrt{ax}}}{R_1}+\frac{\operatorname{arctg}\frac{R_2}{2\sqrt{ax}}}{R_2}\right)+ a_1\left(\frac{ax}{R_3^3}+\frac{ax}{R_4^3}\right)+\frac{a_1}{\pi}\left(\frac{\sqrt{ax}}{R_1^2}+\frac{\sqrt{ax}}{R_2^2}- 2ax\frac{\operatorname{arctg}\frac{R_1}{2\sqrt{ax}}}{R_1^3}-2ax\frac{\operatorname{arctg}\frac{R_2}{2\sqrt{ax}}}{R_2^3}\right)\right]. \quad (5)$$

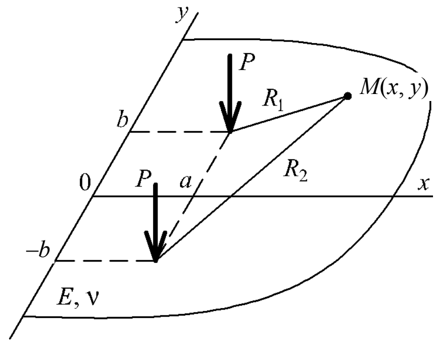

Рис. 3. Действие симметрично расположенных двух сил на упругое четвертьпространство

Fig. 3. Action of symmetrically located two forces on elastic quarter-space

Сопоставляя (4) и (5), можно сделать вывод, что удаление связей по оси $x=0$ 1/8 пространства с шарнирно опертыми гранями увеличивает вертикальные перемещения на

$$W_1(x,y)-W_0(x,y). \tag{6}$$

Рассуждая подобным образом, можно заключить, что удаление связей по оси $y=0$ 1/8 пространства с шарнирно опертыми гранями увеличивает вертикальные перемещения на

$$W_2(x,y)-W_0(x,y), \tag{7}$$

где

$$W_2(x,y)=\frac{P\left(1-\nu^2\right)}{\pi E}\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\left(a_0+1\right)\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}\right)+\right.$$
$$+\frac{2a_0}{\pi}\left(\frac{\operatorname{arctg}\frac{R_1}{2\sqrt{by}}}{R_1}+\frac{\operatorname{arctg}\frac{R_3}{2\sqrt{by}}}{R_3}\right)+a_1\left(\frac{by}{R_2^3}+\frac{by}{R_4^3}\right)+ \tag{8}$$
$$\left.+\frac{a_1}{\pi}\left(\frac{\sqrt{by}}{R_1^2}+\frac{\sqrt{by}}{R_3^2}-2by\frac{\operatorname{arctg}\frac{R_1}{2\sqrt{by}}}{R_1^3}-2by\frac{\operatorname{arctg}\frac{R_3}{2\sqrt{by}}}{R_3^3}\right)\right].$$

Суммируя (4), (6) и (7), получаем окончательное выражение для определения вертикальных перемещений точки $M(x,\ y)$ нагруженной грани 1/8 пространства со свободными гранями от действия сосредоточенной силы, приложенной к той же грани (рис. 4)

$$W(x,y)=\frac{P\left(1-\nu^2\right)}{\pi E}\left[\frac{1}{R_1}+\left(a_0+1\right)\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{2a_0+1}{R_4}+a_0f_1+a_1f_2+a_1\left(\frac{ax}{R_3^3}+\frac{ax+by}{R_4^3}+\frac{by}{R_2^3}\right)\right], \tag{9}$$

где

$$f_1=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\operatorname{arctg}\frac{R_1}{2\sqrt{ax}}}{R_1}+\frac{\operatorname{arctg}\frac{R_2}{2\sqrt{ax}}}{R_2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\operatorname{arctg}\frac{R_1}{2\sqrt{by}}}{R_1}+\frac{\operatorname{arctg}\frac{R_3}{2\sqrt{by}}}{R_3}\right);$$

$$f_2=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sqrt{ax}}{R_1^2}+\frac{\sqrt{ax}}{R_2^2}-2ax\frac{\operatorname{arctg}\frac{R_1}{2\sqrt{ax}}}{R_1^3}-\right.$$
$$-2ax\frac{\operatorname{arctg}\frac{R_2}{2\sqrt{ax}}}{R_2^3}+\frac{\sqrt{by}}{R_1^2}+\frac{\sqrt{by}}{R_3^2}-$$
$$\left.-2by\frac{\operatorname{arctg}\frac{R_1}{2\sqrt{by}}}{R_1^3}-2by\frac{\operatorname{arctg}\frac{R_3}{2\sqrt{by}}}{R_3^3}\right).$$

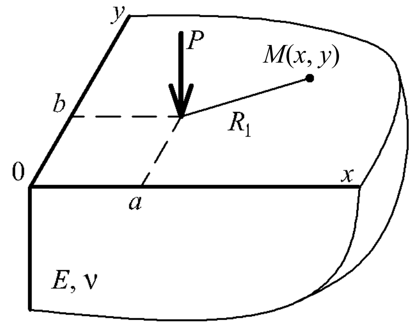

Рис. 4. Действие силы на 1/8 упругого пространства

Fig. 4. Force action on 1/8 elastic space

Анализ (9) показывает, что перемещения W на ребрах и в вершине 1/8 пространства ограничены. Также в (9) соблюдается теорема о взаимности перемещений. На рис. 5 показана поверхность перемещений верхней грани 1/8 пространства от сосредоточенной силы при $a=l$, $b=2l$, где l – некоторый линейный размер в долях от $\frac{P\left(1-\nu^2\right)}{\pi El}$.

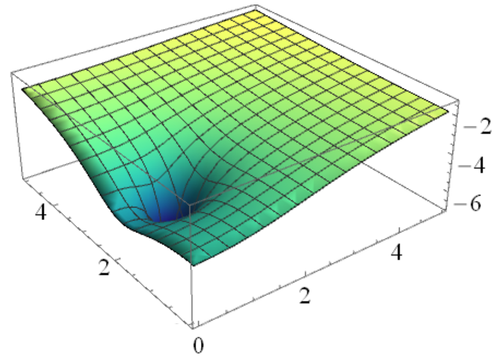

Рис. 5. Поверхность перемещений верхней грани 1/8 пространства от действия сосредоточенной силы

Fig. 5. Displacement surface of upper edge 1/8 of space from action of concentrated force

ВЫВОДЫ

1. Наибольшую точность формула (9) дает для коэффициента Пуассона $\nu=0{,}5$, т. е. для клина из несжимаемого материала [4]. Чтобы увеличить точность расчета по (9), необходимо

более точно вычислить (1). Для этого, подобно указанию [2], можно строить искомое решение по степеням малого параметра $\varepsilon = 1 - 2\nu$, что выполнено для четвертьпространства в [5, 6]. Можно повысить точность приближенного решения для произвольного коэффициента Пуассона, если в (2) использовать приближенное значение интеграла

$$\int_0^\infty e^{-\sigma a\,\mathrm{ch}\,t}\frac{\cos\tau t}{\mathrm{ch}\,2t}dt \approx$$

$$\approx \int_0^\infty e^{-\sigma a\,\mathrm{ch}\,t}\cos\tau t\,dt\int_0^\infty \frac{dt}{\mathrm{ch}\,2t} = \frac{\pi}{4}K_{i\tau}(\sigma a)$$

и аппроксимацию

$$\frac{\tau\,\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{2}\tau\,\mathrm{th}\frac{\pi}{4}\tau}{\left(\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{2}\tau - \tau^2\right)^2} \approx \frac{b_0 + b_1\tau^2}{\mathrm{ch}\,\pi\tau}.$$

2. Равнодействующая усилий в отбрасываемых связях 1/8 пространства с двумя шарнирно опертыми гранями равна 0, и, согласно принципу Сен-Венана [7], перемещения от них быстро затухают по мере удаления от ребер. Этот факт отмечен Хетени [8] при построении решения для четвертьпространства со свободными гранями итерационным методом наложения.

3. Выражения (5), (9) можно применять для решения контактных задач для 1/8 упругого пространства с одной шарнирно опертой гранью и со свободными гранями.

4. Изложенный подход также может быть использован для определения напряженно-деформированного состояния 1/8 пространства с шарнирно опертыми или со свободными гранями.

5. Применяя полученное решение в качестве функции влияния, достаточно просто получить выражение для определения вертикальных перемещений грани 1/8 упругого пространства от действия равномерно распределенной нагрузки путем интегрирования данной функции влияния по области действия любой распределенной нагрузки [9, 10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Босаков, С. В. Действие сосредоточенной силы на упругое четвертьпространство / С. В. Босаков // Теоретическая и прикладная механика: Междунар. науч.-техн. сб. / БПИ. Минск: Вышэйш. шк., 1988. Вып. 15. С. 100–108.
2. Уфлянд, Я. С. Некоторые пространственные задачи теории упругости для клина / Я. С. Уфлянд // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972. С. 549–553.
3. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. И. Рыжик. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
4. Развитие теории контактных задач в СССР / Академия наук СССР, Ин-т проблем механики; отв. ред. Л. А. Галин. М.: Наука, 1976. 496 с.
5. Ефимов, А. Б. Сосредоточенное воздействие на упругий несжимаемый клин / А. Б. Ефимов, Д. Г. Ефимов // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 6. С. 89–92.
6. Александров, В. М. Действие полосового штампа на упругий пространственный клин / В. М. Александров, Д. А. Пожарский // Прикладная механика. 1992. Т. 28, № 1. С. 49–54.
7. Сен-Венан, Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм / Б. Сен-Венан. М.: Из-во физ.-матем. лит., 1961. 518 с.
8. Hete´nyi, M. A General Solution for the Elastic Quarter-space / M. Hete´nyi // Journal of Applied Mechanics. 1970. Vol. 37, No 1. P. 75–80. https://doi.org/10.1115/1.3408492.
9. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Стройиздат, 1984. 680 с.
10. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчетов фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Госстройиздат, 1962. 240 с.

Поступила 14.05.2020
Подписана в печать 28.07.2020
Опубликована онлайн 30.09.2020

REFERENCES

1. Bosakov S. V. (1988) The Action of a Concentrated Force on an Elastic Quarter-Space. *Teoreticheskaya i Prikladnaya Mekhanika: Mezhdunar. Nauch.-Tekhn. Sb.* [Theoretical and Applied Mechanics: International Scientific and Technical Collection]. Minsk, Vysheyshaya Shkola Publ., 15, 100–108 (in Russian).
2. Uflyand Ya. S. (1972) Some Spatial Problems of Elasticity Theory for a Wedge. *Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis*. Moscow, Nauka Publ., 549–553 (in Russian).
3. Gradsteyn I. S., Ryzhik I. I. (1963) *Tables of Integrals, Series and Products*. Moscow, Fizmatgiz Publ. 1100 (in Russian).
4. Galin L. A. (1976) (ed.) *Development of the Theory of Contact Problems in the USSR / Academy of Sciences of the USSR, Institute of Problems of Mechanics*. Moscow, Nauka Publ. 496 (in Russian).
5. Efimov A. B., Efimov D. G. (1986) Concentrated Action on an Elastic Incompressible Wedge. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela = Mechanics of Solids,* (6), 89–92 (in Russian).
6. Alexandrov V. M., Pozharskii D. A. (1992) Action of a Band Stamp on a Three-Dimensional Elastic Wedge. *International Applied Mechanics*, 28 (1), 49–54. https://doi.org/10.1007/bf00847329.
7. Saint-Venant B. (1961) *Memoir on Prism Torsion. Memoir on Prism Bending*. Moscow, Fizmatlit Publ. 518 (in Russian).
8. Hete´nyi M. (1970) A General Solution for the Elastic Quarterspace. *Journal of Applied Mechanics*, 37 (1), 75–80. https://doi.org/10.1115/1.3408492.
9. Gorbunov-Posadov M. I., Malikova T. A., Solomin V. I. (1984) *Calculation of Structures on an Elastic Base*. Moscow, Stroyizdat Publ. 680 (in Russian).
10. Zhemochkin B. N., Sinitsyn A. P. (1962) *Practical Methods of Calculations of Foundation Beams and Slabs on an Elastic Base*. Moscow, Gosstroyizdat Publ. 240 (in Russian).

Received: 14.05.2020
Accepted: 28.07.2020
Published online: 30.09.2020