МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный технический
университет

Кафедра «Высшая математика № 2»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 2 ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

М и н с к
Б Н Т У
2 0 1 2

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 2»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 2 ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для студентов заочного отделения ФТУГ
экономических специальностей

Минск
БНТУ
2012

УДК 51 (075.4)
ББК 22.1я7
М54

Составители :
Л. И. Бородич, Л. Д. Матвеева, М. В. Кураленко

Рецензенты :
канд. физ.-мат. наук, доцент. В. В. Карпук;
канд. физ.-мат. наук, доцент Н. А. Шавель

Настоящее издание включает в себя программы, и контрольные задания (30 вариантов) по высшей математике по темам «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Ряды», «Теория вероятностей», «Линейное программирование».

Основные теоретические положения наглядно проиллюстрированы решением большого числа примеров и задач.

Студент должен выполнить контрольное задание по номеру варианта, который совпадает с двумя последними цифрами зачетной книжки (шифра). Если номер шифра больше тридцати, то следует из него вычесть число тридцать. Полученный результат будет номером варианта.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРОГРАММА

Тема 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ДУ)

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения (ДУ) 1-го порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Интегрирование ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными, однородных, линейных уравнений.

ДУ второго порядка. Задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Линейные ДУ второго порядка. Свойства линейного дифференциального оператора. Линейно-зависимые и линейно-независимые системы функций. Определитель Вронского.

Линейные однородные ДУ, условие линейной независимости их решений. Фундаментальная система решений. Структура общего решения. Линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами.

Линейные неоднородные ДУ. Структура общего решения. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных. Линейные неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида.

Тема 2. Ряды

Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Действия над рядами. Необходимое условие сходимости.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.

Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса.

Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Применение рядов к приближенным вычислениям.

Тема 3 Теория вероятностей

Предмет теории вероятностей. Классификация событий. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Понятие случайного события. Относительные частоты. Закон устойчивости относительных частот.

Классическое и геометрическое определение вероятности. Понятие об аксиоматическом построении теории вероятностей. Методы вычисления вероятностей.

Свойства вероятностей. Теоремы сложения. Независимость событий.

Определение условной вероятности. Вероятность произведения событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли. Теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона.

Дискретные случайные величины (СВ). Ряд распределения. Функция распределения, ее свойства. Математическое ожидание и дисперсия дискретной СВ.

Непрерывные СВ. Функция распределения, плотность распределения, их взаимосвязь и свойства. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной СВ.

Законы распределения дискретных СВ: биномиальный, Пуассона. Их свойства.

Законы распределения непрерывных СВ: равномерный, показательный, нормальный. Их свойства.

Тема 4. Линейное программирование

Задачи планирования и управления, их математические модели. Общая постановка задач оптимизации. Различные формы записи задач линейного программирования (ЛП) и их эквивалентность. Свойства решений задач ЛП. Нахождение начального опорного плана. Симплексный метод решения задач ЛП. Метод искусственного базиса.

Двойственность в ЛП. Построение пары взаимно двойственных задач. Основные теоремы двойственности. Экономический смысл двойственных переменных.

Тема 5. Специальные задачи линейного программирования

Математические модели задач транспортного типа. Открытая и закрытая модели транспортной задачи (ТЗ). Построение начального опорного плана. Метод потенциалов решения ТЗ. Критерий оптимальности.

Потоки на сетях. Постановка задачи о максимальном потоке. Понятие разреза в сети. Алгоритм Форда–Фалкерсона для построения максимального потока.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если это уравнение можно разрешить относительно y', то оно имеет вид

$$y' = f(x, y). \tag{1.1}$$

Общим решением дифференциального уравнения I порядка называется функция $y = \varphi(x, c)$, которая зависит от одного произвольного постоянного C и удовлетворяет условиям: 1) она удовлетворяет ДУ при любом C; 2) Каково бы ни было начальное условие $y\big|_{x=x_0} = y_0$ можно найти такое $c = c_0$, что $y = \varphi(x, c_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Частным решением уравнения (1.1) называется функция $y = \varphi(x, c_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, c)$, при определенном значении $c = c_0$.

Решить (*проинтегрировать*) ДУ – значит:

1. Найти его общее решение
2. Найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Уравнение с разделяющими переменными

Уравнение вида $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ называется уравнением с разделяющими переменными, если функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ можно представить в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одного переменного x или y.

Чтобы проинтегрировать уравнение, надо разделить переменные – это значит перед дифференциалом *dx* оставить функцию, зависящую только от *x*, а перед дифференциалом *dy*, зависящую только от *y*.

Пример 1.1. Решить уравнение

$$(x \cdot y^2 + x)dx + (y - x^2 \cdot y)dy = 0$$

Решение. $x \cdot (y^2 + 1)dx + y \cdot (1 - x^2)dy = 0.$

Разделив переменные, получим $\int \frac{ydy}{y^2 + 1} = \int \frac{-xdx}{1 - x^2}$ или

$$\frac{1}{2}\ln|1 + y^2| = \frac{1}{2}\ln|1 - x^2| + \frac{1}{2}\ln|C|,$$

т.е. $1 + y^2 = C\left(1 - x^2\right)$ – общий интеграл.

Пример 1.2. Решить задачу Коши для уравнения

$$ydx + ctgxdy = 0; \; y\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = -1.$$

Решение. а) Разделяя переменные, получим $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{ctgx}$

Тогда

$\ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|C|$ или $y = C\cos x$ – общее решение уравнения.

б) Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию: $y\Big|_{x=\frac{\pi}{3}} = -1$. Подставляя начальное условие в общее решение, получим: $-1 = C \cdot \cos\frac{\pi}{3}$, $C = -2$, $y = -2 \cdot \cos x$ – частное решение:

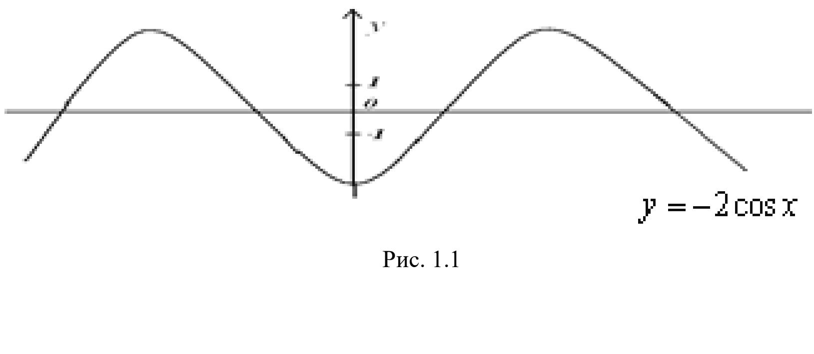


Рис. 1.1

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Функция $f(x,y)$ называется **однородной** измерения k относительно x и y,если она удовлетворяет при любом t равенству:

$$f(tx,\ ty) = t^k f(x\ ,y). \tag{1.2}$$

Уравнение $M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0$ называется **однородным,** если функции $M(x,\ y),\ N(x,\ y)$ – однородные функции одного и того же измерения.

Замена $y = u \cdot x$ приводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$.

Пример 1.3. Решить уравнение: $(2 \cdot x - y)dx + (x + y)dy = 0$ – однородное дифференциальное уравнение (k = 1).

Решение. $y = ux,\ dy = xdu + udx$;

$(2x - ux)dx + (x + ux)(udx + xdu) = 0$ или $x(1+u)du = -(2+u^2)dx$.

Разделяя переменные, интегрируя, получим.

$$\int \frac{1+u}{2+u^2}du = -\int \frac{dx}{x}; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|2+u^{\ 2}\right| = -\ln x + \ln C.$$

Так как $u = \dfrac{y}{x}$, то получаем общий интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{y}{\sqrt{2}x} = \ln \frac{C}{\sqrt{2x^2 + y^2}}.$$

Замечание*. Уравнение вида $y'=f(x,y)$ называется однородным, если $f(x,y)$ – однородная функция нулевого измерения.*

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейным ДУ первого порядка называется уравнение вида

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x). \tag{1.3}$$

Решается с помощью подстановки $y = uv$,где $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, тогда

$$vu'+v'u+P(x)\cdot u\cdot v=Q(x) \text{ или } u'\cdot v+u(v'+P(x)\cdot v)=Q(x).$$

Функция $v(x)$ находится так, что $v'+P(x)v=0,\ \Rightarrow$ получаем систему $\begin{cases} v'(x)+P(x)\cdot v=0; \\ u'\cdot v(x)=Q(x). \end{cases}$

Определив $u(x)$ и $v(x)$, получим общее решение линейного уравнения.

Пример 1.4. Решить уравнение $y'+y\cdot tgx=\cos^2 x$.

Решение. Данное уравнение – линейное относительно функции $y(x)$ и $y'(x)$.

Замена $y=u(x)\cdot v(x)$ приводит к системе двух уравнений с разделяющимися переменными:

$$u'v+v'u+u\cdot v\cdot tgx=\cos^2 x,\ u'v+u\cdot(v'+v\cdot tgx)=\cos^2 x,\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} v'+v\cdot tgx=0 \\ u'\cdot v=\cos^2 x \end{cases}.$$

1) $\dfrac{dv}{dx}=-v\cdot tgx,\quad \int\dfrac{dv}{v}=-\int tgxdx,\quad v=\cos x;$

2) $u'\cdot v=\cos^2 x,\ \int du=\int\cos xdx,\quad u=\sin x+c.$

$y=(\sin x+c)\cos x$ – общее решение.

1.2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида:

$$y''+a_1(x)y+a_2(x)y=f(x), \qquad (1.4)$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, и $f(x)$ – заданные непрерывные функции на (a,b).

Уравнение (1.4) называется ***неоднородным***, если $f(x)\neq 0$, и ***однородным***, если $f(x)=0$.

Уравнение (1.4) при любых начальных условиях имеет единственное решение, удовлетворяющее этим начальным условиям.

Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y''+py'+qy=0, \qquad (1.5)$$

где $p,q \in R$.

Совокупность двух определенных и линейно независимых решений уравнения (1.5) называется **фундаментальной системой решений**.

Основная теорема. Если y_1, y_2 – фундаментальная система решений уравнения (1.5), то их линейная комбинация

$$y = C_1y_1 + C_2y_2, \qquad (1.6)$$

где C_1,C_2 – произвольные постоянные числа, является **общим решением** уравнения (1.5).

Для нахождения общего решения уравнения (1.6) составляется **характеристическое уравнение**

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (1.7)$$

(заменяя производную i-го порядка i-ой степенью k, $i = 1,2$).

Возможны следующие случаи:

1) Корни k_1, k_2, характеристического уравнения (1.7) действительные и различные.

Общее решение однородного уравнения (1.5) записывается в виде

$$y = C_1e^{\kappa_1 x} + C_2e^{\kappa_2 x}. \qquad (1.8)$$

2) Корни характеристического уравнения действительные, но равные ($k_1 = k_2$).

Общее решение однородного уравнения принимает вид

$$y = e^{\kappa x}(C_1 + C_2x). \qquad (1.9)$$

3) Корни характеристического уравнения комплексно сопряженные, $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Тогда

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x). \qquad (1.10)$$

Пример 1.5. Найти общее решение уравнения $y''+2y'+2y=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 2 = 0$. Его корни: $k_{1,2} = -1 \pm i$. Тогда общее решение имеет вид: $y = e^{-x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right)$

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y''+py'+qy = f(x), \qquad (1.11)$$

где $p,q \in R$, $f(x)$ – непрерывная функция.

Лагранж разработал общий метод решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений. Метод применим, если известно общее решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (1.11). Этот метод называется методом вариации произвольных постоянных или методом Лагранжа.

Пусть $\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ – общее решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (1.11):

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (1.12)$$

Суть метода Лагранжа для уравнения состоит в следующем.

1) Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$ и записываем его в виде $\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где C_1 и C_2 произвольные постоянные.

2) Для нахождения общего решения неоднородного уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ записываем его в виде $y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$, где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – неизвестные функции, они должны быть такими, чтобы удовлетворялось неоднородное уравнение.

3) Находим выражения для производных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Для этого составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0; \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases}$$

4) Найденные из этой системы производные $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ интегрируются и выражения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ подставляются в общее решение (1.12) со своими произвольными постоянными C_1 и C_2, полученными при интегрировании.

Пример 1.6. Найти общее решение уравнения $y'' - y = \dfrac{2e^x}{e^x - 1.}$.

Решение. 1) Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - y = 0$. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$. Находим

$k = \pm 1, \Rightarrow \overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \; y_1 = e^x, \; y_2 = e^{-x}, y_1' = e^x, \; y_2' = -e^{-x}.$

2) Записываем общее решение неоднородного уравнения: $y = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}$.

3) Для нахождения функций *C₁(x)* и *C₂(x)* составляем систему

$$\begin{cases} C_1^{'}(x)e^{x}+C_2^{'}(x)e^{-x}=0 \\ C_1^{'}(x)e^{x}-C_2^{'}(x)e^{-x}=\dfrac{2e^{x}}{e^{x}-1} \end{cases},\ \Rightarrow\ C_1^{'}(x)e^{x}=-C_2^{'}(x)e^{-x},$$

подставляя во второе уравнение системы, получим:

$$-C_2^{'}(x)e^{-x}-C_2^{'}(x)e^{-x}=\frac{2e^{x}}{e^{x}-1}\ \Rightarrow C_2^{'}(x)=-\frac{e^{2x}}{e^{x}-1},\ C_1^{'}(x)=\frac{1}{e^{x}-1}.$$

4) Интегрируя найденные $C_1^{'}(x)$ *и* $C_2^{'}(x)$, получим:

$$C_1(x)=\int\frac{dx}{e^{x}-1}=\int\frac{1+e^{x}-e^{x}}{e^{x}-1}dx=-\int\frac{(e^{x}-1)-e^{x}}{e^{x}-1}dx=$$

$$=-\int dx+\int\frac{e^{x}dx}{e^{x}-1}=-x+ln\,|\,e^{x}-1\,|+C_1.$$

$$C_2(x)=-\int\frac{e^{2x}dx}{e^{x}-1}=\begin{vmatrix} e^{x}-1=t \\ e^{x}dx=dt \\ e^{x}=t+1 \end{vmatrix}=-\int\frac{(t+1)}{t}dt=-(t+\ln|t|)=$$

$$=-(e^{x}-1+\ln|e^{x}-1|)+C_2=(1-e^{x}-\ln|e^{x}-1|)+C_2.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y=e^{x}(C_1-x+\ln|e^{x}-1|)+e^{-x}(1-e^{x}-\ln|e^{x}-1|+C_2)=$$

$$=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+\ln|e^{x}-1|\left(e^{x}-e^{-x}\right)-xe^{x}-e^{-x}-1.$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальным видом правой части

Метод неопределенных коэффициентов. Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (1.11).

Общее решение уравнения (1.11) имеет вид:

$$y = \overline{y} + y^*,$$

где $\overline{y}$ – общее решение уравнения (1.12), а y^* – частное решение уравнения (1.11).

Форма частного решения y^* уравнения (1.11) зависит от вида правой части *f(x)* и корней характеристического уравнения.

1. Пусть правая часть уравнения (1.11) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x), \qquad (1.13)$$

где $P_n(x)$ *и* $Q_m(x)$ – многочлены, соответственно степени *n* и *m*.

Тогда $y^* = x^r e^{\alpha x}(U_s(x)\cos\beta x + V_s(x)\sin\beta x)$, где $U_s(x)$ и $V_s(x)$ – многочлены степени *s* с неопределенными коэффициентами, $s = \max\{n, m\}$, $\alpha \pm \beta i$ – корни характеристического уравнения, *r* – кратность корня α характеристического уравнения (1.7).

Частный случай: Если $\beta = 0$, то $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$ и y^* записывается в виде:

$$y^* = x^r e^{\alpha x} U_n(x), \qquad (1.14)$$

где $U_n(x)$ – многочлен степени *n* с неопределенными коэффициен тами.

Метод неопределенных коэффициентов состоит в следующем:
1) находим y^* в соответствии с указанными правилами;

2) находим производные $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ и вместе с y^* подставляем в уравнение (1.11);

3) приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной *x* в левой и правой частях уравнения. При наличии тригонометрических функций приравниваются коэффициенты в левой и правой частях уравнения при $x^r\cos\beta x$ и $x^r\sin\beta x$, $(r = 0,1,)$;

4) находим числовые значения неизвестных коэффициентов и подставляем их в y^*.

Пример 1.7. Найти общее и частное решение уравнения $y'' - 3y' = x \cdot e^{-x}$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Общее решение имеет вид: $y = \overline{y} + y^*$.

1) $\overline{y}: y'' - 3y' = 0$. Решаем характеристическое уравнение $k^2 - 3k = 0 \Rightarrow k_1 = 0,\ k_2 = 3 \Rightarrow \overline{y} = C_1 + C_2 e^{3x}$.

2) y^*: $f(x)=x\cdot e^{-x}$. Так как $\alpha=-1$ не является корнем характеристического уравнения, степень $n=1$, то $y^*=\left(Ax+B\right)e^{-x}$. Находим

$$y^*{}'=Ae^{-x}-\left(Ax+B\right)e^{-x},$$

$$y^*{}''=-Ae^{-x}-Ae^{-x}+\left(Ax+B\right)e^{-x}=-2Ae^{-x}+\left(Ax+B\right)e^{-x}.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$-5Ae^{-x}+4\left(Ax+B\right)e^{-x}=x\cdot e^{-x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4A=1, 4B-5A=0\Rightarrow A=\tfrac{1}{4},\ B=\tfrac{5}{16}.$$

Следовательно, $y^*=\left(\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{16}\right)e^{-x}$.

3) $y=\overline{y}+y^*=C_1+C_2e^{3x}+\left(\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{16}\right)e^{-x}$.

4) Найдем частное решение данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y\left(0\right)=1,\ y'\left(0\right)=0$. Имеем

$$y=C_1+C_2e^{3x}+\left(\frac{1}{4}x+\frac{5}{16}\right)e^{-x},$$

$$y'=3C_2e^{3x}+\frac{1}{4}e^{-x}-\left(\frac{1}{4}x+\frac{5}{16}\right)e^{-x}.$$

Получаем систему $\begin{cases}1=C_1+C_2+\dfrac{5}{16},\\[2ex] 0=3C_2+\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{16},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_2=\dfrac{1}{48},\\[2ex] C_1=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$

Следовательно, частное решение $\tilde{y}$ имеет вид

$$\tilde{y}=\frac{2}{3}+\frac{1}{48}e^{3x}+\left(\frac{1}{4}x+\frac{5}{16}\right)e^{-x}.$$

2. РЯДЫ

2.1. Числовые ряды. Основные определения. Сходимость ряда. Признаки сходимости числовых рядов

Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \dots u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad (2.1)$$

где $u_n \in R$, называется числовым рядом. Числа u_1, u_2, …, u_n … называются членами ряда, а u_n – общий член ряда.

Суммы

$$S_1 = u_1;\ S_2 = u_1 + u_2,\ \dots;\ S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \qquad (2.2)$$

называются частичными суммами ряда (2.1).

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд (2.1) называется **сходящимся**, а число S – его суммой. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд (2.1) называется **расходящимся**.

Необходимый признак сходимости ряда: Если ряд (2.1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд (2.1) расходится.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется ***гармоническим рядом***. Для него $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, но ряд расходится.

2.2. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

1. **Признак сравнения**: Пусть даны два ряда с положительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (2.3)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n\,, \tag{2.4}$$

причем члены ряда (2.3) не превосходят соответствующих членов ряда (2.4), т.е. при любом *n* $u_n \le v_n$.

Тогда: а) если сходится ряд (2.4), то сходится и ряд (2.3); б) если расходится ряд (2.3), то расходится и ряд (2.4).

2. **Предельный признак сравнения**: Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} > 0,$ то ряды (2.3) и (2.4) одновременно сходятся, либо расходятся.

3. **Признак Даламбера:** Если для ряда (2.3) существует $\lim\limits_{n\to\infty} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то при $l < 1$ – ряд (2.3) сходится; при $l > 1$ – ряд (2.3) расходится; а при $l = 1$ может сходиться или расходиться.

4. **Радикальный признак Коши:** Если для ряда (2.3) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} = \sqrt[n]{u_n} = q,$ то, при $q < 1$ – ряд (2.3) сходится; при $q > 1$ – ряд расходится; при $q = 1$ может сходиться или расходиться.

5. **Интегральный признак Коши:** Пусть члены ряда (2.3) положительны и не возрастают при n → ∞, т.е. $u_1 \ge u_2 \ge u_3 \ge \ldots \ge u_n \ge \ldots,$ и пусть *f(x)* – положительная, непрерывная, невозрастающая функция на [1, ∞] такая, что

$$f(1) = u_1, f(2) = u_2, \ \ldots, f(n) = u_n.$$

Тогда ряд (2.3) сходится или расходится одновременно с интегралом $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Для сравнения часто используются ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ – геометрическая прогрессия (при $|q| < 1$ – ряд сходится, при $|q| \ge 1$ – расходится).

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$ – обобщенный гармонический ряд (при p > 1 сходится; при $p \le 1$ – расходится).

Пример 2.1. Исследовать сходимость рядов: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{n} n^6$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$.

Решение. а) Применим признак сравнения. Сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ расходящимся. Так как $\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n+1}$ ($\ln n < n$), то по признаку сравнения данный ряд расходится.

б) Применим предельный признак сходимости. Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, $p = 3 > 1$, ряд сходится.

По предельному признаку сравнения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^4+1}:\frac{1}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{n^4+1}=1>0,$$

следовательно, исходный ряд сходится.

в) Применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left|\begin{array}{l} u_n=\left(\frac{9}{10}\right)^{n} n^6 \\ u_{n+1}=\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}(n+1)^6 \end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}(n+1)^6}{\left(\frac{9}{10}\right)^{n} n^6}=$$

$$=\frac{9}{10}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^6=\frac{9}{10}<1.$$

Следовательно, исходный ряд сходится.

г) По радикальному признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3n+1}{4n+1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{4n+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1,$$

следовательно, ряд сходится.

д) По интегральному признаку Коши:

$u_n = \dfrac{n}{1+n^2}, f\left(x\right) = \dfrac{x}{1+x^2}$ – невозрастающая функция,

так как ее производная $f^{/}\left(x\right) = \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$ < 0 при $x > 1$.

$$\text{Имеем } \int_1^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \ln\left|1+x^2\right|\Big|_1^b =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left(\ln\left(1+b\right)^2 - \ln 2\right) = \infty.$$

Следовательно, несобственный интеграл расходится, значит, и ряд расходится.

2.3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{2.5}$$

называется **знакопеременным**, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|u_n\right|, \tag{2.6}$$

составленный из модулей членов ряда (2.5), сходится, то ряд (2.5) также сходится.

Ряд (2.5) называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд (2.6).

Сходящийся знакопеременный ряд (2.5) называется **условно сходящимся**, если ряд (2.6) расходится.

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots, \qquad (2.7)$$

где $u_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, называется **знакочередующимся.**

Признак Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда (2.7) удовлетворяют условиям: 1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_{\text{n}} > \ldots$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд (2.7) сходится.

Остаток ряда r_n: $r_n = (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \ldots$ имеет знак своего первого члена и меньше его по модулю, т.е. $|r_n| < u_{n+1}$.

Пример 2.2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$.

Решение. Ряд из модулей его членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^2}$ сходится по признаку сравнения, так как $\frac{|\cos n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 2.3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Решение. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}$ – знакочередующийся ряд. Ряд из модулей его членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ расходится (по интегральному признаку сходимости).

б) Проверим условную сходимость по признаку Лейбница:
1) $\frac{1}{2\ln 2} > \frac{1}{3\ln 3} > \frac{1}{4\ln 4} > \ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = 0.$

Следовательно, данный ряд сходится условно.

2.4. Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(x-a\right)^n , \qquad (2.8)$$

где c_n – коэффициенты степенного ряда, $c_n,\ a \in R$.

Если $a = 0$, то ряд (2.8) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n . \qquad (2.9)$$

Совокупность тех значений x, при которых степенной ряд сходится, называется **областью сходимости** степенного ряда.

Теорема Абеля. 1). Если степенной ряд (2.9) сходится при значении $x = x_0 \neq 0$, то он сходится, и причем абсолютно, при всех значениях x таких, что $|x| < |x_0|$;

2) Если степенной ряд (2.9) расходится при $x = x_1$, то он расходится при всех значениях x таких, что $|x| > |x_1|$.

Областью сходимости степенного ряда (2.9) является некоторый интервал с центром в точке $x = 0$.

Радиусом сходимости ряда (2.9) называется такое число R, что во всех точках $x,$ для которых $|x| < R$, ряд сходится, а во всех точках $|x| > R$ ряд расходится.

Радиус сходимости степенного ряда находится по формулам $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$; $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$, если эти пределы существуют.

Пример 2.4. Определить область сходимости рядов:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\left(n+1\right)}$. 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.

Решение.

$$1)\ R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \left|\begin{matrix} c_n = \dfrac{1}{3^n\left(n+1\right)} \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{3^{n+1}\left(n+2\right)} \end{matrix}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\left(n+2\right)}{3^n\left(n+1\right)} = 3,$$

следовательно, интервал сходимости (-3, 3).

Исследуем сходимость ряда в граничных точках:

а) при $x = 3$, получаем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$, который расходится (гармоничекий ряд);

б) при $x = -3$, получим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ который сходится по признаку Лейбница: 1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$.

Область сходимости – $[-3;\ 3)$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$. Определим радиус сходимости ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \left|\begin{array}{l} c_n = \dfrac{n}{(n+1)2^n}; \\ c_{n+1} = \dfrac{n+1}{(n+2)2^{n+1}} \end{array}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)2^{n+1}}{(n+1)(n+1)2^n} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = 2.$$

Следовательно, $R = 2;\ |x-1| < 2;\ -2 < x-1 < 2;\ -1 < x < 3.$

Интервал сходимости – $(-1,\ 3)$. Исследуем сходимость ряда в граничных точках.

а) $x = 3$. Получаем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ – ряд знакоположительный,

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$ Следовательно, ряд расходится.

б) $x = -1$. Получаем $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$ – ряд знакочередующийся, который расходится по признаку Лейбница, так как $\lim_{n\to\infty} |u_n| \neq 0$. Область сходимости – (-1, 3).

3. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3.1. Пространство элементарных событий. Определение вероятности. Элементы комбинаторики

Элементарными событиями (элементарными исходами) называются взаимоисключающие исходы опыта. Множество $\Omega = \{\omega_i\}$ всех элементарных событий ω_i называется **пространством элементарных событий** данного опыта. Любое подмножество *A* множества Ω называется **событием**.

Вероятность события характеризует степень объективной возможности наступления этого события.

Классическое определение вероятности. Пусть множество Ω состоит из конечного числа *n* равновозможных элементарных событий. Вероятность *P(A)* события *A* равна отношению числа *m* событий, благоприятствующих событию *A* к числу всех элементарных событий (число всевозможных, равновозможных и единственно возможных исходов), т.е. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Элементы комбинаторики. В теории вероятностей часто используют **размещения, перестановки и сочетания**.

Число перестановок из *n* элементов вычисляется по формуле

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 .... n\,; \tag{3.1}$$

число размещений из *n* элементов по *k* – по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1)\,; \tag{3.2}$$

число сочетаний из n элементов по *k* – по формуле

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot k}. \qquad (3.3)$$

Отметим, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Приведем несколько примеров простейших комбинаторных задач.

1. Число способов, которыми можно рассадить за столы по 2 студента группу в 20 человек, равно

$$A_{20}^2 = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = 19\cdot 20 = 380.$$

2. Число способов распределения 5 должностей между 5 лицами равно $P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$.

3. Число партий шахматной игры среди 12 участников чемпионата (если каждый участник играет только одну партию друг с другом) равно $C_{12}^2 = \frac{12!}{2!10!} = \frac{12\cdot 11}{1\cdot 2} = 66$.

4. Число способов, которыми можно выбрать делегацию в состав 15 человек из группы в 20 человек, равно

$$C_{20}^{15} = C_{20}^5 = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 15504.$$

Пример 3.1. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наугад отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.

Решение. Требуется найти вероятность события A = {среди отобранных лиц – 3 женщины}. В данной задаче элементарное событие – набор из 7 человек. Так как последовательность, в которой они отбираются, несущественна, число всех таких наборов есть число сочетаний из 10 элементов по 7: $n = C_{10}^7 = C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$.

По условию все элементарные события равновозможны. Поэтому можно использовать классический способ вычисления вероятности. Найдем число элементарных исходов, благоприятствующих событию A. Это будет число наборов, в которых 3 человека выбраны из 4 женщин, а 4 человека – из 6 мужчин. Из 4 женщин троих можно выбрать $m_1 = C_4^3 = 4$ способами, а из 6 мужчин четверых –

$m_2 = C_6^2 = 15$ способами. Благоприятствующие событию A исходы получаются, когда набор из 3 женщин дополняется 4 мужчинами. Число таких способов будет равно $m = m_1 \cdot m_2 = 4 \cdot 15 = 60$. По классическому определению вероятности получим $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2}$.

3.2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения. Вероятность суммы двух любых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \tag{3.4}$$

Если события A и B несовместны (т.е. в результате опыта они не могут появиться вместе), то

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{3.5}$$

Следствие. Вероятность события , противоположного данному событию A, равна

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{3.6}$$

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух событий A и B равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого события, при условии, что первое произошло, т.е.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B). \tag{3.7}$$

Если события A и B независимы (т.е. появление одного из них не меняет вероятности появления другого), то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \tag{3.8}$$

Формула (3.7) верна и для любого конечного числа событий $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = \\ &\quad = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 A_2) \cdot ... \cdot P(A_n / A_1 A_2 ... A_{n-1}). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно независимы, то

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) ... \cdot P(A_n). \tag{3.10}$$

Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, ..., A_n$ равна

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2)...P(\overline{A}_n). \quad (3.11)$$

Пример 3.2. Для производственной практики на 30 студентов представлено 15 мест в Минске, 8 – в Гомеле и 7 – в Витебске. Какова вероятность того, что 2 определенных студента попадут на практику в один город?

Решение. Рассмотрим события: *A* = {2 определенных студента попадут на практику в Минск}, *B* = {2 определенных студента попадут на практику в Гомель}, *C* = {2 определенных студента попадут на практику в Витебск}. Эти события попарно несовместны. Событие *D* = {2 определенных студента попадут в один город} есть сумма указанных событий. По формуле (3.5) имеем *P*(*D*) = *P*(*A*) + + *P*(*B*) + *P*(*C*). По классическому определению вероятностей

$$P(A) = \frac{C_{15}^2}{C_{30}^2}; \ P(B) = \frac{C_8^2}{C_{30}^2}; \ P(C) = \frac{C_7^2}{C_{30}^2}.$$

Тогда $P(D) = \dfrac{C_{15}^2 + C_8^2 + C_7^2}{C_{30}^2} = \dfrac{154}{435}$.

Пример 3.3. Имеется блок, входящий в систему. Вероятность безотказной работы его в течение заданного времени *T* равна 0,85. Для повышения надежности устанавливают такой же резервный блок. Определить вероятность безотказной работы за время *T* с учетом резервного блока.

Решение. Введем события: *A* ={безотказная работа данного блока за время *T*}, *B* = {безотказная работа резервного блока за время *T*}. По условию *P*(*A*) = *P*(*B*) = 0,85. Пусть событие *C* = {безотказная работа данного блока с учетом резервного за время *T*}. Так как события *A* и *B* – совместны, но независимы, то по формуле (3.4) получаем

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0{,}85 + 0{,}85 - 0{,}85 \cdot 0{,}85 = 0{,}9775.$$

Пример 3.4. Рабочий, обслуживающий 2 станка, вынужден был отлучиться на некоторое время. Вероятность того, что в течение этого времени станки не потребуют внимания рабочего, равны $P_1 = 0,7$ и $P_2 = 0,8$. Найти вероятность того, что за время отсутствия рабочего ни один станок не потребует его внимания.

Решение. Пусть событие A = {первый станок не потребует внимания рабочего за время его отсутствия}, B = {второй станок не потребует внимания рабочего за время его отсутствия}. Эти события независимы, поэтому по формуле (3.8) получим: $P(AB) = P(A) \cdot P(B) =$ $= 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.

Пример 3.5. У сборщика имеется 6 деталей без дефекта и 2 детали с дефектом. Сборщик берет подряд 2 детали. Найти вероятность того, что обе детали – без дефекта.

Решение. Пусть событие A = {первая деталь – без дефекта}, B = {вторая деталь – без дефекта}. Нас интересует событие $A{\cdot}B$. По теореме умножения вероятностей (5.4) имеем

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A) = \frac{6}{8} \cdot \frac{6-1}{8-1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28}.$$

Пример 3.6. 3 стрелка производят по одному выстрелу по цели, вероятности попадания в которую равны: для первого стрелка – 0,6, для второго – 0,7, для третьего – 0,8. Найти вероятность одного попадания в цель.

Решение. Пусть A_i = {попадание i-го стрелка в цель), противоположные события $\overline{A_i}$ = {промах i-го стрелка}, i = 1,2,3. Рассмотрим событие A = {одно попадание в цель при стрельбе 3 стрелков}. Это событие может наступить при наступлении одного из следующих несовместных событий: $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3$, $\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$.

Тогда $A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$, а его вероятность

$$P(A) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3) +$$

$$+P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(A_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 =$$

$$= 0{,}036 + 0{,}056 + 0{,}096 = 0{,}188.$$

Пример 3.7. Техническое устройство, состоящее из 3 узлов, работало в течение некоторого времени T. За это время первый узел оказывается неисправным с вероятностью 0,1, второй - с вероятностью 0,15, третий – с вероятностью 0,12. Найти вероятность того, что за время работы хотя бы 1 узел технического устройства выйдет из строя.

Решение. Пусть событие A_i = {выход из строя i-го узла технического устройства} $(i=\overline{1,3})$. Тогда событие $A=A_1+A_2+A_3$ – выход из строя хотя бы одного из 3 узлов. События A_i $(i=\overline{1,3})$ совместны и независимы. Поэтому вероятность события A определяется по (7.8):

$$P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3).$$

Следовательно, $P(A)$ = 1 – 0,9 · 0,85 · 0,88 = 1 – 0,6732 = 0,3268.

3.3. Формула полной вероятности и формула Байеса

Если событие A может произойти только совместно с одним из событий $H_1, H_2, ...H_n$, образующих полную группу событий (гипотез), то вероятность события A определяется по **формуле полной вероятности**

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)P(A/H_k), \tag{3.12}$$

где $P(H_k)$ – вероятность гипотезы H_k; $P(A/H_k)$ – условная вероятность события A при этой гипотезе, $\sum_{k=1}^{n}P(H_k)=1$. Вероятность $P(H_k/A)$ гипотезы H_k после того, как появилось событие A,

определяется по **формуле Байеса**

$$P(H_k/A)=\frac{P(H_k)\cdot P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)},\ (k=1,2,...,n)\ . \tag{3.13}$$

Пример 3.8. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных заводом № 1, 20 деталей – заводом № 2 и 18 деталей – заводом № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная заводом № 1, – отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах № 2 и № 3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наугад деталь окажется отличного качества.

Решение. Пусть событие A – деталь отличного качества. Рассмотрим гипотезы и вероятности этих гипотез:

H_1 – деталь изготовлена заводом № 1 $\left(P(H_1) = \frac{12}{50} = \frac{6}{25} \right)$;

H_2 – деталь изготовлена заводом № 2 $\left(P(H_2) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} \right)$;

H_3 – деталь изготовлена заводом № 3 $\left(P(H_3) = \frac{18}{50} = \frac{9}{25} \right)$.

Условные вероятности: $P(A / H_1) = 0,9;$ $P(A / H_2) = 0,6;$ $P(A / H_3) = 0,9$. По формуле полной вероятности (3.12) при *n* = 3 находим искомую вероятность

$$P(A) = \sum_{k=1}^{3} P(H_k) P(A / H_k) = \frac{6}{25} \cdot 0,9 + \frac{2}{5} \cdot 0,6 + \frac{9}{25} \cdot 0,9 = 0,78.$$

Пример 3.9. Счетчик регистрирует частицы 3 типов: *A*, *B* и *C*. Вероятности появления этих частиц: *P*(*A*) = 0,2; *P*(*B*) = 0,5; *P*(*C*) = 0,3. Частицы каждого из этих типов счетчик улавливает с вероятностями $P_1 = 0,8;$ $P_2 = 0,2;$ $P_3 = 0,4$. Счетчик отметил частицу.

Определить вероятность того, что это была частица типа *B*.

Решение. Обозначим событие *D* – счетчик уловил частицу; гипотезы: H_1 – появление частицы типа *A*; H_2 – появление частицы типа *B*; H_3 – появление частицы типа *C*.

Вероятности гипотез: $P(H_1) = 0,2;$ $P(H_2) = 0,5;$ $P(H_3) = 0,3$.

Условные вероятности:

$P(D / H_1) = 0,8;$ $P(D / H_2) = 0,2;$ $P(D / H_3) = 0,4$.

Искомую вероятность $P(H_2 / D)$ определим по формуле Байеса (3.13):

$$P(H_2 / D) = \frac{P(H_2) P(D / H_2)}{\sum_{k=1}^{3} P(H_k) P(D / H_k)} = \frac{0,5 \cdot 0,2}{0,2 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,4} =$$

$$= \frac{0,1}{0,16 + 0,1 + 0,12} = \frac{5}{19}.$$

3.4. Случайные величины

Случайной величиной (СВ) называется числовая функция $\xi = \xi(\omega)$, заданная на пространстве Ω элементарных событий ω и такая, что для любого числа x определена вероятность

$$P(\xi < \mathrm{x}) = P\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}.$$

Другими словами, **случайная величина** – это величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно, какое именно. Обычно рассматриваются **два типа СВ: дискретные и непрерывные**. **Дискретной** называется такая СВ, которая принимает конечное или счетное множество значений. Возможные значения **непрерывной** СВ заполняют некоторый интервал (конечный или бесконечный). Случайная величина считается **заданной**, если задан закон ее распределения.

Законом распределения дискретной СВ называется соотношение, устанавливающее связь между ее возможными значениями и соответствующими им вероятностями.

Пусть дискретная СВ ξ может принимать значения $x_1, x_2, ..., x_n$. Обозначим $p_i = P(\xi = x_i)$ – вероятность того, что СВξ принимает значение x_i.

Таблица

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

называется **рядом распределения вероятностей дискретной СВ ξ или законом распределения дискретной СВ ξ**.

Поскольку дискретная СВ ξ обязательно принимает одно из значений x_i, события $\{\xi = x_i\}$ образуют полную группу событий, поэтому $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Графическое изображение ряда распределения называется многоугольником распределения.

Функцией распределения СВ ξ (интегральной функцией СВ ξ) называется функция $F(x)$, равная вероятности $P(\xi < x)$ того, что СВ ξ примет значение, меньшее, чем x, т.е. $F(x) = P(\xi < x)$.

Свойства функции распределения:

1. $0 \le F(x) \le 1$.

2. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. $x_1 < x_2 \Rightarrow \mathrm{F}(x_1) \le \mathrm{F}(x_2)$.

3. Если СВ ξ принимает возможное значение x_i с вероятностью p_i, то $F(x_i+0) - F(x_i) = p_i$.

Функция распределения $F(x)$ в точке x_i непрерывна слева.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

5. $P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)$.

Случайная величина ξ называется **непрерывной**, если ее функция распределения непрерывна.

6. Если ξ – непрерывная СВ, то $P(\xi = x) = 0$.

Плотностью распределения непрерывной СВ ξ (дифференциальной функцией распределения СВ ξ) называется функция $p(x)$, такая, что функция распределения $F(x)$ выражается формулой

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt.$$

Свойства плотности вероятности:

1. $p(x) \ge 0$. 2. $P(a \le \xi \le b) = \int_a^b p(t)dt$.

3. $\int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = 1$. 4. $p(x) = F'(x)$.

Пример 3.10. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных, построить функцию распределения.

Решение. СВ ξ – число стандартных деталей из 3 отобранных – может принимать следующие значения: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. Вероятности возможных значений ξ определим по формуле $P(\xi = k) = \dfrac{C_4^k C_2^{3-k}}{C_6^3}$. Итак,

$$P(\xi = 1) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{5}; P(\xi = 2) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5}; P(\xi = 3) = \frac{C_4^3 C_2^0}{C_6^3} = \frac{1}{5}.$$

Составим ряд распределения:

x_i	1	2	3
p_i	1/5	3/5	1/5

Для построения функции распределения дискретной СВ ξ воспользуемся тем свойством $F(x)$, что при $x_{k-1} < x \le x_k$

$$F(x) = p_1 + p_2 + \ldots + p_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} p_i .$$

В точке x_i функция $F(x)$ имеет скачок $p_i = P(\xi = x_i) = F(x_i + 0) - F(x_i - 0)$ и, значит, для всех $x \in (x_k, x_{k+1}]$

$$F(x) = P_1 + P_2 + \ldots + P_{K-1} + P_K = \sum_{i=1}^{k} P_i .$$

Таким образом, функция распределения дискретной СВ ξ – кусочно-постоянна, имеет скачки p_i в точках разрыва x_i и непрерывна слева в точках разрыва x_i. Для данной СВ ξ функция $F(x)$ и ее график имеют вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1; \\ 1/5 \text{ при } 1 < x \le 2; \\ 4/5 \text{ при } 2 < x \le 3; \\ 1 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

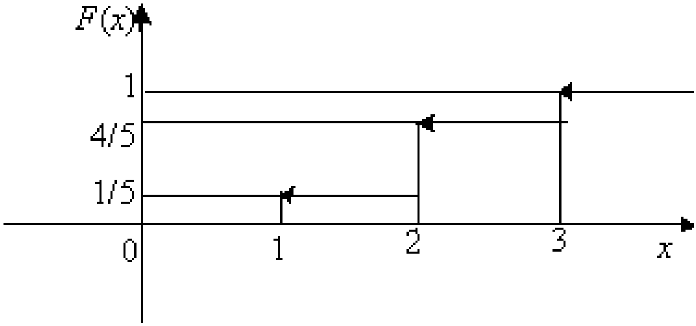


Рис. 3.1

3.5. Числовые характеристики случайных величин

К числовым характеристикам СВ относятся: **математическое ожидание *M(ξ)*, дисперсия *D(ξ)*, среднее квадратическое отклонение *σ(ξ)*, моменты и др.**

Пусть ξ – дискретная СВ, принимающая значения $x_1, x_2, \ldots$ с вероятностями p_1, p_2, ... соответственно.

Математическим ожиданием СВ ξ, или средним значением, называется число $M(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, в предположении, что этот ряд сходится абсолютно. Если СВ ξ – непрерывна с плотностью *p(x),* то математическое ожидание определяется интегралом

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx .$$

Дисперсией или рассеиваиием D(ξ) СВ ξ называется математическое ожидание квадрата отклонения СВ ξ от ее математического ожидания, т.е. $D(\xi) = M\left((\xi - M(\xi))^2\right)$.

Для дискретной СВ ξ дисперсия определяется равенством: $D(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - M(\xi))^2 p_i$.

Для непрерывной СВ: $D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))^2 p(x)dx$.

Из свойств дисперсии получается удобная рабочая формула для ее вычисления $D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2$.

Для дискретной СВ: $D(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - (M(\xi))^2$.

Для непрерывной СВ: $D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx - (M(\xi))^2$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}$.

Пример 3.11. Имеется 6 ключей, из которых только 1 подходит к замку. Составить ряд распределения числа попыток при открывании замка, если ключ, не подошедший к замку, в последующих опробованиях не участвует. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Решение. Опробования открывания замка заканчиваются на *k*-й попытке, если первые *k*-1 попытки не привели к успеху, а *k*-я попытка закончилась успешно.

Случайная величина ξ – число попыток при открывании замка – может принимать следующие значения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_6 = 6$. Вероятности этих значений можно определить по формуле

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{6-k+1}{6} \cdot \frac{1}{6-k+1} = \frac{1}{6}.$$

Таким образом, возможные значения случайной величины равновероятны. Запишем ряд распределения данной дискретной СВ.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

На основании этого распределения получим

$$M(\xi)=\sum_{i=1}^{6}x_i p_i=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}\ ;$$

$$M(\xi^2)=\sum_{i=1}^{6}x_i^2 p_i=\frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)=\frac{91}{6}\ ;$$

$$D(\xi)=M(\xi^2)-[M(\xi)]^2=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12};\quad \sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{\frac{35}{12}}\ .$$

Пример 3.12. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{16} & \text{при} \quad 0<x\le 4;\\ 1 & \text{при} \quad x>4\ .\end{cases}$$

Найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$.

Решение.

1) $$p\left(x\right)=F'(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0;\\ \dfrac{x}{8} & \text{при} \quad 0<x\le 4;\\ 0 & \text{при} \quad x>4\ .\end{cases}$$

2) $$M(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx=\int_0^4 x\frac{x}{8}dx=\left.\frac{x^3}{24}\right|_0^4=\frac{8}{3};$$

3) дисперсию $D(\xi)$ вычислим по формуле $D(\xi)=M(\xi^2)-[M(\xi)]^2$.

Тогда

$$M(\xi^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)dx=\int_0^4 x^2\frac{x}{8}dx=\left.\frac{x^4}{32}\right|_0^4=8\ ;$$

$$D(\xi)=8-\left(\frac{8}{3}\right)^2=8-\frac{64}{9}=\frac{8}{9}\ ;\quad \sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ .$$

4. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

4.1. Математические модели задач планирования и управления

Для практического решения экономической задачи математическими методами ее прежде всего следует записать с помощью математических выражений (уравнений, неравенств и т.п.), т.е. составить экономико-математическую модель данной задачи. Для этого необходимо:

1) ввести **переменные величины** x_1, x_2, …, x_n, числовые значения которых однозначно определяют одно из возможных состояний исследуемого явления;

2) выразить взаимосвязи (присущие исследуемому параметру) в виде математических ограничений (уравнений, неравенств), налагаемых на неизвестные величины. Эти соотношения определяют **систему ограничений** задачи, которая образует **область допустимых решений** (область экономических возможностей). **Решение (план)** X = (x_1, x_2, …, x_n), удовлетворяющее системе ограничений задачи, называют **допустимым (базисным)**;

3) записать критерий оптимальности в форме **целевой функции** $z = z(X)$, которая позволяет выбрать наилучший вариант из множества возможных;

4) составить математическую формулировку задачи отыскания *экстремума* целевой функции при условии выполнения ограничений, накладываемых на переменные. Допустимый план, доставляющий целевой функции экстремальное значение, называется **оптимальным** и обозначается X_{opt} или X^*.

Составим, например, **математическую модель** следующей задачи.

Пример 4.1. Пошивочный цех изготавливает три вида обуви из поступающих из раскройного цеха заготовок. Расход заготовок на пару обуви каждого вида, запасы заготовок, а также прибыль, получаемая фабрикой при реализации пары обуви каждого вида, заданы в табл. 4.1. Сколько пар обуви каждого вида следует выпускать фабрике для получения максимальной прибыли при условии, что заготовки II вида необходимо израсходовать полностью?

Таблица 1.4

Виды заготовок \ Обувь вида	A	B	C	Запасы заготовок, ед.
I	1	2	–	12
II	1	–	1	4
III	2	2	–	14
Прибыль, ден. ед.	3	2	1	

Решение. Чтобы сформулировать эту задачу математически, обозначим через x_1, x_2, x_3 количество пар обуви соответственно видов *A*, *B* и *C*, которое необходимо выпускать фабрике для получения максимальной прибыли. Согласно условиям задачи прибыль от выпуска обуви вида *A* составит $3x_1$ ден. ед., от вида *B* – $2x_2$ ден. ед., от вида *C* – x_3 ден. ед. Следовательно, целевая функция прибыли *z* выразится формулой

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max .$$

Поскольку переменные x_1, x_2 и x_3 определяют количество пар обуви, они не могут быть отрицательными, т. е.

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0 .$$

Согласно условиям задачи на изготовление всей обуви будет использовано $x_1 + 2x_2$ заготовок 1-го вида. А так как запасы заготовок 1-го вида составляют 12 штук, то должно выполняться неравенство $x_1 + 2x_2 \leq 12$.

На изготовление всей обуви будет использовано $x_1 + x_3$ заготовок 2-го вида. Но так как по условию задачи запасы заготовок 2-го вида необходимо израсходовать полностью, то должно выполняться равенство $x_1 + x_3 = 4$.

Аналогично для заготовок 3-го вида должно выполняться неравенство $2x_1 + 2x_2 \leq 14$.

Следовательно, система ограничений будет иметь вид

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad \le 12 & \text{(количество заготовок вида I);} \\ x_1 \qquad + x_3 = 4 & \text{(количество заготовок вида II);} \\ 2x_1 + 2x_2 \qquad \le 14 & \text{(количество заготовок вида III).} \end{cases}$$

Итак, задача состоит в том, чтобы найти неотрицательные значения x_1, x_2 и x_3, удовлетворяющие системе ограничений и максимизирующие целевую функцию z.

4.2. Формы записи задач линейного программирования и их эквивалентность. Приведение задачи к каноническому виду

Каноническая форма задач линейного программирования имеет вид

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \quad \text{(целевая функция),} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \text{– (система ограничений),} \tag{4.2}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n} \text{ – (ограничения на переменные).} \tag{4.3}$$

Замечание. Не ограничивая общности, можно полагать, что свободные члены неотрицательны, т.е. $b_i \ge 0$, $i = \overline{1,m}$ (иначе ограничительные уравнения можно умножить на (–1)).

Симметричная задача линейного программирования

$$\begin{array}{l|l} z = \sum\limits_{j=1}^{n} c_jx_j \to \max, & z = \sum\limits_{j=1}^{n} c_jx_j \to \min, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m}, & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i,\ i = \overline{1,m}, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \end{array} \tag{4.4}$$

Общая задача линейного программирования

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min), \tag{4.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1, m_1}, \tag{4.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i = \overline{m_1 + 1, m_2}, \tag{4.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{m_2 + 1, m}, \tag{4.8}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n_1}, \tag{4.9}$$

$$x_j \text{ – произвольного знака, } j = \overline{n_1 + 1, n}. \tag{4.10}$$

Приведение задачи к каноническому виду

Задачи ЛП могут представляться по-разному, но все их можно привести к каноническому виду, в котором целевая функция z должна быть максимизирована, а все ограничения должны быть заданы в виде равенств с неотрицательными переменными. Приведем произвольную задачу ЛП (4.5)–(4.10) к каноническому виду, используя следующие правила:

1) минимизация целевой функции z равносильна максимизации целевой функции ($-z$). Так, если целевая функция исходной задачи исследуется на минимум, т.е. $z \to \min$, то можно рассмотреть функцию с противоположным знаком, которая будет стремиться к максимуму: $-z \to \max$;

2) ограничения-неравенства вида $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$ преобразуются в ограничения-равенства путем прибавления к левым частям *дополнительных* (*балансовых*) неотрицательных переменных $x_{n+i} \ge 0$: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i$, $i = \overline{1, m_1}$;

3) ограничения-неравенства вида $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i$ преобразуются в ограничения-равенства путем вычитания от левых частей дополнительных неотрицательных переменных $x_{n+i} \ge 0$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i,\ i = \overline{m_1 + 1, m_2}\ ;$$

4) дополнительные переменные в целевую функцию вводятся с коэффициентами, равными нулю: $c_{n+i} = 0,\ i = \overline{1, m_2}$;

5) переменные любого знака заменяются разностью двух других неотрицательных переменных: $x_j = x_j^1 - x_j^2$, где $x_j^1 \ge 0$, $x_j^2 \ge 0$.

Замечание. Вводимые дополнительные переменные имеют определенный экономический смысл, прямо связанный с содержанием задачи. Так, в задачах об использовании ресурсов они показывают величину неиспользованного ресурса, в задачах о смесях – потребление соответствующего компонента сверх нормы.

Пример 4.2. Привести математическую модель задачи из примера 4.1 к каноническому виду: $z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + \quad + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 14, \end{cases} \qquad x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Решение. Целевая функция и неравенства являются линейными. Следовательно, это задача линейного программирования. Приведем ее к каноническому виду, прибавляя к левым частям первого и третьего ограничений по одной *дополнительной* неотрицательной переменной (x_4 и x_5 соответственно). При этом получим равенства. Второе ограничение оставим без изменений, так как оно уже является равенством. Дополнительные переменные введем в целевую функцию с нулевыми коэффициентами. Целевая функция при этом не изменится, так как исследуется на максимум. В результате получим следующую каноническую форму задачи линейного программирования: $z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad + x_4 \quad = 12, \\ x_1 + \quad + x_3 \quad = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 \quad + x_5 = 14, \end{cases} \qquad x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Заметим, что сформулированная задача эквивалентна исходной. Другими словами, значения переменных x_1, x_2 и x_3 в оптимальном решении последней задачи являются оптимальными и для исходной.

4.3. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Одним из универсальных методов решения задач ЛП является симплекс-метод или метод последовательного улучшения плана. Если задача разрешима, то ее оптимальный план совпадает, по крайней мере, с одним из опорных решений системы ограничений. Именно этот опорный план и отыскивается симплекс-методом в результате упорядоченного перебора опорных решений. Упорядоченность понимается в том смысле, что при переходе от одного опорного плана к другому соответствующие им значения целевой функции возрастают (или, по крайней мере, не убывают). Так как общее число опорных решений конечно, то через определенное число шагов будет либо найден оптимальный опорный план, либо установлена неразрешимость задачи. Чтобы получить новый опорный план, первоначальный базис преобразовывают в новый. Для этого из первоначального базиса удаляют некоторую базисную переменную и вместо нее вводят другую из группы свободных.

С геометрической точки зрения перебор опорных планов можно толковать как переход по ребрам от одной вершины многогранника решений к другой по направлению к вершине X_{opt}, в которой целевая функция достигает оптимального значения.

Этапы решения задачи ЛП симплекс-методом

Решение задачи ЛП складывается из нескольких этапов:

1. Задача должна быть приведена к каноническому виду, притом все элементы столбца свободных членов должны быть неотрицательными.

2. Найден начальный опорный план задачи.

3. Целевая функция выражена через свободные переменные и максимизирована.

4. По симплексному методу находится оптимальный план задачи.

Пусть задача линейного программирования имеет вид:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad x_2 \qquad + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}, \quad b_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Исключим базисные переменные из целевой функции. Для этого выразим их через свободные переменные из системы ограничительных уравнений

$$x_i = b_i - (a_{im+1}x_{m+1} + \ldots + a_{in}x_n),\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}$$

и подставим в выражение функции z. Получим приведенные коэффициенты целевой функции:

$$z = z_0 - c'_{m+1}x_{m+1} - c'_{m+2}x_{m+2} - \ldots - c'_{m+n}x_{m+n} \to \max.$$

Составим исходную симплекс-таблицу, записывая приведенные коэффициенты целевой функции в z-строку с противоположными знаками, а константу z_0 со своим знаком.

Симплекс-таблица

Б	З	x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_{m+k}	…	x_n
x_1	b_1	1	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	$a_{1,m+k}$	…	a_{1n}
x_2	b_2	0	1	…	0	$a_{2,m+1}$	…	$a_{2,m+k}$	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_l	b_l	0	0	…	0	$a_{l,m+l}$	…	$a_{l,m+k}$	…	$a_{l\,n}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	b_m	0	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	$a_{m,m+k}$	…	$a_{m\,n}$
z	z_0	0	0	…	0	c'_m	…	c'_{m+k}	…	c'_n

1. Если в z-строке симплекс-таблицы, содержащей некоторый опорный план, нет отрицательных элементов (не считая свободного члена z_0), то данный план оптимален и задача решена. К тому же, если в z-строке симплексной таблицы, содержащей оптимальный план, нет нулевых элементов (не считая z_0 и элементов, соответствующих базису), то оптимальный план единственный. Если же в z-строке последней симплексной таблицы, содержащей оптимальный план, есть хотя бы один нулевой элемент, соответствующий свободной переменной, то задача ЛП имеет бесконечное множество решений.

2. Если в z-строке есть хотя бы один отрицательный элемент (не считая z_0), а в любом столбце с таким элементом есть хотя бы один положительный, то можно перейти к новому опорному плану, более близкому к оптимальному. Для этого столбец с отрицательным элементом c'_{m+k} в z-строке берут за разрешающий (если в z-строке отрицательных элементов несколько, то за разрешающий выбирают столбец с наименьшим элементом). Следовательно, столбец с номером $m + k$ станет *ведущим* или *разрешающим* и переменная x_{m+k} будет включена в базис.

3. Среди элементов ведущего столбца находят положительные.

Если таковых нет, то задача не имеет решений в силу неограниченности целевой функции ($z \to \infty$).

4. Для положительных элементов $a_{i,m+k}$ подсчитывают симплексные отношения (отношения свободных членов к соответствующим положительным элементам ведущего столбца) $b_i / a_{i,m+k}$, $i = \overline{1,m}$, и выбирают среди них наименьшее. Пусть минимальное симплексное отношение будет в строке l. Строка с номером l станет ведущей (разрешающей), а элемент $a_{l,m+k}$ – *ведущим*. Переменная x_l выйдет из базиса.

5. Выполняют одну итерацию по замещению базисной переменной методом Жордана–Гаусса. Строят новую симплексную таблицу и переходят к первому пункту.

Замечание. Опорное решение называется *невырожденным*, если все его компоненты положительные, в противном случае оно называется *вырожденным*. Задача ЛП называется *невырожденной*, если все ее опорные планы невырожденные. Если среди опорных решений есть хотя бы одно вырожденное, то задача называется *вырожденной*. В этом случае возможен вариант, когда значение целевой функции при переходе от одного опорного плана к другому не улучшится и может произойти так называемое зацикливание. Для избежания этого фактора изменяют последовательность вычислений путем изменения разрешающего столбца.

Рассмотрим симплекс-метод и метод замещения Жордана–Гаусса на примере.

Пример 4.3. Решить задачу ЛП из примера 4.1 симплекс-методом: $z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad \le 12, \\ x_1 \qquad + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 \qquad \le 14, \end{cases} \qquad x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Решение. 1) задача приведена к каноническому виду, притом все элементы столбца свободных членов неотрицательны:

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad + \underline{x_4} \quad = 12, \\ x_1 + \quad + \underline{x_3} \quad = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 \quad + \underline{x_5} = 14, \end{cases} \qquad x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5};$$

2) Начальный опорный план задачи имеет вид:

$$X_0 = (0;\ 0;\ 4;\ 12;\ 14),\ z(X_0) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 4;$$

3) целевую функцию выразим через свободные переменные. Для этого из 2-го уравнения выразим базисную переменную x_3: $x_3 = 4 - x_1$. Подставим ее значение в целевую функцию:

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3x_1 + 2x_2 + 4 - x_1 = 2x_1 + 2x_2 + 4 \to \max$$

$$z = 2x_1 + 2x_2 + 4 \to \max .$$

Занесем коэффициенты целевой функции и системы ограничений в симплексную таблицу следующим образом:
1-е ограничение $x_1 + 2x_2 + \underline{x_4} = 12$ – в 1-ю строку:

а) в базисный столбец «Б» – базисную переменную x_4;

б) в столбец значений (базисной переменной) «З» – значение свободного члена, равное 12;

в) в столбцы коэффициентов «x_i» – коэффициенты при x_i, равные 1, 2, 0, 1, 0 соответственно;
2-е ограничение – во 2-ю строку (аналогично);
3-е ограничение – в 3-ю строку (аналогично);
целевую функцию – в z-строку:

а) в столбец значений (целевой функции) «З» – константу со своим знаком, т.е. 4;

б) в столбцы коэффициентов «x_i» – коэффициенты при x_i с противоположными знаками, равные –2, –2, 0, 0, 0 соответственно.

Составим исходную симплекс-таблицу 1.

Симплекс-таблица 1

Б	З	$x_1\downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	12	1	2	0	1	0
$\leftarrow x_3$	4	1	0	1	0	0
x_5	14	2	2	0	0	1
z	4	$\underline{-2}$	–2	0	0	0

В z-строке есть отрицательные элементы (не считая значения). **Следовательно, начальный опорный план не является оптимальным.** Найдем минимальный отрицательный элемент z-строки: (–2) в столбцах «x_1» и «x_2». За ведущий выбираем любой столбец, например «x_1». Значит, переменная x_1 будет включена в базис.

Так как среди элементов ведущего столбца есть положительные, то существует новый опорный план, более близкий к оптимальному. Подсчитаем симплексные отношения (отношения свободных членов к соответствующим положительным элементам ведущего столбца) и найдем среди них минимальное: min{12/1; 4/1; 14/2} = 4.

Значит, 2-я строка является ведущей, а элемент $a_{21} = 1$ – разрешающим. Следовательно, переменная x_3 выйдет из базиса.

Проведем одну итерацию метода замещения (базисных элементов) Жордана–Гаусса. Столбцы «x_4» и «x_5» останутся базисными и в симплекс-таблице 2, а столбец «x_1» следует сделать «единичным». Новые данные в симплекс-таблицу 2 заносим по следующему алгоритму:

1. Ведущий элемент делают равным 1. Для этого ведущую строку делят на ведущий элемент. В нашем случае ведущий элемент равен 1. Значит, ведущая строка останется прежней. Перепишем ее в симплекс-таблицу 2 и назовем строкой, полученной из ведущей.

2. Остальные элементы ведущего столбца делают нулевыми.

- Чтобы в 1-й строке вместо 1 получить 0, необходимо каждый элемент сроки, полученной из ведущей, умножить на (–1) и прибавить почленно к 1-й строке. (Проще говоря, строку, полученную из ведущей, умножить на (–1) и прибавить к 1-й строке.)
- Чтобы в 3-й строке вместо 2 получить 0, необходимо строку, полученную из ведущей, умножить на (–2) и прибавить к 3-й строке.
- Чтобы в z-строке вместо (–2) получить 0, необходимо строку, полученную из ведущей, умножить на 2 и прибавить к z-строке.

Симплекс-таблица 2

Б	З	x_1	$x_2\downarrow$	x_3	x_4	x_5
x_4	8	0	2	–1	1	0
x_1	4	1	0	1	0	0
$\leftarrow x_5$	6	0	2	–2	0	1
z	12	0	<u>–2</u>	2	0	0

Таблицы пересчитывают до тех пор, пока в z-строке все элементы (не считая значения) станут неотрицательными.

Симплекс-таблица 3

Б	З	x_1	x_2	$x_3\downarrow$	x_4	x_5
$\leftarrow x_4$	2	0	0	1	1	–1
x_1	4	1	0	1	0	0
x_2	3	0	1	–1	0	0,5
z	18	0	0	$\underline{0}$	0	1

Так как в z-строке симплекс-таблицы 3 все элементы больше или равны нулю, то найден оптимальный план:

$$X_{opt}^{1} = (4;\ 3;\ 0),\ z_{\max} = z(X_{opt}^{1}) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 18.$$

Он не единственный, так как существует нулевой элемент z-строки, соответствующий свободной переменной x_3. (Решение единственное, если нули в z-строке соответствуют только базисным переменным.)

Чтобы найти второй оптимальный план, столбец «x_3» принимают за ведущий и находят минимальное симплексное отношение: $\min\{2/1;\ 4/1\} = 2$. Тогда 1-я строка станет ведущей. Пересчитывают симплекс-таблицу 3 методом замещения Жордана–Гаусса с ведущим элементом $a_{13} = 1$ и заносим в симплекс-таблицу 4.

Симплекс-таблица 4

Б	З	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	2	0	0	1	1	–1
x_1	2	1	0	0	–1	1
x_2	5	0	1	0	1	–0,5
z	18	0	0	0	0	1

Из последней таблицы X_{opt}^{2} = (2; 5; 2), а значение целевой функции $z_{\max} = 18$.

Общее решение записывается как выпуклая линейная комбинация решений X_{opt}^{1} и X_{opt}^{2}, т.е. $X_{opt} = \lambda_1 X_{opt}^{1} + \lambda_2 X_{opt}^{2}$, где $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Метод искусственного базиса

Если начальный опорный план задачи находится методом искусственного базиса, то сначала надо решить симплекс-методом вспомогательную w-задачу. При этом необходимо в начальную симплексную таблицу включить и z-строку, соответствующую целевой функции исходной задачи. Для составления симплекс-таблицы из функции z исключают базисные переменные, а из функции w – искусственные базисные переменные. В ходе решения возможны случаи:

1) в оптимальном решении w-задачи хотя бы одна из искусственных переменных отлична от нуля (т.е. не вышла из базиса). Тогда исходная z-задача не имеет допустимых планов (т.е. ее система ограничений несовместна);

2) в оптимальном плане новой w-задачи все искусственные переменные равны нулю (т.е. вышли из базиса), а значит, и искусственная целевая функция равна нулю. Тогда значения оставшихся координат плана дадут начальный опорный план исходной задачи, которую можно решить симплекс-методом.

Рассмотрим метод искусственного базиса на следующем примере.

Пример 4.4. Хлебозавод может выпекать хлеб в любой из трех видов печей $П_1$, $П_2$, $П_3$. Трудоемкость и себестоимость выпечки 1 центнера хлеба на каждом виде печи представлены в табл. 4.2. Сколько хлеба необходимо выпечь в каждой печи, чтобы его суммарная себестоимость была минимальной при условии, что трудовые ресурсы ограничены 56 н/ч, а общее количество горячего хлеба должно быть не менее 60 ц?

Таблица 4.2

Вид печи	$П_1$	$П_2$	$П_3$
Трудоемкость, н/ч	1	0,9	1,2
Себестоимость, ден. ед.	21	19	22

Решение. Составим математическую модель задачи. Пусть x_1, x_2 и x_3 центнеров хлеба необходимо выпекать в печах $П_1$, $П_2$ и $П_3$ соответственно, чтобы его суммарная себестоимость была минимальной. Согласно условиям задачи себестоимость выпечки хлеба в печи $П_1$ будет составлять $21x_1$ ден. ед., в печи $П_2$ – $19x_2$ ден. ед., в печи $П_3$ – $22x_3$ ден. ед. Значит, целевая функция z будет задаваться формулой

$$z = 21x_1 + 19x_2 + 22x_3 \to \min .$$

Так как неизвестные x_1, x_2 и x_3 выражают количество центнеров хлеба, они не могут быть отрицательными, т. е.

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

При этом трудовых ресурсов на выпечку всего хлеба будет использовано $x_1 + 0{,}9x_2 + 1{,}2x_3$ н/ч. А так как трудовые ресурсы ограничены 56 н/ч, то должно выполняться неравенство $x_1 + 0{,}9x_2 + 1{,}2x_3 \leq 56$.

Всего выпекут $x_1 + x_2 + x_3$ центнеров хлеба. Но так как по условию задачи общее количество горячего хлеба должно быть не менее 60 ц, то необходимо, чтобы выполнялось неравенство $x_1 + x_2 + x_3 \geq 60$.

Следовательно, система ограничений примет вид

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}9x_2 + 1{,}2x_3 \leq 56 & \text{(количество трудовых ресурсов),} \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 60 & \text{(количество выпеченного хлеба).} \end{cases}$$

Задача состоит в том, чтобы найти неотрицательные значения x_1, x_2 и x_3, удовлетворяющие системе ограничений и минимизирующие целевую функцию z.

Целевая функция и неравенства являются линейными. Следовательно, это задача линейного программирования. Приведем ее к каноническому виду. Для этого к левой части первого ограничения прибавим *дополнительную* неотрицательную переменную x_4 и получим равенство, а из левой части второго ограничения вычтем *дополнительную* неотрицательную переменную x_5, чтобы получилось равенство. Так как целевая функция минимизируется, то рассмотрим функцию $z' = -z$, которая будет стремиться к максимуму, т.е.

$$z' = -z = -21x_1 - 19x_2 - 22x_3 \to \max.$$

Дополнительные переменные введем в целевую функцию с нулевыми коэффициентами. В результате получим следующую каноническую форму:

$$z' = -21x_1 - 19x_2 - 22x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}9x_2 + 1{,}2x_3 + \underline{x_4} = 56, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 60, \end{cases} \qquad x_j \geq 0,\ j = \overline{1{,}5}.$$

Сформулированная задача эквивалентна исходной, т. е. значения переменных x_1, x_2 и x_3 в оптимальном решении последней задачи являются оптимальными и для исходной задачи.

Так как во втором ограничении нет базисной переменной, начальный опорный план найдем методом искусственного базиса. Для получения предпочтительного вида введем неотрицательную *искус-ственную переменную* x_6 во второе ограничительное уравнение и рассмотрим вспомогательную w-задачу:

$$w = -x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}9x_2 + 1{,}2x_3 + \underline{x_4} & = 56, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + \underline{x_6} = 60, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1{,}6}.$$

Выпишем начальный опорный план w-задачи, приравняв свободные переменные x_1, x_2, x_3, x_5 нулю: $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$. Тогда базисные переменные x_4, x_6 будут равняться свободным членам: $x_4 = 56$, $x_6 = 60$. Следовательно,

$$X_0 = (0; 0; 0; 56; 0; 60),\ w(X_0) = -60.$$

Решим сначала симплекс-методом вспомогательную w-задачу. При этом в начальную симплекс-таблицу 1 включим и z'-строку, соответствующую целевой функции z' исходной задачи. Для составления симплекс-таблицы исключим базисные переменные из целевой функции z' и искусственной целевой функции w. Переменная x_4 не входит в функцию z'. Значит, z' остается без изменений. А переменную x_6 выразим из 2-го ограничения ($x_6 = 60 - x_1 - x_2 - x_3 + x_5$) и подставим в искусственную целевую функцию w:

$$w = -x_6 = x_1 + x_2 + x_3 - x_5 - 60 \to \max.$$

Составим исходную симплекс-таблицу 1:

Симплекс-таблица 1

Б	З	$x_1\downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$\leftarrow x_4$	56	1	0,9	1,2	1	0	0
x_6	60	1	1	1	0	–1	1
z'	0	21	19	22	0	0	0
w	–60	$\underline{-1}$	–1	–1	0	1	0

Так как w-строке есть отрицательные элементы (не считая значения), то начальный опорный план w-задачи не является оптимальным. Найдем минимальный отрицательный элемент w-строки: это (–1) в столбцах «x_1», «x_2» и «x_3». За ведущий выбираем любой столбец, например «x_1». Значит, переменная x_1 будет включена в базис.

Так как среди элементов a_{11} и a_{21} ведущего столбца есть положительные, то существует новый опорный план w-задачи, более близкий к оптимальному. Подсчитаем симплексные отношения и найдем среди них минимальное: min{56/1; 60/1} = 56. Значит, 1-я строка станет ведущей, а элемент $a_{11} = 1$ – разрешающим. Следовательно, переменная x_4 выйдет из базиса. При этом столбец «x_6» останется «единичным» и в симплекс-таблице 2, а столбец «x_1» надо сделать «единичным». Таблицу пересчитываем методом замещения Жордана–Гаусса и заносим новые данные в симплекс-таблицу 2, как было рассмотрено в примере 5.

Симплекс-таблица 2

Б	З	x_1	$x_2\downarrow$	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	56	1	0,9	1,2	1	0	0
$\leftarrow x_6$	4	0	0,1	–0,2	–1	–1	1
z'	–1176	0	0,1	–3,2	–21	0	0
w	–4	0	<u>–0,1</u>	0,2	1	1	0

Во 2-й таблице ведущим элементом станет $a_{22} = 0,1$ и искусственная переменная x_6 уйдет из базиса. А когда искусственные переменные выходят из базиса, соответствующие им столбцы можно не пересчитывать. В общем случае таблицы пересчитывают до тех пор, пока в w-строке все элементы не станут нулевыми.

Симплекс-таблица 3

Б	З	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	20	1	0	3	10	9
x_2	40	0	1	–2	–10	–10
z'	–1180	0	0	–3	–20	1
w	0	0	0	0	0	0

Итак, получен оптимальный план w-задачи, где все искусственные переменные равны нулю (т.е. вышли из базиса). Значит, и искусственная целевая функция равна нулю. Значения оставшихся координат плана дадут начальный опорный план исходной z'-задачи: X^0 = (20; 40; 0; 0; 0). Вычеркнем w-строку и решим z'-задачу симплекс-методом.

Симплекс-таблица 4

Б	З	x_1	x_2	x_3	$x_4\downarrow$	x_5
$\leftarrow x_1$	20	1	0	3	10	9
x_2	40	0	1	–2	–10	–10
z'	–1180	0	0	–3	$\underline{-20}$	1

Теперь ведущий столбец выбирается по z'-строке, ведущий (разрешающий) элемент, как и раньше, – по минимальному симплексному отношению. Пересчитывают таблицу методом замещения Жордана–Гаусса до тех пор, пока в z'-строке все элементы (не считая значения) станут неотрицательными.

Симплекс-таблица 5

Б	З	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	2	0,1	0	0,3	1	0,9
x_2	60	1	1	1	0	–1
z'	–1140	2	0	3	0	19

Так как в симплекс-таблице 5 все элементы z'-строки больше или равны нулю (не считая значения), то найден оптимальный план. Он единственный, так как нули в z'-строке соответствуют только базисным переменным.

$$X_{opt} = (0; 60; 0),\ z'_{\max} = z(X_{opt}) = -1140.$$

Следовательно, $z_{\min} = 1140$.

Исходя из этих данных, можно заключить: чтобы получить минимальную суммарную себестоимость от выпечки всего хлеба, равную 1140 ден. ед., хлебозаводу необходимо выпекать 60 ц хлеба в печи $П_2$ (так как $x_2^* = 60$) и не выпекать хлеб в печах $П_1$ и $П_3$ (поскольку $x_1^* = 0$ и $x_3^* = 0$). При этом 2 н/ч (из 56 н/ч) будут не использованы (так как $x_4^* = 2$) и выпекут ровно 60 ц хлеба (поскольку $x_5^* = 0$).

5. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

5.1. Математическая модель задачи транспортного типа

Простейшая формулировка транспортной задачи по критерию стоимости следующая: в m пунктах отправления $A_1, A_2, ..., A_m$ (будем называть их *поставщиками*) находится соответственно $a_1, a_2, ..., a_m$ единиц однородного груза (*ресурсов*), который должен быть доставлен n *потребителям* $B_1, B_2, ..., B_n$ в количествах $b_1, b_2, ..., b_n$ единиц соответственно (назовем их *потребностями*). Известны транспортные издержки c_{ij} перевозок единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт потребления ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$).

Требуется спланировать перевозки (т.е. указать, сколько единиц груза должно быть отправлено от i-го поставщика j-му потребителю) так, чтобы: 1) весь груз из пунктов отправления был вывезен; 2) потребности каждого пункта потребления были полностью удовлетворены; 3) суммарные издержки на перевозки были минимальными

Для наглядности условия транспортной задачи представим в виде таблицы, которая называется транспортной или распредели-тельной.

Транспортная таблица

Поставщик	Потребитель				Запас
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	…	x_{1n} c_{1n}	a_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	…	$x_{2\text{n}}$ c_{22}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	…	x_{mn} c_{mn}	a_m
Потребность	b_1	b_2	…	b_n	

Здесь количество груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, равно x_{ij} ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$). Предполагается, что все $x_{ij} \ge 0$ ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$). Запас груза в i-м пункте отправления определяется величиной $a_i \ge 0$, $i=\overline{1,m}$, а потребность j-го пункта назначения в грузе – $b_j \ge 0$, $j=\overline{1,n}$. Матрица $(c_{ij})_{m\times n}$ называется **матрицей тарифов** (издержек или транспортных расходов). Планом транспортной задачи называется матрица перевозок $X=(x_{ij})_{m\times n}$. Если в плане перевозок переменная x_{ij} принимает положительное значение, то его будем записывать в соответствующую клетку (i, j) и считать ее загруженной (занятой) или **базисной**; если же $x_{ij}=0$, то клетку (i, j), как правило, оставляют **свободной**.

Составим **математическую модель** задачи транспортного типа.

Общие суммарные затраты, связанные с реализацией плана перевозок, можно представить целевой функцией

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \to \min. \tag{5.1}$$

Переменные x_{ij} должны удовлетворять ограничениям по запасам (5.2), по потребностям (5.3) и условиям неотрицательности (5.4). В математической записи это можно представить так:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i, i=\overline{1,m}; \tag{5.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j, j=\overline{1,n}; \tag{5.3}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \tag{5.4}$$

Таким образом, среди множества решений системы ограничений (5.2)–(5.3) требуется найти такое неотрицательное решение, которое минимизирует целевую функцию (5.1). Полученная задача является задачей линейного программирования. Решение ТЗ проводится с помощью общего приема последовательного улучшения плана, который реализован в симплексном методе.

Этапы решения транспортной задачи

1. Определение исходного опорного плана.
2. Оценка этого плана.
3. Переход к следующему плану путем однократной замены одной из базисных переменных на свободную.

Условие баланса

Теорема. Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы в пунктах отправления были равны потребностям в грузе в пунктах назначения, т.е. выполнялось равенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \qquad (5.5)$$

Если условие (5.5) выполнено, то модель ТЗ называется *закрытой* (сбалансированной). Задача с отсутствием баланса между ресурсами и потребностями называется *открытой* ($\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$).

1. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то в математическую модель вводится фиктивный (n + 1)-й потребитель B_{n+1}, для которого потребность равна разности между суммарной мощностью поставщиков и фактическим спросом потребителей, т.е. $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. Все тарифы на доставку груза с фиктивными потребностями считают равными нулю, т.е. $c_{i,n+1} = 0$, $i = \overline{1,m}$. Поэтому для новой задачи значение целевой функции не изменится. Иными словами, фиктивный потребитель не нарушит совместности системы ограничений. В транспортной таблице задачи предусматривается дополнительный столбец.

2. Если же $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводится фиктивный (m + 1)-й поставщик A_{m+1}. Для этого в транспортную таблицу добавляется одна строка,

запас груза для которой записывают равным $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, а стоимости перевозок полагают равными нулю: $c_{m+1,j} = 0$, $j = \overline{1,n}$. Поэтому в данном случае значение целевой функции не изменится, а система ограничений останется совместной.

Пример 5.1. Урожай картофеля, собранный фермерами $Ф_1$, $Ф_2$, $Ф_3$ в количествах 60, 45 и 130 т соответственно, должен быть доставлен в четыре магазина M_1, M_2, M_3, M_4. Спрос на картофель равен 50, 70, 60 и 80 т соответственно. Известна матрица транспортных расходов (в ден. ед.) на доставку 1 т картофеля:

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 13 & 11 \\ 15 & 11 & 9 & 8 \\ 12 & 17 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Запланировать перевозку картофеля с минимальными затратами при условии, что запросы 3-го магазина должны быть удовлетворены полностью. Составить математическую модель задачи и привести ее к стандартной транспортной задаче с балансом.

Решение. Сведем исходные данные в табл. 5.1:

Таблица 5.1

Магазин / Фермер	B_1	B_2	B_3	B_4	Урожай картофеля, т
A_1	14	16	13	11	60
A_2	15	11	9	8	45
A_3	12	17	10	14	130
Потребности магазинов, т	50	70	60	80	$\sum_{i=1}^{3} a_i = 235$ / $\sum_{j=1}^{4} b_j = 260$

Построим математическую модель задачи.

Пусть x_{ij} ($j = \overline{1,4}$, $i = \overline{1,3}$,) – количество тонн картофеля, перевозимого i-м фермером j-му магазину. Тогда общие затраты, связанные с реализацией плана перевозок, представятся целевой функцией:

$$z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

или

$$z = 14x_{11} + 16x_{12} + 13x_{13} + 11x_{14} + +15x_{21} + 11x_{22} +$$
$$+9x_{23} + 8x_{24} + 12x_{31} + 17x_{32} + 10x_{33} + 14x_{34} \to \min.$$

Требуется спланировать перевозки так, чтобы весь груз из пунктов отправления был вывезен. Но поскольку суммарный объем картофеля, вывезенного от каждого фермера, не может превышать собранного им урожая, то переменные x_{ij} должны удовлетворять следующим ограничениям по запасам:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60 \ \ (\text{для } 1\text{-го фермера}), \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 45 \ \ (\text{для } 2\text{-го фермера}), \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 130 \ \ (\text{для } 3\text{-го фермера}). \end{cases}$$

Аналогично потребности каждого пункта потребления должны быть полностью удовлетворены. Но поскольку потребность магазинов в картофеле (260 т) больше, чем собранный фермерами урожай (235 т), то спрос не всех магазинов будет полностью удовлетворен. Поэтому должны выполняться ограничения-неравенства по потребностям:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \le 50 \ \ (\text{для } 1\text{-го магазина}), \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 70 \ \ (\text{для } 2\text{-го магазина}), \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 60 \ \ (\text{для } 3\text{-го магазина}), \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \le 80 \ \ (\text{для } 4\text{-го магазина}). \end{cases}$$

Объем перевозок картофеля не может быть отрицательным, поэтому справедливы условия неотрицательности на переменные: $x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$.

Таким образом, сформулированная выше задача свелась к задаче нахождения таких неотрицательных значений переменных x_{ij} ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$), которые удовлетворяют системам ограничений по поставкам и потребностям и минимизируют целевую функцию затрат.

Однако транспортная задача разрешима только в том случае, когда выполняется условие баланса: $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$. В нашем примере оно нарушено, так как

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 60 + 45 + 130 = 235, \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 50 + 70 + 60 + 80 = 260.$$

Следовательно, задача является открытой, несбалансированной. Поскольку $\sum_{i=1}^{3} a_i < \sum_{j=1}^{4} b_j$, то введем фиктивного фермера A_4, урожай картофеля у которого составит: $a_4 = \sum_{j=1}^{4} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i = 260 - 235 = 25$ (т).

Согласно условию запросы 3-го магазина должны быть полностью удовлетворены. Следовательно, стоимость транспортных расходов на доставку 1 т картофеля от фиктивного фермера A_4 в этот магазин необходимо сделать невыгодной, например $c_{43} > \max\limits_{i,j} c_{ij} = 17$. Предположим, $c_{43} = 20$ (ден. ед.). А стоимость транспортных расходов на доставку 1 т картофеля от фиктивного фермера A_4 во все другие магазины будем полагать равной нулю: $c_{4j} = 0,\ j = \overline{1,4},\ j \neq 3$.

Получим следующую закрытую модель транспортной задачи:

$$z = 14x_{11} + 16x_{12} + 13x_{13} + 11x_{14} + 15x_{21} + 11x_{22} + 9x_{23} + 8x_{24} +$$

$$+12x_{31} + 17x_{32} + 10x_{33} + 14x_{34} + 0x_{41} + 0x_{42} + 20x_{43} + 0x_{44} \to \min,$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60 \ \text{(для 1-го фермера)}, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 45 \ \text{(для 2-го фермера)}, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 130 \ \text{(для 3-го фермера)}, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 25 \ \text{(для фиктивного фермера)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=50 & (\text{для 1 - го магазина}), \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=70 & (\text{для 2 - го магазина}), \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=60 & (\text{для 3 - го магазина}), \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=80 & (\text{для 4 - го магазина}), \end{cases}$$

$x_{ij} \geq 0,\ i=\overline{1,4}, j=\overline{1,4}$.

Решение сбалансированной транспортной задачи будет являться и решением исходной открытой задачи.

Построение начального опорного плана методом «минимального элемента»

План транспортной задачи называется **опорным**, если из заполненных им $m + n - 1$ клеток нельзя образовать ни одного цикла. **Циклом** в транспортной таблице называется набор клеток матрицы перевозок, в котором две и только две соседние клетки расположены в одном столбце или одной строке, а последняя клетка набора лежит в той же строке или столбце, что и первая. Эту совокупность клеток можно представить так:

$$(i_1, j_1) \to (i_1, j_2) \to (i_2, j_2) \to \cdots \to (i_s, j_s) \to (i_s, j_1).$$

Графически цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, звенья которой лежат только в строках или столбцах. При этом каждое звено соединяет только две клетки ряда. В цикле всегда четное число клеток. При правильном построении опорного плана для любой свободной клетки можно построить *единственный* цикл, содержащий данную клетку и некоторую часть занятых клеток.

Сущность метода «минимального элемента» заключается в том, что на каждом шаге осуществляется максимально возможное «перемещение» груза в клетку с минимальным тарифом c_{ij}. Заполнение таблицы начинают с клетки, которой соответствует наименьший элемент c_{ij} матрицы тарифов, причем выбирают только среди стоимостей реальных поставщиков и потребителей, а запасы фиктивного поставщика (или потребности фиктивного потребителя) распределяются в последнюю очередь. Пусть $\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{lk}$. Следовательно, загружается клетка (l, k), т.е. $x_{lk} = \min\{a_l; b_k\}$. Если

$a_l > b_k$, то $x_{lk} = b_k$ и из рассмотрения исключают столбец с номером k, соответствующий потребителю, спрос которого полностью удовлетворён. А новое значение $a'_l = a_l - b_k$. Если $a_l < b_k$, то $x_{lk} = a_l$ и из рассмотрения исключают строку с номером l, соответствующую поставщику, запасы которого израсходованы полностью. Новое значение $b'_k = b_k - a_l$. На некотором шаге (*но не на последнем*) может оказаться, что потребности очередного пункта назначения равны запасам пункта отправления. В этом случае также временно исключают из рассмотрения либо столбец, либо строку (*что-либо одно*). Тогда запасы соответствующего пункта отправления или потребности данного пункта назначения полагают равными нулю. Этот нуль записывают в очередную заполняемую клетку. Опорный план называется невырожденны**м**, если все его $m + n - 1$ компоненты больше нуля, в противном случае он называется **вырожденным**.

Пример 5.2. Построить начальный опорный план сбалансированной задачи из примера 5.1.

$$z = 14x_{11} + 16x_{12} + 13x_{13} + 11x_{14} + 15x_{21} + 11x_{22} + 9x_{23} + 8x_{24} +$$
$$+12x_{31} + 17x_{32} + 10x_{33} + 14x_{34} + 0x_{41} + 0x_{42} + 20x_{43} + 0x_{44} \to \min,$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60 \quad (\text{для 1-го фермера}), \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 45 \quad (\text{для 2-го фермера}), \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 130 \quad (\text{для 3-го фермера}), \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 25 \quad (\text{для фиктивного фермера}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 50 \quad (\text{для 1-го магазина}), \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 70 \quad (\text{для 2-го магазина}), \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 60 \quad (\text{для 3-го магазина}), \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 80 \quad (\text{для 4-го магазина}), \end{cases}$$

$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,4},\ j = \overline{1,4}$.

Решение. Занесем исходные данные задачи в табл. 5.2:

1) в столбец a_i – запасы картофеля i-го фермера, $i = \overline{1,4}$;

2) в строку b_j – потребности j-го магазина, $j = \overline{1,4}$;

3) в нижний правый угол каждой клетки, расположенной в i-й строке и j-м столбце, – стоимости перевозок x_{ij}, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$.

Построим начальный опорный план задачи методом «минимального элемента». Для этого найдем наименьший элемент c_{ij} матрицы тарифов (*притом выбирать будем только среди стоимостей реальных фермеров и магазинов, а запасы фиктивного фермера распределим в последнюю очередь*). Он находится в клетке (2, 4): $\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{24} = 8$.

Следовательно, будет загружаться клетка (2, 4), т.е. $x_{24} = \min\{45; 80\} = 45$. Так как $a_2 = 45 < 80 = b_4$, то из рассмотрения исключим строку с номером 2, соответствующую фермеру, запасы которого израсходованы полностью. Новое значение $b_4' = b_4 - a_2 = 80 - 45 = 35$.

Из оставшихся клеток снова находим клетку с наименьшим тарифом и проводим действия, аналогичные описанным выше:

$$\min_{(i,j)\neq(2,4)} c_{ij} = c_{33} = 10 \Rightarrow x_{33} = \min\{130; 60\} = 60.$$

Так как $a_3 = 130 > 60 = b_3$, то из рассмотрения исключаем столбец с номером 3, соответствующий магазину, спрос которого полностью удовлетворен. Новое значение $a_3' = a_3 - b_3 = 130 - 60 = 70$ и т.д.

Проверяем условие для базисных клеток (их должно быть $m + n - 1$): $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$.

Заполнено также 7 клеток. Следовательно, начальный опорный план построен верно. При этом значение целевой функции будет равно: $z_0 = 16 \cdot 25 + 11 \cdot 35 + 8 \cdot 45 + 12 \cdot 50 + 17 \cdot 20 + 10 \cdot 60 + 0 \cdot 25 = 2685$ (ден. ед.)

Таблица 5.2

b_j / a_i	50	70	60	80
60	- 14	25 16	- 13	35 11
45	- 15	- 11	- 9	45 8
130	50 12	20 17	60 10	- 14
25	- 0	25 0	- 20	- 0

5.2. Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

1. Сравнивают общий запас груза с суммарным спросом и в случае нарушения баланса приводят задачу к закрытой модели.

2. Условие задачи записывают в форме транспортной таблицы.

3. Строят начальный опорный план перевозок.

4. Проверяют условие для базисных клеток (их должно быть $m+n-1$). Если это условие не выполняется, то в одну из свободных клеток (как правило, в клетку с наименьшим тарифом) вписывают число 0**,** и такая клетка считается базисной. Однако число 0 записывают лишь в те свободные клетки, которые не образуют циклов с ранее занятыми клетками.

5. Вычисляют потенциалы u_i и v_j. Каждому поставщику (каждой строке) ставят в соответствие некоторое число u_i, называемое **потенциалом поставщика** A_i ($i = \overline{1,m}$), и записывают справа от таблицы, а каждому потребителю (или столбцу) – некоторое число v_j, называемое **потенциалом потребителя** B_j ($j = \overline{1,n}$), и записы-

вают под таблицей. Числа u_i и v_j выбирают так, чтобы в любой базисной клетке их сумма равнялась тарифу, т.е. $u_i + v_j = c_{ij}$. Так как количество всех потенциалов u_i и v_j составляет $m + n$, а занятых клеток $m + n - 1$, то для определения чисел u_i и v_j придется решать систему из $m + n - 1$ уравнений с $m + n$ неизвестными. Поэтому одному из неизвестных потенциалов придают произвольное значение. Тогда остальные определяются однозначно.

6. Для проверки оптимальности плана просматривают свободные клетки, для которых определяют оценки Δ_{ij} – разность между тарифом клетки и суммой потенциалов строки и столбца, т.е. $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$. Экономически оценка показывает, на сколько денежных единиц изменятся транспортные издержки от загрузки данной клетки единицей груза. Если все оценки неотрицательные, т.е. $\Delta_{ij} \geq 0$, то план оптимальный и остается подсчитать транспортные расходы. Иначе переходят к п. 7.

7. Из отрицательных оценок ($\Delta_{ij} \leq 0$) выбирают минимальную. Пусть это будет Δ_{lk}. Тогда клетку (l, k) вводят в число базисных, т.е. строят цикл по загруженным клеткам с началом в этой клетке и перераспределяют поставки так, чтобы баланс цикла сохранился. Для этого вершинам цикла приписывают чередующиеся знаки «+» и «-» (свободной клетке (l, k) приписывают положительный знак «+»). В «минусовых» клетках отыскивают наименьший груз w, т.е. $w = \min\limits_{"-"} x_{ij} = x_{st}$, который и «перемещается» по клеткам замкнутого цикла, т.е. прибавляется к перевозкам x_{ij} в клетках со знаком «+» (включая свободную) и вычитается из перевозок x_{ij} в клетках со знаком «-». Следовательно, клетка (s, t) станет свободной и переменная x_{st} уйдет из базиса. Значение остальных базисных переменных переписываются. Таким образом, получают новую транспортную таблицу с улучшенным планом, для которого транспортные издержки изменятся на величину $\Delta_{lk} \cdot x_{st}$. Переходят к пункту 4.

Замечания. 1. При сдвиге по циклу вместо одной может освободиться сразу несколько клеток (вырожденная задача). Свободной оставляют только одну (с наибольшим тарифом), а в остальные освободившиеся клетки вписывают нули и считают их загруженными.

2. Если все оценки $\Delta_{ij} > 0$, то оптимальный план единственный. Если существует хотя бы одна оценка $\Delta_{ij} = 0$, то задача имеет множество оптимальных планов, которое представляет собой выпуклую линейную комбинацию оптимальных решений. Другие оптимальные планы можно получить, загружая по очереди клетки с нулевыми оценками.

Пример 5.3. Решить задачу из примера 10 методом потенциалов.

$$z = 14x_{11} + 16x_{12} + 13x_{13} + 11x_{14} + 15x_{21} + 11x_{22} + 9x_{23} + 8x_{24} +$$
$$+12x_{31} + 17x_{32} + 10x_{33} + 14x_{34} \to \min,$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60 & (\text{для 1-го фермера}), \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 45 & (\text{для 2-го фермера}), \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 130 & (\text{для 3-го фермера}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \le 50 & (\text{для 1-го магазина}), \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 70 & (\text{для 2-го магазина}), \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 60 & (\text{для 3-го магазина}), \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \le 80 & (\text{для 4-го магазина}), \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4}.$$

Решение.

1. Приведем задачу к закрытой модели (см.пример 10).
2. Запишем условие в виде транспортной таблицы (см. пример 11).
3. Построим начальный опорный план перевозок (см. пример 11).
4. Проверим условие для базисных клеток (см. пример 5.11).
5. Вычислим потенциалы фермеров u_i и магазинов v_j. Для этого в строку или в столбец с наибольшим количеством заполненных клеток (3-я строка или 2-й столбец в табл. 2.3) запишем нулевой потенциал, например $v_2 = 0$. Далее, используя уравнения $u_i + v_j = c_{ij}$, для *базисных* (заполненных) клеток найдем остальные потенциалы u_i и v_j всех строк и столбцов:

$v_2 = 0 \Rightarrow u_1 = c_{12} - v_2 = 16 - 0 = 16,\ \ u_3 = c_{32} - v_2 = 17 - 0 = 17,$
$u_4 = c_{42} - v_2 = 0 - 0 = 0;$
$u_1 = 16 \Rightarrow v_4 = c_{14} - u_1 = 11 - 16 = -5;$
$u_3 = 17 \Rightarrow v_1 = c_{31} - u_3 = 12 - 17 = -5,\ v_3 = c_{33} - u_3 = 10 - 17 = -7;$

$v_4 = -5 \Rightarrow u_2 = c_{24} - v_4 = 8 - (-5) = 13.$

Таблица 5.3

a_i \ b_j	50	70	60	80	$u_i \downarrow$
60	3 14	– 25 16	4 13	+ 35 11	16
45	7 15	+ -2 11	3 9	– 45 8	13
130	50 12	20 17	60 10	2 14	17
25	5 0	25 0	27 20	5 0	0
$v_j \rightarrow$	–5	0	–7	–5	

6. Затем по формуле $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ подсчитаем оценки небазисных (пустых) клеток и занесем их значения в левые нижние углы незаполненных клеток табл. 5.3.

Например,

$$\Delta_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 13 - (16 - 7) = 4;$$
$$\Delta_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 11 - (13 + 0) = -2 \text{ и т.д.}$$

7. Проведем анализ оценок Δ_{ij}. Так как среди оценок есть отрицательные ($\Delta_{22} = -2$), то данный опорный план неоптимален. Переменную x_{22} включим в базис, т.е. перейдем к построению нового опорного плана, улучшенного в том смысле, что значение целевой

функции станет меньше. Построим цикл по загруженным клеткам с началом в клетке (2, 2): (2, 2)→(1, 2)→(1, 4)→(2, 4).

(В табл. 5.3 цикл изображен пунктирной линией.)

Вершинам цикла присвоим чередующиеся знаки «+» и «-». Причем клетку (2, 2), вводимую в базис, пометим знаком «+». Далее выберем клетку с наименьшим грузом среди «минусовых» (в нашем примере это клетка (1, 2)) и перераспределим поставки так, чтобы баланс цикла сохранился. Для этого груз $w = x_{12} = 25$ прибавим к перевозкам в клетках, помеченных знаком «+»:

$$x'_{22} = x_{22} + 25 = 0 + 25 = 25 \quad \text{и} \quad x'_{14} = x_{14} + 25 = 35 + 25 = 60,$$

и вычтем из величин x_{ij} в клетках, помеченных знаком «-»:

$$x'_{24} = x_{24} - 25 = 45 - 25 = 20 \quad \text{и} \quad x'_{12} = x_{12} - 25 = 25 - 25 = 0.$$

Объемы остальных перевозок не изменятся.

Таким образом, клетка (1, 2) исключается из базисного множества, а клетка (2, 2) вводится вместо нее. Получим новую табл. 5.4 с улучшенным планом, для которого транспортные издержки изменятся на величину $\Delta_{22} \cdot x_{12} = -2 \cdot 25 = -50$, т.е. транспортные расходы уменьшатся на 50 ден. ед. При втором опорном плане перевозок значение целевой функции составит:

$z_1 = 11 \cdot 60 + 11 \cdot 25 + 8 \cdot 20 + 12 \cdot 50 + 17 \cdot 20 + 10 \cdot 60 + 0 \cdot 25 =$
$= 2635$ (ден. ед.)

Таблица 5.4

a_i \ b_j	50	70	60	80	$u_i \downarrow$
60	5 14	2 16	6 13	60 11	14
45	9 15	+ 25 11	5 9	− 20 8	11
130	50 12	− 20 17	60 10	+ 0 14	17
25	5 0	25 0	27 20	3 0	0
$v_j \rightarrow$	–5	0	–7	–3	

Полученный опорный план оптимален, так как среди оценок нет отрицательных. Выпишем его:

$$X_{opt}^{1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 60\\ 0 & 25 & 0 & 20\\ 50 & 20 & 60 & 0\\ 0 & 25 & 0 & 0\end{pmatrix},\ z_{\min}=z\left(X_{opt}^{1}\right)=2635\,.$$

Итак, чтобы перевезти картофель с минимальными затратами 2635 ден. ед., необходимо:

– от 1-го фермера в 4-й магазин перевезти 60 т картофеля;
– от 2-го фермера во 2-й магазин перевезти 25 т картофеля;
– от 2-го фермера в 4-й магазин перевезти 20 т картофеля;
– от 3-го фермера в 1-й магазин перевезти 50 т картофеля;
– от 3-го фермера во 2-й магазин перевезти 20 т картофеля;
– от 3-го фермера в 3-й магазин перевезти 60 т картофеля.

Наличие 25 т картофеля у фиктивного фермера свидетельствует о том, что при условии полной перевозки картофеля от всех фермеров спрос 2-го магазина не будет удовлетворён полностью. Он недополучит 25 т картофеля.

Оптимальный план не единственный, так как существует нулевая оценка: $\Delta_{34}=0$. Второе решение X_{opt}^{2} получим в новой транспортной табл 5.5.

Таблица 5.5

a_i \ b_j	50	70	60	80	$u_i \downarrow$
60	 5 14	 2 16	 6 13	60 11	–3
45	 9 15	45 11	 5 9	0 8	–6
130	50 12	 0 17	60 10	20 14	0
25	 5 0	25 0	 27 20	 3 0	–17
$v_j \rightarrow$	12	17	10	14	

В табл. 5.4 загружаем клетку с нулевой оценкой (3, 4), как было описано выше, т.е. построим цикл и перераспределим по нему поставки. При сдвиге по циклу вместо одной клетки у нас освободятся сразу две (вырожденная задача): (3, 2) и (2, 4). Но свободной оставим только одну клетку с наибольшим тарифом (17 ден. ед.): (3, 2); а во вторую освободившуюся клетку (2, 4) впишем нуль и будем считать ее загруженной. Получили новый оптимальный план X_{opt}^{2}, для которого транспортные издержки не изменятся, т.е. $z_{\min} = 2635$ (ден. ед.). Выпишем X_{opt}^{2} из табл. 5.5.

$$X_{opt}^{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 45 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 60 & 20 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; z_{\min} = z\left(X_{opt}^{2}\right) = 2635 .$$

Итак, для того чтобы перевезти картофель с минимальными затратами 2635 ден. ед., необходимо:

– от 1-го фермера в 4-й магазин перевезти 60 т картофеля;

– от 2-го фермера во 2-й магазин перевезти 45 т картофеля;

– от 3-го фермера в 1-й магазин перевезти 50 т картофеля;

– от 3-го фермера в 3-й магазин перевезти 60 т картофеля;

– от 3-го фермера в 4-й магазин перевезти 20 т картофеля.

Наличие 25 т картофеля у фиктивного фермера свидетельствует о том, что при условии полной перевозки картофеля от всех фермеров спрос 2-го магазина не будет удовлетворён полностью. Он недополучит 25 т картофеля.

Общее решение задачи представляет собой выпуклую линейную комбинацию оптимальных планов X_{opt}^{1} и X_{opt}^{2}, т.е.

$X_{opt} = \lambda_1 X_{opt}^{1} + \lambda_2 X_{opt}^{2}$, где $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0$.

6. ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ В СЕТИ

Теория графов применяется в различных областях знаний. В частности, она нашла важные приложения в управлении производством, в календарном и сетевом планировании, при обработке экономической информации. Основным объектом этой теории является граф.

Граф – это множество точек плоскости или пространства и множество линий, соединяющих все или некоторые из этих точек. Точки множества называются **вершинами**, а линии, их соединяющие, – **дугами** (если указано, какая вершина является начальной) или **ребрами** (если ориентация не указана). Примерами графов могут служить схемы железных или шоссейных дорог, схемы связи поставщиков и потребителей, структурные формулы молекул и т.д.

Математически **конечным графом** $G(V, U)$ называется совокупность двух конечных множеств, а именно: непустого множества точек V – **множества вершин** v_i, и множества U – **пар вершин** $\left(v_i, v_j\right) = u_{ij}$, связанных между собой (рис. 6.1).

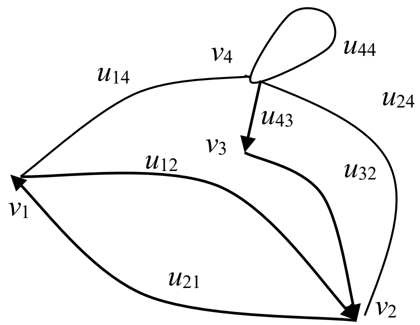


Рис. 6.1

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$; $\qquad$ $U = \{u_{12}, u_{14}, u_{21}, u_{24}, u_{32}, u_{43}, u_{44}\}$.

Граф, состоящий из дуг, называется **ориентированным** (или **орграфом**), а образованный ребрами – **неориентированным**. Граф, состоящий из дуг и ребер, называется *смешанным*. На рис. 6.1 показан смешанный граф.

Вершина и ребро (дуга*)* называются **инцидентными** друг другу, если вершина является началом или концом ребра (дуги). На рис. 6.1 вершина v_2 инцидентна ребру u_{24} и дугам u_{12}, u_{21}, u_{32}.

Два ребра (дуги) называются **смежными**, если они имеют общую концевую вершину. На рисунке смежные дуги, например, u_{43} и u_{32} или дуга u_{14} и ребро u_{24}.

Две вершины называются **смежными,** если они соединены некоторым ребром или дугой. На рис. 6.1 смежные следующие вершины: v_1 и v_2, v_1 и v_4, v_2 и v_3, v_2 и v_4, v_3 и v_4.

Путем в неориентированном графе называют такую последовательность ребер, в которой любые два соседних ребра смежные. На рисунке путь составляют, например, ребра $u_{14} - u_{24}$.

6.1. Постановка задачи о максимальном потоке в сети

Рассмотрим сеть $G(V, U)$. Пусть каждой дуге $(i, j) = u_{ij} \in U$, идущей из i в j, поставлено в соответствие неотрицательное число d_{ij}, которое назовем **пропускной способностью** этой дуги (т.е. максимальное количество вещества d_{ij}, которое можно пропустить по дуге u_{ij} за единицу времени). Если вершины i и j соединены ребром (неориентированной дугой), то его заменяют парой противоположно ориентированных дуг u_{ij} и u_{ji} с одинаковой пропускной способностью $d_{ij} = d_{ji}$. Каждой дуге u_{ij} поставим в соответ-ствие еще одно неотрицательное число x_{ij}, которое назовем пото-ком по дуге u_{ij}.

Потоком по дуге u_{ij} называется количество вещества x_{ij}, проходящего через дугу u_{ij} в единицу времени. Из физического смысла грузопотока на сети следует неравенство

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij},\ u_{ij} \in U, \tag{6.1}$$

т.е. поток по каждому ребру не может превышать его пропускной способности.

Потоком на сети из I в S называется множество X неотрицательных чисел x_{ij}, т.е. $X = \{ x_{ij} \ge 0$ для дуг $u_{ij} \in U\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\sum_i x_{iI} - \sum_j x_{Ij} = -z\,; \tag{6.2}$$

$$\sum_i x_{iS} - \sum_j x_{Sj} = z\,; \qquad (6.3)$$

$$\sum_i x_{ik} - \sum_j x_{kj} = 0,\, k \in V,\, k \neq S,\, k \neq I\,. \qquad (6.4)$$

Равенство (6.4) означает, что для любой вершины k сети, кроме источника и стока, количество вещества, поступающего в данную вершину, равно количеству вещества, выходящего из нее. Эта связь называется условием сохранения потока, а именно: в промежуточных вершинах потоки не создаются и не исчезают. Следовательно, общее количество вещества, выходящего из источника I, совпадает с общим количеством вещества, поступающего в сток S, что и отражается в условиях (6.2) и (6.3). Функция z называется величиной (**мощностью) потока** на сети и показывает общее количество вещества, которое может пройти по сети. Необходимо найти (построить) максимальный поток из источника I в сток S таким образом, чтобы величина потока x_{ij} по каждой дуге u_{ij} в сети не превышалала пропускной способности этой дуги и выполнялось условие сохранения потока, т.е. найти

$$Z \to \max \qquad (6.5)$$

при условиях (6.1) – (6.4).

Это типичная задача линейного программирования. Но так как задача о максимальном потоке имеет специфическую структуру, то для нее имеется более эффективный метод решения, чем симплексный.

Понятие разреза в сети

Каждой дуге ставятся в соответствие два числа (d_{ij}, x_{ij}): первое – пропускная способность; второе – поток. Очевидно, если сеть является путем из I в S, то максимальный поток будет равен минимальной из пропускных способностей дуг, т.е. дуга с минимальной пропускной способностью является узким местом пути. Аналогом узкого места в сети является разрез.

Пусть множество вершин V в сети $G(V, U)$ разбито на два непересекающихся подмножества R, R', причем объединение этих подмножеств дает множество V.

Разрезом (R, R') в сети $G(V, U)$ называется множество дуг u_{ij}, для которых вершины $v_i \in R$, а вершины $v_j \in R'$. Вообще говоря, разрез (R, R') не совпадает с разрезом (R', R). Если $I \in R$, а $S \in R'$, то (R, R') будем называть *разрезом, отделяющим источник от стока*. Пропускной способностью разреза (R, R') называется величина

$$C(R,R') = \sum_{u_{ij} \in (R,R')} d_{ij} .$$

Рассмотрим сеть на рис. 6.2.

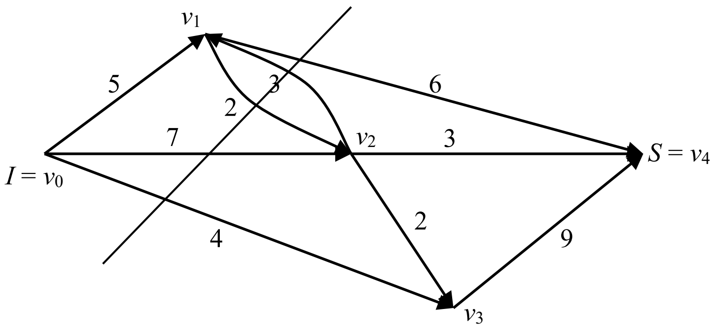


Рис. 6.2

В данной сети можно построить 7 разрезов. Рассмотрим, например, разрез (R, R'), где $R = \{I, v_1\}$, $R' = \{v_2, v_3, S\}$. Тогда

$$(R, R') = \{u_{14}, u_{12}, u_{02}, u_{03}\},$$

$C(R, R') = d_{14} + d_{12} + d_{02} + d_{03} = 6 + 2 + 7 + 4 = 19.$

Разрез, отделяющий источник от стока и обладающий минимальной пропускной способностью, называется **минимальным разрезом**.

6.2. Алгоритм Форда–Фалкерсона построения максимального потока

Теорема Форда–Фалкерсона (о максимальном потоке и минимальном разрезе). Величина максимального потока в сети $G(V, U)$ из I в S равна минимальному разрезу, отделяющего источник от стока.

Если поток x_{ij} по дуге u_{ij} меньше его пропускной способности d_{ij} ($x_{ij} < d_{ij}$), то дуга называется **ненасыщенной**. Если же по дуге u_{ij} поток равен его пропускной способности ($x_{ij} = d_{ij}$), то такая дуга называется **насыщенной**.

Дуга, входящая в некоторый путь, называется **прямой**, если ее направление совпадает с направлением обхода вершин, и **обратной** – в противном случае. Путь из источника I в сток S называется **увеличивающим путем**, если для прямых дуг выполняется условие $x_{ij} <$ d_{ij}, а для обратных дуг выполняется условие $x_{ij} > 0$.

Алгоритм Форда–Фалкерсона построения максимального потока и нахождения минимального разреза заключается в следующем:

1. Находят увеличивающий путь методом расстановки меток.

1.1. Пусть в сети имеется допустимый поток $X = \{ x_{ij} \}$ (например, $\{ x_{ij} \} = 0$). Источник $I = v_0$ получает метку I^+.

1.2. Просматривают все непомеченные вершины v_i, соседние с v_0, и присваивают им метку v_0^+, если u_{0i} – прямая дуга и $x_{0i} < d_{0i}$, и метку v_0^-, если u_{0i} – обратная дуга и $x_{i0} > 0$, и т.д.

1.k. Для каждой вершины v_k, помеченной на предыдущем ($k - 1$) шаге, просматривают соседние с ней непомеченные вершины v_i. Каждая такая вершина v_i получает метку v_k^+, если дуга u_{ki} прямая и $x_{ki} < d_{ki}$, и метку v_k^-, если дуга u_{ik} обратная и $x_{ik} > 0$.

2. Если на k-м шаге не получается пометить сток S, то увеличивающего пути нет и поток в сети является максимальным. Построенный разрез (R, R'), где R – множество помеченных вершин в сети, а R' – множество непомеченных вершин, является минимальным разрезом, и алгоритм заканчивает свою работу. Иначе переходят к пункту 3.

3. Если на k-м шаге сток S оказался помеченным, то выписывают увеличивающий путь P, двигаясь от стока S к вершине, номер которой указан в ее метке; затем от нее к вершине, номер которой указан в ее метке; и в результате приходят к источнику.

4. Выписывают множество P^{+} (прямых дуг) и множество P^{-} (обратных дуг) увеличивающего пути P.

5. Вычисляют для прямых дуг величину $\varepsilon_1 = \min\limits_{u_{ij} \in P^{+}} (d_{ij} - x_{ij})$,

а для обратных – величину $\varepsilon_2 = \min\limits_{u_{ij} \in P^{-}} x_{ij}$.

6. Вдоль дуг увеличивающего пути P изменяют поток $X = \{ x_{ij} \}$ на величину $\varepsilon = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ и получают новый поток $X' = \{ x'_{ij} \}$, такой что

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, u_{ij} \notin P; \\ x_{ij} + \varepsilon, u_{ij} \in P^{+}; \\ x_{ij} - \varepsilon, u_{ij} \in P^{-}. \end{cases}$$

Переходят к пункту 1.

Пример 6.1. Хозяйственно-питьевой водопровод (сеть на рис. 6.311) соединяет водонапорную башню (источник *I*) с фермой (стоком *S*).

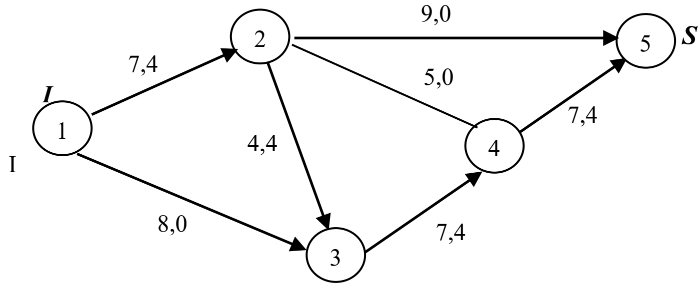


Рис. 6.3

Имеется несколько путей, по которым можно доставлять воду из источника в сток. Вершины сети соответствуют пересечениям труб, а ребра и дуги – участкам труб между пересечениями. На сети указаны пропускные способности труб, т.е. максимальное количество воды в м^3, которое можно пропустить по трубам за 1 ч. Также сформирован начальный поток с мощностью z_0 (м^3/ч). Какой поток воды максимальной мощности можно пропустить на данном трубопроводе? Указать «узкое место» сети и найти его пропускную способность.

Решение. ***А.*** Вершины 2 и 4 соединены ребром (неориентированной дугой), поэтому надо заменить его парой противоположно ориентированных дуг u_{24} и u_{42} с одинаковой пропускной способностью $d_{24} = d_{42} = 5$ (м^3/ч) (рис. 6.4).

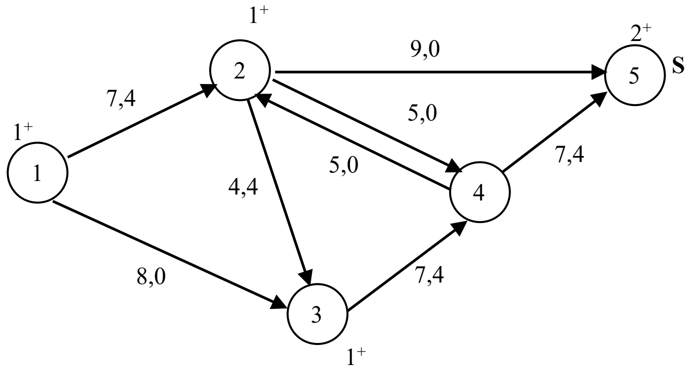


Рис. 6.4

Применим алгоритм Форда–Фалкерсона для построения максимального потока и нахождения минимального разреза.

1. Найдем увеличивающий путь методом расстановки меток.

1.1. В сети имеется допустимый поток:

$$z_0 = -\sum_i x_{iI} + \sum_j x_{Ij} = -0 + (4 + 0) = 4 \text{ (м}^3\text{/ч)}.$$

(Сколько воды вытекло из источника I, столько и должно втечь в сток S). Источник $I = 1$ получает метку 1^+.

1.2. Просматриваем все непомеченные вершины, соседние с 1. Это вершины 2 и 3. Присваиваем вершине 2 метку 1^+, так как u_{12} – прямая дуга и $x_{12} < d_{12}$ $(4 < 7)$. Вершине v_3 также присваиваем метку 1^+, поскольку u_{13} – прямая дуга и $x_{13} < d_{13}$ $(0 < 8)$.

1.3. Теперь просматриваем все непомеченные вершины, соседние с 2. Это вершины 4 и 5. Присваиваем вершине 5 метку 2^+, так как u_{25} – прямая дуга и $x_{25} < d_{25}$ $(0 < 9)$. Поскольку вершина 5 – это сток S, то на данном этапе вершину 4 можно не рассматривать.

2. Так как сток оказался помеченным, то выписываем увеличивающий путь P_1, двигаясь от стока S к вершине 2, номер которой указан в ее метке; затем от нее к вершине 1, номер которой указан в метке. Таким образом, приходим к источнику I. P_1: 1 – 2 – 5.

3. Выписываем множество P^+ (прямых дуг) и множество P^- (обратных дуг): $P^+ = \{u_{12}, u_{25}\}$, а $P^- = \varnothing$ (пустое множество), поскольку обратные дуги в увеличивающий путь не входят.

4. Для прямых дуг вычисляем величину

$$\varepsilon_1 = \min_{u_{ij} \in P^+} (d_{ij} - x_{ij}) = \min\{d_{12} - x_{12}; d_{25} - x_{25}\} = \min\{7 - 4; 9 - 0\} = 3.$$

Так как обратных дуг нет, то величину ε_2 не рассматриваем.

5. Вдоль дуг увеличивающего пути P_1 (рис. 6.5) изменяем поток $z_0 = 4$ (м^3/ч) на величину $\varepsilon = \varepsilon_1 = 3$ и получаем новый поток $z_1 = z_0 + \varepsilon = 4 + 3 = 7$ (м^3/ч), такой что

$$x_{12} := x_{12} + \varepsilon = 4 + 3 = 7,\ u_{12} \in P^+;$$

$$x_{25} := x_{25} + \varepsilon = 0 + 3 = 3, \quad u_{25} \in P^+.$$

Остальные x_{ij} остаются без изменений, так как не входят в увеличивающий путь P_1.

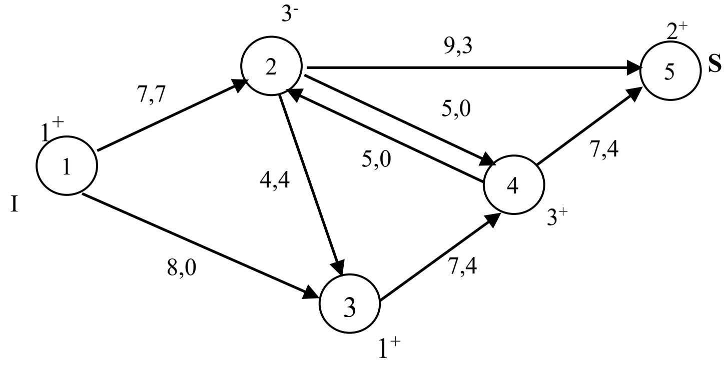


Рис. 6.5

В. Опять применим алгоритм Форда–Фалкерсона для построения максимального потока и нахождения минимального разреза.

1. Найдем увеличивающий путь методом расстановки меток.

1.1. Источник $I = 1$ получает метку 1^+.

1.2. Просматриваем все непомеченные вершины, соседние с 1. Это 2 и 3. Вершине 2 нельзя присвоить метку 1^+, так как u_{12} – прямая дуга, но $x_{12} = d_{12}$ (7 = 7). А вершине 3 присваиваем метку 1^+, поскольку u_{13} – прямая дуга и $x_{13} < d_{13}$ (0 < 8).

1.3. Просматриваем все непомеченные вершины, соседние с 3. Это 2 и 4. Вершина 2 получает метку 3^-, так как дуга u_{32} обратная и $x_{23} = 4 > 0$. А вершине 4 присваиваем метку 3^+, поскольку u_{34} – прямая дуга и $x_{34} < d_{34}$ $(4 < 7)$.

1.4. Потом просматриваем все непомеченные вершины, соседние с 2. Это 4 и 5. Присваиваем вершине 5 метку 2^+, так как u_{25} – прямая дуга и $x_{25} < d_{25}$ $(3 < 9)$. Поскольку вершина 5 – это сток S, то на данном этапе вершину 4 можно не рассматривать.

2. Так как сток оказался помеченным, то выписываем увеличивающий путь P_2, двигаясь от S к вершине 2, номер которой указан в ее метке; затем от нее – к вершине 3, номер которой указан в метке, и т.д. пока не придем к источнику: P_2: 1 – 3 – 2 – 5.

3. Выписываем множество P^+ (прямых дуг) и множество P^- (обратных дуг): $P^+=\{u_{13}, u_{25}\}$, $P^-=\{u_{32}\}$.

4. Вычисляем для прямых дуг:

$$\varepsilon_1 = \min_{u_{ij} \in P^+} (d_{ij} - x_{ij}) = \min\{d_{13} - x_{13}; d_{25} - x_{25}\} = \min\{8-0; 9-3\} = 6,$$

для обратных: $\varepsilon_2 = \min\limits_{u_{ij} \in P^-} x_{ij} = x_{23} = 4$.

5. Вдоль дуг увеличивающего пути P_2 (рис. 6.614) изменяем поток $z_1 = 7$ (м^3/ч) на величину $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = \min\{6, 4\} = 4$ и получаем новый поток $z_2 = z_1 + \varepsilon = 7 + 4 = 11$ (м^3/ч), такой что

$$x_{13} := x_{13} + \varepsilon = 0 + 4 = 4,\ u_{13} \in P^+;$$

$$x_{25} := x_{25} + \varepsilon = 3 + 4 = 7,\ u_{25} \in P^+;$$

$$x_{23} := x_{23} - \varepsilon = 4 - 4 = 0,\ u_{32} \in P^-.$$

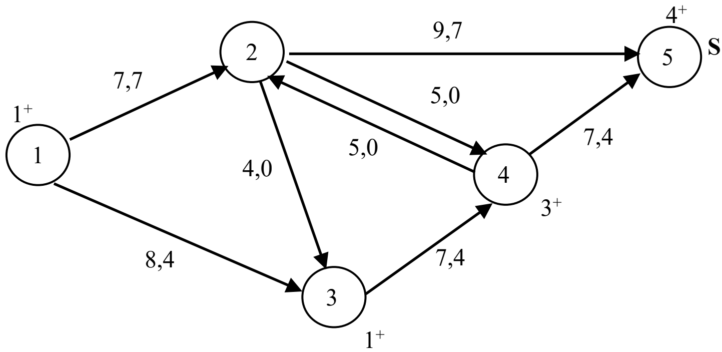


Рис. 6.6

Остальные x_{ij} остаются без изменений, так как не входят в увеличивающий путь P_2.

C. Рассуждая, как было написано выше, расставляем метки и выписываем третий увеличивающий путь: P_3: 1 – 3 – 4 – 5.

Записываем множества прямых и обратных дуг:

$$P^+ = \{u_{13}, u_{34}, u_{45}\}, P^- = \varnothing.$$

Вычисляем для прямых дуг:

$$\varepsilon_1 = \min_{u_{ij} \in P^+} (d_{ij} - x_{ij}) = \min\{d_{13} - x_{13}; d_{34} - x_{34}; d_{45} - x_{45}\} =$$

$$= \min\{8 - 4; 7 - 4; 7 - 4\} = 3.$$

Так как обратных дуг нет, то ε_2 не вычисляем.

Вдоль дуг увеличивающего пути P_3 (рис. 2.7) изменяем поток z_2 = 11 (м^3/ч) на величину $\varepsilon = \varepsilon_1 = 3$ и получаем новый поток $z_3 = z_2 + \varepsilon = 11 + 3 = 14$ (м^3/ч), такой что

$$x_{13} := x_{13} + \varepsilon = 4 + 3 = 7, \quad u_{13} \in P^+;$$

$$x_{34} := x_{34} + \varepsilon = 4 + 3 = 7, \quad u_{34} \in P^+;$$

$$x_{45} ;= x_{45} + \varepsilon = 4 + 3 = 7, \quad u_{45} \in P^+.$$

Остальные x_{ij} остаются без изменений, поскольку не входят в увеличивающий путь P_3.

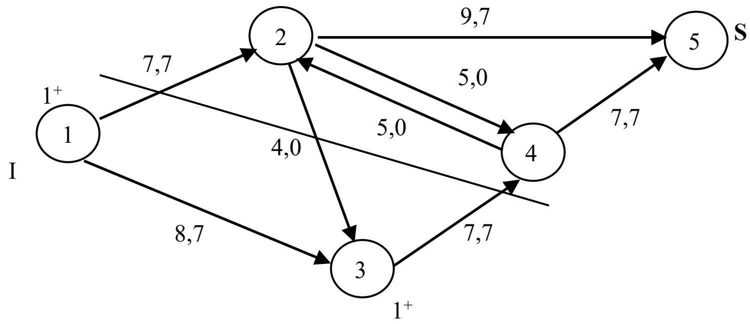


Рис. 6.7

D. 1. Снова находим увеличивающий путь методом расстановки меток.

1.1. Источник $I = 1$ получает метку 1^+.

1.2. Просматриваем все непомеченные вершины, соседние с 1. Это 2 и 3. Вершине 2 нельзя присвоить метку 1^+, так как u_{12} – прямая насыщенная дуга, поскольку $x_{12} = 7 = d_{12}$. А вершине 3 присваиваем метку 1^+, так как u_{13} – прямая дуга и $x_{13} < d_{13}$ $(7 < 8)$.

1.3. Затем просматриваем все непомеченные вершины, соседние с 3. Это 2 и 4. Вершине 2 нельзя присвоить метку 3^-, так как дуга u_{32} обратная, но $x_{23} = 0$. А вершине 4 нельзя присвоить метку 3^+, поскольку u_{34} – прямая дуга, но $x_{34} = d_{34}$ $(7 = 7)$.

2. Так как мы не можем пометить сток S, то увеличивающего пути нет и поток в сети является максимальным: $z_{\max} = z_3 = 14$ (м^3/ч).

Пусть R – множество помеченных вершин в сети, т.е. $R = \{1, 3\}$, а R' – множество непомеченных вершин, т.е. $R'=\{2, 4, 5\}$. Тогда построенный разрез $(R, R') = \{u_{12}, u_{34}\}$ является минимальным (дуга u_{23} в разрез не входит, так как ее начало – непомеченная вершина, а конец – помеченная). И алгоритм заканчивает свою работу.

Минимальный разрез (R, R') является «узким местом» сети. Найдем его пропускную способность:

$$C(R, R') = \sum_{u_{ij} \in (R,R')} d_{ij} = d_{12} + d_{34} = 7 + 7 = 14 \text{ (м}^3\text{/ч)},$$

что совпадает с величиной максимального потока воды в водопроводе.

Проведем анализ сети. Проверим условие сохранения потока на примере 2-й вершины. Известно, что в промежуточных вершинах пути потоки не создаются и не исчезают, т.е.

$$\sum_i x_{i2} - \sum_j x_{2j} = 0.$$

Действительно,

$(x_{12} + x_{42}) - (x_{23} + x_{24} + x_{25}) = (7 + 0) - (0 + 0 + 7) = 0$ (м^3/ч).

Покажем также, что общее количество воды, вытекающей из источника I (из водонапорной башни), совпадает с общим количеством воды, поступающей в сток S (на ферму), т.е.

$$-\sum_i x_{iI} + \sum_j x_{Ij} = \sum_i x_{iS} - \sum_j x_{Sj} = z_{\max} \Rightarrow$$

$$-0 + (x_{12} + x_{14}) = (x_{25} + x_{45}) - 0 \Rightarrow 7 + 7 = 7 + 7 = 14 \text{ (м}^3\text{/ч)}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1. Проинтегрировать уравнение. При заданном начальном условии найти соответствующий частный интеграл или частное решение.

1.1. $y' = y^2 + 3y - 4$. 1.2. $yy' = \dfrac{1-2y}{y}$.

1.3. $xy' + y = \ln x + 1, y(1) = 4$. 1.4. $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(y - x^2 y\right)dy = 0.$

1.5. $y'\sin x = y\ln y.$ 1.6. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x$.

1.7. $\dfrac{dx}{xy - x^2} = \dfrac{dy}{2y^2 - xy}$. 1.8. $\left(1 - x^2\right)y' - xy = xy^2, y(0) = \dfrac{1}{2}$.

1.9. $2x^2 dy + \left(16y^2 - 3x^2\right)dx = 0$. 1.10. $x^2 y' + y^2 = xyy'$.

1.11. $\left(1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right)dx - \dfrac{2y}{x}dy = 0, y(1) = 2$.

1.12. $x \cdot y' = \dfrac{y}{\ln x},\ y(e) = 1$. 1.13. $y'\mathrm{tg}x - y = 1, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

1.14. $\left(y^2 - 3x^2\right)dy + 2xydx = 0$.

1.15. $xy' - y + xe^{\frac{y}{x}} = 0, y(1) = 0$. 1.16. $(1-x)(y' + y) = e^{-x}$.

1.17. $\left(x^2 - 1\right)y' - xy = x^3 - x^2$. 1.18. $\left(1 + x^2\right)y' + y\sqrt{1 + x^2} = x \cdot y.$

1.19. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$. 1.20. $y' + xy = y^3 e^{x^2}$.

1.21. $y' - ytgx = \dfrac{1}{\cos^3 x}, y(0) = 3$.

1.22. $y - x \cdot y' = x \cdot \cos^2 \dfrac{y}{x},\ y(1) = \dfrac{\pi}{4}.$

1.23. $y = x\left(y' - x\cos x\right), y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

1.24. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0. y(1) = \frac{1}{2e}$.   1.25. $xy' + y = \frac{\ln x}{x}, y(1) = 2$.

1.26. $xy' - \frac{y}{x+1} = x,\ y(1) = 0.$ 1.27. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0.$

1.28. $xy' + y = \frac{1}{x^2}\ln x.$ 1.29. $xy' = y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right),\ y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$

1.30. $y' + y\cos x = \sin x\cos x,\ \ y(0) = 1.$

Задание 2. Найти общее решение уравнений

2.1. $y'' - 3y' + 2y = x + 2$.   2.2. $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$.

2.3. $3y'' - 2y' = xe^{\frac{2}{3}x}$.   2.4. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$.

2.5. $y'' + 4y' + y = 4$.   2.6. $y'' + 6y' - 3y = x^2$.

2.7. $y'' + 6y' + 9y = 12e^{-3x}$.   2.8. $y'' + 4y' = 4xe^{-4x}$.

2.9. $y'' - 2y' = x^2 - x$.   2.10. $y'' - 5y' - 6y = (3x - 2)e^{-x}$.

2.11. $y'' + 2y' + 2y = 2 + x$.   2.12. $y'' + 2y' = 2x$.

2.13. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$.   2.14. $y'' + 5y' + 6y = 10(1 - x)e^{-2x}$.

2.15. $y'' - 2y' + y = x^3$.   2.16. $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$.

2.17. $y'' - y' + y = x^3 + 6x$.   2.18. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$.

2.19. $y'' + 2y' - 8y = (12x + 20)e^{2x}$.   2.20. $y'' + 4y = x + 6e^x$.

2.21. $y'' - 4y' = 10e^{3x}$.   2.22. $y'' + y' = x^2 - 6 + e^{4x}$.

2.23. $y'' - 4y' = 2e^{2x} - 4x$.   2.24. $y'' - 6y' + 9y = 16e^{-x} + 9x - 6$.

2.25. $y'' + 3y' - 10y = 10x^2 + 4x - 5$.   2.26. $y'' - y' - 2y = e^{-x}$.

2.27. $y'' - 3y' + 2y = 26\sin 3x.$ 2.28. $y'' - 7y' + 10y = x^2.$

2.29. $y'' - 8y' + 12y = \cos 2x.$ 2.30. $y'' - 2y' + 5y = 3\cos x.$

Задание 3. Найти область сходимости степенного ряда

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$;   3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\sqrt{n+1}}$;   3.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}$;

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}$; 3.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{n^2}$; 3.6. $\sum_{n=1}^{\infty}(2+x)^n$;

3.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$; 3.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$; 3.9. $\sum_{n=0}^{\infty}2^{n^2}(x+2)^n$;

3.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\ln(n+1)}$; 3.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+10)^n}{10^n(2n+1)}$; 3.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{(n+1)^n}$;

3.13. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln^3(n+1)}}{n+1}(x+1)^n$; 3.14. $\sum_{n=0}^{\infty}(2-x)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$;

3.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2n+5}$; 3.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2\,2^{n+1}}$; 3.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$;

3.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$; 3.19. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$;

3.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{2n4^n}$; 3.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n-1}n^n}$;

3.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$; 3.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^n}$;

3.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2n}$; 3.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n9^n}$;

3.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n^2}(x+1)^n$; 3.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^2+9}$;

3.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-3)^n}{5^n\sqrt{n^3-0,5}}$; 3.29. $\sum_{n=1}^{\infty}n5^nx^n$; 3.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt[3]{n}\cdot 3^n}$.

Задание 4

4.1. 20% приборов монтируется с применением микромодулей, остальные – с применением интегральных схем. Надежность прибора с применением микромодулей – 0,9, интегральных схем – 0,8. Найти: а) вероятность надежной работы наугад взятого прибора; б) вероятность того, что прибор – с микромодулем, если он был исправен.

4.2. Детали попадают на обработку на один из трех станков с вероятностями, соответственно равными: 0,.2; 0,3; 0,5. Вероятность брака на первом станке равна 0,02; на втором – 0,03; на третьем – 0,01. Найти: а) вероятность того, что случайно взятая после обработки наугад деталь – стандартная; б) вероятность обработки наугад взятой детали на втором станке, если она оказалась стандартной.

4.3. Среди поступивших на сборку деталей 30% – с завода № 1, остальные – с завода № 2. Вероятность брака для завода № 1 равна 0,02, для завода № 2 – 0,03. Найти: а) вероятность того, что наугад взятая деталь стандартная; б) вероятность изготовления наугад взятой детали на заводе № 1, если она оказалась стандартной.

4.4. Три автомата изготовляют однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Производительности первого, второго и третьего автоматов соотносятся как 2:3:5. Вероятность того, что деталь с первого автомата – высшего качества, равна 0,8, для второго – 0,6, для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что: а) наугад взятая с конвейера деталь окажется высшего качества: б) взятая наугад деталь высшего качества изготовлена первым автоматом.

4.5. Комплектовщик получает для сборки 30% деталей с завода № 1, 20% – с завода № 2, остальные – с завода № 3. Вероятность того, что деталь с завода № 1 – высшего качества, равна 0,9, для деталей с завода № 2 – 0,8, для деталей с завода № 3 – 0,6. Найти вероятность того, что: а) случайно взятая деталь – высшего качества; б) наугад взятая деталь высшего качества изготовлена на заводе № 2.

4.6. Заготовка может поступить для обработки на один из двух станков с вероятностями 0,4 и 0,6 соответственно. При обработке на первом станке вероятность брака составляет 2%, на втором – 3%. Найти вероятность того, что: а) наугад взятое после обработки изделие – стандартное; б) наугад взятое после обработки стандартное изделие обработано на первом станке.

4.7. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для станка № 1 составляет 0,03, для станка № 2 – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем деталей, обработанных на станке № 1, вдвое больше, чем на станке № 2. Найти вероятность того, что: а) взятая наугад деталь будет стандартной; б) наугад взятая стандартная деталь изготовлена на первом станке.

4.8. В дисплейном классе имеется 10 персональных компьютеров первого типа и 15 второго типа. Вероятность того, что за время работы на компьютере первого типа не произойдет сбоя, равна 0,9, а на компьютере второго типа – 0,7. Найти вероятность того, что: а) на случайно выбранном компьютере за время работы не произойдет сбоя; б) компьютер, во время работы на котором не произошло сбоя, – первого типа.

4.9. В пяти ящиках с 30 шарами в каждом содержится по 5 красных шаров, в шести – по 4 красных шара. Найти вероятность того, что: а) из наугад взятого ящика наудачу взятый шар будет красным; б) наугад взятый красный шар содержится в одном из первых пяти ящиков.

4.10. По линии связи передано два сигнала типа A и B с вероятностями соответственно 0,8 и 0,2. В среднем принимается 60 % сигналов типа A и 70 % типа B. Найти вероятность того, что: а) посланный сигнал будет принят; б) принятый сигнал типа A.

4.11. Для сигнализации о том, что режим работы автоматической линии отклоняется от нормального используются индикаторы двух типов. Вероятности того, то индикатор принадлежит к одному из двух типов, соответственно равны 0,4 и 0,6. При нарушении работы линии вероятность срабатывания индикатора первого типа равна 0,9, второго – 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный индикатор сработает при нарушении нормальной работы линии. б) Индикатор сработал. К какому типу он вероятнее всего принадлежит?

4.12. Резистор, поставленный в телевизор, может принадлежать к одной из двух партий с вероятностями 0,6 и 0,4. Вероятности того, что резистор проработает гарантийное число часов, для этих партий соответственно равны 0,8 и 0,7. а) Найти вероятность того, что взятый наугад резистор проработает гарантийное число часов. б) Резистор проработал гарантийное число часов. К какой партии он вероятнее всего принадлежит?

4.13. При отклонении от штатного режима работы поточной линии срабатывают сигнализатор типа Т-1 с вероятностью 0,9 и сигнализатор типа Т-2 с вероятностью 0,8. Вероятности того, что линия снабжена сигнализаторами типа Т-1 и Т-2, соответственно равны 0,7 и 0,3. а) Найти вероятность того, что при отклонении от штатного режима работы сигнализатор сработает. б) Сигнализатор сработал. К какому типу он вероятнее всего принадлежит?

4.14. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено 10 человек из первой группы и 8 из второй. Вероятность того, что студент первой группы попадет в сборную института, равна 0,8, а для студента второй группы – 0,7. а) Найти вероятность того, что случайно выбранный студент попал в сборную института. б) Студент попал в сборную института. В какой группе он вероятнее всего учится?

4.15. На сборку поступают детали с трех конвейеров. Первый дает 25%, второй – 30% и третий – 45% деталей, поступающих на сборку. С первого конвейера в среднем поступает 2% брака, со второго – 3%, с третьего – 1%. Найти вероятность того, что: а) на сборку поступила бракованная деталь; б) поступившая на сборку бракованная деталь – со второго конвейера.

4.16. В двух коробках имеются однотипные конденсаторы. В первой 20 конденсаторов, из них 2 неисправных, во второй – 10, из них 3 неисправных. а) Найти вероятность того, что наугад взятый конденсатор из случайно выбранной коробки годен к использованию. б) Наугад взятый конденсатор оказался годным. Из какой коробки он вероятнее всего взят?

4.17. В телевизионном ателье имеется 2 кинескопа первого типа и 8 второго типа. Вероятность выдержать гарантийный срок для кинескопов первого типа равна 0,9, а для второго типа – 0,6. Найти вероятность того, что: а) взятый наугад кинескоп выдержит гарантийный срок; б) взятый наугад кинескоп, выдержавший гарантийный срок, первого типа.

4.18. У сборщика 16 деталей, изготовленных на заводе № 1 и 10 деталей, изготовленных на заводе № 2. Вероятности того, что детали выдержат гарантийный срок, соответственно равны; для деталей с завода № 1 – 0,8; с завода № 2 – 0,9. а) Найти вероятность того, что взятая наугад деталь проработает гарантийный срок; б) взятая деталь проработала гарантийный срок. На каком из заводов она вероятнее всего изготовлена?

4.19. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире», они встречаются в передаваемых сообщениях в отношении 5:3. Статические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Найти вероятность того, что: а) передаваемый сигнал принят; б) принятый сигнал – «тире».

4.20. Для поисков спускаемого аппарата космического корабля выделено 4 вертолета первого типа и 6 вертолетов второго типа. Каждый вертолет первого типа обнаруживает находящийся в районе поиска аппарат с вероятностью 0,6, второго типа – с вероятностью 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный вертолет обнаружит аппарат. б) К какому типу вероятнее всего принадлежит вертолет, обнаруживший спускаемый аппарат?

4.21. Прибор состоит из двух узлов одного типа и трех узлов второго типа. Надежность работы в течение времени Т для узла первого типа равна 0,8, а для узла второго типа – 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный узел проработает в течение времени Т. б) Узел проработал гарантийное время Т. К какому типу он вероятнее всего относится?

4.22. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс вокзала А или в одну из пяти касс вокзала В. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира в кассах вокзала А имеются в продаже билеты, равна 0,6, в кассах вокзала В – 0,5. а) Найти вероятность того, что в наугад выбранной кассе имеется в продаже билет. б) Пассажир купил билет. В кассе какого вокзала он вероятнее всего куплен?

4.23. В вычислительной лаборатории 40% микрокалькуляторов и 60% дисплеев. Во время расчета 90% микрокалькуляторов и 80% дисплеев работают безотказно. а) Найти вероятность того, что наугад взятая вычислительная машина проработает безотказно во время расчета. б) Выбранная машина проработала безотказно во время расчета. К какому типу вероятнее всего она принадлежит?

4.24. В состав блока входят 6 радиоламп первого типа и 10 второго. Гарантийный срок обычно выдерживают 80% радиоламп первого типа и 90% второго типа. Найти вероятность того, что: а) наугад взятая радиолампа выдержит гарантийный срок; б) радиолампа, выдержавшая гарантийный срок, первого типа.

4.25. На сборку поступают детали с трех автоматов, причем с I –30%, со II – 40%, с III – 30% всех деталей. Вероятность брака для первого автомата равна 0,02, для II – 0,03, для III – 0,04. а) Найти вероятность того, что взятая наугад деталь – бракованная. б) Взятая наугад деталь оказалась бракованной. С какого автомата она вероятнее всего поступила? в) со второго или третьего?

4.26. Имеется 6 коробок диодов типа A и 8 коробок диодов типа B. Вероятность безотказной работы диода типа A равна 0,8, типа B – 0,7. а) Найти вероятность того, что взятый наугад диод проработал гарантийное число часов. б) К какому типу он вероятнее всего относится?

4.27. Для участия в спортивных студенческих соревнованиях выделено из первой группы 5 студентов, из второй и третьей – соответственно 6 и 10 студентов. Вероятности выполнить норму мастера спорта, соответственно, равны: для студентов первой группы – 0,3, второй – 0,4, третьей – 0,2. Найти вероятность того, что: а) наугад взятый студент выполнит норму мастера спорта; б) студент, выполнивший норму мастера спорта, учится во второй группе.

4.28. На участке, изготовляющем болты, первый станок производит 25%, второй – 35%, третий – 40% всех изделий. В продукции каждого из станков брак составляет соответственно 5%, 4%, 2%. Найти вероятность того, что: а) взятый наугад болт – с дефектом; б) случайно взятый болт с дефектом изготовлен на третьем станке.

4.29. На сборку поступают детали с четырех автоматов. Первый обрабатывает 40 %, второй – 30 %, третий – 20 % и четвертый – 10 % всех деталей, поступающих на сборку. Первый автомат дает 0,1 % брака, второй – 0,2 %, третий – 0,25 %, четвертый – 0,5 %. Найти вероятность того, что: а) на сборку поступит стандартная деталь; б) поступившая на сборку стандартная деталь изготовлена первым автоматом.

4.30. Производится стрельба по мишеням трех типов, из которых 5 мишеней типа A, 3 мишени типа B и 3 мишени типа C. Вероятность попадания в мишень типа A равна 0.4, в мишень типа B – 0,1, в мишень типа C – 0.15. Найти вероятность того, что: а) мишень будет поражена при одном выстреле, если неизвестно, по мишени какого типа он был сделан; б) при одном выстреле (если неизвестно, по мишени какого типа он сделан) поражена мишень типа A.

Задание 5

Для четных вариантов. **Для данной случайной величины (СВ)ξ: 1) составить закон распределения СВ; 2) найти математическое ожидание М(ξ) и дисперсию D(ξ); 3) найти функцию распределения *F(x)* и построить ее график.**

Для нечетных вариантов. **Дана функция распределения *F(x)* СВ *X*. Найти: 1) плотность распределения вероятностей *f(x)*, математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и вероятность попадания СВ X на отрезок $\left[a;\, b\right]$; 2) построить графики *F(x)* и *f(x)*.**

5.1. В группе из десяти изделий имеется одно бракованное. Чтобы его обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и каждое взятое проверяют. СВ X – число проверенных изделий.

$P(1 < X < 4)$

5.2.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ \dfrac{1}{33}(2x^2 + 5x), & \text{если} \quad 0 \le x \le 3, \quad a = 1, b = 2.. \\ 1, & \text{если} \quad x > 3. \end{cases}$$

5.3. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. СВ X – число стандартных деталей среди отобранных. Найти $F(x),\ M(X),\ D(X),\ \sigma(X),\ P(1 < X < 2)$.

5.4.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ \dfrac{1}{24}(x^2 + 2x), & \text{если} \quad 0 \le x \le 4, \quad a = 0, \quad b = 1, \\ 1, & \text{если} \quad x > 4\ . \end{cases}$$

5.5. Из ящика, содержащего 3 бракованных и 5 стандартных деталей, наугад извлекают 3 детали. СВ X – число вынутых стандартных деталей. $P(1 < X \le 2)$

5.6.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ \dfrac{1}{20}(x^2+x), & \text{если} \quad 0\le x\le 4, \quad a=0, b=3,\\ 1, & \text{если} \quad x>4\ .\end{cases}$$

5.7. Батарея состоит из трех орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле из I, II, III орудия батареи равны соответственно 0,5; 0,6; 0,8. Каждое орудие стреляет по цели один раз. СВ X – число попаданий в цель. $P(1<X\le 2)$

5.8.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ 1-\cos x, & \text{если} \quad 0\le x\le \pi/2, \quad a=0, \quad b=\pi/3.\\ 1, & \text{если} \quad x>\pi/2\ .\end{cases}$$

5.9. Испытуемый прибор состоит из четырех элементов. Вероятности отказа каждого из них соответственно равны: 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Отказы элементов независимы. СВ X – число отказавших элементов. $P(1<X\le 3)$

5.10.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<-1,\\ \dfrac{1}{9}(x+1)^2, & \text{если} \quad -1\le x\le 2, \quad a=1, \quad b=2,\\ 1, & \text{если} \quad x>2\ .\end{cases}$$

5.11. Партия, насчитывающая 50 изделий, содержит 6 бракованных. Из всей партии случайным образом выбрано 5 изделий. СВ X – число бракованных изделий среди отобранных. $P(X=3)$

5.12.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<-1,\\ \dfrac{1}{9}(x^3+1), & \text{если} \quad -1\le x\le 2, \quad a=1, \quad b=2,\\ 1, & \text{если} \quad x>2\ .\end{cases}$$

5.13. Из урны, содержащей 4 белых и 2 черных шара, наудачу извлекают два шара. СВ X – число черных шаров среди этих двух.

$P(0 \le X \le 2)$.

5.14.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 3\pi/2, \\ \cos x, & \text{если} \quad 3\pi/2 \le x \le 2\pi, \quad a = 3\pi/2, \ \ b = 7\pi/4, \\ 1, & \text{если} \quad x > 2\pi \ . \end{cases}$$

5.15. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. В городе 4 библиотеки. СВ X – число библиотек, которые посетит студент. $P(1 \le X < 3)$

5.16.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < -1, \\ \frac{1}{5}(x+1), & \text{если} \quad -1 \le x \le 4, a = 0, b = 3, \\ 1, & \text{если} \quad x > 4. \end{cases}$$

5.17. В некотором цехе брак составляет 5% всех изделий. СВ X – число бракованных изделий из 6 наудачу взятых изделий..

$P(1 < X < 5)$

5.18.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ (x^3 + 3x)/14, & \text{если} \quad 0 \le x \le 2, \quad a = 0, b = 1. \\ 1, & \text{если} \quad x > 2 \ . \end{cases}$$

5.19. Монету подбрасывают 6 раз.. СВ X – число появлений герба. $P(1 < X < 4)$.

5.20.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ (x^2 + x)/6, & \text{если} \quad 0 \le x \le 2, \quad a = 0, \quad b = 1, \\ 1, & \text{если} \quad x > 2. \end{cases}$$

5.21. Имеется 4 заготовки для одной и той же детали. Вероятность изготовления годной детали из каждой заготовки равна 0,9. СВ X – число заготовок, оставшихся после изготовления первой годной детали. $P(1 < X \le 3)$.

5.22.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<1,\\ \dfrac{1}{4}(x^3-2x), & \text{если} \quad 1\le x\le 2, \quad a=1,2, \quad b=1,5.\\ 1, & \text{если} \quad x>2.\end{cases}$$

5.23. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. СВ X – число отказавших элементов в одном опыте. $P(1<X\le 3)$.

5.24.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ \dfrac{1}{6}x, & \text{если} \quad 0\le x\le 6, \quad a=2, \quad b=5,\\ 1, & \text{если} \quad x>6\ .\end{cases}$$

5.25. На участке имеется 5 одинаковых станков, коэффициент использования которых по времени составляет 0,8. СВ X – число работающих станков. $P(0<X\le 4)$

5.26.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<2,\\ (x-2)^2, & \text{если} \quad 2\le x\le 3, \quad a=2,5, \quad b=2,8.\\ 1, & \text{если} \quad x>3\ .\end{cases}$$

5.27. В партии деталей – 10% нестандартных. Наудачу отобраны 4 детали. СВ X – число нестандартных деталей среди четырех отобранных. $P(2<X\le 4)$.

5.28.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<\pi/2,\\ -\cos x, & \text{если} \quad \pi/2\le x\le \pi, \quad a=\pi/2, \quad b=5\pi/6,\\ 1, & \text{если} \quad x>\pi.\end{cases}$$

5.29. Охотник стреляет в цель до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. СВ X – число выстрелов, производимых охотником. $P(1 < X \le 3)$.

5.30.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & \text{если} \quad 0 \le x \le \pi, \\ 1, & \text{если} \quad x > \pi. \end{cases} \quad a = \pi/3, \quad b = \pi/2.$$

Задание 6. Применение методов линейного программирования

Постановка задачи. *Для производства трех видов продукции используются три вида сырья. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида, запасы сырья, а также прибыль с единицы продукции приведены в таблицах вариантов. Определить план выпуска продукции для получения максимальной прибыли при заданном дополнительном ограничении.*

Требуется: *1) построить математическую модель задачи;*

2) выбрать метод решения и привести задачу к канонической форме;

3) решить задачу;4) проанализировать результаты решения;

Вариант 6.1

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	3	2	–	18
II	–	1	1	4
III	1	2	–	10
Прибыль, ден. ед.	2	5	1	

Необходимо, чтобы сырье II вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.2

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	1	3	1	14
II	3	3	1	28
III	–	1	1	4
Прибыль, ден. ед.	4	10	2	

Необходимо, чтобы сырье II вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.3

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	2	1	3	18
II	2	–	–	10
III	4	–	3	24
Прибыль, ден. ед.	6	1	9	

Необходимо, чтобы сырье I вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.4

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	4	1	3	28
II	2	–	3	14
III	6	1	6	42
Прибыль, ден. ед.	12	2	18	

Необходимо, чтобы сырье I вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.5

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	–	1	1	8
II	1	1	–	5
III	–	2	1	12
Прибыль, ден. ед.	1	5	2	

Необходимо, чтобы сырье II вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.6

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	1	2	1	13
II	1	3	1	17
III	-	3	2	20
Прибыль, ден. ед.	2	10	4	

Необходимо, чтобы сырье II вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.7

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	2	1	–	14
II	1	1	–	8
III	–	1	1	3
Прибыль, ден. ед.	3	4	1	

Необходимо, чтобы сырье III вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.8

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	3	2	–	22
II	1	2	1	11
III	2	2	1	17
Прибыль, ден. ед.	6	8	2	

Необходимо, чтобы сырье III вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.9

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	–	1	1	7
II	2	1	–	14
III	1	1	–	10
Прибыль, ден. ед.	4	5	1	

Необходимо, чтобы сырье I вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.10

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	2	2	1	21
II	3	2	–	24
III	1	2	1	17
Прибыль, ден. ед.	8	10	2	

Необходимо, чтобы сырье III вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.11

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	1	2	–	10
II	2	1	–	8
III	1	-	1	3
Прибыль, ден. ед.	5	2	1	

Необходимо, чтобы сырье III вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.12

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	3	3	–	18
II	3	1	1	11
III	2	2	1	13
Прибыль, ден. ед.	10	4	2	

Необходимо, чтобы сырье III вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.13

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	3	5	–	30
II	1	1	1	8
III	–	2	–	8
Прибыль, ден. ед.	3	3	1	

Необходимо, чтобы сырье II вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.14

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	4	6	1	38
II	1	3	1	16
III	3	3	–	22
Прибыль, ден. ед.	6	6	2	

Необходимо, чтобы сырье II вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.15

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	1	1	–	4
II	–	2	3	24
III	–	4	2	24
Прибыль, ден. ед.	1	5	2	

Необходимо, чтобы сырье I вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.16

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	1	3	3	28
II	–	6	5	48
III	1	5	2	28
Прибыль, ден. ед.	2	10	4	

Необходимо, чтобы сырье I вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.17

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	3	–	4	36
II	3	–	2	24
III	1	1	–	6
Прибыль, ден. ед.	7	1	4	

Необходимо, чтобы сырье III вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.18

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	–	–	2	12
II	4	1	2	30
III	4	1	4	42
Прибыль, ден. ед.	14	2	8	

Необходимо, чтобы сырье III вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.19

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	2	–	–	8
II	2	3	1	18
III	4	3	-	24
Прибыль, ден. ед.	6	9	1	

Необходимо, чтобы сырье II вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.20

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	3	3	1	22
II	5	3	–	28
III	6	6	1	42
Прибыль, ден. ед.	12	18	2	

Необходимо, чтобы сырье II вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.21

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	2	1	4	20
II	–	–	1	4
III	3	–	2	18
Прибыль, ден. ед.	3	1	6	

Необходимо, чтобы сырье I вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.22

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	5	1	6	38
II	2	1	5	24
III	3	–	3	22
Прибыль, ден. ед.	6	2	12	

Необходимо, чтобы сырье I вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.23

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	–	2	2	16
II	1	1	–	4
III	–	1	2	14
Прибыль, ден. ед.	1	3	2	

Необходимо, чтобы сырье II вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.24

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	1	3	2	20
II	1	2	2	18
III	–	3	4	30
Прибыль, ден. ед.	3	9	6	

Необходимо, чтобы сырье II вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.25

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	1	2	–	14
II	2	2	–	20
III	1	–	1	8
Прибыль, ден. ед.	4	3	1	

Необходимо, чтобы сырье III вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.26

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	1	–	–	6
II	3	2	1	28
III	2	2	1	22
Прибыль, ден. ед.	8	6	2	

Необходимо, чтобы сырье I вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.27

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	2	2	–	16
II	-	2	1	10
III	1	2	–	12
Прибыль, ден. ед.	2	6	1	

Необходимо, чтобы сырье II вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.28

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	2	4	1	26
II	1	–	–	4
III	1	6	2	32
Прибыль, ден. ед.	4	12	2	

Необходимо, чтобы сырье II вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.29

Продукция / Сырье	*A*	*B*	*C*	Запасы сырья, ед.
I	–	2	–	10
II	–	5	3	30
III	1	1	1	8
Прибыль, ден. ед.	1	2	2	

Необходимо, чтобы сырье III вида было израсходовано полностью.

Вариант 6.30

Сырье \ Продукция	A	B	C	Запасы сырья, ед.
I	–	3	3	20
II	1	3	1	18
III	1	6	4	38
Прибыль, ден. ед.	3	6	6	

Необходимо, чтобы сырье III вида было израсходовано полностью.

Задание 7. Планирование перевозок.

Постановка задачи. *Товары с m баз поставляются в n магазинов. Потребности магазинов в товарах равны* b_j *тыс. ед., j =* $\overline{1,n}$. *Запасы товаров на базах составляют* a_i *тыс. ед., i =* $\overline{1,m}$. *Затраты на перевозку 1 тыс. ед. товара в ден. ед. представлены матрицей затрат* $C_{m\times n}$. *Запланировать перевозку с минимальными затратами при заданном дополнительном условии.*

Требуется: *1) свести исходные данные в таблицу*;

База \ Магазин	B_1	B_2	…	B_n	Запасы товаров на базах, тыс.ед.
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
Потребности магазинов, тыс. ед.	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{j=1}^{n} b_j$ \ $\sum_{i=1}^{m} a_i$

2) составить математическую модель задачи;

3) привести ее к стандартной транспортной задаче (с балансом);

4) построить начальный опорный план задачи (методом минимального элемента);

5) решить задачу (методом потенциалов);

6) проанализировать результаты решения.

Вариант 7.1. $\vec{a} = (12;14;8;10)$, $\vec{b} = (9;11;7;6;9)$,

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 & 8 \\ 9 & 5 & 8 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 5 & 7 \\ 7 & 4 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Необходимо освободить 4-ю базу.

Вариант 7.2. $\vec{a} = (14;12;13;10;5)$, $\vec{b} = (10;20;6;13)$.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 1 \\ 6 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Необходимо освободить 4-ю базу.

Вариант 7.3. $\vec{a} = (15;10;11;12)$, $\vec{b} = (9;8;7;14;7)$,

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 7 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 5 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Необходимо освободить 1-ю базу.

Вариант 7.4. $\vec{a} = (18;19;7;18;3)$, $\vec{b} = (10;2;18;15)$,

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 8 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Необходимо освободить 1-ю базу.

Вариант 7.5. $\vec{a}$ = (10;12;11;7), $\vec{b}$ = (8;9;9;6;5),

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Необходимо освободить 1-ю базу.

Вариант 7.6. $\vec{a}$ = (20;10;2;8), $\vec{b}$ = (5;14;7;11;10),

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 10 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Необходимо освободить 2-ю базу.

Вариант 7.7. $\vec{a}$ = (20;14;10;6), $\vec{b}$ = (14;11;14;9;4),

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 9 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью удовлетворить потребности 5-го магазина.

Вариант 7.8. $\vec{a}$ = (10;12;14;8), $\vec{b}$ = (15;5;10;20;12),

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 6 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 10 & 8 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью удовлетворить потребности 3-го магазина.

Вариант 7.9. $\vec{a}$ = (30;25;20;15), $\vec{b}$ = (10;20;18;12;25),

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 6 & 7 \\ 8 & 4 & 6 & 5 & 9 \\ 3 & 5 & 8 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 10 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Необходимо освободить 3-ю базу.

Вариант 7.10. $\vec{a} = (10;5;12;8)$, $\vec{b} = (2;12;18;3;10)$,

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 6 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & 4 & 7 \\ 10 & 3 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Необходимо освободить 3-ю базу.

Вариант 7.11. $\vec{a} = (15;16;13;14)$, $\vec{b} = 18;12;11;9;19;8)$,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 9 & 8 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 10 & 2 \\ 6 & 10 & 8 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью удовлетворить потребности 4-го магазина.

Вариант 7.12. $\vec{a} = (12;5;18;10;1)$, $\vec{b} = (6;7;8;30)$,

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 1 & 10 \\ 9 & 8 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 8 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Необходимо освободить 3-ю базу.

Вариант 7.13. $\vec{a} = (16;11;12;13)$, $\vec{b} = (10;9;8;15;7)$,

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Необходимо освободить 2-ю базу.

Вариант 7.14. $\vec{a} = (15;13;8;7;3)$, $\vec{b} = (7;17;11;4)$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 9 & 10 & 3 & 8 \\ 7 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Необходимо освободить 1-ю базу.

Вариант 7.15. $\vec{a} = (20;15;12;13)$, $\vec{b} = (12;9;8;15;13)$,

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Необходимо освободить 3-ю базу.

Вариант 7.16. $\vec{a} = (12;11;13;8)$, $\vec{b} = (8;7;4;3;10)$,

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 3 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 10 & 3 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Необходимо освободить 2-ю базу.

Вариант 7.17. $\vec{a} = (9;11;7;6;9)$, $\vec{b} = (12;14;8;10)$,

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью удовлетворить потребности 3-го магазина

Вариант 7.18. $\vec{a} = (14;8;17;3)$, $\vec{b} = (17;4;15;11;12)$,

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 10 & 2 \\ 10 & 8 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Необходимо освободить 2-ю базу.

Вариант 7.19. $\vec{a} = (9;8;7;14;7)$, $\vec{b} = (15;10;11;12)$,

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 5 & 8 \\ 7 & 7 & 8 & 5 \\ 6 & 10 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 8 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью удовлетворить потребности 4-го магазина

Вариант 7.20. $\vec{a} = (14;8;17;3)$, $\vec{b} = (17;4;15;11;12)$,

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 10 & 2 \\ 10 & 8 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Необходимо освободить 1-ю базу.

Вариант 7.21. $\vec{a} = (14;11;14;9;4)$, $\vec{b} = (20;14;10;6)$,

$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. Необходимо освободить 2-ю базу.

Вариант 7.22. $\vec{a} = (20;11;13;\ 8)$, $\vec{b} = (12;4;15;6;10)$,

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 6 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$ Необходимо освободить 3-ю базу.

Вариант 7.23. $\vec{a} = (8;\ 9;\ 9;\ 6;\ 5)$, $\vec{b} = (10;12;11;7)$,

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 9 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Необходимо освободить 1-ю базу.

Вариант 7.24. $\vec{a} = (5;\ 15;\ 27;\ 10)$, $\vec{b} = (13;\ 8;\ 15;\ 5)$,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 10 & 2 \\ 1 & 5 & 7 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 10 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Необходимо освободить 1-ю базу.

Вариант 7.25. $\vec{a} = (10;9;8;15;7)$, $\vec{b} = (16;11;12;13)$,

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью удовлетворить потребности 3-го магазина.

Вариант 7.26. $\vec{a}$ = (10; 8; 7; 15; 5), $\vec{b}$ = (4; 6 ;12;8),

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 \\ 10 & 8 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 10 \\ 8 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Необходимо освободить 1-ю базу

Вариант 7.27. $\vec{a}$ = (12; 9; 8; 15; 13), $\vec{b}$ = (20; 15; 12; 13),

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью удовлетворить потребности 1-го магазина.

Вариант 7.28. $\vec{a}$ = (20; 13; 4; 15), $\vec{b}$ = (15; 6; 8; 11; 9),

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 10 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Необходимо освободить 1-ю базу.

Вариант 7.29. $\vec{a}$ = (10;20;18;12;25), $\vec{b}$ = (30;25;20;15),

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью удовлетворить потребности 3-го магазина.

Вариант 7.30. $\vec{a} = (10;5;11;8;3)$, $\vec{b} = (25;5;10;6)$,

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 10 \\ 5 & 1 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 3 & 10 \\ 5 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Необходимо полностью освободить 2-ю базу.

Задание 8. Программирование на сетях

Постановка задачи. *Хозяйственно-питьевой водопровод (сеть) соединяет источник I со стоком S. Имеется несколько путей, по которым можно доставлять воду из источника в сток. Вершины сети соответствуют пересечениям труб, а ребра и дуги – участкам труб между пересечениями. На сети указаны пропускные способности труб, т.е. максимальное количество воды в м^3, которое можно пропустить по трубам за 1 час. Также сформирован начальный поток с мощностью z_0 (м^3/ч). Какой поток воды максимальной мощности можно пропустить по данному трубопроводу?*

Требуется:

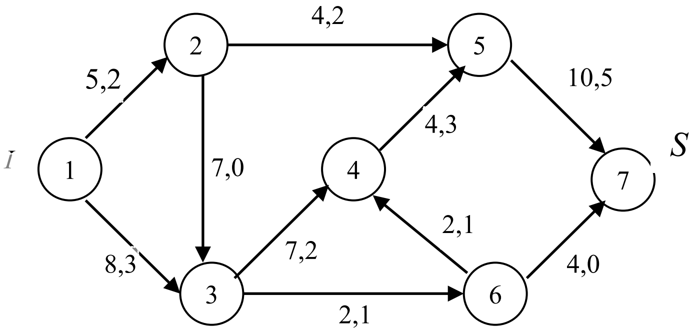
1) посчитать мощность начального потока воды z_0 (м^3/ч);

2) построить на сети поток воды максимальной мощности $z_{\max}$ (м^3/ч), направленный из источника I к стоку S;

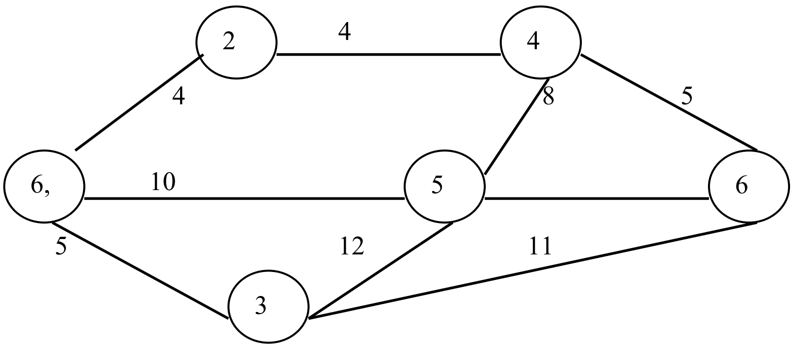
3) указать «узкое место» сети и найти его пропускную способность;

4) провести анализ результатов решения.

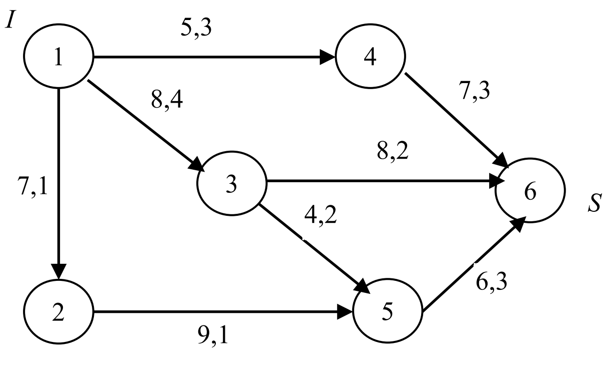
Вариант 8. 1



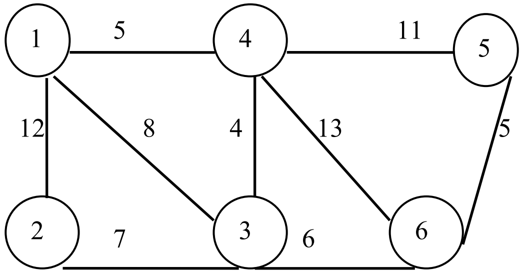
Вариант 8.2



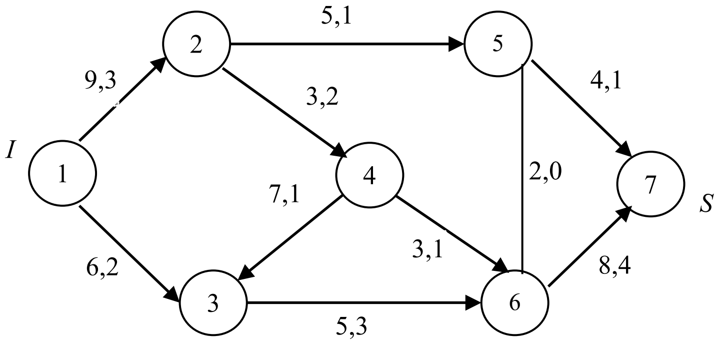
Вариант 8.3



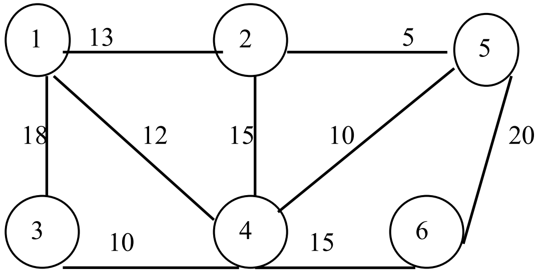
Вариант 8.4



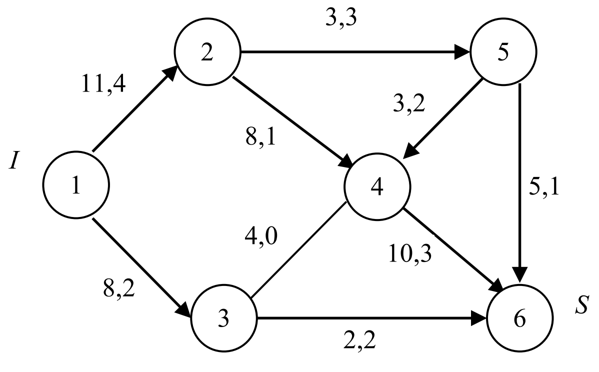
Вариант 8.5



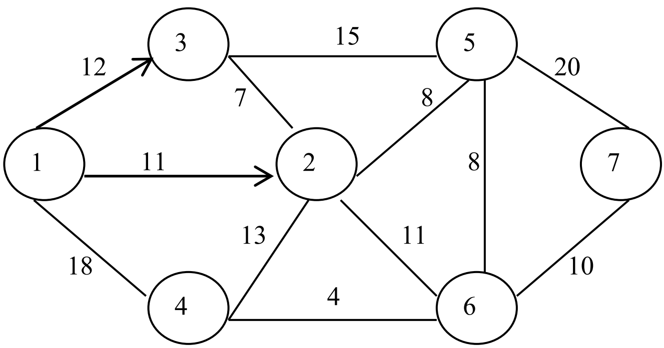
Вариант 8.6



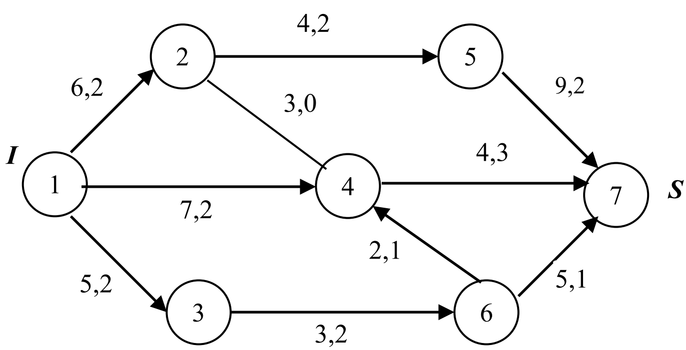
Вариант 8.7



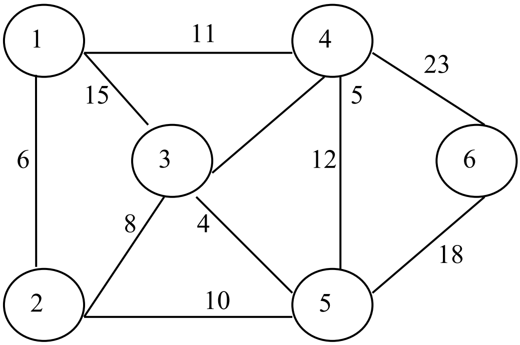
Вариант 8.8.



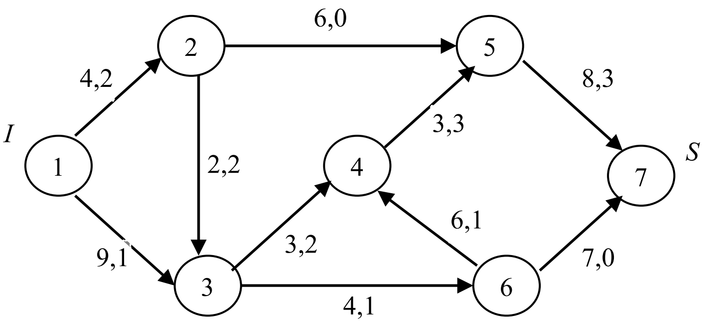
Вариант 8.9



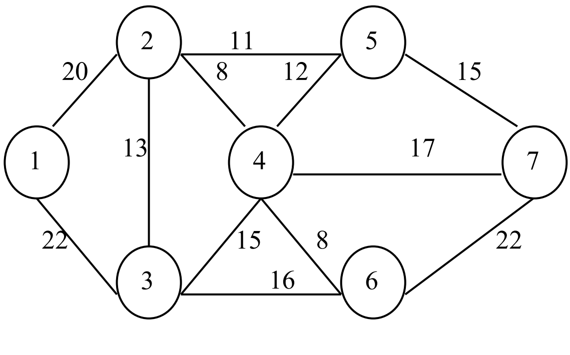
Вариант 8.10



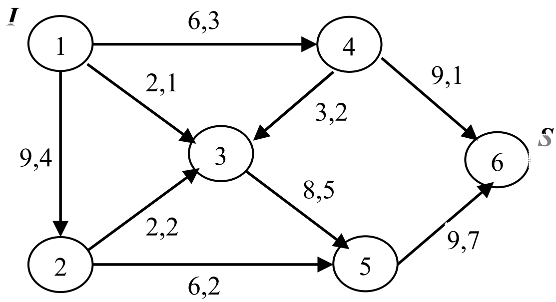
Вариант 8.11



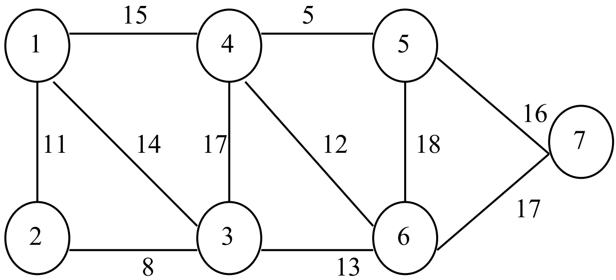
Вариант 8.12



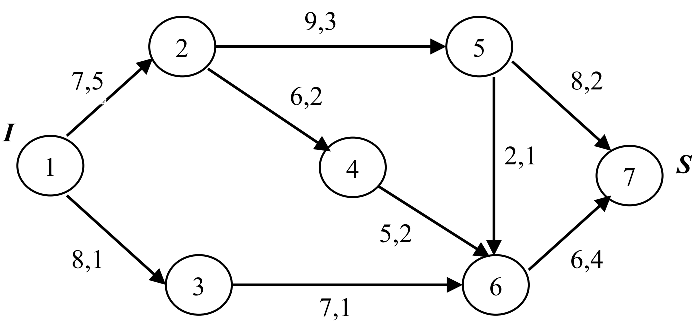
Вариант 8.13



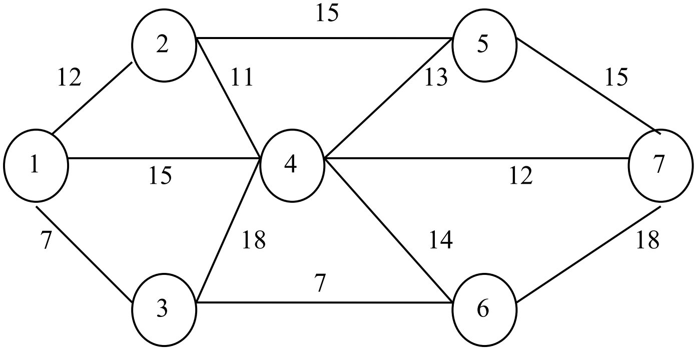
Вариант 8.14



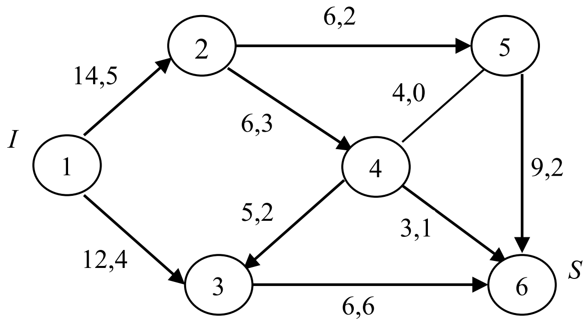
Вариант 8.15



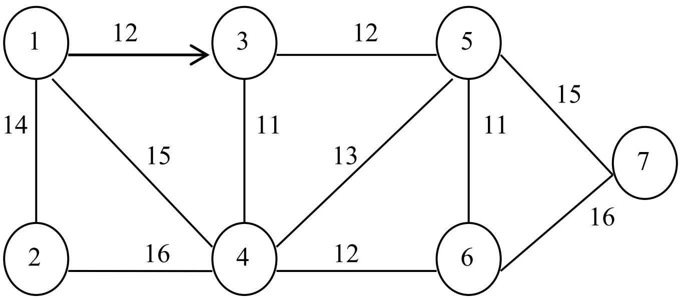
Вариант 8.16



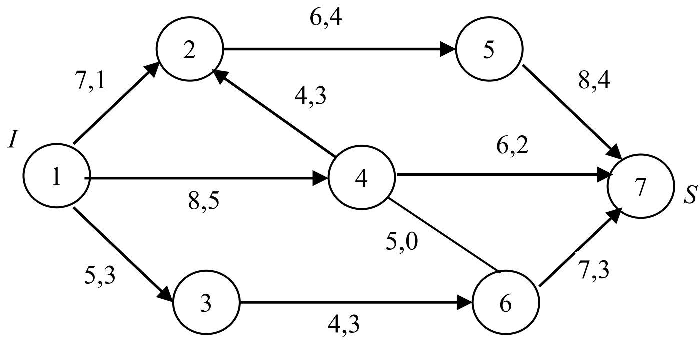
Вариант 8.17



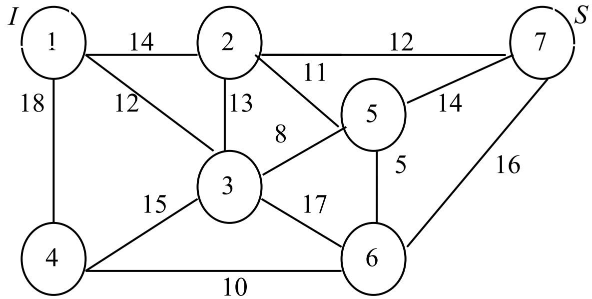
Вариант 8.18



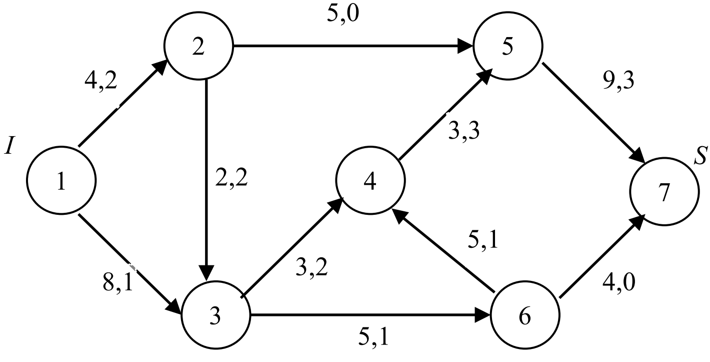
Вариант 8.19



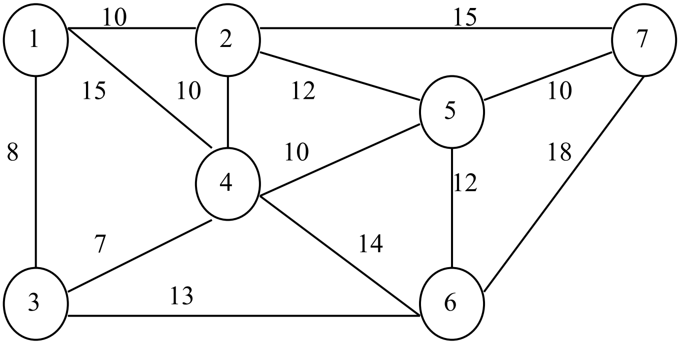
Вариант 8.20



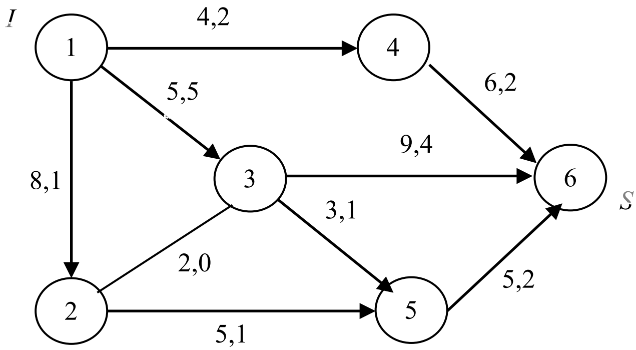
Вариант 8.21



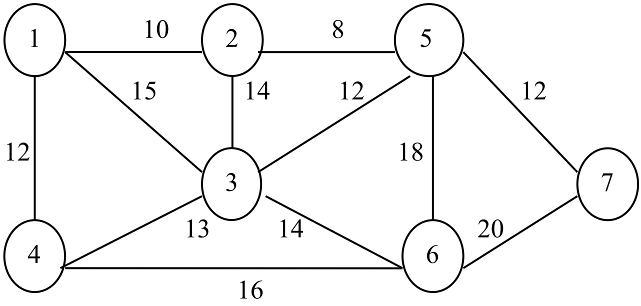
Вариант 8.22



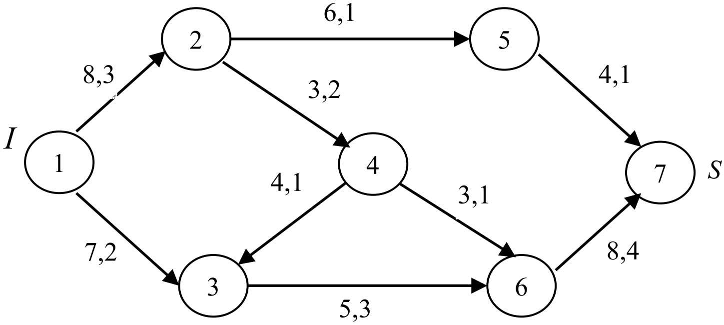
Вариант 8.23



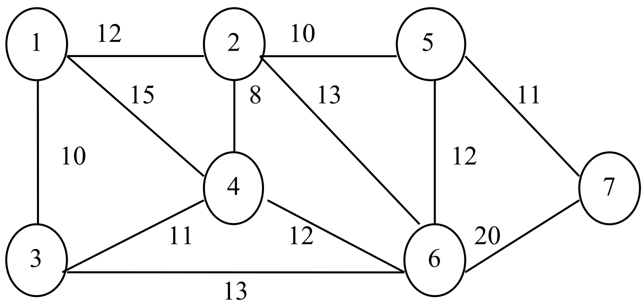
Вариант 8.24



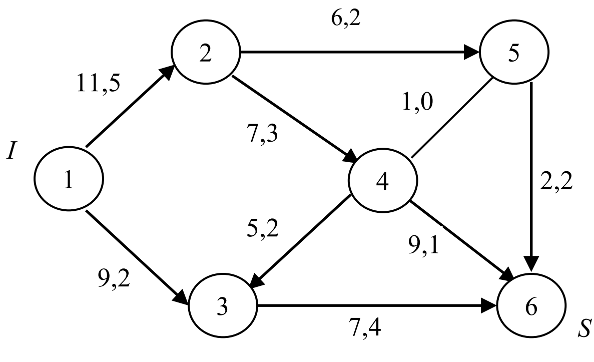
Вариант 8.25



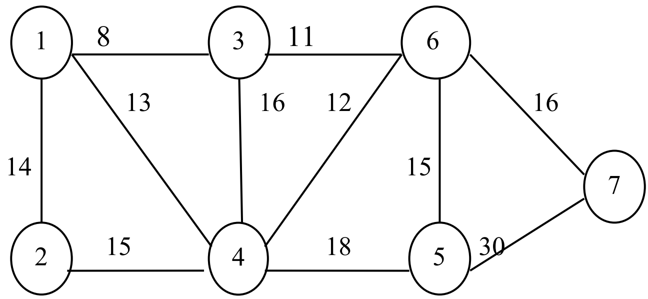
Вариант 8.26



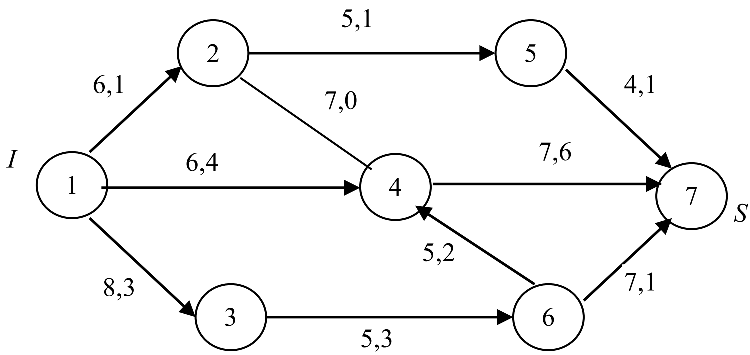
Вариант 8. 27



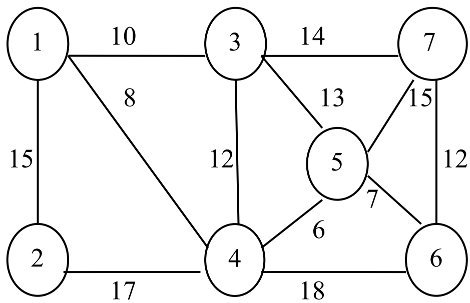
Вариант 8.28



Вариант 8.29



Вариант 8.30



ЛИТЕРАТУРА

1. Высшая математика. Общий курс / под ред. С. А. Самоля. – Минск : Выш. шк., 2000.

2. Высшая математика для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 1998.

3. Шипачев, В. С. Высшая математика / В.С. Шипачев. – М.: Высш. шк., 1985.

4. Гусак, А. А. Высшая математика : учебник для студентов вузов : в 2 т. / А. А. Гусак. – 3-е изд., стереотип. – Минск : ТетраСистемс, 2001. – Т.2.

5. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гурман. – М.: Высш. шк., 1980.

6. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: в 4 ч. / под общей ред. А. П. Рябушко. – Минск.: Выш. шк., 1990. – Ч. 3, 4

7. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учебное пособие для студентов эконом. спец. вузов / И. Л. Акулич. – Минск : Выш. шк., 1986.

8. Банди, Б. Основы линейного программирования // Б. Банди; пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1989.

9. Балашевич, В. А. Математические методы в управлении производством. – Минск : Выш. шк., 1976.

10. Кузнецов, А. В. Высшая математика : Математическое программирование : учебник / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод под общ. ред. А. В. Кузнецова. – Минск : Выш. шк., 2001.

11. Калихман И. Л. Сборник задач по математическому программированию / И. Л. Калихман. – М.: Высш. шк., 1975.

12. Руководство к решению задач по математическому программированию : учебное пособие / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л.С. Костевич под общ. ред. А. В. Кузнецова. – Минск : Выш. шк., 2001.

13. Сборник задач и методические указания к решению задач по математическому программированию для студентов инженерных и инженерно-экономических специальностей / Е. В. Емеличева [и др.]; под общ. ред. А. Д. Корзникова. – Минск : БГПА, 1996.

Учебное издание

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ
К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 2
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для студентов заочного отделения ФТУГ
экономических специальностей

Составители:
БОРОДИЧ Лилия Ивановна
МАТВЕЕВА Людмила Дмитриевна
КУРАЛЕНКО Маргарита Владимировна

Технический редактор *О. В. Песенько*

Подписано в печать 04.07.2012. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 6,97. Уч.-изд. л. 5,45. Тираж 300. Заказ 22.
Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.