



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ  
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный  
технический университет

---

Кафедра «Промышленная теплоэнергетика  
и теплотехника»

# СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕПЛОМАССООБМЕНА

*Методические указания  
и типовые задачи*

Минск  
БНТУ  
2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра «Промышленная теплоэнергетика и теплотехника»

## СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕПЛОМАССООБМЕНА

Методические указания и типовые задачи  
для студентов специальности 1-43 01 05  
«Промышленная теплоэнергетика»

Минск  
БНТУ  
2014

УДК 621.1.016.7(075.8)

ББК 31.391я7

С71

Составители:

*Р. И. Есьман* (темы 1–3), *Н. Н. Сапун* (темы 1, 4),  
*З. Б. Айдарова* (темы 1, 3), *И. Л. Иокова* (темы 1, 5),  
*С. И. Прокопенко* (темы 1, 3)

Рецензенты:

*Н. Б. Карницкий, К. Э. Гаркуша*

Методические указания составлены в соответствии с программой дисциплины «Специальные вопросы теплообмена» для энергетических специальностей вузов и включают темы: «Дифференциальные уравнения теплообмена» и «Основы массообмена». Методики расчетов способствуют более глубокому изучению и усвоению материала. Типовые задачи выбраны таким образом, чтобы сосредоточить внимание студентов на основных практических расчетах тепловых и массообменных процессов, используемых в теплотехнологиях различных отраслей экономики.

**УДК 621.1.016.7(075.8)**

**ББК 31.391я7**

© Белорусский национальный  
технический университет, 2014

## ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Специальные вопросы тепломассообмена» играет важную роль в формировании профессионализма инженера-энергетика, работающего в системе топливно-энергетического комплекса (ТЭК), на промышленных предприятиях и в других энергопотребляющих отраслях народного хозяйства.

Тепломассообменные процессы лежат в основе ряда технологических процессов и установок, а также определяют режим их работы. Глубокое понимание процессов, протекающих в теплотехнологических установках, предполагает знание и усвоение студентами теоретических положений теплотехники, включающих основы теории тепломассообмена.

Изучение дисциплины «Специальные вопросы тепломассообмена» студентами, обучающимися по специальности 1-43 01 05 «Промышленная теплоэнергетика» является основой для более глубокого освоения современного теплоэнергетического оборудования, технологических процессов различных отраслей народного хозяйства с целью максимальной экономии топлива и материальных ресурсов, интенсификации и оптимизации современных теплотехнологических процессов, выявления и использования ВЭР (вторичных энергоресурсов), диверсификации инновационных энергосберегающих технологий в энергетической, машиностроительной и других отраслях промышленного производства.

Дисциплина «Специальные вопросы тепломассообмена» является базовой при подготовке инженеров-теплоэнергетиков. Предметом изучения дисциплины является анализ физических особенностей процессов, определяющих работу теплотехнологических процессов и установок, и создание на этой основе методов их расчета.

Целью изучения дисциплины является формирование знаний и приобретение навыков по выбору рациональных теплотехнических процессов и установок с учетом требований техники безопасности и охраны природы.

Задача изучения дисциплины – приобретение навыков и умения создавать оптимальные теплотехнологические системы, обеспечивающие минимальные затраты топлива, тепловой и электрической энергии, которые максимально удовлетворяют требованиям малоотходной технологии.

Изучение «Специальные вопросы тепломассообмена» базируется на знаниях и умениях, полученных в курсах «Физика», «Химия», «Гидрогазодинамика», «Техническая термодинамика», «Тепломассообмен». Дисциплина является базовой для дипломного проектирования, для активного участия в научных исследованиях и практической работе по специальности.

При изучении дисциплины «Специальные вопросы тепломассообмена» студент должен ознакомиться со следующими понятиями и положениями:

- механизмы переноса теплоты и массы в твердых, жидких и газообразных телах;
- основные законы теплопроводности, конвекции и теплового изучения;
- особенности процесса переноса теплоты и массы при изменении агрегатного состояния вещества (конденсации и кипения);
- особенности процесса переноса теплоты и массы при конденсации пара из пирогазовой смеси и при испарении жидкости в парогазовую смесь;
- особенности переноса теплоты излучением в диаметрических и поглощающих средах;
- характеристики дисперсного материала и особенности тепло- и массообмена в двухкомпонентных системах (газотвердые частицы);
- особенности тепло- и массообмена в процессе воспламенения и горения твердых, жидких и газообразных топлив;
- особенности тепло- и массообмена в ядерных энергетических установках;
- особенности теплообмена в термосифонах и тепловых трубах;
- особенности тепломассообмена в рабочих камерах низкотемпературных и высокотемпературных теплотехнологических установках.

## 1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В списке рекомендуемой литературы выделены учебник и задачник [1, 4] (основной комплект книг), в которых объем и структура материала в наибольшей степени согласуется с утвержденной программой дисциплины, а приведенные в приложениях справочные данные достаточны, чтобы в полном объеме выполнить расчеты, предусмотренные контрольными заданиями. Именно по этим книгам даны в настоящем пособии методические разработки.

В списке литературы также приведены наименования книг, которые могут быть использованы для более подробного изучения отдельных тем курса и при решении практических задач, выходящих за рамки учебной программы.

При изучении дисциплины «Специальные вопросы теплообмена» большое внимание нужно обратить на самостоятельную работу с учебной литературой. Методические указания преследуют цель обеспечения единства процессов самостоятельной проработки текста рекомендуемого учебника и самоконтроля за качеством усвоения программного материала дисциплины.

Последовательное или параллельное изучение дисциплин «Термодинамика» и «Теплообмен» имеет свою особенность – применение одинаковых буквенных обозначений  $Q$  и  $q$  при различном их значении в каждой дисциплине. Так, в «Термодинамике» через  $Q$  обозначают количество теплоты, подведенное к системе через оболочку. Энергию в единицах СИ выражают в джоулях, кило- и мегаджоулях. Соответственно через  $q$  обозначают количество теплоты, подведенное к системе массой 1 кг, и в единицах СИ его выражают, например, в джоулях на килограмм. Однако в курсе «Теплообмен» эти же обозначения применяют для обозначения мощности потоков теплоты. Буквой  $Q$  обозначают мощность теплового потока через границу тела (называемую для краткости просто «теп-

ловым потоком»), которую выражают в ваттах. Соответственно через  $q$  обозначают поверхностную интенсивность мощности теплового потока (называемую для краткости плотностью теплового потока), которую выражают в ваттах на квадратный метр. Общее же количество теплоты, прошедшее сквозь границу тела, в рекомендуемом учебнике [1] обозначают через  $Q_T$  и выражают в джоулях.

Процесс обучения студентов по данной дисциплине включает: получение информации на лекциях, самостоятельную работу над учебниками и учебно-методическими пособиями, выполнение контрольных и лабораторных работ, приобретение навыков решения конкретных теплотехнических задач на практических занятиях, получение консультаций на кафедре «Промышленная теплоэнергетика и теплотехника» по вопросам, возникающим при изучении материала.

При выполнении заданий по контрольным работам, расчетно-графической работе необходимо соблюдать следующие требования. Вначале должны быть четко выписаны исходные параметры, заданные по условию задачи, и определена конечная цель задачи. Например, определить коэффициент теплопередачи теплообменного аппарата. Все вычисления проводить, пользуясь Международной системой единиц (СИ). Все вычисления приводить в развернутом виде. При использовании табличных значений величин (теплофизических характеристик, вспомогательных функций и коэффициентов), уравнений подобия, графических зависимостей необходимо давать ссылки на источники, которые используются. Графическое изображение циклов представить на отдельных листах формата А3. Решения задач сопровождать кратким пояснительным текстом. Указывать, какая из величин определяется расчетным путем, либо выбирается из справочников, учебных и учебно-вспомогательных пособий и т. д.

## 2. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОМАССОБМЕНА

В ряде энергетических и неэнергетических технологий в качестве теплоносителей используются жидкости, обладающие энергоаккумулирующими свойствами. К ним относятся: жидкие металлы и сплавы, применяемые в системах охлаждения в качестве жидкометаллических теплоносителей и как промежуточные теплоносители при передаче тепловой энергии в энергетических устройствах и системах, в качестве композиционных материалов на основе алюминия в технологиях производства водорода, в процессах получения аморфных и композиционных материалов в технологиях сверхбыстрой кристаллизации и т. д.

В работе предложена математическая модель теплопереноса в жидкостях, движущихся в металлических каналах, с учетом физических и химических превращений и изменений теплофизических и гидродинамических свойств веществ в процессах транспортировки по трубам и каналам.

При постановке задачи предполагаем, что вязкость не является постоянной величиной, изменяется во времени и зависит от температуры и координат. Изменение вязкости алюминиевых сплавов при решении задач численными методами учитывается аппроксимирующими зависимостями вязкости от температуры, полученными на основании экспериментальных данных.

Математическая модель включает замкнутую систему дифференциальных уравнений энергии, неразрывности, движения теплоносителей.

Дифференциальные уравнения движения жидкости выводятся, исходя из основных законов сохранения: закона сохранения количества движения, закона сохранения массы, закона сохранения энергии. Законы сохранения применимы к массе жидкости  $m$ , заключенной в произвольно выделенном из всей жидкости объеме  $V$  в момент времени  $t$ .

Уравнение неразрывности выводят из закона сохранения массы: масса жидкости  $m$ , первоначально занимающая произвольный объем  $V$ , с течением времени не изменяется:

$$\frac{dm}{dt} = 0.$$

Масса жидкости в объеме  $V$   $m = \int \rho dV$  может измениться во времени за счет изменений плотности  $\rho$  и объема  $V$ , выражающихся формулами  $\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$  и  $\int \rho v_n dS$  соответственно, где  $S$  – площадь поверхности, ограничивающей объем  $V$ ;  $v_n$  – скорость перемещений элемента поверхности  $dS$  по нормали.

Подставляя эти выражения в уравнение, выражающее закон сохранения массы, получаем

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho v_n dS = 0.$$

Заменяя поверхностный интеграл на объемный по формуле Остроградского-Гаусса  $\int_S \rho v_n dS = \int_V \text{div} \rho v dV$ , получаем

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho v \right) dV = 0.$$

В силу произвола объема  $V$  получаем уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho v = 0. \quad (2.1)$$

Уравнение количества движения выводится из закона сохранения количества, который формулируется так: изменение количества движения жидкости  $m$  в объеме  $V$  за единицу времени равняется сумме всех внешних сил, приложенных к объему  $V$ :

$$\frac{dK}{dt} = \sum_i F_i,$$

где  $K = \int_V \rho \mathbf{v} dV$  – вектор количества движения выделенной массы жидкости;

$F_i$  – внешние силы, приложенные к массе  $m$ .

Производная по времени от  $K$  находится по аналогии с производной от массы:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \int_V \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} dV + \int_S \rho \mathbf{v} v_n dV + \int_S \rho \mathbf{v} v_n dS = \\ &= \int_V \left( \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \mathbf{v} v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \mathbf{v} v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \mathbf{v} v_z) \right) dV. \end{aligned}$$

Внешние силы складываются из объемных  $F_V$  и поверхностных сил давления  $F_p$  и трения  $F_\tau$ . Как и ранее, обозначим:  $F$  – удельная массовая сила;  $p$  – давление,  $\tau_n$  – касательное напряжение, действующее на элементе  $dS$  поверхности площадью  $S$ , окружающей произвольный объем  $V$ . Тогда указанные силы могут быть представлены в виде:

$$F_V = \int_V \rho F dV,$$

$$F_p = - \int_S p n dS,$$

$$F_\tau = \int_S \tau_n dS.$$

Подставляя выписанные выражения в уравнения, выражающие закон сохранения количества движения, получаем

$$\int_V \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} dV + \int_S \rho \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v} dS = \int_V \rho \mathbf{F} dV - \int_S \rho n dS + \int_S \boldsymbol{\tau}_n dS.$$

*Уравнение энергии* выводится из закона сохранения энергии, согласно которому изменение полной энергии выделенной массы жидкости за единицу времени, равняется работе всех внешних сил, приложенных к ней, с учетом количества подведенной теплоты  $Q$  вследствие теплопроводности, излучения или химических реакций.

Полная энергия  $E$  выделенного элемента жидкости складывается из внутренней и кинетической энергии. Внутренняя  $U_0$  и кинетическая энергия единичной массы жидкости соответственно равны  $c_V T$  и  $\frac{U^2}{2}$ , тогда полная энергия жидкости массой  $m$ , заключенной в объеме  $V$ , равна

$$E = \int_V \rho \left( U_0 + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) dV.$$

Математическая запись закона сохранения энергии имеет вид

$$\frac{dE}{dt} = \sum L_i + Q.$$

Суммарная работа внешних сил  $\sum_i L_i$  складывается из работы сил давления  $\int_S \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS$ , сил течения  $\int_S (\boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{v}) dS$  и массовых сил  $\int_V \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dV$ , где означает скалярное произведение.

Обозначая через  $q_n$  количество теплоты, проходящей через единичную площадь поверхности  $S$ , запишем выражение для количества теплоты  $Q$ , получаемой массой  $m$  за единицу времени, в виде  $Q = \int_S q_n dS$ .

Находя производную  $dE/dt$  – по аналогии

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( U_0 + \frac{v^2}{2} \right) dV + \int_S \rho \left( U_0 + \frac{v^2}{2} \right) v_n dS = \\ &= \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( U_0 + \frac{v^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left( \rho \left( U_0 + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} \right) dS. \end{aligned}$$

и учитывая выражение для отдельных видов механической и тепловой энергии, в соответствии с законом сохранения энергии, получаем

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( U_0 + \frac{v^2}{2} \right) dV + \int_S \rho \left( U_0 + \frac{v^2}{2} \right) v_n dS = \\ = - \int_S \rho (n v) dS + \int_S (\tau_n v) dS + \int_V \rho (F v) dV + \int_S q_n dS. \end{aligned}$$

Преобразуя поверхностные интегралы в объемные, получаем с учетом произвола объема  $V$  уравнение энергии в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( U_0 + \frac{v^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left( \rho \left( U_0 + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} \right) = - \operatorname{div} \rho \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_x v) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_y v) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_z v) + \rho (F v) + \operatorname{div} q. \end{aligned}$$

Левая часть записанного уравнения с учетом уравнения неразрывности (2) может быть представлена как полная произ-

водная от полной энергии в виде  $\rho dE/dt$ , и тогда уравнение энергии запишется так:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( U_0 + \frac{v^2}{2} \right) = -\operatorname{div} p v + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_x v) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_y v) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_z v) + \rho (F v) + \operatorname{div} q.$$

*Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости. Уравнение Навье-Стокса.* В случае несжимаемой жидкости  $\rho = \text{const}$  и уравнение неразрывности упрощается к виду

$$\operatorname{div} v = 0$$

или в проекции на оси координат

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Если предположить, что вязкость  $\mu$  по всему объему постоянна, что справедливо для изотермического ламинарного течения, получаем уравнения движения в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \end{array} \right.$$

Данные уравнения называются уравнениями Навье-Стокса.

Выпишем также уравнения Навье-Стокса и энергии в пренебрежении диссипацией в цилиндрических координатах  $r\varphi z$  для осесимметричного течения:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right);$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right);$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = \nu \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right);$$

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right).$$

При отсутствии конвективного переноса теплоты, связанного с движением среды, составляющие скорости равны нулю и уравнения энергии сводятся к уравнениям теплопроводности

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

в декартовых координатах и

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

в цилиндрических координатах.

В качестве начальных условий должны быть заданы распределенные значения гидродинамических параметров в момент

времени  $t = 0$ . По пространственным координатам уравнения имеют второй порядок относительно каждой составляющей скорости и температуры. Для определенности задачи на всех границах должны быть заданы либо компоненты скорости и температура, либо их градиенты (соответственно напряжения и тепловые потоки). Поле давления обычно рассчитывается с точностью до аддитивной составляющей. Часто вместо проекции скорости на границах задают нормальную составляющую и две касательные составляющие скорости (в плоском течении – одну касательную скорость).

На твердых поверхностях задается равенство нулю нормальной (условия непротекания) и касательных (условие прилипания) составляющих скорости. На свободной поверхности обычно известны напряжения. На входной границе, через которую жидкость втекает в рассматриваемую область, как правильно, известны или определяются по заданному расходу распределенные значения скорости из соотношений, полученных из уравнений движения. На выходной границе области чаще всего становятся «мягкие» граничные условия, которые получаются путем применения экстраполяционных зависимостей. В общем, можно сказать, что динамические граничные условия сводятся к заданию либо граничных составляющих скорости  $v_n$  и  $v_\tau$ , либо из производных, что равносильно заданию составляющих тензора напряжений.

Граничные условия по температуре для жидкого потока ставятся в зависимости от условий теплообмена. Наиболее точный способ состоит в равенстве температур и тепловых потоков на контактных поверхностях:

$$\left( \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_f = \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_\omega,$$

$$T_f = T_\omega,$$

где  $f$  – поток теплоты и температура жидкости;

$\omega$  – соответствующие величины для твердого тела.

Эти граничные условия требуют совместного решения уравнений переноса теплоты в жидкости и в телах, ограничивающих поток жидкости.

Раздельное рассмотрение уравнений энергии в жидкости и в твердом теле производится при граничных условиях первого, второго и третьего рода.

Граничное условие первого рода состоит в задании температуры на контактной поверхности:  $T_f = T_\omega = f(t)$ .

Граничное условие второго рода в задании поверхностного теплового потока:

$$\left( \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_f = \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_\omega = q_\omega(t),$$

где  $q_\omega$  – тепловой поток, которым обмениваются между собой жидкости и твердое тело.

Граничные условия третьего рода характеризуют теплообмен между жидкостью и твердым телом:

$$\left( \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_f = \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_\omega = \alpha(T_\omega - T_{f\infty}),$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи;

$T_{f\infty}$  – температура жидкости в точке, достаточно далеко удаленной от поверхности  $\omega$ .

В приведенных соотношениях производные берутся со знаком «плюс», если направление внешней нормали к поверхности, противоположной по направлению теплового потока; знак «минус» – в противном случае.

Численным методом проведен расчет затвердевания и охлаждения движущегося расплава в полости цилиндрической

формы заданной геометрии. Расчеты выполнены для двумерной модели с учетом переменной вязкости металла как функции температуры  $\mu = f(T)$  во всей области течения. В качестве искомых (зависимых) параметров выбраны составляющие скорости  $u$  и  $v$  (в продольном и поперечном направлениях), давление в потоке  $p$ , функции тока  $\psi$ , температуры  $T$  в потоке, затвердевшей корке металла, форме.

### **3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ТЕЛ**

Композиционные материалы, обладающие в силу своей структуры рядом уникальных свойств, широко применяются в современном производстве. В этом ряду значительный интерес представляют стеновые строительные, тканевые и конструкционные материалы нового класса – волокнистые и многослойные материалы, позволяющие получать изделия с заданными свойствами. Такие материалы типа «сэндвич» применяются в строительном производстве (гипсоволокнистые, гипсокартонные материалы с огнеупорными, водостойкими и другими свойствами).

Использование многослойных материалов с заданным сочетанием физико-механических свойств открывает большие возможности для изготовления изделий и конструкций с повышенным качеством и улучшенными эксплуатационными характеристиками для различных отраслей народного хозяйства Республики Беларусь. Выбор и комплектация разнородных слоев таких материалов обеспечивает получение изделий с набором заданных характеристик: высокопрочных, жаростойких, антикоррозийных и т. п.

Рассмотрим теплофизические особенности процесса теплообмена в многослойной стенке в общей постановке. Отдельные слои могут претерпевать фазовые или химические превращения (отвердевания терморезактивных смол, гипсовых наполни-

телей, испарения или конденсации в пористых теплозащитных материалах). Расчет проводим с учетом фазовых превращений и зависимостей теплофизических характеристик сопряженных тел от температуры.

На рисунке 1.3 приведена схема системы рассматриваемых тел в условиях симметрии.

Количество и материалы слоев могут быть различными в соответствии со служебными характеристиками и функциональными особенностями многослойной стенки.

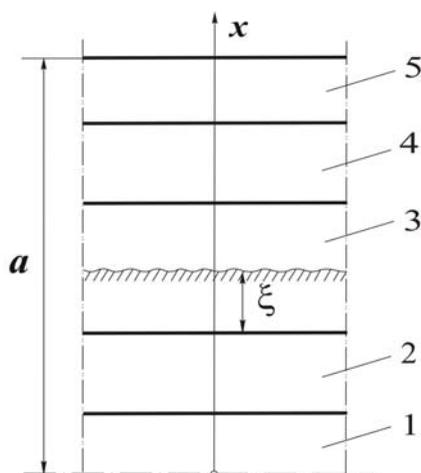


Рисунок 3 – Расчетная схема:

1 – металлическая или металлокерамическая матрица; 2 – неметаллическое покрытие (керамика, стекло- или базальтволоконные материалы); 3 – слой, в котором происходят фазовые или химические превращения (термореактивные смолы, гипс); 4, 5 – неметаллические слои со специальными свойствами (армированный углерод, термостойкие покрытия и т. д.)

Найдем распределение температуры в системе сопряженных тел для каждого момента времени. В этих условиях температурное поле многослойной стенки описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений переноса теплоты (ввиду нелинейности потоков теплоты и граничных условий) с соответствующими краевыми условиями. Изменение температуры по

сечению (вдоль координаты  $x$ ) в любой момент времени для каждого слоя многослойной стенки определяется из решения системы дифференциальных уравнений теплопроводности:

$$c_i(T_i)\rho_i(T_i)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_i(T_i) \frac{\partial T_i(x,t)}{\partial x} \right], \quad (3.1)$$

где  $i$  – индекс, определяющий принадлежность уравнения и параметров к различным слоям многослойной стенки;

$c_i(T_i)$  – удельная теплоемкость  $i$ -го слоя как функция температуры;

$\rho_i(T_i)$  – плотность материала  $i$ -го слоя как функция температуры;

$\lambda_i(T_i)$  – коэффициент теплопроводности  $i$ -го слоя как функция температуры;

$x$  – координата, направленная по нормали к поверхности стенки.

Условия теплового сопряжения на границах слоев (граничные условия IV рода) при  $x = x_i$ ,  $T_i = T_{i-1}$  имеют вид

$$\lambda_i(T_i) \frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda_{i-1}(T_{i-1}) \frac{\partial T_{i-1}}{\partial x}, \quad (3.2)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

$x_i$  – длина сопряжений  $i$ -го и  $i - 1$  слоев.

В соответствии с условием задачи принимаем, что теплообмен на внешней поверхности многослойной стенки происходит по закону Ньютона-Рихмана. Тогда с учетом симметричной модели граничные условия запишутся так:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \text{ при } x = 0 ;$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda(T - T_c), \text{ при } x = a .$$

Начальные условия имеют вид

$$T_i(x, 0) = T_{i0}, \text{ при } i = 1, 2, \dots, n.$$

Для рассматриваемой схемы (рисунок 3) для слоя 3 решается задача с фазовыми превращениями с подвижной границей фаз.

На границе раздела фаз (в слое 3) при  $x = \xi$  запишем условия фазового перехода [1]:

$$T_3' = T_3'' = T_\phi(\xi, t);$$

$$\lambda_3' \frac{\partial T_3(\xi, t)}{\partial x} - \lambda_3'' \frac{\partial T_3(\xi, t)}{\partial x} = \rho_3 r \frac{d\xi}{dt},$$

где  $T_\phi$  – температура фронта фазовых превращений;

$\rho_3$  – плотность материала;

$r$  – удельная теплота фазового перехода.

Линейный источник при координате  $x = \xi$  представим с помощью  $\delta$ -функции Дирака, при этом воспользуемся основным свойством этой функции [2]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - \xi)dx = f(\xi).$$

Для решения задачи фазового перехода применяется метод сглаживания:  $\delta$ -функция заменяется  $\delta$ -образной функцией  $\delta(T - T_\phi, \Delta)$ , отличной от нуля лишь на интервале  $(T_\phi - \Delta, T_\phi + \Delta)$  и удовлетворяющей условию нормировки:

$$\int_{T_\phi - \Delta}^{T_\phi + \Delta} \delta(T - T_\phi, \Delta) dT = 1.$$

Сглаживая на интервале  $(T_{\phi} - \Delta, T_{\phi} + \Delta)$  функции  $\delta'_3(T)$ ,  $\delta''_3(T)$ ,  $c''_3(T)$ ,  $\lambda'_3(T)$ ,  $\lambda''_3(T)$ , например при линейной зависимости между значениями в твердой фазе при  $T < T_{\phi} - \Delta$  и в жидкой фазе при  $T > T_{\phi} + \Delta$ , получим квазилинейное уравнение, по форме совпадающее с дифференциальным уравнением (3.1). Для решения полученного квазилинейного уравнения можно использовать разностные методы.

Из граничных условий (3.2) видно, что температурные функции на границе слоев не имеют разрывов, а претерпевают разрыв первые производные. Этот факт дает возможность рассматривать систему сопряженных тел как стенку с теплофизическими свойствами, зависящими от координаты и температуры, и терпящими разрыв на границе слоев.

Учитывая это обстоятельство, а также вводя безразмерные переменные, перепишем систему дифференциальных уравнений и краевые условия в безразмерных переменных:

$$c(u, x) \rho(u, x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (3.3)$$

при  $x = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0;$$

при  $x = 1$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial x} = -\alpha u;$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

где  $u$  – безразмерная температура, определяется в каждой точке системы в любой момент времени:

$$u = \frac{T - T_0}{T_0};$$

$x$  – безразмерная координата, представляющая отношение текущей координаты к наружному размеру многослойной стенки;

$T_0$  – температура окружающей среды.

Для решения поставленной задачи используем *метод сеток*. Для численного решения уравнения (3.3) перейдем к конечно-разностному аналогу. Расчетную область многослойного тела заполним нерегулярной сеткой с узлами  $x_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ , причем количество узлов в каждом слое обозначаем через  $n_i$ . Тогда шаг сетки на каждом слое будет равен  $h_i = a_i/n_i$ , где  $a_i$  – безразмерная толщина  $i$ -го слоя. Введем в рассмотрение также фиктивную сетку, узлы которой на полшага  $h_i$  сдвинуты к оси так, что границы слоев отстают на полшага от смежных узлов.

Обозначим нумерацию узлов сетки от  $-1$  до  $n$ , где  $n = \sum_1^5 n_i$ .

Для конечно-разностной аппроксимации производных в выражении (3.3) используем четырехточечную неявную схему. Тогда рассматриваемую задачу можно свести к итерационной системе алгебраических уравнений:

$$\alpha_i^2 \rho_i c_i \frac{u_i^{l+1} - u_i^l}{\tau} = \frac{1}{h} \left( \lambda_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1}^{l+1} - u_i^{l+1}}{h_+} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i^{l+1} - u_{i-1}^{l+1}}{h_-} \right), \quad (3.4)$$

где  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Аналогичным образом проведем аппроксимацию краевых условий на соответствующей сетке. Разностный аналог граничных условий имеет вид

$$\lambda_{n-\frac{1}{2}} \frac{u_n^{l+1} - u_{n-1}^{l+1}}{h_n} = -\alpha \frac{u_n^{l+1} + u_{n-1}^{l+1}}{2}; \quad (3.5)$$

при  $i = 1, 0, \dots, n-1$

$$u_i^0 = \bar{u};$$

при  $i = n_1, n + 1, \dots, n$ .

$$u_i^0 = 0.$$

Начальные условия запишутся так:

$$u_{-1} = u_0.$$

Теплофизические коэффициенты в выражениях (3.4), (3.5) вычисляются по температуре на предыдущем временном слое, взятой в узле сетки при целом индексе и в середине между двумя узлами при половинном индексе.

Количество  $n + 2$  уравнений (3.4), (3.5) определяют  $n + 2$  неизвестных сеточных функций  $n_i (i = -1, 0, \dots, n)$ . На каждом временном шаге система ( $n + 2$ ) уравнений (3.4), (3.5) решается с помощью прогоночных соотношений:

$$\beta_0 = 1; \quad \gamma_0 = 1;$$

$$\beta_{i+1} = \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}} / (\bar{h}h_+) + \lambda_{i-\frac{1}{2}} / (\bar{h}h_-) + c_i \rho_i \frac{a^2}{\tau}}{\lambda_{i+\frac{1}{2}} / (\bar{h}h_+) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} / (\bar{h}h_-) \beta_i};$$

$$\gamma_{i+1} = \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}} / (\bar{h}h_-) \gamma_i + \frac{\bar{a}^2}{\tau} c_i \rho_i u_i^l}{\lambda_{i+\frac{1}{2}} / (\bar{h}h_+)},$$

где  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ .

$$u_n^{l+1} = \frac{\gamma_n}{1 + \alpha a h_n / (2\lambda_{n-\frac{1}{2}})} - \beta_n \frac{1 - \alpha a h_n / (2\lambda_{n-\frac{1}{2}})}{2};$$

$$u_{i-1}^{l+1} = u_i^{l+1} \beta_i + \gamma_i,$$

где  $i = n, n - 1, \dots, 0$ ;

$$h_+ = x_{i+1} - x_i;$$

$$h_- = x_i - x_{i-1};$$

$$\bar{h} = \frac{h_+ + h_-}{2};$$

$$h_n = x_n - x_{n-1}.$$

По результатам численного эксперимента определен характер распределения температур в сечении многослойной стенки, который определяется геометрическими соотношениями и термическим сопротивлением отдельных слоев стенки. При наличии слоя с фазовыми и химическими превращениями теплота поглощается в основном данным слоем. Температурное поле многослойной стенки в определенной степени зависит также от тепловых условий на поверхностях стенки. Из анализа температурного поля выявлена роль начальных параметров и толщин отдельных слоев стенки.

Набор материалов отдельных слоев обусловлен функциональными особенностями стенки (прочностными, термо- и жаростойкими, антикоррозионными и т. д.) и зависит от эксплуатационных свойств изделий, их служебного назначения.

Универсальность разработанной математической модели и численного метода решения позволяют рассчитывать многослойные изделия с заданными служебными характеристиками для различных отраслей народного хозяйства (энергетической, нефтехимической, машино- и приборостроительной и т. д.).

## 4. ОСНОВЫ МАССООБМЕНА

### 4.1. Основные понятия и определения массопереноса

Во многих теплоэнергетических и теплотехнологических установках процессы теплообмена сопровождаются переносом массы одного компонента относительно другого или диффузией. *Диффузией* называют самопроизвольный процесс выравнивания концентраций внутри фаз, при этом происходит перенос вещества из области с большей концентрацией в область с меньшей концентрацией [1, 9, 10].

Аналогично переносу теплоты теплопроводностью и конвекцией различают массопроводность – молекулярную диффузию (массообмен) и конвективную массоотдачу – конвективную диффузию или молярную диффузию. *Молекулярная диффузия* в среде (диффузионный массообмен) происходит главным образом в результате самостоятельного перемещения молекул, обусловленного их тепловым движением. Диффузия одного компонента смеси, находящейся, по существу, в стационарном состоянии, в направлении уменьшения концентрации этого компонента аналогична переносу теплоты теплопроводностью в направлении уменьшения температуры. Хорошо известным примером молекулярной диффузии является перенос распыляемого из баллончика аэрозоля в неподвижном воздухе комнаты. Аэрозоль из места распыления распространяется по всей комнате. Аналогично мокрая одежда, находящаяся в комнате, в конечном счете высыхает, поскольку водяной пар с высокой концентрацией, окружающий одежду, диффундирует в более сухой воздух. Существуют и другие многочисленные примеры молекулярной диффузии.

Конвективный массообмен или молярная диффузия включает перенос компонента вещества и движения всей массы жидкости. Процесс молярной диффузии аналогичен процессу конвективного теплообмена. Конвективный массообмен может быть вынужденным и свободным. Если движение жидкости обуслов-

лено разностью плотностей, процесс является свободным конвективным массообменом. Если движение жидкости вызывают внешние устройства, такие как вентилятор или насос, процесс принято называть массообменом при вынужденной конвекции. Существуют многочисленные примеры процессов конвективного массообмена, такие как увлажнение, дистилляция, экстракция жидкости, абсорбция газа, выщелачивание.

В целом, диффузия характеризуется потоком массы компонента, т. е. количеством вещества, проходящим в единицу времени через данную поверхность в направлении нормали к ней. *Поток массы* обозначим через  $J$ , его единица измерения – килограмм в секунду. Плотностью потока массы  $j$  называется поток массы, проходящий через единицу поверхности:

$$j = \frac{dJ}{dF}.$$

Отсюда

$$J = \int_F j dF$$

или при  $j = \text{const}$

$$J = j \cdot F.$$

В однородной по температуре и давлению макроскопически неподвижной двухкомпонентной смеси плотность потока массы одного из компонентов смеси за счет молекулярной диффузии определяется законом Фика:

$$j_{к.д i} = -D \frac{\partial \rho_i}{\partial n} \quad (4.1)$$

или

$$j_{к.д i} = -\rho D \frac{\partial c_i}{\partial n}, \quad (4.2)$$

где  $\rho_i$  – местная концентрация данного вещества (компонента), равная отношению массы компонента к объему смеси, кг/м<sup>3</sup>;

$c_i = \rho_i / \rho$  – относительная массовая концентрация  $i$ -го компонента;

$\rho$  – плотность смеси;

$D$  – коэффициент молекулярной диффузии одного компонента относительно другого, м<sup>2</sup>/с (обычно  $D$  кратко называют «коэффициентом диффузии»);

$n$  – направление нормали к поверхности одинаковой концентрации данного вещества;

$\frac{\partial \rho_i}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial c_i}{\partial n}$  – градиенты концентрации и относительной кон-

центрации (они всегда направлены в сторону возрастания концентрации).

*Коэффициентом диффузии* называется количество вещества, диффундирующего через поверхность площадью 1 м<sup>2</sup> в единицу времени при разности концентраций на расстоянии 1 м, равной единице.

Градиент концентрации является движущей силой, обуславливающей перенос вещества. При передаче теплоты теплопроводностью такой движущей силой является градиент температуры. Знак « $\leftarrow$ » в уравнении (4.2) указывает, что согласно закону Фика перемещение вещества происходит в сторону уменьшения градиента концентраций. Диффузию, описываемую законом Фика, называют *концентрационной диффузией*.

Коэффициент диффузии зависит от температуры и давления: возрастает с ее увеличением и уменьшается с ростом давления. Коэффициент диффузии  $D$  газов и паров в зависимости от давления  $p$  и температуры  $T$  определяется по формуле [9]

$$D = D_0 \frac{p_0}{p} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1+n},$$

где  $D_0$  – коэффициент диффузии при нормальных физических условиях ( $p_0 = 101,3$  кПа,  $T = 273$  К);

$p_0 = 101,3$  кПа – давление при нормальных физических условиях;

$n$  – показатель степени, который зависит от состава газовой смеси, например,  $n = 0,8$  для смеси водяного пара и воздуха;

$T$  – температура воздуха при заданных условиях.

Коэффициент диффузии зависит и от пропорций смеси. Эта зависимость незначительна, если концентрация рассматриваемого компонента мала. В технических расчетах этой зависимостью большей частью пренебрегают.

Соответственно, по закону Фика масса вещества  $m$ , кг, прошедшего в процессе молекулярной диффузии через слой  $\delta$ , м, пропорциональна площади поверхности  $F$ , м<sup>2</sup>, изменению концентрации вещества  $\Delta\rho$ , кг/м<sup>3</sup>, по толщине слоя, времени  $\tau$ , с, и обратно пропорциональна толщине слоя:

$$m = DF\Delta\rho\tau / \delta.$$

В бинарной смеси коэффициент диффузии будет одинаковым как для первого, так и для второго взаимно диффундирующих компонентов.

Концентрация имеет размерность плотности. Воспользовавшись уравнением состояния идеального газа, формулу (4.1) можно записать

$$j_{к.д i} = -D_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial n},$$

где  $p_i$  – местное парциальное давление данного компонента, Па;

$n$  – направление нормали к поверхности одинаковых парциальных давлений данного компонента;

$D_p = \frac{D}{RT}$  – коэффициент молекулярной диффузии (с), отнесенный к градиенту парциального давления рассматриваемого компонента.

В отличие от  $D$  коэффициент  $D_{p_i}$  различен для компонентов данной бинарной смеси. Исходя из равенства

$$D = D_{p_1} R_1 T = D_{p_2} R_2 T,$$

можно записать

$$\frac{D_{p_1}}{D_{p_2}} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{M_1}{M_2},$$

где  $M$  – молекулярная масса.

Если температура смеси переменна, то возникает так называемая *термическая диффузия (эффект Соре)*. Из кинетической теории газов [1] следует, что если массы молекул двух компонентов различны, то за счет термодиффузии более тяжелые молекулы стремятся перейти в холодные области. Если массы молекул одинаковы, то в холодные области стремятся перейти более крупные молекулы. При определенных условиях направление термодиффузии может изменяться. Например, в ионизированном газе более тяжелые молекулы (или ионы) будут стремиться перейти в более теплые области. Термодиффузия приводит к образованию градиента концентрации. Этому препятствует процесс концентрационной диффузии, старающийся выровнять состав. В результате с течением времени может установиться стационарное состояние, при котором уравновесятся противоположные влияния термодиффузии и концентрационной диффузии.

Следствием молекулярного диффузионного переноса теплоты является так называемый *диффузионный термоэффект (эффект Дюфо)*, представляющий собой возникновение раз-

ности температур в результате диффузионного перемещения двух газов, первоначально имевших одинаковую температуру. Диффузионный термоэффект – явление, обратное термодиффузии. При стационарном диффузионном смешении, например водорода и азота, возникает разность температур порядка нескольких градусов. Возникающий при диффузионном термоэффекте градиент температуры имеет такое направление, что термодиффузия, являющаяся его результатом, противоположна диффузии, благодаря которой появился этот градиент.

Если в смеси имеет место градиент полного давления, то может возникнуть диффузия за счет неоднородности давления. Такой вид диффузии называют *бародиффузией*. При бародиффузии тяжелые молекулы стараются перейти в область повышенного, а легкие – в область пониженного давления. Бародиффузия сопровождается и обычным переносом массы, вызванным разностью концентраций. Диффузия от неоднородности давления происходит, например, в газе, вращающемся вокруг оси. Тяжелые молекулы при этом стремятся перейти в области, наиболее удаленные от центра.

Плотность потока массы  $i$ -го компонента за счет молекулярного переноса с учетом концентрационной, термо- и бародиффузии описывается следующим уравнением:

$$\vec{j}_{\text{м.д. } i} = -\rho \left( D \nabla c_i + \frac{D_T}{T} \nabla t + \frac{D_\delta}{p} \nabla p \right), \quad (4.3)$$

где  $D_T = K_T D$  – коэффициент термодиффузии,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;

$D_\delta = K_\delta D$  – коэффициент бародиффузии,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;

$p$  – давление смеси. Па.

Первый член в уравнении (4.3) учитывает концентрационную диффузию, второй – термодиффузию, а третий – бародиффузию. Соответствующие потоки массы нормальны к соответствующим им изопотенциальным поверхностям, т. е. поверхностям равных концентраций, изотермическим и изобари-

ческим поверхностям. При  $\text{grad}p = 0$  и  $\text{grad}t = 0$  уравнение (4.3) переходит в закон Фика. Коэффициент  $K_T = \frac{D_T}{D}$  называется *термодиффузионным отношением*, он безразмерен;  $K_\delta = \frac{D_\delta}{D}$  – бародиффузионное отношение.

Значение  $K_T$  для смеси газов обычно меньше 0,1. Ввиду малости  $K_T$  заметный поток массы будет иметь место только при больших градиентах температуры. Особенно невелика термодиффузия, если концентрация одного из компонентов мала.

Для бинарной смеси величина  $K_\delta$  определяется следующим уравнением:

$$K_\delta = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho} \frac{M_2 - M_1}{M},$$

где  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M$  – молекулярные массы первого, второго компонентов и смеси.

Бародиффузия проявляется при значительных перепадах давления, что в процессах теплообмена встречается редко. При равенстве молекулярных масс  $M_1$  и  $M_2$  бародиффузия отсутствует. Как следует из термодинамики необратимых процессов, бародиффузии должен сопутствовать и соответствующий термоэффект, представляющий собой возникновение разности температур.

Таким образом, суммарный перенос массы какого-либо компонента путем молекулярной диффузии является следствием концентрационной диффузии, термодиффузии и бародиффузии.

Если рассматривать движущуюся среду, то процесс массообмена осуществляется не только молекулярной диффузией, но и конвекцией (молярной диффузией). При перемещении объема смеси плотностью  $\rho$  со скоростью  $\vec{w}$  происходит перенос массы смеси, плотность потока которой определяется уравнением

$$\vec{j}_k = \rho \vec{w}. \quad (4.4)$$

Если рассматривать отдельный  $i$ -й компонент смеси, то

$$\vec{j}_{ki} = \rho_i \vec{w}. \quad (4.5)$$

Суммарная плотность потока вещества за счет молекулярного и молярного переноса будет определяться уравнением

$$\vec{j}_i = \vec{j}_{м.д i} + \vec{j}_{к i}. \quad (4.6)$$

Очевидно, что с массой вещества переносится энтальпия  $j_i \cdot h_i$ , где  $h_i$  – удельная энтальпия  $i$ -го компонента, Дж/кг.

В общем случае через неподвижную контрольную поверхность, выделенную в смеси, переносится энтальпия  $\sum j_i h_i$ . Тогда в смеси плотность теплового потока описывается уравнением

$$\vec{q} = -\lambda \nabla t + \sum \vec{j}_i h_i. \quad (4.7)$$

Учитывая равенство (4.6), имеем

$$\sum \vec{j}_i h_i = \sum \vec{j}_{м.д i} h_i + \sum \vec{j}_{к i} h_i. \quad (4.8)$$

Подставим в уравнение (4.8) уравнения (4.4) и (4.5), тогда

$$\sum \vec{j}_i h_i = \sum \vec{w} c_i h_i + \sum \vec{j}_{м.д i} h_i = \rho \vec{w} h + \sum \vec{j}_{м.д i} h_i, \quad (4.9)$$

где  $h = \sum c_i h_i$  – удельная энтальпия смеси;

$c_i = \frac{\rho_i}{\rho}$  – относительная массовая концентрация смеси. Тогда

уравнение (4.7) можно представить в виде

$$\vec{q} = -\lambda \nabla t + \rho \vec{w} h + \sum \vec{j}_{м.д i} h_i. \quad (4.9)$$

Первый член правой части уравнения (4.9) определяет передачу теплоты теплопроводностью, второй – конвективной (молярной) диффузией, а третий – молекулярной диффузией/ При наличии однокомпонентной движущейся жидкости молекулярная диффузия отсутствует и

$$\bar{q} = -\lambda \nabla t + \rho \bar{w} h.$$

Дифференциальное уравнение массообмена, описывающее распределение массы  $i$ -го компонента в движущейся смеси имеет вид

$$\frac{d\rho_i}{d\tau} = D\nabla^2 \rho_i, \quad (4.10)$$

где  $\frac{d\rho_i}{d\tau} = \frac{\partial \rho_i}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial \rho_i}{\partial x} + w_y \frac{\partial \rho_i}{\partial y} + w_z \frac{\partial \rho_i}{\partial z}$  – полная субстанциональная производная массы  $i$ -го компонента в движущейся среде;

$\nabla^2 \rho_i = \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа.

Фактически уравнение (4.10) – это уравнение сохранения массы  $i$ -го компонента.

В неподвижной среде конвективная составляющая отсутствует ( $w_x = w_y = w_z = 0$ ) и дифференциальное уравнение массообмена принимает вид:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \tau} = D\nabla^2 \rho_i.$$

В последнем уравнении учитывается только концентрационная диффузия. По внешнему виду это уравнение (аналогично) ничем не отличается от записи дифференциального урав-

нения теплопроводности Фурье при отсутствии внутренних источников теплоты ( $q_v = 0$ ):

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t,$$

где  $a = \frac{\lambda}{c_p \rho}$  – коэффициент температуропроводности,  $\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ .

#### 4.2. Аналогия процессов тепло- и массообмена

Процессы переноса теплоты, вещества и количества движения, протекающие независимо друг от друга, описываются соответственно уравнениями энергии, диффузии и движения.

*Уравнение энергии* (без учета диффузионной составляющей теплового потока):

$$\frac{dt}{d\tau} = a \nabla^2 t.$$

*Уравнение диффузии* (без учета термо- и бародиффузии)

$$\frac{d\rho_i}{d\tau} = D \nabla^2 \rho_i.$$

*Уравнение безнапорного движения жидкости* (без учета массовых сил)

$$\frac{d\vec{w}}{d\tau} = \nu \nabla^2 \vec{w}.$$

Анализ представленных выше уравнений показывает, что по форме они аналогичны. Коэффициенты температуропроводности  $a$ , молекулярной диффузии  $D$  и вязкости  $\nu$  характеризуют соответственно перенос теплоты, вещества и импульса. Едини-

цы измерения  $a$ ,  $D$  и  $v$  – одинаковы,  $\text{м}^2/\text{с}$ . Для случая, когда  $a = D = v$ , и при подобных условиях однозначности расчетные поля температур, концентраций и скоростей будут подобны.

Аналогично теплоотдаче конвективный массообмен между твердой или жидкой поверхностями и окружающей средой называют *массоотдачей*. Если одновременно протекают процессы конвективного теплообмена и массообмена, то процесс теплообмена усложняется, так как перенос теплоты дополнительно осуществляется за счет диффузии.

Удельный тепловой поток  $q$ ,  $\text{Вт}/\text{м}^2$ , в процессе теплоотдачи рассчитывается по формуле Ньютона-Рихмана:

$$q = \alpha(t_w - t_\infty).$$

По аналогии для практических расчетов массоотдачи используют уравнение

$$j = \beta(\rho_w - \rho_\infty) \quad (4.11)$$

или

$$j = \rho\beta(c_w - c_\infty),$$

где  $j$  – плотность потока массы,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ;

$\beta$  – коэффициент массоотдачи, отнесенный к разности концентраций диффундирующего вещества,  $\text{м}/\text{с}$ ;

$\rho_w$ ,  $\rho_\infty$  – концентрация диффундирующего вещества соответственно на жидкой (или твердой) поверхности раздела фаз (индекс «w») и вдали от нее (индекс « $\infty$ »),  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;

$\rho$  – плотность смеси,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;

$c$  – относительная массовая концентрация диффундирующего вещества.

Используя уравнение состояния идеального газа ( $\frac{p}{\rho} = RT$ ), уравнение массоотдачи (4.11) представим в виде

$$j = \beta_p(p_w - p_\infty),$$

где  $\beta$  – коэффициент массоотдачи,  $\text{кг}/(\text{Па}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с})$ , отнесенный к разности парциальных давлений  $\Delta p = p_w - p_\infty$ ;

$p_w, p_\infty$  – парциальное давление диффундирующего вещества соответственно на жидкой (или твердой) поверхности раздела фаз и вдали от нее, Па.

Коэффициенты массоотдачи  $\beta$  и  $\beta_p$  связаны соотношением

$$\beta_p = \beta/(RT).$$

Аналогия процессов переноса импульса (количества движения) и теплоты была предложена О. Рейнольдсом в 1874 г. при изучении им турбулентного течения однофазной жидкости в трубах. В. Нуссельт в 1916 г. расширил аналогию Рейнольдса на процессы массообмена.

Эта аналогия предполагает, что простым методом расчета коэффициента массообмена является использование соответствующего безразмерного соотношения для конвективного теплообмена с подстановкой безразмерных комплексов, описывающих процесс массообмена.

Безразмерным комплексом, описывающим теплообмен, в который входит коэффициент теплоотдачи, является *число Нуссельта*:

$$\text{Nu} = \frac{\alpha l}{\lambda}.$$

Аналогичный безразмерный комплекс, описывающий массообмен, называется *числом Шервуда* и определяется следующим образом:

$$\text{Sh} = \frac{\beta l}{D} = \text{Nu}_D.$$

Иногда число Шервуда называют *диффузионным числом Нуссельта*.

В теории теплообмена безразмерным комплексом, который характеризует отношение переноса количества движения к теплопроводности, является *число Прандтля*:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}.$$

В теории массообмена коэффициент диффузии заменяет коэффициент температуропроводности, и новый безразмерный комплекс называется *числом Шмидта (диффузионное число Прандтля)*

$$\text{Sc} = \frac{\nu}{D} = \text{Pr}_D.$$

Число Шмидта характеризует отношение переноса количества движения к массовой диффузии.

*Число Гухмана* характеризует влияние массообмена на теплообмен в процессах сушки

$$\text{Gu} = \frac{T_c - T_m}{T_c},$$

где  $T_c, T_m$  – температуры сухого и мокрого термометров, К.

*Число Льюиса-Семенова* – это критерий подобия полей концентраций и температур в движущемся потоке:

$$\text{Le} = \frac{D}{a}.$$

При  $\text{Le} = 1$  поля концентраций и температур будут подобны. Это условие приближенно выполняется для ряда случаев массообмена в газовых смесях.

*Диффузионное число Стэнтана*

$$\text{St}_D = \frac{J_{iw}}{(c_{iw} - c_{i\infty}) \cdot (\rho w)_\infty} = \frac{\text{Nu}_D}{\text{Re} \cdot \text{Pr}_D} = \frac{\beta}{(\rho w)_\infty},$$

где  $(\rho w)_\infty$  – массовая скорость смеси вдали от поверхности раздела фаз.

*Диффузионное число Пекле* характеризует отношение конвективного переноса массы к молекулярной диффузии

$$\text{Pe}_D = \frac{wl}{D}.$$

Соотношение Льюиса между коэффициентами массо- и теплоотдачи получается из соображений, что если толщина теплового пограничного слоя равна толщине диффузионного слоя ( $\delta_T = \delta_D$ ) и теплота в пограничном слое передается только теплопроводностью, а масса только концентрационной диффузией, то из выражений  $\alpha = \frac{\lambda}{\delta_T}$  и  $\beta = \frac{D}{\delta_D}$  получаем соотно-

шение между коэффициентами массоотдачи и теплоотдачи  $\frac{\lambda}{\alpha} = \frac{D}{\beta}$ , откуда

$$\beta = \alpha \frac{D}{\lambda}$$

Для газов при  $\text{Pr} = \text{Pr}_D = 1$  следует, что  $\frac{v}{a} = \frac{v}{D}$ , а  $a = \frac{\lambda}{c_p \rho}$

получаем, что  $\frac{D}{\lambda} = \frac{1}{c_p \rho}$ . Отсюда

$$\beta = \frac{\alpha}{c_p \rho}.$$

Следовательно, зная значение коэффициента теплоотдачи, можно рассчитать коэффициент массоотдачи в газовых смесях.

Введя понятие коэффициента испарения  $\sigma = \frac{\alpha}{c_p}$ , кг/(м<sup>2</sup>·с),

можно получить выражение для коэффициента массоотдачи через коэффициент испарения:

$$\beta = \frac{\sigma}{\rho}.$$

*Число Грасгофа* для массообмена определится как число Архимеда:

$$Gr_D = \frac{g l^3 (\rho_{iw} - \rho_{i\infty})}{\nu^2 \rho},$$

Если выполняются условия  $Pr = \nu / a = 1$ ,  $Sc = \nu / D = 1$  и  $Le = a / D = 1$ , то уравнения энергии и диффузии тождественны. При этом относительное распределение скорости, температуры и массосодержания (массовой доли) диффундирующего компонента тождественны. В этом случае говорят, что существует тройная аналогия, т. е. аналогия между явлениями переноса количества движения, теплоты и массы.

Тройная аналогия между процессами переноса теплоты, вещества и импульса

$$St = St_D = \frac{C_f}{2}, \quad (4.12)$$

где  $C_f = \frac{2\tau}{\rho w^2}$  – коэффициент трения;

$\tau$  – касательная напряжения на трение.

Выражение (4.12) справедливо при  $Pr = Pr_D = 1$  и при отсутствии продольного потока теплоты и массы ( $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ ) продольная составляющая градиента давления равна нулю).

Экспериментально и теоретически доказано, что тройную аналогию можно распространить на случай  $Pr \neq 1$  и  $Pr_D \neq 1$ , записав вместо выражения (4.12) равенство [11]:

$$St \cdot Pr^n = St_D \cdot Pr_D^n = \frac{C_f}{2}.$$

Для ламинарных течений  $n \approx 2/3$ , а для турбулентных  $n \approx 0,6$ .

Соотношение (4.12) часто называют *аналогией Рейнольдса*, согласно которой определив коэффициент трения  $C_f$  (например, при продольном омывании пластины ламинарным потоком  $C_f = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}$ ), можно найти численное значение коэффициента

теплоотдачи  $\alpha$  и массоотдачи  $\beta$ .

На практике можно, например, выполнить исследования процесса теплообмена и получить критериальное уравнение теплоотдачи, которое затем используют для расчета массообмена, и наоборот.

Например, при турбулентном течении газа в трубе безразмерное соотношение для теплоотдачи (уравнение Михеева) имеет вид:

$$Nu = 0,021 Re^{0,8} Pr^{0,43}. \quad (4.13)$$

Используя это соотношение, можно приближенно описать поток массы жидкости, которая полностью смачивает внутреннюю поверхность трубы, к турбулентному потоку газа, протекающему вдоль трубы, с помощью уравнения

$$\text{Sh} = 0,021 \text{Re}^{0,8} \text{Sc}^{0,43};$$

$$\text{Nu}_D = 0,021 \text{Re}^{0,8} \text{Pr}_D^{0,43}.$$

В этом случае жидкость переходит в газовую фазу в результате испарения, и уравнение (4.13) можно использовать для расчета скорости испарения жидкости.

В качестве второго примера рассмотрим задачу об испарении воды с поверхности озера. Для этого случая конвективный теплообмен описывается соотношением

$$\text{Nu} = 0,66 \text{Re}^{0,5} \text{Pr}^{0,33},$$

которое представляет собой соотношение для расчета теплоотдачи от плоской пластины в предположении ламинарного режима обтекания. Соответствующее соотношение для расчета ламинарного массообмена будет иметь вид:

$$\text{Sh} = 0,66 \text{Re}^{0,5} \text{Sc}^{0,33};$$

$$\text{Nu}_D = 0,66 \text{Pe}^{0,5} \text{Pr}_D^{0,33}.$$

Если в задаче о массообмене перенос осуществляется свободной конвекцией, выражение для коэффициента массообмена можно вывести на основе аналогичной задачи о теплообмене в условиях свободной конвекции. Известно, что теплообмен при свободной конвекции описывается соотношением

$$\text{Nu} = f(\text{Gr} \cdot \text{Pr}),$$

где Gr – число Грасгофа, характеризующее подъемную силу, возникающую в жидкости вследствие разделения плотностей.

Можно ожидать, что для массообмена при свободной конвекции будет справедливо соотношение в виде

$$\text{Sh} = f(\text{Gr}_D \cdot \text{Sc});$$

$$\text{Nu}_D = f(\text{Gr}_D \cdot \text{Pr}_D).$$

Аналогично для расчета массообмена можно использовать соответствующие критериальные уравнения для расчета теплоотдачи в однофазной жидкости.

В процессе сушки влажным воздухом, т. е. при испарении влаги во влажный воздух уравнение переноса массы пара записывается в виде

$$j_{\text{п}} = \rho\beta(d_1 - d_2) = \sigma(d_1 - d_2),$$

где  $d_1, d_2$  – начальное и конечное влагосодержание воздуха (сушильного агента),  $\text{кг}_{\text{влаги}} / \text{кг}_{\text{сух.возд.}}$ .

Если межфазная поверхность является непроницаемой для какого-либо компонента (например, для воздуха, который практически не растворяется в воде), то вблизи полунепроницаемой поверхности возникает поток смеси, называемый *стефановым потоком*.

Диффузионный поток воздуха поверхности воды компенсируется потоком смеси (воздуха и пара), направленным в противоположную сторону. Если обозначить скорость стефанового потока через  $v_{\text{с.п}}$ , тогда поток воздуха у поверхности воды равен нулю  $J_{\text{в.в}} = j_{\text{в}} + \rho_{\text{в}}v_{\text{с.п}} = 0$ , откуда скорость стефанового потока

$$v_{\text{с.п}} = -\frac{j_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}} = -\frac{j_{\text{п}}}{\rho_{\text{в}}}.$$

Так как  $J_{Bw} = 0$ , то плотность потока смеси  $J = J_{\Pi w} \in \text{const}$ .

Учитывая, что  $J = \rho \cdot w$ , а  $C_{\Pi} = \frac{\rho_{\Pi}}{\rho}$ , получаем

$$J_{\Pi w} = \frac{j_{\Pi w}}{C_{Bw}} = \frac{j_{\Pi w}}{1 - C_{\Pi w}}.$$

Отсюда скорость стефанового потока

$$v_{c.\Pi} = \frac{J_{\Pi w} - j_{\Pi w}}{\rho_{\Pi w}}, \text{ м/с.}$$

Приведенные выше зависимости могут использоваться для расчетов процессов испарения жидкости в парогазовую смесь и конденсации пара из парогазовой смеси. Рассмотрим применение этих зависимостей на практических примерах расчета процессов теплообмена.

### 4.3. Примеры расчетов процессов теплообмена

**Пример 1.** Плоское влажное изделие длиной  $l = 0,5$  м продольно омывается потоком сухого воздуха, для которого температура  $t_{\infty} = 20$  °С, давление  $p = 0,202$  МПа, скорость  $w_{\infty} = 1$  м/с. Температура изделия постоянна по всей длине  $t_w = 20$  °С. Найти коэффициент массоотдачи на конце платины при  $x = l$ .

**Решение.** Для нахождения коэффициента массоотдачи воспользуемся аналогией процесса тепло- и массообмена. Для процесса теплообмена при вынужденной конвекции жидкости безразмерный коэффициент теплоотдачи определяется зависимостью

$$\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr}),$$

где  $Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}$  – число Нуссельта;

$Re = \frac{w_{\infty} l}{\nu}$  – число Рейнольдса;

$Pr = \frac{\nu}{a}$  – число Прандтля.

Для массообмена вводится диффузионное число Нуссельта

$$Nu_D = \frac{\beta l}{D}$$

и диффузионное число Прандтля

$$Pr_D = \frac{\nu}{D}.$$

По аналогии функциональная зависимость числа  $Nu_D$  имеет вид

$$Nu_D = f(Re, Pr_D).$$

Для определения режима течения воздуха над поверхностью изделия найдем значение числа Рейнольдса при  $x = l = 0,5$  м с учетом зависимости коэффициента кинематической вязкости воздуха от давления (определяющая температура  $t_{\infty} = 20$  °С):

$$\nu_2 = \nu_1 \cdot \frac{p_1}{p_2} = 15,06 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{0,101}{0,202} = 7,53 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}};$$

$$Re_x = \frac{w_{\infty} \cdot x}{\nu_2} = \frac{1 \cdot 0,5}{7,53 \cdot 10^{-6}} = 6,64 \cdot 10^4 < Re_{кр} = 5 \cdot 10^5.$$

Следовательно, режим движения в пограничном слое на конце изделия будет ламинарное. Тогда для процесса массообмена можно записать критериальную зависимость вида

$$\text{Nu}_{Dx} = 0,33 \cdot \text{Re}_x^{0,5} \cdot \text{Pr}_D^{0,33}.$$

Коэффициент диффузии водяного пара в воздух определяется из выражения

$$D = D_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1,8} \cdot \frac{P_0}{P} = 0,216 \cdot 10^{-4} \left( \frac{293}{273} \right)^{1,8} \cdot \frac{0,101}{0,202} = 0,123 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Диффузионное число Прандтля

$$\text{Pr}_D = \frac{\nu}{D} = \frac{7,53 \cdot 10^{-6}}{0,123 \cdot 10^{-4}} = 0,61.$$

Диффузионное число Нуссельта

$$\text{Nu}_{Dx} = 0,33 \cdot (6,64 \cdot 10^4)^{0,5} \cdot 0,61^{0,33} = 72,24.$$

Тогда коэффициент массоотдачи будет

$$\beta = \frac{\text{Nu}_{Dx} \cdot D}{x} = \frac{72,24 \cdot 0,123 \cdot 10^{-4}}{0,5} = 1,85 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

**Ответ:** коэффициент массоотдачи на конце изделия ( $x = l = 0,5 \text{ м}$ )  $\beta = 1,85 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}}$ .

**Пример 2.** Над горизонтальной поверхностью воды движется воздух со скоростью  $v_1 = 3,1 \text{ м/с}$ . Температура поверхности воды –  $15 \text{ }^\circ\text{C}$ , воздуха вдали от поверхности –  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ , относительная влажность  $\varphi = 0,35$ . Длина поверхности воды в направ-

лении движения воздуха  $l = 0,1$  м. Определить коэффициент массоотдачи и количество воды, испаряющейся за 1 с на  $1 \text{ м}^2$  поверхности. Задачу решить с помощью уравнения подобия для массообмена.

**Решение.** Критерий Рейнольдса для потока воздуха

$$\text{Re}_f = \frac{wl}{\nu} = \frac{3,1 \cdot 0,1}{15 \cdot 10^{-6}} = 20\,584,$$

где  $\nu = 15,06 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$  – коэффициент кинематической вязкости сухого воздуха при  $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Так как характер движения воздуха в пограничном слое у поверхности воды ламинарный ( $\text{Re}_f < 10^5$ ), уравнение подобия, характеризующее процесс теплообмена в этом случае, имеет вид:

$$\text{Nu}_f = 0,66\text{Re}_f^{0,5}\text{Pr}_f^{0,33}.$$

Процесс массообмена будет описываться аналогичным уравнением:

$$\text{Nu}_D = 0,66\text{Re}_f^{0,5}\text{Pr}_D^{0,33}$$

или

$$\text{Sh} = 0,66\text{Re}_f^{0,5}\text{Sc}^{0,33},$$

где  $\text{Nu}_D = \text{Sh} = \frac{\beta l}{D}$ ,  $\text{Pr}_D = \text{Sc} = \frac{\nu}{D}$ .

Для вычисления коэффициента диффузии воды в воздух можно использовать формулу

$$D = 2,31 \cdot 10^{-5} \left( \frac{p_0}{p} \right) \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1,81},$$

где  $p_0 = 101,3$  кПа;

$p$  – давление воздуха при заданных условиях, кПа;

$T$  – температура воздуха при заданных условиях, К;

$T_0 = 273$  К.

Коэффициент диффузии

$$D = 2,31 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{101,3 \cdot 10^3}{101,3 \cdot 10^3} \cdot \left( \frac{293}{273} \right)^{1,81} = 2,63 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Критерии Шервуда и Шмидта для процесса диффузии:

$$Sc = \frac{15,06 \cdot 10^{-6}}{2,63 \cdot 10^{-5}} = 0,573;$$

$$Sh = 0,66 \cdot 20584^{0,5} \cdot 0,573^{0,3} \cdot 3 = 78,8.$$

Коэффициент массообмена, аналогичный коэффициенту теплоотдачи,

$$\beta = \frac{Sh \cdot D}{l} = \frac{78,8 \cdot 2,63 \cdot 10^{-5}}{0,1} = 20,7 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}.$$

Количество воды, испарившееся на 1 м<sup>2</sup> поверхности,

$$j_{\Pi} = \beta (\rho_{\Pi w} - \rho_{\Pi \infty}) = \beta \left( \frac{p_{\Pi}''}{R_{\Pi} T_{\Pi}} - \frac{p_{\Pi}}{R_{\Pi} T_f} \right),$$

где  $p_{\Pi}''$ ,  $p_{\Pi}$  – парциальное давление насыщенного водяного пара соответственно в воздухе у поверхности воды и в воздухе, удаленном от поверхности воды, Па;

$R_{\Pi}$  – удельная газовая постоянная водяного пара:

$$R_{\Pi} = \frac{8314}{18}, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

По табличным данным для насыщенного пара находим: при  $t = 15\text{ }^\circ\text{C}$   $p''_{\text{п}} = 1,71\text{ кПа}$ ; при  $t = 20\text{ }^\circ\text{C}$   $p''_{\text{пл}} = 2,33\text{ кПа}$ . Давление пара в воздухе вдали от поверхности воды  $p_{\text{п}} = p''_{\text{п}}$ ,  $\varphi = 2,33 \cdot 0,35 = 0,815\text{ кПа}$ .

Количество испарившейся воды

$$j_{\text{п}} = \frac{20,7 \cdot 10^{-3} \cdot 18}{8314} \left( \frac{1,71}{288} - \frac{0,815}{293} \right) 10^3 = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

**Ответ:** количество воды, испарившейся за одну секунду с поверхности  $1\text{ м}^2$   $j_{\text{п}} = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ .

**Пример 3.** Решить предыдущую задачу, используя соотношение Льюиса:  $\sigma = \frac{\alpha}{c_p}$ .

**Решение.** Количество испарившейся воды за одну секунду с  $1\text{ м}^2$  поверхности будет:

$$j = \sigma(d_2 - d_1).$$

Для определения коэффициента испарения  $\sigma$  из соотношения Льюиса находим коэффициент теплоотдачи. Физические свойства сухого воздуха при  $t = 20\text{ }^\circ\text{C}$  будут:  $\text{Pr}_f = 0,703$ ,  $\lambda_f = 0,0259\text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ .

Вычислим критерий Нуссельта:

$$\text{Nu}_f = 0,66 \cdot 20584^{0,5} \cdot 0,703^{0,33} = 84,3.$$

Коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = \frac{\text{Nu}_f \cdot \lambda_f}{l} = \frac{84,3 \cdot 0,0259}{0,1} = 21,9 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}.$$

Влагосодержание воздуха при  $t = 20\text{ }^\circ\text{C}$  и  $\varphi = 0,35$

$$d_1 = 0,622 \frac{p_{\text{п}}}{p - p_{\text{п}}} = 0,622 \frac{0,815}{101,3 - 0,815} = 5,22 \cdot 10^{-3} \text{ кг/кг}_{\text{сух.возд.}}$$

Удельная теплоемкость влажного воздуха

$$c_p = 1 + 1,89 \cdot d_1 = 1 + 1,89 \cdot 5,04 \cdot 10^{-3} = 1,01 \text{ кДж/кг} \cdot \text{К} = 1010 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}.$$

Коэффициент испарения

$$\sigma = \frac{\alpha}{c_p} = \frac{21,9}{1010} = 21,7 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

Влагосодержание насыщенного воздуха у поверхности воды при  $t = 15\text{ }^\circ\text{C}$  будет

$$d_2 = 0,622 \cdot \frac{p_{\text{п}}''}{p - p_{\text{п}}''} = 0,622 \cdot \frac{1,71}{101,3 - 1,71} = 10,7 \cdot 10^{-3} \text{ кг/кг}_{\text{сух.возд.}}$$

Количество испарившейся воды

$$j = 21,7 \cdot 10^{-3} (10,7 \cdot 10^{-3} - 5,04 \cdot 10^{-3}) = 1,23 \cdot 10^{-4} \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

Плотность влажного воздуха в пограничном слое находим как среднюю для состояний воздуха вдали от воды ( $t = 20\text{ }^\circ\text{C}$  и  $\varphi = 0,35$ ) и у поверхности воды ( $t = 15\text{ }^\circ\text{C}$  и  $\varphi = 1$ ). Плотность сухого воздуха при  $t = 20\text{ }^\circ\text{C}$   $\rho_{20}^c = 1,205 \text{ кг/м}^3$ ; при  $t = 15\text{ }^\circ\text{C}$   $\rho_{15}^c = 1,226 \text{ кг/м}^3$ .

$$\begin{aligned} \rho &= 0,5(\rho + \rho'') = 0,5 \left( \rho_{20}^c \left( \frac{1+d_1}{1+1,61d_1} \right) + \rho_{15}^c \left( \frac{1+d_2}{1+1,61d_2} \right) \right) = \\ &= 0,5 \left( 1,205 \left( \frac{1+5,04 \cdot 10^{-3}}{1+1,61 \cdot 5,04 \cdot 10^{-3}} \right) + 1,226 \left( \frac{1+10,7 \cdot 10^{-3}}{1+1,61 \cdot 10,7 \cdot 10^{-3}} \right) \right) = \\ &= 1,21 \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

Коэффициент массообмена  $\beta = \frac{\sigma}{\rho} = \frac{21,7 \cdot 10^{-3}}{1,21} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$ .

**Ответ:** расхождение в величинах  $\beta$  и  $j$  при вычислении первым и вторым способами составляет 13–14 %. Оно обусловлено тем, что отношение  $\frac{D}{a} \neq 1$ , тогда как при решении

задач первым способом число Льюиса принималось  $\frac{D}{a} = 1$ .

**Пример 4.** Найти коэффициент массоотдачи в процессе высушивания материала воздухом под давлением 780 мм рт. ст., движущегося со скоростью 1,8 м/с над поверхностью испарения, длина которой  $l = 0,6$  м. Показания психрометра:  $t_c = 32$  °С,  $t_m = 18$  °С. Принять коэффициент диффузии  $D_0 = 21,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$  при нормальных физических условиях [13].

**Решение.** Коэффициент диффузии  $D$  газов и паров в зависимости от давления  $P$  и температуры  $t$  определяется по формуле

$$\begin{aligned} D &= D_0 \cdot \frac{P_0}{P} \left( \frac{273+t}{273} \right)^{1+n_1} = 21,6 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{760}{780} \cdot \left( \frac{273+32}{273} \right)^{1+0,8} = \\ &= 25,7 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, \end{aligned}$$

где  $n_1 = 0,8$  для смеси водяного пара и воздуха.

Для определения диффузионного числа Прандтля методом интерполяции находим коэффициент кинематической вязкости при  $t_c = 32 \text{ }^\circ\text{C}$ :

$$\nu = 16,4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Тогда

$$\text{Pr}_D = \frac{\nu}{D} = \frac{16,4 \cdot 10^{-6}}{25,7 \cdot 10^{-6}} = 0,64.$$

$$\text{Число Re} = \frac{\omega \cdot l}{\nu} = \frac{1,8 \cdot 0,6}{16,4 \cdot 10^{-6}} = 66656.$$

Коэффициент массоотдачи  $\beta$  в процессе сушки определяют из критериального уравнения

$$\text{Nu}_D = C \cdot \text{Re}^n \cdot \text{Pr}_D^{0,33} \cdot \text{Gu}^{0,135},$$

$$\text{где } \text{Nu}_D = \frac{\beta \cdot l}{D};$$

$l$  – длина поверхности испарения в направлении движения сушильного агента;

$t_c$  – температура сушильного агента.

Значения  $C$  и  $n$  определяются в зависимости от числа Re:

Re	1–200	200–6000	6000–70 000
$C$	0,9	0,87	0,35
$n$	0,5	0,54	0,65

В нашем случае  $C = 0,35$ ,  $n = 0,65$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{Nu}_D &= 0,35 \cdot \text{Re}^{0,65} \cdot \text{Pr}_D^{0,33} \cdot \text{Gu}^{0,135} = \\ &= 0,35 \cdot 66\,656^{0,65} \cdot 0,64^{0,33} \cdot 0,046^{0,135} = 273,3, \end{aligned}$$

здесь число Гухмана

$$\text{Gu} = \frac{T_c - T_m}{T_c} = \frac{32 - 18}{273 + 32} = 0,046.$$

По определению  $\text{Nu}_D = \frac{\beta \cdot l}{D}$ . Отсюда находим коэффициент массоотдачи:

$$\beta = \frac{\text{Nu}_D \cdot D}{l} = \frac{272,3 \cdot 25,5 \cdot 10^{-6}}{0,6} = 11,7 \cdot 10^{-3} \text{ м/с.}$$

**Ответ:** коэффициент массоотдачи при высушивании материала  $\beta = 11,7 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$ .

**Пример 5.** Капля воды находится во влажном воздухе. Парциальное давление водяного пара  $p_{\text{п}} = 7,01 \cdot 10^4 \text{ Па}$ , а полное давление составляет  $p = 9,01 \cdot 10^4 \text{ Па}$ . В данный момент времени диаметр капли  $d = 2 \text{ мм}$ , а ее температура  $t_w = 86 \text{ }^\circ\text{C}$ . Найти плотность диффузионного потока  $j_{\text{п}}$ , плотность полного потока пара  $J_{\text{п}}$ , скорость стефанового потока  $v_{\text{с.п}}$ , а также плотность теплового потока  $q_w$  на поверхности капли. Движением капли относительно воздуха пренебречь и считать, что  $\text{Le} = 1$ .

**Решение.** При давлении  $7,01 \cdot 10^4 \text{ Па}$  температура насыщения  $t_c = 90 \text{ }^\circ\text{C}$  и плотность  $\rho_{\text{п}\infty} = 0,423 \text{ кг/м}^3$ .

Плотность воздуха при его парциальном давлении  $p_{\text{в}} = p - p_{\text{п}} = 9,01 \cdot 10^4 - 7,01 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^4 \text{ Па}$  и температуре  $90 \text{ }^\circ\text{C}$

$$\rho_{\text{в}\infty} = \frac{p_{\text{в}}}{R_{\text{в}} T_{\text{в}}} = \frac{2 \cdot 10^4}{287 \cdot 363} = 0,192 \text{ кг/м}^3.$$

Таким образом, плотность смеси (влажного воздуха)

$$\rho_{\infty} = \rho_{\Pi \infty} + \rho_{B \infty} = 0,423 + 0,192 = 0,615 \text{ кг/м}^3.$$

Массовая концентрация водяного пара вдали от капли будет

$$c_{\Pi \infty} = \frac{\rho_{\Pi \infty}}{\rho_{\infty}} = \frac{0,423}{0,615} = 0,687.$$

Массовая концентрация сухого воздуха вдали от капли  $c_{B \infty} = 1 - 0,687 = 0,313$ . При  $t_s = 86 \text{ }^\circ\text{C}$   $\rho_{\Pi w} = 0,366 \text{ кг/м}^3$ , а для воздуха  $\rho_{B w} = 0,194 \text{ кг/м}^3$ .

Тогда

$$c_{\Pi w} = \frac{p_{\Pi w}}{p_w} = \frac{0,366}{0,366 + 0,194} = 0,654.$$

Коэффициент теплопроводности смеси (влажного воздуха) определяем по выражению

$$\lambda = \frac{\lambda_1 c_{\Pi}}{c_{\Pi} + c_B \psi_{1,2}} + \frac{\lambda_2 c_B}{c_B + c_{\Pi} \psi_{2,1}},$$

где  $\lambda_{\Pi}$ ,  $\lambda_B$  – коэффициенты теплопроводности пара и сухого воздуха соответственно

$$\psi_{1,2} = \frac{M_1/M_2}{\sqrt{8} \left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right)^{0,5}} \left[ 1 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{0,5} \cdot \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{0,25} \right]^2;$$

$$\psi_{2,1} = \frac{M_2/M_1}{\sqrt{8} \left(1 + \frac{M_2}{M_1}\right)^{0,5}} \left[ 1 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{0,5} \cdot \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{0,25} \right]^2.$$

При температуре  $t_c = 90 \text{ }^\circ\text{C}$  коэффициент динамической вязкости пара  $\mu_1 = 11 \cdot 10^{-6} \text{ Па}\cdot\text{с}$ , а коэффициент динамической вязкости сухого воздуха  $\mu_2 = 21,5 \cdot 10^{-6} \text{ Па}\cdot\text{с}$ . Молекулярная масса водяного пара  $M_1 = 18,014 \text{ кг/кМоль}$ , а молекулярная масса воздуха  $M_2 = 28,97 \text{ кг/кМоль}$ . Тогда

$$\Psi_{1,2} = \frac{18,014/28,97}{\sqrt{8} \left(1 + \frac{18,014}{28,97}\right)^{0,5}} \left[ 1 + \left(\frac{11,0}{21,5}\right)^{0,5} \cdot \left(\frac{28,97}{18,014}\right)^{0,25} \right]^2 = 0,533;$$

$$\Psi_{2,1} = \frac{28,97/18,014}{\sqrt{8} \left(1 + \frac{28,97}{18,014}\right)^{0,5}} \left[ 1 + \left(\frac{21,5}{11,0}\right)^{0,5} \cdot \left(\frac{18,014}{28,97}\right)^{0,25} \right]^2 = 1,769.$$

При  $t_c = 90 \text{ }^\circ\text{C}$  коэффициент теплопроводности пара  $\lambda_{\text{п}} = 2,35 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ , а сухого воздуха  $\lambda_{\text{в}} = 3,13 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ . Тогда

$$\lambda = \frac{2,35 \cdot 10^{-2} \cdot 0,687}{0,687 + 3,13 \cdot 10^{-2} \cdot 0,553} + \frac{3,13 \cdot 10^{-2} \cdot 0,313}{0,313 + 0,687 \cdot 1,769} = 2,52 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}.$$

Для капли шаровидной формы предельное значение числа Нуссельта

$$\text{Nu} = \frac{\alpha d}{\lambda} = 2.$$

Для условий задачи  $\text{Nu} = \text{Nu}_D = 2$ , коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = \frac{\text{Nu} \cdot \lambda}{d} = \frac{2 \cdot 2,52 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3}} = 25,18 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}),$$

а коэффициент массоотдачи

$$\beta = \frac{\text{Nu}_D \cdot D}{d} = \frac{2 \cdot 0,404 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-3}} = 40,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}/\text{с}.$$

Плотность диффузионного потока массы будет

$$\begin{aligned} j_{\Pi w} &= \beta \cdot \rho \cdot (c_{\Pi \infty} - c_{\Pi w}) = 40,4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,615 \cdot (0,687 - 0,654) = \\ &= 8,22 \cdot 10^{-4} \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}). \end{aligned}$$

Плотность полного (диффузионного и конвективного) потока массы будет

$$J_{\Pi w} = \frac{j_{\Pi w}}{1 - c_{\Pi w}} = \frac{8,22 \cdot 10^{-4}}{1 - 0,654} = 23,76 \cdot 10^{-4} \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

Скорость стефанового потока

$$v_{\text{с.п}} = \frac{J_{\Pi w} - j_{\Pi w}}{\rho_{\Pi w}} = \frac{23,76 \cdot 10^{-4} - 8,22 \cdot 10^{-4}}{0,366} = 4,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}/\text{с}.$$

Плотность теплового потока на поверхности капли

$$q_w = \alpha (t_{\infty} - t_w) = 25,18 (90 - 86) = 100,72 \text{ Вт}/\text{м}^2.$$

**Ответ:**  $j_{\Pi w} = 8,22 \cdot 10^{-4} \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}); J_{\Pi w} = 23,76 \cdot 10^{-4} \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с});$   
 $v_{\text{с.п}} = 4,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}/\text{с}; q_w = 100,72 \text{ Вт}/\text{м}^2.$

## 5. РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим практическую задачу, используемую в инженерных расчетах, – распространение тепла в пластине с течением времени.

Определить нестационарные температурные поля в неограниченной пластине с теплофизическими свойствами:  $\rho = 2,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda = 1,55 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$ ,  $c = 0,837 \text{ кДж/кг} \cdot \text{К}$ , если на одной поверхности, при  $x = L$ , задано изменение температуры со временем  $T(x, \tau) = \beta\tau$ , где  $\beta = 0,2 \text{ }^\circ\text{C/с}$ , а другая поверхность теплоизолированная. Толщина пластины:  $L = 10 \text{ см}$ . Начальная температура всей пластины равна  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Для начала сформулируем задачу в дифференциальном виде. Так как распространение тепла фактически происходит по одной координатной оси, то уравнение теплопроводности будет одномерным:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad (5)$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности, определяется теплофизическими свойствами тела:

$$a = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Начальные условия:

$$T(x, 0) = 0.$$

Граничные условия:

$$T(L, \tau) = 0,2\tau,$$

$$T(0, \tau) = 0.$$

Выражение (5) – описывает теплоизолированную поверхность, где нулевой слой взят за пределами пластины и на этом слое температура всегда равна 0 °С.

Решение данной задачи аналитическими методами является нецелесообразным, так как является довольно сложным и громоздким, а также сложно поддается программированию на ЭВМ.

Например, решение задачи методом разделения переменных является громоздким:

$$T(x, \tau) = \frac{2}{L} \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{a(2n+1)\pi^2 t}{4L}\right) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \times \left( \frac{(2n+1)\pi a(-1)^n}{2L} \cdot \int_0^L 0,2t \exp \frac{a(2n+1)\pi^2 t}{4L} dx \right).$$

Решение в интегральной форме имеет менее громоздкий результат, но минус такого решения заключается в том, что довольно сложно составить программу нахождения оригинала по изображению.

Для соблюдения поставленных критериев решения удобнее воспользоваться численными методами решения, в частности *методом конечных разностей (МКР)*.

Составим задачу в конечно-разностном виде (по классической явной схеме). Тогда дифференциальное уравнение теплопроводности и краевые условия перепишем следующим образом:

$$\frac{\vartheta_{i,k+1} - \vartheta_{i,k}}{l} = a \frac{\vartheta_{i+1,k} - 2\vartheta_{i,k} + \vartheta_{i-1,k}}{h^2};$$

$$\vartheta_{i,0} = 0;$$

$$\vartheta_{L,k} = 0, 2k;$$

$$\vartheta_{0,k} = 0$$

при числе Фурье  $Fo \leq 1/2$ , где  $Fo = \frac{a\tau}{h^2}$ .

Данный метод обычно требует определенного количества однообразных вычислительных операций, поэтому для наиболее быстрого решения используют ЭВМ. Ниже приведен текст программы.

*Программа Teplopr* – написана на языке программирования Pascal и работает по явной схеме. Данная программа довольно проста в применении.

После процедуры ввода данных происходит непосредственный расчет температурного поля пластины и выдаются табличные данные на экран.

Для различных задач может быть реализовано большое разнообразие граничных условий.

Для примера можно ввести следующие данные:  $dx = 1$  ( $h = 1$ ),  $dt = 100$  ( $l = 100$ ), тогда  $kF = 0.3$  (т. е.  $Fo < 1/2$ ), и мы получаем приемлемый результат (см. таблицу 1). Дальнейшие расчеты (после получасового промежутка), при постоянном граничном условии стороны  $x = L$ , показали, что в процессе нагревания пластины происходит ее равномерный нагрев, и она выходит на стационарный режим.

Таблица 1 – Температурное поле пластины, °С

$x, \text{ см}$ $\tau, \text{ с}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	20
200	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,68	40
300	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,14	4,77	60
400	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,52	9,03	80
500	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05	1,19	14,28	100
600	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,15	2,2	20,4	120
700	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,31	3,56	27,25	140
800	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,56	5,28	34,75	160
900	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,08	0,91	7,36	42,81	180
1000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,14	1,38	9,8	51,37	200

## Окончание таблицы 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,24	1,99	12,59	60,38	220
1200	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,37	2,73	15,72	69,8	240
1300	0,00	0,00	0,00	0,01	0,06	0,54	3,63	19,18	79,57	260
1400	0,00	0,00	0,00	0,01	0,1	0,76	4,68	22,96	89,68	280
1500	0,00	0,00	0,00	0,02	0,15	1,03	5,88	27,03	100,08	300
1600	0,00	0,00	0,00	0,03	0,21	1,37	7,26	31,4	110,76	320
1700	0,00	0,00	0,00	0,04	0,29	1,76	8,79	36,05	121,69	340
1800	0,00	0,00	0,01	0,06	0,39	2,33	10,5	40,96	132,86	360

### Программа расчета распространения тепла в пластине

```

{***Распространение тепла в пластине***}
Program Terplor;
uses crt;
type St=array [0..20] of real;
const   p=2200;k=1.55;c=0.837;t=1800;l=10; {теплофизические
свойства}
var F:file of real; {определение файла для записи данных}
V,a,kF,dx,dt,edt,edx,w:real;
i,j,n,m:integer;
U,U1:St;
ok:boolean;

begin
clrscr;
a:=k/(c*p); {<-коэффициент температуропроводности}
writeln('a=',a:2:3);

{*Ввод данных*}
Repeat
ok:=false;
write('Введите dx=');

```

```

readln(dx);
write('Введите dt=');
readln(dt);
kF:=(a*dt/sqr(dx));{расчет числа Фурье}

if kF<=0.5 then begin
writeln('Критерий Фурье выполняется');
ok:=true;
end

else begin
writeln('Критерий Фурье не выполняется');
writeln('Для продолжения введите: 1');
writeln('Повторный ввод введите: 2');
read(w);
if w=1 then ok:=true
else begin
edt:=dt-0.5*sqr(dx)/a;
edx:= sqrt(a*dt/0.5)-dx;
writeln('Необходимо уменьшить dt на ',edt:2:3);
writeln('или увеличить dx на ',edx:2:3);
end;
end;
until ok=true;

writeln('kF=',kF);

{**Расчет количества шагов по t и по x**}
n:=trunc(l/dx);
m:=trunc(t/dt);

{***Начальные условия***}
for i:=0 to n do
U[i]:=0;

```

```
assign(F,'c:/1.dat');{связь программного имени файла  $F$  с дис-  
ковым 1.DAT}
```

```
{****Разностные схемы****}  
rewrite(F);{открытие файла для записи}  
for j:=1 to (m+1) do  
begin  
for i:=1 to n do  
write(F,U[i]);  
for i:=1 to (n-1) do  
 $U1[i]:=kF*(U[i+1]-2*U[i]+U[i-1])+U[i]$ ;  
 $U1[n]:=20*j$ ;{<-краевые условия}  
for i:=1 to n do  
 $U[i]:=U1[i]$ ;  
end;  
close(F); {закрытие файла}
```

```
{*****Вывод данных*****}  
reset(F);{открытие файла для чтения}  
for j:=1 to (m+1) do  
begin  
for i:=1 to n do  
begin  
read(F,V);  
write(' ',V:5:2);  
end;  
writeln;  
end;  
close(F);{закрытие файла}  
readln;  
end.
```

## ЛИТЕРАТУРА

1. Исаченко, В. П. Теплопередача : учеб. для теплоэнергетических специальностей втузов / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Энергоиздат, 1981. – 417 с. : ил.

2. Тепло- и массообмен : учебное пособие для вузов по строительным, энергетическим и машиностроительным специальностям : в 2 ч. / Б. М. Хрусталева [и др.] ; под общ. ред. А. П. Несенчука. – Минск : БНТУ, 2007–2009.

3. Есьман, Р. И. Термодинамика, теплопередача и двигатели внутреннего сгорания : учебное пособие для студентов вузов / Р. И. Есьман, Б. Е. Железко, В. М. Адамов. – Минск : Вышэйшая школа, 1985. – 271 с. : ил.

4. Краснощеков, Е. А. Задачник по теплопередаче : учебное пособие для теплоэнергетических специальностей вузов / Е. А. Краснощеков, А. С. Сукомел. – 4-е изд., перераб. – М. : Энергия, 1980. – 287 с. : ил.

5. Теория теплообмена. Терминология. – Вып. 83. – М. : Наука, 1971. – 42 с.

6. Есьман, Р. И. Термодинамика и теплопередача. Методическое пособие / Р. И. Есьман, Н. Е. Волкова. – Минск : БПИ, 1980. – 47 с.

7. Есьман Р. И. Термодинамика и теплопередача : методические указания и контрольные задания / Р. И. Есьман, Н. Е. Волкова. – Минск : БПИ, 1985. – 34 с.

8. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1985.

9. Брюханов О. Н. Тепломассообмен : учеб. / О. Н. Брюханов, С. Н. Шевченко. – М. : ИНФРА-М, 2012. – 464 с.

10. Кудинов, А. А. Тепломассообмен : учебное пособие / А. А. Кудинов. – М. : ИНФРА-М, 2012. – 375 с.

11. Цветков, Ф. Ф. Тепломассообмен : учебное пособие для вузов / Ф. Ф. Цветков, Б. А. Григорьев. – М. : МЭИ, 2009. – 550 с.

12. Цветков, Ф. Ф. Задачник по тепломассообмену : учебное пособие для вузов / Ф. Ф. Цветков, Р. В. Киримов, В. И. Величко. – М. : МЭИ, 2008. – 196 с.

13. Примеры и задачи по тепломассообмену : учебное пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб. : Лань. – 2011. – 256 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
1. Общие методические указания.....	5
2. Системы дифференциальных уравнений конвективного тепломассообмена.....	7
3. Решение задачи нестационарной теплопроводности многослойных тел.....	16
4. Основы массообмена .....	24
4.1. Основные понятия и определения массопереноса.....	24
4.2. Аналогия процессов тепло- и массообмена.....	33
4.3. Примеры расчетов процессов теплообмена .....	42
5. Расчет температурного поля пластины .....	55
Литература.....	61

Учебное издание

## **СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕПЛОМАССОБМЕНА**

Методические указания и типовые задачи  
для студентов специальности 1-43 01 05  
«Промышленная теплоэнергетика»

Составители:

**ЕСЬМАН** Руслан Иосифович  
**САПУН** Николай Николаевич  
**АЙДАРОВА** Зоя Борисовна и др.

Редактор *Т. А. Зезюльчик*  
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 21.02.2014. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.  
Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 2,91. Тираж 50. Заказ 483.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.