

тодом значениями коэффициентов b_i . На рис. 2 представлены экспериментальные точки, огибающая (пунктирная кривая) и решение дифференциального уравнения для пары трения сталь–фторопласт для случая $l_c = R$ и $m = 1,5$ кг ($b_0 = 6,18 \cdot 10^{-4}$, $b_1 = 6,72$, $b_2 = -3406$; $k_{cp} = 3,08 \cdot 10^{-3}$, $k_c = 3,22 \cdot 10^{-3}$). На рис. 3 представлена зависимость коэффициента μ от скорости и значение коэффициента k_c во всем диапазоне изменения линейной скорости качения в данном опыте.

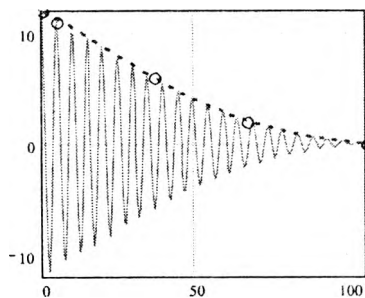


Рис. 2

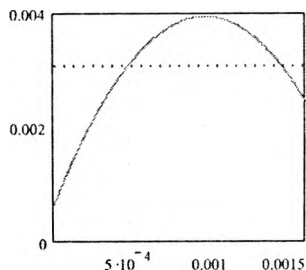


Рис. 3

Данный метод может стать основой для нового ГОСТа измерения трения качения, а также явиться новым, весьма чувствительным и точным инструментом для исследования особенностей взаимодействия поверхностей тел при их относительном движении.

Литература

1. Ахматов А.С. Молекулярная физика граничного трения. М.: ГИФМЛ, 1963.
2. ГОСТ 27640-88.
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.

ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ НА ТОЧНОСТЬ МАЯТНИКОВОГО ГРАВИМЕТРА

Джилавдари И.З.,

Белорусская государственная политехническая академия, г. Минск

Основным элементом маятникового гравиметра является физический маятник. Точность измерения ускорения свободного падения g гравиметром определяется, главным образом, стабильностью частоты ω_0 или периода T_0 свободных колебаний маятника. Соответствующие погрешности связаны между собой соотношением

$$\frac{\Delta g}{g} = 2 \frac{\Delta \omega_2}{\omega_0} = -2 \frac{\Delta T_0}{T_0}. \quad (1)$$

В современных относительных маятниковых гравиметрах $\Delta g/g$ составляет $(2-4) \cdot 10^{-8}$ [1].

Физический маятник представляет собой нелинейную динамическую систему. Эта нелинейность проявляется в зависимости периода колебаний от амплитуды a . В первом приближении эту зависимость учитывают, вводя поправку в частоту или период по формулам:

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{a^2}{16} \right), \quad T = T_0 \left(1 + \frac{a^2}{16} \right). \quad (2)$$

Поскольку амплитуда a уменьшается вследствие трения, то при учете этой поправки в расчетах берут среднее значение a , т.е. частоту и период определяют по формулам:

$$\omega = \omega_0 \left[1 - \frac{(a_0 + a)^2}{64} \right] = \omega_0 \left[1 - \frac{\langle a \rangle^2}{16} \right], \quad T = T_0 \left[1 + \frac{\langle a \rangle^2}{16} \right]. \quad (3)$$

Опорой маятников является ребро призмы, чаще всего выполненной из агата, опирающееся на твердую плоскую поверхность [1-3]. Длина призмы равна 3-6 см. Радиус закругления ребра примерно равен 0,05 мм [2]. Рабочий объем относительных гравиметров обычно вакуумируют. Поэтому, в силу малости толщины опоры и низкого давления воздуха, трение в маятнике мало. Считается, что сила трения пропорциональна скорости качаний. В этом случае уменьшение амплитуды происходит по закону $a = a_0 \exp(-\sigma_1 t)$ [1-4].

Согласно существующей теории физического маятника, считается, что малое трение может повлиять на период колебаний маятника лишь во втором порядке малости, когда $\frac{\Delta T}{T_0} \approx -\frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2}{\omega_0^2}$ (здесь T_0 и $\omega_0 = 2\pi/T_0$ — период и частота маятника при отсутствии трения). Отсюда делают вывод, что в гравиметре влияние трения должно быть незначительным [2].

Однако приведенная оценка справедлива лишь в случае линейных колебаний. Ниже показано, что учет трения должен привести к изменению формул (3). Здесь должна быть введена еще одна поправка — поправка за трение.

Недостаточность поправок по формулам (3) была замечена на опыте. Оказалось, что существует весьма заметное остаточное влияние амплитуды, индивидуальное для каждого маятника [1]. В [1] это связывается с влиянием формы ребра опорной призмы.

Существует и вторая проблема. Трение — одно из самых нестабильных явлений. В частности, исследования показали [3], что в двух опытах по измерению g при среднем полном периоде колебаний $T \approx 1$ сек величина коэффициента δ_1 составила $1,014 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ и $1,212 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$. В этих опытах амплитуда колебаний уменьшалась, примерно, от 3200 угл.с ($0,89^\circ$) до 2220 угл.с ($0,62^\circ$) и до 2070 угл.с ($0,575^\circ$). Отсюда следует, что нестабильность затухания, выражаемая изменением коэффициента δ_1 лишь в двух опытах, составила 16%.

Возникает вопрос, как нестабильность трения маятника может повлиять на стабильность его периода и, в конечном свете, на погрешность гравиметра.

В данном докладе рассмотрено влияние сухого (сила трения не зависит от скорости), линейного (сила трения пропорциональна скорости) и квадратичного (сила трения пропорциональна квадрату скорости) трения на погрешность гравиметра. В качестве модели гравиметра взят физический маятник с фиксированной осью вращения. Дифференциальное уравнение колебаний этого маятника имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \varphi = -U\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \text{sign}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right), \quad (4)$$

где $U\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$ — функция, вид которой определяется выбранной моделью зависимости силы трения от скорости. Это уравнение — нелинейное. Его можно решить, используя асимптотический метод [4]. В первом приближении этого метода решение ищут в виде

$$\varphi(t) = a(t) \cos \psi(t), \quad (5)$$

а амплитуду $a(t)$ и фазу $\psi(t)$ находят, решая систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= f(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 - \frac{a^2}{16}, \end{aligned} \quad (6)$$

где вид функции $f(a)$ зависит от модели трения. Получив $a(t)$ из первого уравнения в (6), частоту колебаний ω находят, интегрируя второе уравнение

$$\psi(t) = \omega_0 t - \frac{\omega_0}{16} \int a^2(t) dt + \text{const}. \quad (7)$$

Если начальное значение фазы $\psi(0) = 0$, то, записав $\psi(t)$ в виде $\psi(t) = \omega t$, из (7) получим следующее выражение для вычисления частоты ω с учетом поправки на амплитуду и трение

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{16t} \int_0^t a^2(t) dt \right) = \omega_0 \left(1 - \frac{\langle a^2 \rangle}{16} \right). \quad (8)$$

В расчетах частоты или периода по этой формуле следует учитывать конечное значение амплитуды a , поскольку данная поправка обусловлена изменением фазы колебаний, которое накапливается в процессе колебаний маятника.

Рассмотрим частные модели зависимости силы трения от скорости.

1. Сухое (кулоново) трение. В этом случае зависимость амплитуды колебаний от времени имеет вид [3]

$$a(t) = a_0 - \sigma_0 t. \quad (9)$$

Считая, что при $t = 0$, $\varphi = a(0) = a_0$ и тогда $\psi_0 = 0$, получим

$$\omega = \omega_0 \left[1 - \frac{1}{16} \left(a_0^2 - a_0 \sigma_0 t + \frac{\sigma_0^2 t^2}{3} \right) \right]. \quad (10)$$

Из (9) и (10), обозначив $x = a/a_0$, найдем, что относительное изменение частоты ω , обусловленное и нелинейностью, и трением, имеет вид

$$q(x) = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{a_0^2}{16} \left[x + \frac{(1-x)^2}{3} \right] = q_0(x). \quad (11)$$

Функция $q(x)$ представляет собой поправку к частоте или периоду колебаний за амплитуду:

$$\omega = \omega_0 [1 + q(x)], \quad T = T_0 [1 - q(x)]. \quad (12)$$

В общем случае нестабильность собственной частоты гравиметра, обусловленная нестабильностью трения, может быть выражена зависимостью изменения функции $q(x)$ от изменения коэффициента трения σ

$$\delta q(x) = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \sigma} \Delta\sigma = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\sigma \partial x}{\partial \sigma} \frac{\Delta\sigma}{\sigma} = p(x) \mu(x) = \chi(x) \frac{\Delta\sigma}{\sigma}. \quad (13)$$

Здесь $p(x) = \frac{\partial q}{\partial x}$, $\mu(x) = \sigma \frac{\partial x}{\partial \sigma}$. В (13) нестабильность трения характеризуется относительной величиной $\frac{\Delta\sigma}{\sigma}$, которая не зависит от способа определения коэффициента σ и его размерности.

Функцию $\chi(x) = p(x)\mu(x)$ будем называть коэффициентом неустойчивости. В рассматриваемом случае сухого трения $\sigma = \sigma_0$ и $p(x) = -\frac{a_0^2}{48}(2x+1)$, $\mu(x) = -(1-x)$, так что

$$\chi(x) \equiv \chi_0(x) = \frac{1}{48}(2x+1)(1-x). \quad (14)$$

Отсюда и из (13) для относительной неустойчивости частоты имеем

$$\delta q(x) \equiv \delta q_0(x) = a_0^2 \frac{(2x+1)(1-x)}{48} \frac{\Delta\sigma_0}{\sigma_0}. \quad (15)$$

2. Линейное трение. В этом случае зависимость амплитуды колебаний от времени имеет вид $a = a_0 \exp(-\sigma_1 t)$. Проводя вычисления как и выше, найдем

$$q_1(x) = \frac{1-x^2}{32\ln x}, \quad \chi_1(x) = -a_0^2 \frac{2x^2 \ln x - x^2 + 1}{32\ln x}. \quad (16)$$

Период колебаний будет определяться по второй из формул (12), где $q(x) = q_1(x)$. Функция $q_1(x)$ совпадает с аналогичной формулой, полученной в [2] другим способом.

3. Квадратичное трение. В этом случае зависимость амплитуды колебаний от времени имеет вид $a = \frac{a_0}{1+\sigma_2 t}$ [3]. Как и выше, найдем, что

$$q_2(x) = -\frac{x}{16}, \quad \chi_2(x) = a_0^2 \frac{x(1-x)}{16}. \quad (17)$$

Период колебаний будет определяться по второй из формул (12), где $q(x) = q_2(x)$.

Во всех рассмотренных случаях зависимость систематической погрешности $\Delta g(x)$ гравиметра от амплитуды колебаний и трения и аналогичная зависимость случайной погрешности $\delta g(x)$, обусловленной неустойчивостью трения, как это следует из (1), (12) и (13), можно определить по формулам:

$$\Delta_i g(x) = 2g q_i(x) \quad \text{и} \quad \delta_i g(x) = 2g \chi_i(x) \frac{\Delta\sigma_i}{\sigma_i}. \quad (18)$$

Полученные для различных моделей трения результаты сравним, представив их в графическом виде. На рис. 1 показаны: функция $q(x) = -\frac{1}{64}(1+x)^2$ — обычно используемая поправка на амплитуду

(пунктирная кривая) (см. формулы (3) и (12)) и, последовательно сверху вниз, функции $q_2(x)$, $q_1(x)$, $q_0(x)$ для случаев с квадратичным, линейным и сухим трением, соответственно.

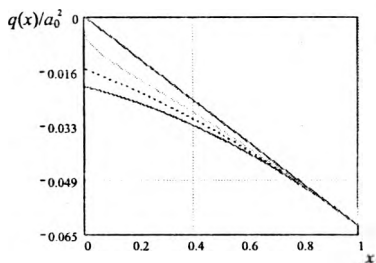


Рис. 1

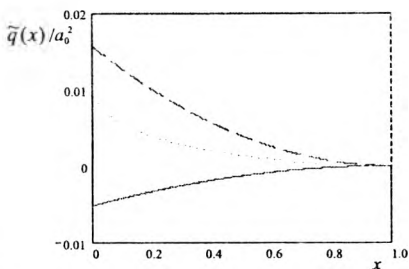


Рис. 2

На рис. 2 показаны функции

$\bar{q}_i(x) = q_i(x) + \frac{\langle x \rangle^2}{16} = q_i(x) + \frac{1}{64}(1+x)^2$, представляющие собой дополнительные относительные поправки к частоте или периоду, которых не хватает в формулах (3).

На рис. 3 показаны зависимости от амплитуды колебаний систематических погрешностей гравиметра, которые соответствуют поправкам $\bar{q}_i(x)$, вычисленным при обычном для современных гравиметров значении начальной амплитуды $a_0 = 40$ угл.мин [1] по формуле $\bar{\Delta}g(x) = 2g\bar{q}_i(x)$, которая следует из формул (1) и (12).

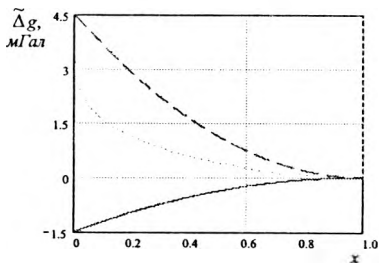


Рис. 3

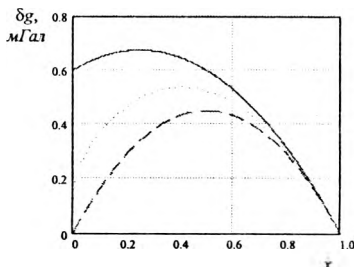


Рис. 4

На рис. 4 показаны зависимости от амплитуды колебаний случайных погрешностей гравиметра, обусловленных нестабильностью трения, при $a_0 = 40$ угл.мин и $\Delta\sigma_i/\sigma_i = 0,1$, которые вычислены по второй из формул (18).

Из рис. 3–4 видно, что не учитываемые до сих пор погрешности, обусловленные трением, весьма значительны. Наличие погрешностей

$\Delta g(x)$ объясняет указанное в [1] несоответствие поправок в формулах (3) опытными данным и индивидуальность этого несоответствия для каждого маятника.

Систематическую погрешность, связанную с наличием трения, и случайную погрешность от нестабильности трения в маятниковом гравиметре можно существенно уменьшить, если измерять коэффициенты трения и учитывать поправки $q_i(x)$ за амплитуду и трение в каждом из опытов по измерению ускорения g .

Литература

1. Юзефович А.П., Огородова Л.В. Гравиметрия. М.: Недра, 1980.
2. Геодезия. Справочное руководство /Под общ. ред. М.Д. Бонч-Бруевича. Т. 1. Физическая геодезия /Под ред. И.А.Казанского/ Изд-во Минкомхоза РСФСР. Л.: М., 1949.
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории колебаний. М.: Наука, 1974.
4. Разработка маятникового прибора для выполнения гравиметрических работ на шельфе и в мировом океане: Отчет по НИР. М.: ЦНИИГАиК, 1979.

ОБЪЕКТИВНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУР В ПИРОМЕТРИИ СЛАБОНАГРЕТЫХ ТЕЛ

Олефир Г.И., Русак А.А.,

Белорусская государственная политехническая академия, г. Минск

Наиболее сложным в пирометрии излучения является измерение истинной температуры слабонагретых тел в диапазоне 50–400 °С. Известно, что при измерении температуры слабонагретых тел классическими методами современной пирометрии излучения превалирует не инструментальная, а методическая составляющая погрешности. Если излучение планковское (тепловое) и поверхность излучателя изотермична, то основной причиной методической погрешности является неточность информации о коэффициенте теплового излучения $\epsilon_{об}$. Для обеспечения единства измерения все пирометры, согласно ГОСТу, калибруются по эталонным излучателям типа модели абсолютно черного тела (АЧТ); если с помощью таких пирометров измеряют температуру реальных тел, коэффициент излучения поверхности которых меньше единицы, то это будет не истинная температура, а некая условная, приведенная к излучению АЧТ. В зависимости от ширины спектрального диапазона длин волн, в котором проводится измерения, условные температуры носят названия либо радиационной (для широкого диапазона длин волн), либо яркостной (для узкого диапазона длин волн),