

УДК 620.178.162

ИЗМЕРЕНИЕ СИЛ ТРЕНИЯ МЕТОДОМ АППРОКСИМАЦИИ ОГИБАЮЩЕЙИ. З. ДЖИЛАВДАРИ⁺, А. А. РУСАК

Предлагается простой и точный метод измерения сил и коэффициентов трения на основе регистрации затухающих амплитуд колебаний физического маятника, не требующий измерения самих амплитуд. Данный метод позволяет установить зависимость силы трения от скорости. Исследуется динамика маятника с опорой качения. Приводятся результаты измерения силы трения качения. Дается оценка погрешности метода.

Ключевые слова: маятник, свободные колебания, сила трения, трение качения.

Введение. Наиболее чувствительным методом измерения слабых сил и моментов сил трения является маятниковый метод. Этот метод основан на измерении интенсивности затухания амплитуды колебаний физического маятника, совершающего свободные колебания [1–3]. Однако точность этого метода до сих пор была невелика, поскольку он не позволяет установить зависимость силы трения от скорости относительного движения в паре трения, и при его использовании приходится предполагать, что сила трения не зависит от скорости.

В работе [4] был предложен метод, основанный на амплитудных измерениях, в принципе позволяющий установить зависимость силы трения от скорости. Метод состоит в том, что затухающие колебания маятника аппроксимируют формулой

$$q = \alpha(t) \cos(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

где q — обобщенная координата (координата или угол), отвечающая отклонению маятника от положения равновесия, $\alpha(t)$ — огибающая, ω — собственная частота маятника, φ — начальная фаза, и обобщенную силу трения аппроксимируют полиномом вида

$$Q = I \sum_{i=0}^n b_i v^i, \quad (2)$$

где I — инерционный коэффициент (например, масса или момент инерции), b_i — постоянные коэффициенты, v — обобщенная относительная скорость в паре трения. Далее измеряют величину ω и величины последовательных затухающих амплитуд, вычисляют вспомогательные координаты и параметры, аппроксимируют зависимости между вспомогательными координатами полиномом степени n и вычисляют коэффициент b_i методом наименьших квадратов.

Однако при вычислении коэффициентов b_i здесь используют не саму огибающую $\alpha(t)$, а некоторые приближенные соотношения, позволяющие свести задачу к решению линейных алгебраических уравнений. Это приводит к методической ошибке измерений. Кроме того, при малых силах трения маятник может совершать $\geq 10^3$, и требуется большое количество замеров величин затухающих амплитуд. Попытка упрощения процедуры путем измерения амплитуд через определенное число колебаний приводит к увеличению погрешности оценки коэффициентов b_i [4].

Белорусская государственная политехническая академия (БГПА), кафедра технической физики. 220065, г. Минск, пр. Ф. Скорины, 65, корп. 11 а.

⁺ Автор, с которым следует вести переписку.

Нами предлагается другой, более простой и точный метод оценки коэффициентов b_i , который позволяет также вычислить как методические, так и случайные погрешности этой оценки. При этом мы ограничимся частным случаем, который используется чаще всего, когда обобщенную силу трения аппроксимируют полиномом второй степени.

Математическая модель метода. Рассмотрим маятник в виде тела массы m , совершающего свободные поступательные колебания вблизи положения равновесия. Будем считать, что процесс колебаний маятника описывается дифференциальным уравнением

$$m \left(\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q \right) = -F \operatorname{sign} v, \quad (3)$$

где m — масса маятника и величина силы трения имеет вид

$$F = m(b_0 + b_1|v| + b_2v^2). \quad (4)$$

Уравнение (3) будем решать асимптотическим методом [5]. В первом приближении этого метода считают, что движение тела описывается уравнением (1), в котором $\omega = \text{const}$. Во втором приближении учитывают в решении дополнительные гармоники частоты ω и зависимость частоты всех гармоник от амплитуды колебаний. При этом вид огибающей $\alpha(t)$ для первой гармоники остается прежним. В результате решения получим следующее выражение для огибающей $\alpha(t)$

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_0 - \frac{k_1 \alpha_0 + 2k_0}{\sqrt{-D}} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \sqrt{-D} t \right)}{1 + \frac{k_1 + 2k_2 \alpha_0}{\sqrt{-D}} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \sqrt{-D} t \right)}, \quad \text{если } D < 0, \quad (5)$$

или

$$\alpha(t) = \frac{(\sqrt{D} - k_1) \alpha_0 - 2k_0 + [(\sqrt{D} + k_1) \alpha_0 + 2k_0] \exp(-\sqrt{D} t)}{\sqrt{D} + k_1 + 2k_2 \alpha_0 + (\sqrt{D} - k_1 - 2k_2 \alpha_0) \exp(-\sqrt{D} t)}, \quad \text{если } D > 0, \quad (6)$$

где

$$D = k_1^2 + 4k_0k_2; \quad (7)$$

k_0, k_1, k_2 — постоянные коэффициенты, связанные коэффициентами b_i соотношениями

$$k_0 = \frac{T}{\pi^2} b_0, \quad k_1 = \frac{1}{2} b_1, \quad k_2 = \frac{8}{3T} b_2, \quad (8)$$

T — период колебаний.

Во втором приближении, в решении для $x(t)$ появляются нечетные гармоники частоты ω . Если сохранить дополнительную гармонику с максимальной амплитудой, зависимость $x(t)$ принимает вид

$$x(t) \approx \alpha(t) \cos \psi(t) - \frac{1}{6\pi\omega^2} \left(b_0 + \frac{2}{5} b_2 \omega^2 \alpha(t)^2 \right) \sin 3\omega t, \quad (9)$$

причем

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega - \left[\frac{6b_0^2}{\pi^2 \alpha^2 \omega^3} + \frac{3b_0 b_1}{2\pi \alpha \omega^2} + \frac{1}{\omega} \left(\frac{b_1^2}{8} + \frac{32b_0 b_2}{9\pi^2} \right) + \frac{b_1 b_2}{3\pi} \alpha + \frac{0,164b_2^2}{\pi^2} \omega \alpha^2 \right]. \quad (10)$$

Из соотношения (10) видно, что период колебаний маятника квадратично зависит от параметров трения b . Формулы (9) и (10) позволяют установить методические погрешности решения уравнения (3) в первом приближении.

Уравнения (5), (6) и (9), (10) содержат в себе все до сих пор известные решения уравнения (3), полученные в частных случаях. Отметим, что вид функций (5) и (6) остается справедливым и в первом, и во втором приближениях решения уравнения (3). Это означает, что относительная методическая погрешность (5) и (6) имеет порядок $\langle k \rangle^3$, где $\langle k \rangle$ — некий средний коэффициент трения. В дальнейшем наличие гармоник и различие между $d\psi/dt$ и ω учитывать не будем.

Динамика физического маятника. Применим полученный результат к угловым колебаниям физического маятника с опорой в виде двух шаров, катающихся по плоской поверхности. Для этого сначала получим дифференциальное уравнение движения этого маятника и найдем условия, при которых оно сводится к уравнению (3). Расчетная схема маятника представлена на рис. 1, где показаны шар радиусом R , находящийся на плоской поверхности, сила тяжести mg , приложенная к центру масс C маятника, сила реакции опоры N , сила трения покоя или скольжения F , а также момент силы трения качения M . Центр масс шара находится на расстоянии $l_c = OC$. Сила F обеспечивает движение центра масс маятника вдоль горизонтальной оси.

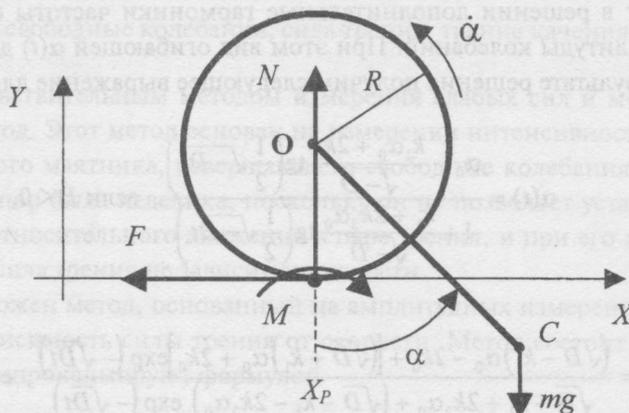


Рис. 1. Расчетная схема физического маятника с опорой качения

Будем считать, что скольжение шара отсутствует. Условие отсутствия скольжения будет рассмотрено ниже. Запишем очевидные равенства, связывающие перемещение x_p относительно положения равновесия точки касания шара опоры с радиусом шара, положением центра масс и углом поворота маятника и шара в процессе движения:

$$x_p = -R\alpha, \quad (11)$$

$$x_c = x_p + l_c \sin \alpha, \quad (12)$$

$$y_c = R - l_c \cos \alpha. \quad (13)$$

Дифференцируя эти равенства по времени, получим

$$\dot{x}_c = \dot{x}_p + \dot{\alpha} l_c \cos \alpha, \quad \dot{y}_c = \dot{\alpha} l_c \sin \alpha. \quad (14)$$

Запишем выражение для кинетической и потенциальной энергии маятника:

$$W_k = \frac{I\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{m}{2}(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2), \quad (15)$$

где I — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр шара,

$$W_n = mgl_c(1 - \cos \alpha). \quad (16)$$

Из предыдущих равенств найдем, что

$$W_k = \frac{I\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{m}{2}(l_c^2 - 2Rl_c \cos \alpha + R^2)\dot{\alpha}^2. \quad (17)$$

Пользуясь уравнением Лагранжа, получим дифференциальное уравнение движения маятника, которое имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial W_k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial W_k}{\partial q} + \frac{\partial W_n}{\partial q} = Q, \quad (18)$$

где

$$Q = -M \operatorname{sign}(\dot{\alpha}). \quad (19)$$

Выразим момент M через силу трения качения F_k :

$$M = R F_k. \quad (20)$$

Будем считать далее, что сила трения качения пропорциональна силе нормального давления, т. е. $F_k = \mu N$. Тогда

$$M = \mu RN. \quad (21)$$

Силу нормального давления найдем, записав очевидное равенство

$$m\ddot{y}_c = -mg + N. \quad (22)$$

Отсюда и из предыдущих соотношений найдем

$$N = mg + m[\ddot{\alpha} l_c \sin \alpha + (\dot{\alpha}^2) l_c \cos \alpha]. \quad (23)$$

Подставляя полученные выражения в уравнение Лагранжа, получим уравнение колебаний маятника:

$$\begin{aligned} [I_p(\alpha) + \mu ml_c R \sin \alpha \operatorname{sign} \dot{\alpha}] \ddot{\alpha} + ml_c R \sin \alpha (\dot{\alpha}^2) + \mu ml_c R \cos \alpha (\dot{\alpha}^2) \operatorname{sign} \dot{\alpha} + \\ + mgl_c \sin \alpha = -\mu mgR \operatorname{sign} \dot{\alpha} \end{aligned}, \quad (24)$$

где

$$I_p(\alpha) = I_c + m(l_c^2 - 2Rl_c \cos \alpha + R^2) \quad (25)$$

представляет собой момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку касания шаром опоры.

Найдем выражение для силы F . Эта сила равна произведению массы маятника на проекцию ускорения его центра масс на горизонтальное направление:

$$F_x = m\ddot{x}_c = m[l_c \cos \alpha - R] \ddot{\alpha} - l_c \sin \alpha \dot{\alpha}^2. \quad (26)$$

Уравнение (24) нельзя решить аналитически. Однако, если максимальные углы отклонения маятника невелики можно провести приближенный аналитический анализ основных особенностей динамики маятника. Для углов $\alpha \ll 1$ уравнение (24) принимает вид:

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = -\mu \frac{mgR}{I_p} \operatorname{sign} \dot{\alpha}, \quad (27)$$

где

$$\omega^2 = \frac{mgl_c}{I_p}, \quad (28)$$

$$I_p = I_c + m(l_c - R)^2. \quad (29)$$

Будем считать, что коэффициент μ зависит от линейной скорости качения шара по закону

$$\mu = b_0 + b_1|v| + b_2v^2. \quad (30)$$

Учитывая, что $v = R\dot{\alpha}$, имеем

$$\mu = b_0 + b_1R|\dot{\alpha}| + b_2R^2\dot{\alpha}^2. \quad (31)$$

Тогда уравнение (27), с учетом (28), можно записать в виде

$$\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = -(\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1|\dot{\alpha}| + \tilde{b}_2\dot{\alpha}^2)\text{sign } \dot{\alpha}, \quad (32)$$

где

$$\tilde{b}_0 = \frac{4\pi^2R}{l_cT^2}b_0; \quad \tilde{b}_1 = \frac{4\pi^2R^2}{l_cT^2}b_1; \quad \tilde{b}_2 = \frac{4\pi^2R^3}{l_cT^2}b_2. \quad (33)$$

Численное решение уравнений (24) и (32) показало, что в условиях опытов, описанных ниже, огибающие обоих решений практически совпадают как при малом, так и при большом трении. По внешнему виду выражение (32) совпадает с уравнением (3). Поэтому можно сразу записать решение (32) в виде (1), (5) или (1), (6). При этом коэффициенты k_i будут связаны с коэффициентами b_i соотношениями

$$k_0 = \frac{4R}{l_cT}b_0; \quad k_1 = \frac{2\pi^2R^2}{l_cT^2}b_1; \quad k_2 = \frac{32\pi^2R^3}{3l_cT^3}b_2. \quad (34)$$

Отметим, что в случае маятника с фиксированной осью вращения момент силы трения, действующей на маятник, можно представить в виде

$$M = I(b_0 + b_1\dot{\alpha} + b_2\dot{\alpha}^2). \quad (35)$$

Тогда связь коэффициентов k_i с коэффициентами b_i будет иметь вид (8).

В пределах одного периода колебаний при малом трении можно положить

$$\alpha \approx \alpha_0 \cos \omega t. \quad (36)$$

Подставляя это выражение в (26), найдем:

$$F_x \approx -m\alpha_0\omega^2(l_c - R)\cos \omega t + \frac{1}{8}ml_c\alpha_0^3\omega^2(\cos \omega t + 3\cos 3\omega t). \quad (37)$$

Точно так же из соотношений (23) и (36) найдем силу нормального давления N :

$$N \approx mg + m\omega^2l_c\alpha_0^2\left(\frac{1}{8}\alpha_0^2 - \cos 2\omega t - \frac{1}{8}\alpha_0^2\cos 4\omega t\right) \approx mg - m\omega^2l_c\alpha_0^2\cos 2\omega t. \quad (38)$$

В практически реализуемых случаях второе слагаемое в правой части (38) мало по сравнению с первым слагаемым. Поэтому можно считать $N \approx mg$.

Рассмотрим более подробно оба слагаемых в выражении (37). Нетрудно видеть, что при выполнении равенства

$$l_c = R. \quad (39)$$

амплитуда F_x будет минимальна при любых углах α_0 . В этом случае

$$F_x \approx \frac{1}{8} m R \alpha_0^3 \omega^2 (\cos \omega t + 3 \cos 3\omega t). \quad (40)$$

Скольжение маятника будет отсутствовать, если $|F_x|_{\max} < k^0 m g$, где k^0 – коэффициент трения покоя. Отсюда следует, что условие отсутствия скольжения имеет вид:

$$\frac{2\pi^2 R \alpha_0^3}{T^2} < k^0 g. \quad (41)$$

В опытах, описанных ниже, $\alpha_0 \approx 0,209$, и это условие заведомо выполнялось. Однако процесс качения шара по плоскости представляет собой сложные кинематический и динамический процессы. Это связано с тем, что реально контакт шара с плоскостью происходит не в одной точке, а в пределах пятна конечных размеров [6]. Поэтому качение шара всегда сопровождается скольжением его поверхности относительно плоскости. В этих условиях можно ожидать, что даже малая сила F_x может каким-то образом повлиять на движение шара и всего маятника. В связи с этим представляет интерес провести измерения силы трения в случаях $l_c = R$ и $\neq R$.

Метод измерения силы трения качения. Проведенный анализ и полученные выше формулы позволяют построить новый метод измерений слабых сил трения, в частности, трения качения. В соответствии с предлагаемым способом, необходимо провести следующие операции.

1. Предварительно, весь интервал значений амплитуд колебаний маятника от начальной α_0 до конечной α_n разбить на ряд последовательных интервалов, например с помощью меток на шкале. Таких меток должно быть не менее пяти, с учетом α_0 и α_n .

2. Отклонить маятник на начальный угол α_0 , отпустить его и измерить время последовательного прохождения маятником выбранных меток или отсчитать число колебаний, совершенных маятником по мере прохождения этих меток.

3. Определить период колебаний $T = 2\pi/\omega$. Можно в качестве T взять средний период, разделив полное время колебаний на полное число колебаний.

4. Решить задачу нелинейной аппроксимации полученного выше экспериментального закона затухания амплитуды колебаний маятника аналитической зависимостью (5) или (6) и определить коэффициенты k_0, k_1, k_2 .

5. По формулам (34) вычислить коэффициенты b_0, b_1 и b_2 .

Полученные результаты и их обсуждение. Описанным методом были измерены силы трения качения в следующих парах трения: а) стальные подшипниковые шарики – полированное оптическое стекло К-8; б) шарики – плитка Иогансона; в) шарики – листовой фторопласт-4 (толщина 4 мм). Масса маятника $m \approx 1,4$ кг. Опора маятника содержала два одинаковых шарика. Опыты проводились как при выполнении условия (39), так и при его не выполнении. Для оценки влияния сопротивления воздуха, на одно из двух вертикальных плеч маятника дополнительно надевался легкий бумажный цилиндр, увеличивающий парусность маятника. В этом случае площадь поперечного сечения маятника возрастала на ≈ 20 %. В опытах, в которых условие $l_c = R$ было нарушено, период колебаний выбирался таким, чтобы он был близок к периоду, когда это условие выполнялось. При этом масса маятника не менялась.

Погрешность измерений коэффициентов трения определялась по формуле

$$\varepsilon_A = \frac{|W_n - A_{\text{тр}}|}{W_n}, \quad (42)$$

где W_n — начальная потенциальная энергия маятника, $A_{тр}$ — работа силы трения до полной остановки маятника. В идеале должно быть, очевидно, $W_n = A_{тр}$. Потенциальная энергия, которая запасается в маятнике при его начальном отклонении ($\alpha = \alpha_0$), определяется формулой (16). Работа силы трения вычислялась с учетом формул (21) и (31) путем численного интегрирования. Во всех опытах начальный угол колебаний $\alpha_0 = 12^\circ$, конечный угол $\alpha_n = 0^\circ$.

В задаче нелинейной аппроксимации использовался метод первого порядка [7]. Погрешность аппроксимации определялась как корень квадратный из отношения суммы квадратов разностей между значениями огибающей и значениями меток к числу всех меток без четырех. Это означает,

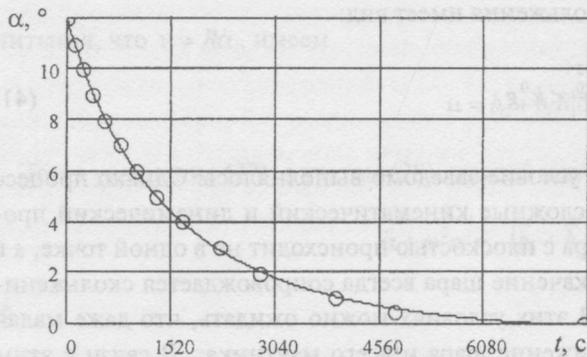


Рис. 2. Результат аппроксимации огибающей экспериментальных точек функцией (6)

что полное число экспериментальных точек должно быть не менее пяти. Аппроксимация проводилась по формуле (6), поскольку она обеспечивала минимальную погрешность. На рис. 2 представлен результат такой аппроксимации (сплошная кривая) экспериментальной зависимости для случая шар — плитка Иогансона при выполнении условия $l_c = R = 6,15$ мм.

Чтобы иметь возможность сравнивать полученные результаты с результатами, полученными другими методами измерений, проводился расчет коэффициента среднего трения, который определялся как отношение работы силы трения $A_{тр}$ к произведению веса маятника на полный путь S качения шара до его остановки:

$$\langle k \rangle = \frac{A_{тр}}{mgS}. \quad (43)$$

С этой же целью, коэффициент трения вычислялся в соответствии с существующим ГОСТом [2], согласно которому в опытах *a*) и *б*) определялось число колебаний совершаемых маятником при затухании амплитуды на 25 % (от 12 до 9°). В опыте *в*) эти вычисления были проведены при затухании амплитуды на 50 % (от 12° до 6°).

Для дополнительного контроля корректности вычислений, рассчитывалось также теоретическое время колебаний t_k , которое следует из формулы (5) или (6) и условия $\alpha(t) = 0$. Соответствующая относительная погрешность определялась по формуле:

$$\varepsilon_t = \frac{|t_k - t_0|}{t_0}, \quad (44)$$

где t_0 — реальное время колебаний.

Результаты измерений и расчетов представлены в таблице. В скобках даются результаты, полученные в одном из опытов при увеличенной парусности маятника. Следует учитывать также, что значения коэффициентов b_n , $\langle k \rangle$ и k , приведенные в таблице, вдвое больше реальных, поскольку они получены для двух шариков.

Особый интерес представляют результаты опыта с фторопластом, поскольку здесь коэффициент $b_2 < 0$. Кроме того, условия применения данного метода измерений в этом случае являются наиболее неблагоприятными, поскольку здесь колебания затухали гораздо быстрее. Фиксировалось 22 колебания. Поэтому решение задачи аппроксимации контролировалось численным решением дифференциального уравнения (32). На рис. 3 представлены экспериментальные точки, огибающая (6) и решение дифференциального уравнения. Погрешность аппроксимации для этой пары трения оказалась незначительной, несмотря на минимально допустимое количество экспериментальных точек.

ИЗМЕРЕНИЕ СИЛ ТРЕНИЯ МЕТОДОМ АППРОКСИМАЦИИ ОГИБАЮЩЕЙ

Характеристика	Параметры маятника					
	$R = 6,15 \text{ мм}$			$R = 12,75 \text{ мм}$		
	$l_c = R$		$l_c = 0,25R$	$l_c = R$		$l_c = 2,31R$
	Пара трения					
	сталь—фторопласт	сталь—стекло	сталь—сталь	сталь—сталь	сталь—стекло	сталь—стекло
Средний период колебаний T , сек	4,912	5,219(5,47)	5,278	5,281	3,598	3,6
Полное время колебаний t_0 , сек	106	3900(3060)	7530	8100	2400	3600
Погрешность аппроксимации, 10^{-3} рад	4,9	1,51 (1,34)	1,19	0,85	1,28	1,14
ϵ_n , %	1,2	8,7 (6,7)	7,1	4,8	2,4	4,5
W_n , 10^{-3} Дж	1,84	1,84	1,84	2,31	4,35	10,06
ϵ_A , %	3,2	0,46 (0,27)	0,37	0,37	0,3	1,4
b_0 , 10^{-6}	618	8,64 (13,1)	3,55	4,52	1,06	14,34
b_1 , $\text{м}^{-1}\text{с}$	6,73	0,2 (0,23)	0,105	0,109	0,067	0,113
b_2 , $\text{м}^{-2}\text{с}^2$	-3408	35,0 (119)	52,23	71,9	4,80	7,33
$\langle k \rangle$, 10^{-5}	341	15,85 (20,6)	9,13	10,3	17,4	27,7
k , 10^{-5}	372	27,1 (39)	17,8	16,3	28,4	20,6

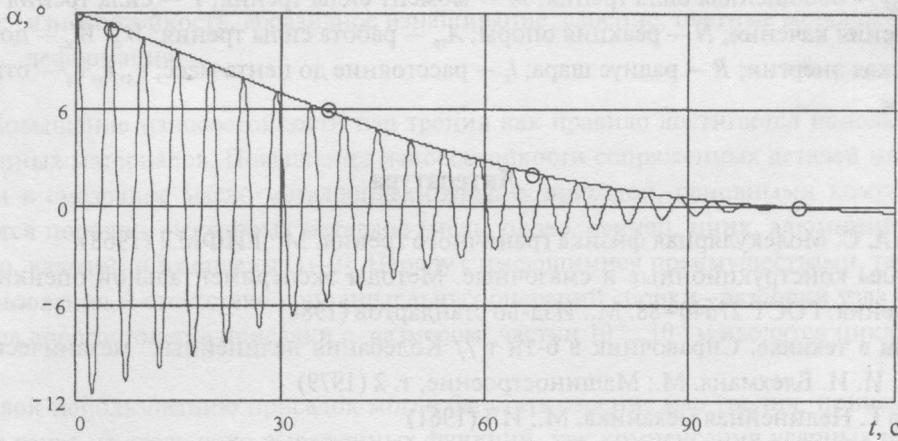


Рис. 3. Взаимное расположение экспериментальных точек, их огибающей (6) и решения дифференциального уравнения для пары трения сталь — фторопласт

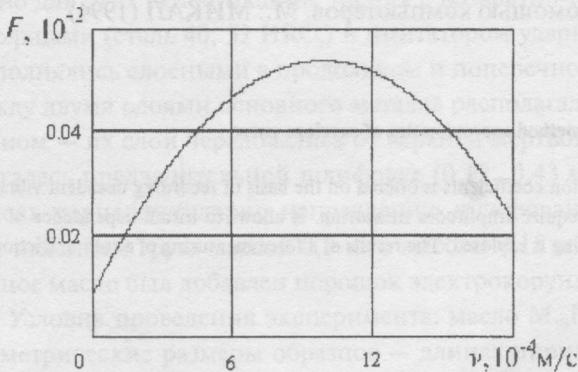


Рис. 4. Зависимость силы трения от скорости для пары трения сталь — фторопласт

Зависимость силы трения от скорости для этого случая показана на рис. 4. Максимальная скорость качения шара не превышала $1,68 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$.

Из таблицы также видно, что в случае, когда $l_c > R$, значения всех коэффициентов трения, вычисленные данным методом, возрастают. Отсюда следует, что качение шаров сопровождалось дополнительным скольжением, хотя условие (41) отсутствия скольжения было заведомо выполнено. Значения коэффициента k в этом случае, наоборот, растут. Кроме того, значения k во всех случаях существенно отличаются от $\langle k \rangle$.

Формулы (5) и (6) могут применяться и при традиционном способе измерений, когда

амплитуды колебаний маятника измеряют непосредственно (в этом случае число полных колебаний маятника должно быть ≥ 4). Эти же формулы позволяют оценить случайные погрешности измерений коэффициентов b_i . Для этого отклонения $\Delta\alpha_j$ значений экспериментальных точек от аппроксимирующей кривой следует рассматривать как случайные погрешности. Тогда случайные относительные погрешности измерений коэффициентов b_i , обусловленные погрешностями $\Delta\alpha_j$, можно оценить по формуле

$$\varepsilon_i = \sum_{j=0}^N \left| \frac{\partial b_i}{\partial \alpha_j} \Delta\alpha_j \right|. \quad (45)$$

Например, для пары “сталь — фторопласт” соответствующие погрешности оказались следующими: $\varepsilon_0 = 29\%$; $\varepsilon_1 = 2,5\%$; $\varepsilon_2 = 4\%$.

Обозначения

q — обобщенная координата; x — линейное перемещение; x_c, y_c — координаты центра масс; g — ускорение свободного падения; v — линейная скорость; α — угол; t — время; t_0 — полное время колебаний; t_k — расчетное время колебаний; T — период колебаний; ω — циклическая частота; ψ — начальная фаза; b_i, k_i, μ — коэффициенты; k^0 — коэффициент трения покоя; $\langle k \rangle$ — коэффициент среднего трения; k — коэффициент трения, определяемый согласно ГОСТу; I — момент инерции; m — масса; Q — обобщенная сила трения; M — момент силы трения; F — сила трения скольжения; F_k — сила трения качения; N — реакция опоры; $A_{тр}$ — работа силы трения; W_n, W_k — потенциальная и кинетическая энергии; R — радиус шара; l_c — расстояние до центра масс; $\varepsilon_A, \varepsilon_n, \varepsilon_{ij}$ — относительные погрешности.

Литература

1. Ахматов А. С. Молекулярная физика граничного трения. М.: ГИФМЛ (1963)
2. Материалы конструкционные и смазочные. Методы экспериментальной оценки коэффициентов трения. ГОСТ 27640—88. М.: Изд-во стандартов (1988)
3. Вибрации в технике. Справочник в 6-ти т // Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И. И. Блехмана. М.: Машиностроение, т. 2 (1979)
4. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: ИЛ (1961)
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука (1974)
6. Измайлов В. П., Карагиоз О. В., Силин А. А. Измерение коэффициента трения качения диссипативным методом // Научные труды ВНИИФТРИ. Современные методы и средства измерения внешнего трения. М. (1977)
7. Носач В. В. Решение задач аппроксимации с помощью компьютеров. М.: МИКАП (1994)

Поступила в редакцию 20.12.99.

Gilavdary I. Z. and Rusak A. A. Measurement of friction forces by a method approximating of envelope curve.

The simple and precise method of measuring of forces and friction coefficients is offered on the basis of recording decadent vibration amplitudes of a compound pendulum. This method does not require amplitudes measuring. It allows to install dependence of a frictional force on velocity. Dynamics of a pendulum with a ball bearing is explored. The results of a force measuring of a rolling friction are given. The error estimation of a method is given.