



<https://doi.org/10.21122/1683-6065-2020-3-41-47>  
УДК 669.14.018

Поступила 12.08.2020  
Received 12.08.2020

## ПРИМЕНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ В РАСЧЕТАХ РЕЖИМОВ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО СЛИТКА

*В. И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ,*

*Е. И. МАРУКОВИЧ, Институт технологии металлов НАН Беларуси, г. Могилев, Беларусь, ул. Бялыницкого-Бирули, 11. E-mail: maruko46@mail.ru*

*И. А. ТРУСОВА, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Беларусь, пр. Независимости, 65*

*В настоящей работе приведены подходы к расчетному анализу процессов затвердевания и охлаждения непрерывнолитых заготовок с целью совершенствования и разработки технологических режимов в условиях современных машин непрерывного литья с применением метода конечных элементов (МКЭ).*

*Рассмотрено применение современных численных методов при затвердевании и охлаждения заготовок на машинах непрерывного литья заготовок. Обосновано использование метода конечных элементов при использовании расчетных и экспериментальных данных для разработки и совершенствования технологии разлива.*

**Ключевые слова.** Затвердевание и охлаждение, непрерывнолитая заготовка, математическое моделирование, метод конечных элементов.

**Для цитирования.** Тимошпольский, В. И. Применение классических численных методов в расчетах режимов затвердевания непрерывного слитка / В. И. Тимошпольский, Е. И. Марукович, И. А. Трусова // *Литье и металлургия*. 2020. № 3. С. 41-47. <https://doi.org/10.21122/1683-6065-2020-3-41-47>.

## APPLICATION OF CLASSICAL NUMERICAL METHODS IN THE CALCULATION OF SOLIDIFICATION MODES OF A CONTINUOUS INGOT

*V. I. TIMOSHPOLSKY,*

*E. I. MARUKOVICH, Institute of Technology of Metal of National Academy of Sciences of Belarus, Mogilev, Belarus, 11, Byalynitskogo-Biruli str. E-mail: maruko46@mail.ru*

*I. A. TRUSOVA, Belarusian National Technical University, 65, Nezavisimosti Ave., Minsk, Belarus*

*This paper presents approaches to the computational analysis of solidification and cooling processes of continuously cast billets in order to improve and develop technological modes in the conditions of modern continuous casting machines using FEM.*

*The application of modern numerical methods for solidification and cooling of workpieces on continuous casting machines is considered. The use of the finite element method is justified when using computational and experimental data for the development and improvement of casting technology.*

**Keywords.** Solidification and cooling, continuous casting, mathematical modeling, finite element method.

**For citation.** Timoshpolsky V. I., Marukovich E. I., Trusova I. A. Application of classical numerical methods in the calculation of solidification modes of a continuous ingot. *Foundry production and metallurgy*, 2020, no. 3, pp. 41-47. <https://doi.org/10.21122/1683-6065-2020-3-41-47>.

В настоящее время при решении прикладных задач высокотемпературных теплофизических процессов в металлургии и машиностроении широкое распространение получают современные методы, базирующиеся на двух подходах. В первом из них для описания температурного поля исследуемых объектов используют дифференциальные уравнения в частных производных для некоторой произвольной бесконечно малой области. В последующем уравнения заменяются конечно-разностными соотношениями, для решения которых разработаны весьма эффективные вычислительные методы [1, 2]. Впервые численный метод конечных разностей для решения нелинейной задачи при нагреве тел классической формы излучением использован Ю. А. Самойловичем [3] в конце 50-х годов. В дальнейшем были предприняты попытки решения и успешно решены сложные нелинейные задачи теории нагрева, плавления,

охлаждения, затвердевания и кристаллизации, в том числе при непрерывной разливке слитков и заготовок, результаты которых систематизированы в многочисленных работах [см. например, 6–11]).

Второе направление основано на использовании вариационного экстремального принципа и в данном случае решение минимизирует определенный функционал, представляющий собой интеграл от неизвестных значений температуры на различных участках объекта. При этом изучаемая непрерывная функция заменяется набором дискретных значений, поле которых строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определяемых для некоторых участков объекта (подобластей), называемых конечными элементами. Реализация второго направления базируется на применении математического аппарата теории матриц, обладающего высокой степенью универсальности в отношении решения большинства современных задач математической физики [12, 13].

К настоящему времени при исследовании высокотемпературных процессов усложнение физической постановки решаемых задач теплопроводности, термоупругости и гидродинамики и, главным образом, необходимость расчетного анализа тепловой обработки изделий сложной геометрической формы определили целесообразность более широкого использования второго метода решения – метода конечных элементов (МКЭ).

В настоящей работе приведены подходы к расчетному анализу процессов затвердевания и охлаждения непрерывнолитых заготовок с целью совершенствования и разработки технологических режимов в условиях современных машин непрерывного литья с применением МКЭ.

Математическая формулировка задачи в конкретном случае включает в себя уравнение теплопроводности для двух пространственных измерений поперечного сечения заготовки ( $x, y$ ):

$$\rho c_{эф}(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (1)$$

где  $\rho, \lambda$  – соответственно плотность и теплопроводность заготовки.

Так называемая эффективная теплоемкость учитывает скрытую теплоту затвердевания:

$$c_{эф}(T) = \begin{cases} c_0 & \text{при } T < T_{сол}, \\ c_0 - L \frac{\partial \psi}{\partial T} & \text{при } T_{сол} \leq T \leq T_{лик}, \\ c_0 & \text{при } T > T_{лик}. \end{cases}$$

Уравнение нестационарной теплопроводности (1) дополняется граничными и начальными условиями:

$$\pm \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha (T_{пов} - T_{ср}) \quad \text{при } x = 0; l_1, \quad (2)$$

$$\pm \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha (T_{пов} - T_{ср}) \quad \text{при } y = 0; l_2,$$

$$T(x, y, 0) = T_{нач} = \text{const} \quad \text{при } t = 0. \quad (3)$$

На первом этапе с целью выбора рационального количества разбиения рассматриваемой области на конечные элементы и обоснования выбора МКЭ выполнены сравнительные расчеты охлаждения стальной пластины для случаев разбиения исходной области на элементы в количестве  $3 \times 3$ ;  $5 \times 5$ ;  $7 \times 7$  и  $10 \times 10$  и дано сопоставление вычислений по методу МКЭ с точным решением, приведенным в работе Г. П. Иванцова [14]. Результаты сопоставительных расчетных данных приведены в работе [15], из которой следует, что для всех случаев вычислений очевидно удовлетворительное согласование результатов по точному аналитическому решению с расчетными результатами по МКЭ. Вместе с тем, отмечено, что наименьшая погрешность наблюдается при разбиении расчетной области на количество элементов  $5 \times 5$ ;  $7 \times 7$  (табл. 1, 2).

Далее выполнено тестирование на примере нагрева стальной прямоугольной заготовки. Для этого использовано аналитическое решение задачи, приведенное в [14] и табулированное для тел простой формы (плиты, цилиндра неограниченной протяженности) для набора определенных значений критериев Био и Фурье:

$$Bi = \frac{\alpha l}{\lambda} = 0,2; 0,5; 1,0; 2,0; 3,0; 4,0; 6,0 \dots,$$

$$Fo = \frac{at}{l^2} = 0,02; 0,05; 0,1; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0 \dots$$

Для расчета принимаем размеры заготовки  $0,2 \times 0,4$  м, теплофизические свойства материала ( $\rho, \lambda, c_p$ ) являются неизменными, нагрев происходит по закону конвекции Ньютона (коэффициент теплоотдачи

Таблица 1. Результаты расчета охлаждения пластины при  $Bi = 2,0$ ,  $\Delta Fo = 0,0125$ , размер расчетного элемента  $5 \times 5$  [12]

Fo	( $y = 0$ ) [14]	Расчет ( $y = 0$ ) МКЭ	$\delta, \%$	( $y = 1,0$ ) [14]	Расчет ( $y = 1,0$ ) МКЭ	$\delta, \%$
0,05	0,99954	0,99778	0,17	0,64380	0,65635	1,91
0,10	0,98779	0,98355	0,43	0,55361	0,56136	1,38
0,15	0,95813	0,95452	0,37	0,49795	0,50346	1,09
0,20	0,91789	0,91593	0,21	0,45765	0,46170	0,87
0,30	0,83661	0,82844	0,98	0,39841	0,40081	0,60
0,40	0,74225	0,741197	0,04	0,35235	0,35415	0,51
0,50	0,66025	0,66240	0,32	0,31314	0,31477	0,52
0,60	0,58775	0,59077	0,51	0,27868	0,28032	0,58
0,70	0,52335	0,52672	0,64	0,24812	0,24981	0,67
0,80	0,46603	0,46958	0,76	0,22094	0,22267	0,78
0,90	0,41500	0,41863	0,87	0,19765	0,19851	0,83
1,00	0,36956	0,37322	0,98	0,17522	0,17697	0,89

Таблица 2. Результаты расчета охлаждения пластины при  $Bi = 2,0$ ,  $\Delta Fo = 0,0125$ , размер расчетного элемента  $7 \times 7$  [12]

Fo	$\Theta(y = 0)$ [14]	Расчет $\Theta(y = 0)$ МКЭ	$\delta, \%$	$\Theta(y = 1,0)$ [14]	Расчет $\Theta(y = 1,0)$ МКЭ	$\delta, \%$	$\Delta\Theta_1$	$\Delta\Theta_2$
0,05	0,99954	0,99783	0,17	0,64389	0,65636	1,91	0,35574	0,34147
0,10	0,98779	0,98360	0,42	0,55361	0,56138	1,38	0,43418	0,42222
0,15	0,95813	0,95457	0,37	0,49795	0,50348	1,10	0,46018	0,45109
0,20	0,91789	0,91596	0,21	0,45765	0,46163	0,89	0,46024	0,45433
0,30	0,83661	0,82851	0,47	0,39841	0,40086	0,61	0,43820	0,42765
0,40	0,74225	0,74206	0,04	0,35235	0,35420	0,52	0,38990	0,38786
0,50	0,66025	0,66252	0,34	0,31314	0,31469	0,49	0,34711	0,34783
0,60	0,58775	0,59091	0,58	0,27868	0,28039	0,61	0,30907	0,31052
0,70	0,52335	0,52688	0,67	0,24812	0,24990	0,71	0,27523	0,27698
0,80	0,46603	0,46975	0,80	0,22094	0,22278	0,82	0,24509	0,24697
0,90	0,41500	0,41883	0,91	0,19765	0,19863	0,94	0,21735	0,22020
1,00	0,36956	0,37322	1,01	0,17522	0,17612	1,07	0,19434	0,19710

принимая равным  $872,25 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ). Значение температуры в любой точке сечения заготовки определяется по принципу перемножения температурных критериев для пластины с соответствующим размером. Таким образом, для двух плит неограниченной протяженности толщиной  $2l_1 = 0,2 \text{ м}$  и  $2l_2 = 0,4 \text{ м}$  при коэффициенте теплопроводности стали  $\lambda = 29,075 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$  значения критерия Био равны соответственно:

$$Bi_1 = \frac{\alpha l_1}{\lambda} = 3, \quad Bi_2 = \frac{\alpha l_2}{\lambda} = 6.$$

Исходные данные для расчета нагрева заготовки приведены в табл. 3.

Аналогичную задачу решили при использовании МКЭ, схема разбиения на конечные элементы (количество элементов равно 382) приведена на рис. 1.

Результаты расчета температур в контрольных точках сечения заготовки для пяти приведенных в табл. 3 значений критерия  $Fo^{(1)}$  и кривые изменения температур в указанных точках, полученные с использованием МКЭ, представлены на рис. 2. Здесь очевидно, что расчетные значения температур в контрольных точках поперечного сечения заготовки практически точно совпадают с кривыми изменения температур  $t_0$ ,  $t_1$  и  $t_2$  во времени, полученными с использованием МКЭ при задании  $t_{нач} = 0$ ,  $t_{ср} = 1000 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Таблица 3. Исходные данные к расчету нагрева прямоугольной заготовки сечением  $0,2 \times 0,4 \text{ м}$ 

$Bi_1 = 3$			$Bi_2 = 6$			$\theta_0$	$\theta_1$	$\theta_2$
$Fo^{(1)}$	$\theta_{ср}^{(1)}$	$\theta_{пов}^{(1)}$	$Fo^{(2)}$	$\theta_{ср}^{(2)}$	$\theta_{пов}^{(2)}$			
0,08	0,99289	0,47287	0,02	0,9989	0,47260	0,99278	0,47281	0,46924
0,20	0,89480	0,34885	0,05	0,99891	0,34946	0,89382	0,34846	0,31270
0,40	0,68153	0,25384	0,10	0,97496	0,26675	0,66446	0,24748	0,18180
0,80	0,38800	0,14331	0,20	0,85467	0,19713	0,33161	0,12248	0,07649
1,20	0,21969	0,08115	0,30	0,72031	0,15981	0,15824	0,05845	0,03511

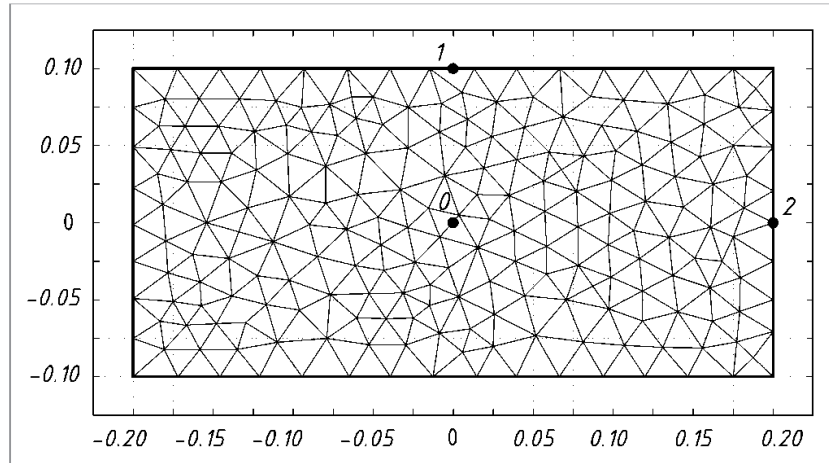


Рис. 1. Схема разбиения на конечные элементы поперечного сечения стальной заготовки размером 0,2×0,4 м

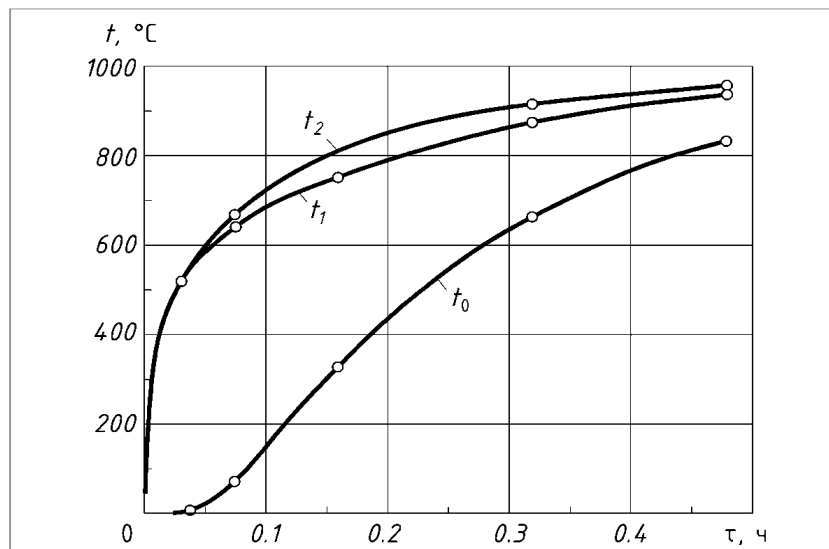


Рис. 2. Сопоставление результатов расчета нагрева стальной заготовки, выполненного с использованием МКЭ (сплошные линии), с аналитическим решением задачи (кружки) для температур  $t_0$  (центр сечения),  $t_1$  и  $t_2$  (посередине широкой и узкой грани, как показано на рис. 1)

На втором этапе при использовании метода конечных элементов выполнены расчеты затвердевания и охлаждения непрерывнолитых заготовок из кордовых и шарикоподшипниковых марок стали различного сечения на основе математической модели (1)–(3), при этом с целью надежности использования МКЭ выполнена параметрическая идентификация по результатам промышленных экспериментов. На рис. 3 показаны результаты вычислений для настройки приведенной выше математической модели на примере затвердевания и охлаждения заготовок кордовых марок стали сечением 250×300 и 300×400 мм. Из рисунка видно вполне удовлетворительное согласование экспериментальных и расчетных данных. Например, для заготовки сечением 250×300 мм (сталь 80К) (рис. 3, а) максимальное расхождение для точки 2, расположенной вблизи центра, составляет около 2,5% и отмечается при прохождении заготовки вдоль МНЛЗ после тянущего устройства (ТУ-1), при этом металлургическая длина составляет 17,5 м. Для точки 1 расхождение расчетных и экспериментальных данных составляет около 8–9%, однако это наблюдается только после выхода заготовки из ЗВО при прохождении ее металлургической длины на уровне 10–11 м, в дальнейшем расхождение составляет около 3%. Продолжительность затвердевания непрерывнолитой заготовки сечением 250×300 мм составляет около 23 мин.

Для заготовки сечением 300×400 мм (сталь 70К) (рис. 3, б) наибольшее расхождение температур наблюдается при прохождении заготовкой зоны вторичного охлаждения (около 3% для точки 3, находящейся вблизи поверхности широкой грани), однако в дальнейшем при охлаждении заготовки на воздухе расхождение составляет 2% и менее. Длительность затвердевания слитка сечением 300×400 мм по расчетным данным составила около 36 мин, металлургическая длина слитка – 21–22 м.

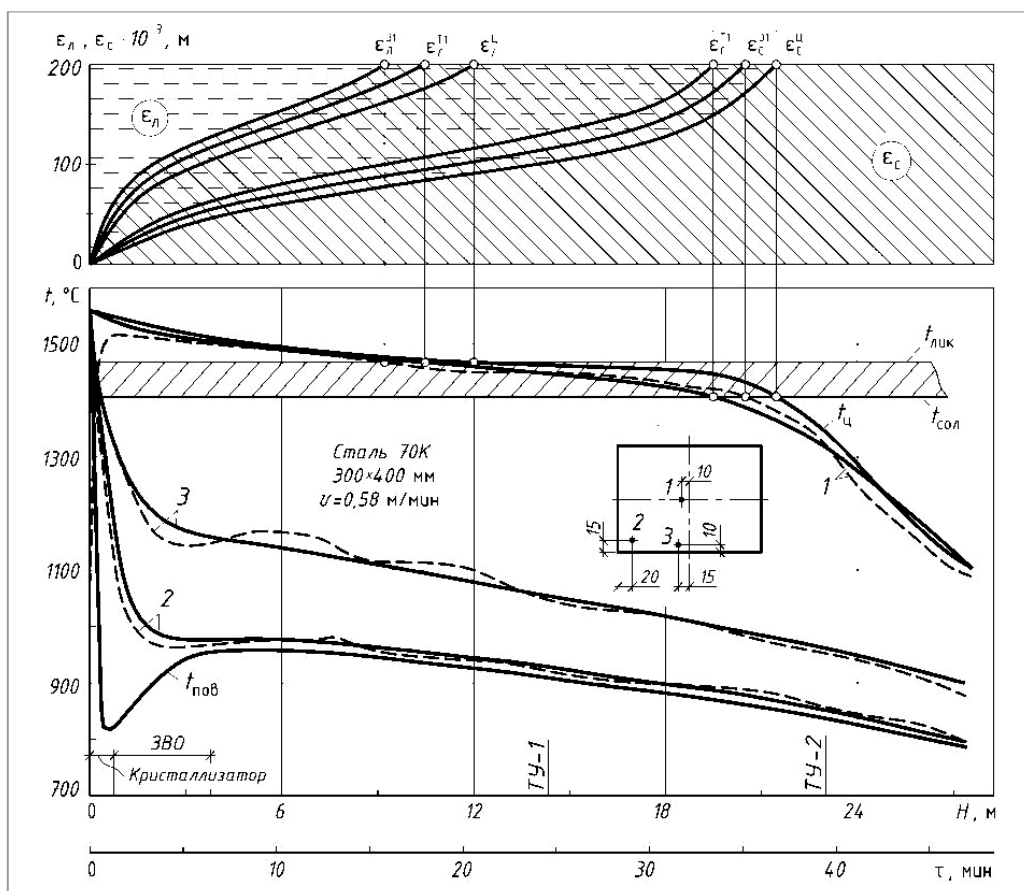
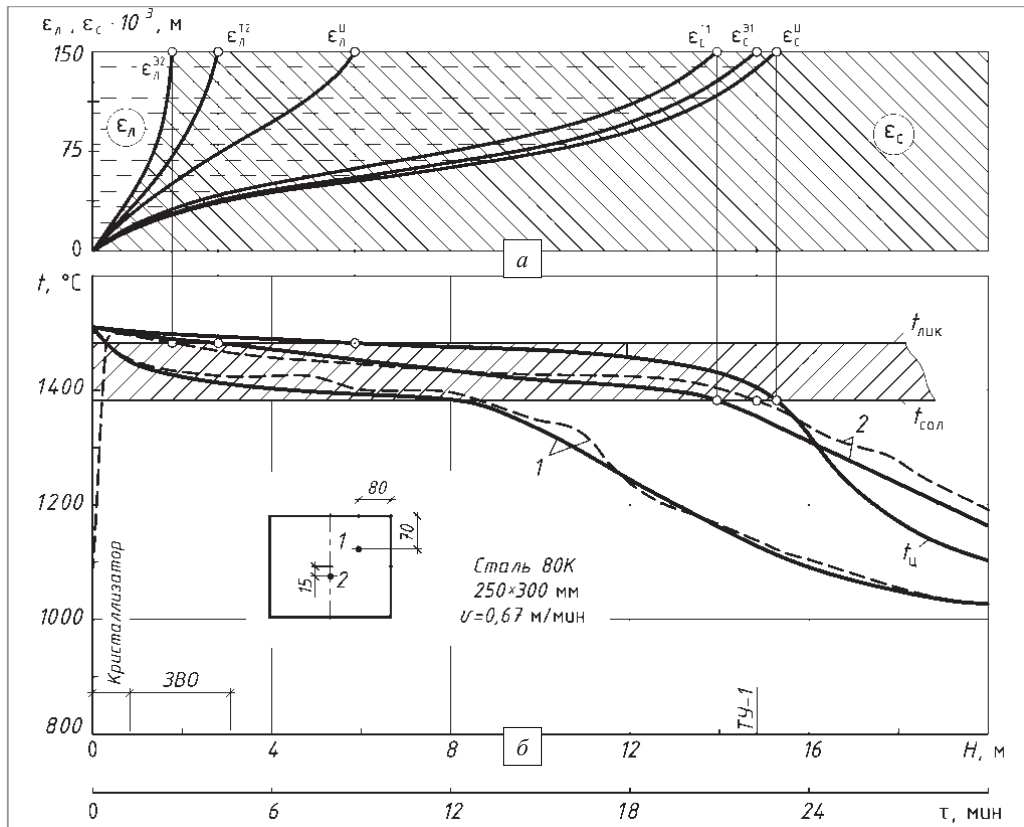


Рис. 3. Сравнение расчетных (сплошные линии) и экспериментальных (штриховые линии) данных изменения температур и расположение изотерм ликвидуса и солидуса:  
 а – заготовка сечением 250×300 мм, сталь 80К; б – заготовка сечением 300×400 мм, сталь 70К

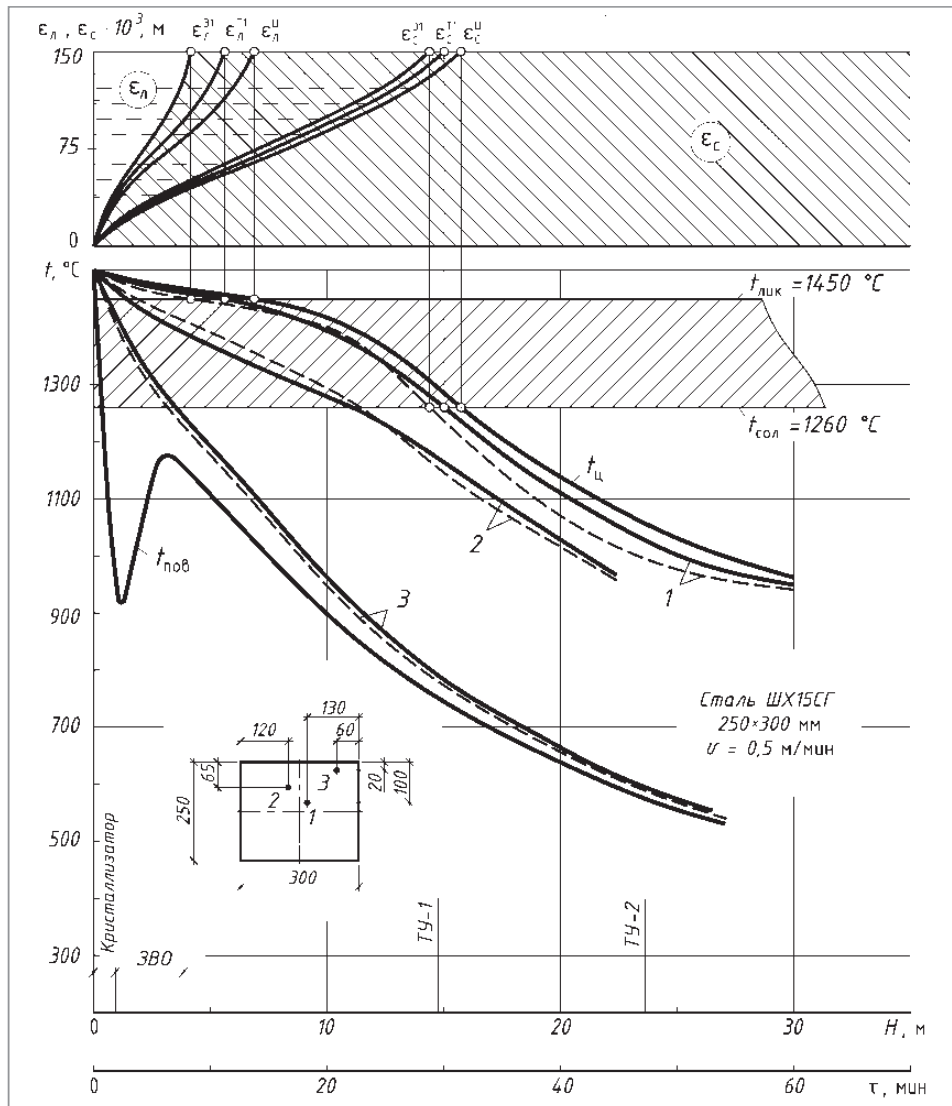


Рис. 4. Сравнение расчетных (сплошные линии) и экспериментальных (штриховые линии) данных изменения температур и расположение изотерм ликвидуса и солидуса в заготовке сечением  $250 \times 300$  мм, сталь ШХ15СГ

Шарикоподшипниковые стали имеют специфическую особенность, которую необходимо учитывать при расчете процессов затвердевания и охлаждения, обусловленную широким интервалом кристаллизации, также достаточно ограниченными сведениями в технической литературе о температурах солидуса и ликвидуса. В связи с этим первостепенное значение приобретают экспериментальные исследования и сравнение их с результатами расчета. На рис. 4 показано сравнение расчетных и экспериментальных данных при разливке непрерывнолитой заготовки стали ШХ15СГ сечением  $250 \times 300$  мм со скоростью  $0,5 \text{ м/мин}$ .

Анализ экспериментальных и расчетных результатов показывает, что продолжительность затвердевания заготовки шарикоподшипниковой стали значительно выше, чем для других марок аналогичного сечения (например, при сравнении с кордовыми марками стали выше в  $1,4$  раза) и составляет для конкретного случая  $32\text{--}33$  мин. Максимальная погрешность между расчетными и экспериментальными данными составляет  $3\text{--}4\%$  и наблюдается для точки 1, расположенной близко к центральной части заготовки, в районе между ТУ-1 и ТУ-2.

Таким образом, обоснован выбор метода конечных элементов для расчетов процессов затвердевания и охлаждения непрерывнолитых заготовок, что является основой для разработки и совершенствования технологических процессов разливки на современных МНЛЗ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Саульев, В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток / В. К. Саульев. М.: Физмашгиз, 1960. 324 с.
2. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. М.: Наука, 1987. 600 с.

3. **Кавадеров, А. В.** Закономерности нагрева пластины и цилиндра одновременно излучением и конвекцией / А. В. Кавадеров, Ю. А. Самойлович // Тр. Всесоюз. НИИ металлургической теплотехники. Свердловск: Среднеуральское книжное изд-во, 1960. С. 44–58.
4. **Самойлович, Ю. А.** О применении метода прогонки для решения задач теплопроводности / Ю. А. Самойлович // Металлургическая теплотехника. Свердловск: Средне-Уральское кн. изд-во, 1965. С. 176–182.
5. **Самойлович, Ю. А.** О приближенных способах расчета затвердевания отливок / Ю. А. Самойлович // ИФЖ. 1966. Т. 11. № 5. С. 597–602.
6. **Самойлович, Ю. А.** Системный анализ кристаллизации слитка / Ю. А. Самойлович. Киев: Наукова думка, 1983. 244 с.
7. Прикладные задачи металлургической теплофизики / В. И. Тимошпольский и др. Мн.: Навука і тэхніка, 1991. 320 с.
8. **Самойлович, Ю. А.** Нагрев стали: справ. пособ. / Ю. А. Самойлович, В. И. Тимошпольский. Мн.: Выш. шк., 1990. 314 с.
9. Промышленные теплотехнологии. В 5-ти т. Т. 5. Моделирование нелинейных процессов / В. И. Тимошпольский и др. Мн.: Выш. шк., 2000. 320 с.
10. Затвердевание стального слитка в изложнице: Методы исследования режимов затвердевания и охлаждения / Ю. А. Самойлович и др. Мн.: Выш. шк., 2003. 223 с.
11. **Марукович, Е. И.** Математическое описание теплофизических процессов при затвердевании непрерывного слитка / Е. И. Марукович и др. // Докл. АН БССР. 1989. Т. XXXIII, № 8. С. 708–711.
12. **Зенкевич, О. К.** Метод конечных элементов в технике / О. К. Зенкевич. М.: Мир, 1975. 318 с.
13. **Сегерлинд, Л. Дж.** Применение метода конечных элементов / Л. Дж. Сегерлинд. М.: Мир, 1979. 392 с.
14. **Иванцов, Г. П.** Нагрев металла / Г. П. Иванцов. М.: Металлургиздат, 1948. 192 с.
15. **Тимошпольский, В. И.** Совершенствование технологии непрерывной разливки сортовых заготовок. Сообщение 2. Расчетный анализ процессов затвердевания и охлаждения непрерывнолитых заготовок / В. И. Тимошпольский, И. А. Трусова // Сталь. 2019. № 12. С. 12–17.

## REFERENCES

1. **Saul'ev V.K.** *Integrirovanie uravnenij parabolicheskogo tipa metodom setok* [Integration of parabolic equations by the grid method]. Moscow, Fizmathgiz Publ., 1960, 324 p.
2. **Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M.** *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 600 p.
3. **Kavaderov A.V., Samojlovich Ju.A.** *Zakonomernosti nagreva plastiny i cilindra odnovenno izlucheniem i konvekciej* [Regularities of heating a plate and a cylinder simultaneously by radiation and convection]. *Trudy Vsesojuznogo NII metallurgicheskoy teplotehniki* [Proceedings of the All-Union Research Institute of Metallurgical Heat Engineering]. Sverdlovsk, Sredneural'skoe knizhnoe izdatel'stvo Publ., 1960, pp. 44–58.
4. **Samojlovich Ju.A.** *O primenenii metoda progonki dlja reshenija zadach teploprovodnosti* [On the application of the sweep method to solve heat conduction problems]. *Metallurgicheskaja teplotehnika = Metallurgical heating engineering*. Sverdlovsk, Sredne-Ural'skoe knizhnoe izdatel'stvo, 1965, pp. 176–182.
5. **Samojlovich Ju.A.** *O priblizhennyh sposobah rascheta zatverdevanija otlivok* [About approximate methods for calculating the solidification of castings]. IFZh, 1966, vol.11, no. 5, pp. 597–602.
6. **Samojlovich Ju.A.** *Sistemnyj analiz kristallizacii slitka* [System analysis of ingot crystallization]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1983, 244 p.
7. **Timoshpol'skij V.I. et al.** *Prikladnye zadachi metallurgicheskoy teplofiziki* [Applied problems of metallurgical thermal physics]. Minsk, Navuka i tjechnika Publ., 1991, 320 p.
8. **Samojlovich Ju.A., Timoshpol'skij V.I.** *Nagrev stali* [Heating steel]. Minsk, Vyshhejschaja shkola Publ., 1990, 314 p.
9. **Timoshpol'skij V.I. et al.** *Promyshlennye teplotehnologii* [Industrial heat technologies]. Minsk, Vyshhejschaja shkola Publ., 2000, 320 p.
10. **Samojlovich Ju.A. et al.** *Zatverdevanie stal'nogo slitka v izlozhnice: Metody issledovanija rezhimov zatverdevanija i ohlazhdenija* [Solidification of a Steel Ingot in a Mold: Research Methods for Solidification and Cooling Modes]. Minsk, Vyshhejschaja shkola Publ., 2003, 223 p.
11. **Marukovich E.I.** *Matematicheskoe opisanie teplofizicheskikh processov pri zatverdevanii nepreryvnogo slitka* [Mathematical description of thermophysical processes during solidification of a continuous ingot]. *Doklady AN BSSR = The Doklady of the Academy of Sciences of the BSSR*, 1989, vol. XXXIII, no. 8, pp. 708–711.
12. **Zenkevich O.K.** *Metod konechnyh jelementov v tehnikе* [Finite element method in engineering]. Minsk, Mir Publ., 1975, 318 p.
13. **Segerlind L. Dzh.** *Primenenie metoda konechnyh jelementov* [Application of the finite element method]. Moscow, Mir Publ., 1979, 392 p.
14. **Ivancov G.P.** *Nagrev metalla* [Metal heating]. Moscow, Metallurgizdat Publ., 1948, 192 p.
15. **Timoshpol'skij V.I., Trusova I.A.** *Sovershenstvovanie tehnologii nepreryvnoj razlivki sortovyh zagotovok. Soobshhenie 2. Raschetnyj analiz processov zatverdevanija i ohlazhdenija nepreryvnyh zagotovok* [Improvement of the technology of continuous casting of billets. Communication 2. Computational analysis of solidification and cooling of continuously cast billets]. *Stal' = Steel*, 2019, no. 12, pp. 12–17.