ЖУРНАЛ ПРИКЛАДНОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

Том XXIII, выпуск 4 Октябрь 1975 г.

УДК 535.13

Н. С. Петров, Б. Б. Бойко, И. З. Джилавдари

ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА ОТ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ УСИЛИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ

В последнее время вопросы отражения света от усиливающих сред привлекают все большее внимание [1—4]. В [5] приближенно (методом ВКБ) получено выражение для коэффициента отражения плоской электромагнитной волны на границе раздела однородной прозрачной среды с усиливающей средой, комплексный показатель преломления которой изменяется по закону

$$\tilde{n}_2 = n_2^0 - \Delta(1 - e^{-2k\gamma z}) + i\varkappa_2, \tag{1}$$

где z — расстояние от границы раздела ($z \geqslant 0$), n_2^0 — значение показателя преломления на границе ($z = 0$), $k\gamma > 0$ — постоянная, характеризующая скорость убывания показателя преломления $\tilde{n}_2$ с глубиной z $\left(\text{множитель } k = \frac{\omega}{c}\right.$ введен для удобства вычислений$\left.\right)$, Δ — полный перепад показателя преломления (от $z = 0$ до $z \to \infty$), $\varkappa_2 < 0$ — коэффициент отрицательного поглощения ($\varkappa_2 = \mathrm{const}$). Заметим, что $\Delta > 0$ отвечает убывающему по глубине, а $\Delta < 0$ — нарастающему профилю показателя преломления. При этом в случае перпендикулярной поляризации (s — компонента) решение для напряженности электрического поля имеет вид (множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и в дальнейшем мы опускаем)

$$\mathbf{E} = F(z)\, e^{ik\xi x}\mathbf{s}, \tag{2}$$

где $\xi = n_1 \sin\alpha$, n_1 — показатель преломления прозрачной среды, из которой падает излучение, α — угол падения, x — переменная координата вдоль границы раздела (положительные значения отсчитываются вправо), $\mathbf{s}$ — единичный вектор нормали к плоскости падения ($\mathbf{s}^2 = 1$), а $F(z)$ удовлетворяет уравнению

$$F_z'' + k^2(\tilde{n}_2^2 - \xi^2)\, F(z) = 0. \tag{3}$$

Полученное в [5] приближенное решение данного уравнения не дает, однако, возможности найти распределение поля в любой точке. Это можно сделать лишь на основе точного решения. Оказывается, что в практически важном случае малых значений Δ и $\varkappa_2$ ($\Delta, \varkappa_2 \ll 1$) можно получить точные аналитические решения уравнения (3). Тогда, пренебрегая квадратами Δ и $\varkappa_2$ и их произведением, уравнение (3) можно представить в виде

$$F_z'' + k^2(A + Be^{-2k\gamma z})\, F(z) = 0. \tag{4}$$

Здесь

$$A = n_1^2\,[n^2(1 - 2\Delta') - \sin^2\alpha + 2in^2\varkappa],\ \ B = 2n_1^2 n^2 \Delta', \tag{5}$$

где $n = \dfrac{n_2^0}{n_1}$, $\Delta' = \dfrac{\Delta}{n_2^0}$, $\varkappa = \dfrac{\varkappa_2}{n_2^0}$. Заменой переменных

$$u = \frac{\sqrt{B}}{\gamma} e^{-k\gamma z} \tag{6}$$

это уравнение сводится к уравнению Бесселя

$$u^2 F''_u + u F'_u + (u^2 - \nu^2) F(u) = 0, \tag{7}$$

где

$$\nu^2 = -\frac{A}{\gamma^2}. \tag{7'}$$

Общее решение уравнения (4) при этом записывается в виде

$$F(z) = C_1 Z_\nu \left(\frac{\sqrt{B}}{\gamma} e^{-k\gamma z} \right) + C_2 Z_{-\nu} \left(\frac{\sqrt{B}}{\gamma} e^{-k\gamma z} \right), \tag{8}$$

где индекс ν в общем случае комплексный. Таким образом, нахождение амплитуды электрического поля волны для неоднородной среды с профилем показателя преломления (1) в данном случае сводится к функциям Бесселя (8) с вещественным аргументом (если $\Delta > 0$) и комплексным индексом.

Магнитное поле волны находим из уравнения Максвелла

$$\mathbf{H} = \frac{1}{ik} \operatorname{rot} \mathbf{E}. \tag{9}$$

Используя (2) с учетом (8), получаем

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{\mathbf{q}} + \mathbf{H}^{\mathbf{b}}, \tag{10}$$

где

$$\mathbf{H}^{\mathbf{q}} = -\xi F(z) e^{ik\xi x} \mathbf{q},$$

$$\mathbf{H}^{\mathbf{b}} = i\sqrt{B} \left\{ C_1 Z'_\nu \left(\frac{\sqrt{B}}{\gamma} e^{-k\gamma z} \right) + C_2 Z'_{-\nu} \left(\frac{\sqrt{B}}{\gamma} e^{-k\gamma z} \right) \right\} e^{ik(\xi x + i\gamma z)} \mathbf{b}. \tag{11}$$

Здесь $\mathbf{b}$ и $\mathbf{q}$ — соответственно единичные векторы вдоль x и z, штрих означает производную по z. Выражения (8), (11) содержат две произвольные постоянные C_1 и C_2. Поскольку неоднородная среда предполагается полубесконечной, то одну из них нужно положить равной нулю. Какую именно, обычно это устанавливается из дополнительных условий, накладываемых на решения, в частности, из требования поведения их на бесконечности. В нашем случае поведение решения определяется индексами бесселевых функций ν и $-\nu$. Оба они пропорциональны корню квадратному из комплексного числа A (5). Поэтому нам пока безразлично, какую из двух произвольных постоянных положить равной нулю, если в дальнейшем оговорить, какое значение квадратного корня берется. Следовательно, для поля $\mathbf{E}$ в неоднородной среде нужно взять выражение (2), где, согласно (8), надо положить

$$F(z) = C Z_\nu \left(\frac{\sqrt{B}}{\gamma} e^{-k\gamma z} \right). \tag{12}$$

Зная вид поля излучения в неоднородной среде, можно решить граничную задачу. Падающую и отраженную волны представим, как обычно, в виде [6]

$$\mathbf{E}_j = A_j e^{ik\mathbf{m}_j \mathbf{r}} \mathbf{s}. \tag{13}$$

Здесь $\mathbf{m}_j = \xi_j \mathbf{b} + \eta_j \mathbf{q}$, где ξ_j и η_j — составляющие векторов рефракции $\mathbf{m}_j$ вдоль $\mathbf{b}$ и $\mathbf{q}$, индекс $j = 0, 1$, причем 0 относится к падающей волне, а 1 — к отраженной, A_j — амплитуды соответствующих волн. Для падающей волны направление распространения и амплитуда A_0 считаются заданными. Если α — угол падения, то $\xi_0 = n_1 \sin\alpha$, $\eta_0 = n_1 \cos\alpha$.

Из равенства на границе ($z = 0$) тангенциальных составляющих векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ полей падающей, отраженной и преломленной волн получаем известный закон преломления для фазовых нормалей $\xi_0 = \xi_1 = \xi$ (при этом $\eta_1 = -\eta_0$), а также систему уравнений для амплитуд

$$\begin{aligned} &A_0 + A_1 - C Z_\nu\left(\frac{\sqrt{B}}{\gamma}\right) = 0, \\ &\eta_0 A_0 - \eta_0 A_1 - i\sqrt{B}\, C Z'_\nu\left(\frac{\sqrt{B}}{\gamma}\right) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Отсюда находим амплитудный коэффициент отражения для s-поляризации

$$r_s = \frac{A_1}{A_0} = \frac{\eta_0 Z_\nu\left(\frac{\sqrt{B}}{\gamma}\right) - i\sqrt{B}\, Z'_\nu\left(\frac{\sqrt{B}}{\gamma}\right)}{\eta_0 Z_\nu\left(\frac{\sqrt{B}}{\gamma}\right) + i\sqrt{B}\, Z'_\nu\left(\frac{\sqrt{B}}{\gamma}\right)}. \tag{15}$$

Эту формулу можно преобразовать, воспользовавшись соотношениями между функциями Бесселя и их производными [7], а именно:

$$Z'_\nu(u) = -\frac{\nu}{u} Z_\nu(u) + Z_{\nu-1}(u) = \frac{\nu}{u} Z_\nu(u) - Z_{\nu+1}(u). \tag{16}$$

При этом

$$r_s = \frac{(\eta_0 - \eta) Z_\nu\left(\frac{\sqrt{B}}{\gamma}\right) + i\sqrt{B}\, Z_{\nu+1}\left(\frac{\sqrt{B}}{\gamma}\right)}{(\eta_0 + \eta) Z_\nu\left(\frac{\sqrt{B}}{\gamma}\right) - i\sqrt{B}\, Z_{\nu+1}\left(\frac{\sqrt{B}}{\gamma}\right)}, \tag{17}$$

где $\eta = i\gamma\nu$. Представляя ν в виде $\nu = \nu_1 - i\nu_2$, из (7′) имеем

$$\begin{aligned} &\nu_1 = \pm\frac{n_1}{\gamma\sqrt{2}}\sqrt{-[n^2(1-2\Delta') - \sin^2\alpha] + \sqrt{[n^2(1-2\Delta') - \sin^2\alpha]^2 + 4n^4\varkappa^2}}, \\ &\nu_2 = \pm\frac{n_1}{\gamma\sqrt{2}}\sqrt{[n^2(1-2\Delta') - \sin^2\alpha] + \sqrt{[n^2(1-2\Delta') - \sin^2\alpha]^2 + 4n^4\varkappa^2}}. \end{aligned} \tag{18}$$

Из (5), (7′) видно, что знак произведения $\nu_1\nu_2$ совпадает со знаком $\varkappa$. Поэтому при $\varkappa < 0$ $\nu_1\nu_2 < 0$, т. е. ν_1 и ν_2 имеют разные знаки. Мы будем выбирать эти знаки таким образом, чтобы сохранялся непрерывный по $\varkappa$ переход решений для усиливающей (поглощающей) среды в известные решения для прозрачной среды (см. также [3]). Это значит, что для $\mathrm{Re}A > 0$ (при $\varkappa = 0$ это условие отвечает частичному отражению на границе раздела) $\nu_1 < 0$, $\nu_2 > 0$, а для $\mathrm{Re}A \leqslant 0$ (при $\varkappa = 0$ это условие отвечает полному отражению) $\nu_1 > 0$, $\nu_2 < 0$.

Известно, что поведение бесселевых функций существенно зависит от модуля отношения аргумента и индекса этих функций, т. е. в нашем случае от величины $\frac{\sqrt{B}}{\gamma|\nu|} = \sqrt{\frac{B}{|A|}}$. Заметим, что последняя не содержит параметра γ, характеризующего скорость изменения показателя преломления с глубиной. Рассмотрим случай, когда аргумент функции Бесселя велик, т. е. $\frac{\sqrt{B}}{\gamma|\nu|} \gg 1$. При этом можно воспользоваться асимптотическим разложение[м] функций Бесселя, которое имеет вид [7]

$$Z_\nu(\mu) = \left(\frac{2}{\pi\mu}\right)^{1/2} \cos\left(\mu - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (19)$$

С учетом (18) при $\Delta' > 0$ для энергетического коэффициента отражения $R_s = |r_s|^2$ получаем

$$R_s = \frac{(\operatorname{ch} 2p + \cos 2\varphi)[(\eta_0 - \eta_1)^2 + \eta_2^2] + B(\operatorname{ch} 2p - \cos 2\varphi) - 2\sqrt{B}[(\eta_0 - \eta_1)\operatorname{sh} 2p + \eta_2 \sin 2\varphi]}{(\operatorname{ch} 2p + \cos 2\varphi)[(\eta_0 - \eta_1)^2 + \eta_2^2] + B(\operatorname{ch} 2p - \cos 2\varphi) + 2\sqrt{B}[(\eta_0 - \eta_1)\operatorname{sh} 2p - \eta_2 \sin 2\varphi]}. \quad (20)$$

Здесь

$$\eta = i\gamma\nu = \eta_1 + i\eta_2, \quad p = \frac{\eta_1\pi}{2\gamma}, \quad \varphi = \frac{\sqrt{B}}{\gamma} - \frac{\eta_2\pi}{2\gamma} - \frac{\pi}{4}.$$

Легко видеть, что в случае $\nu_1 > 0$, $\nu_2 < 0$, т. е. для $\sin^2\alpha \geqslant n^2(1 - 2\Delta')$, величина $R_s > 1$.

Проведем анализ полученной формулы в предположении, что параметр γ мал ($\gamma \ll 1$). При этом

$$R_s = \frac{\eta_2^2 + (\eta_0 - \eta_1)^2 + B - 2\sqrt{B}(\eta_0 - \eta_1)\operatorname{th} 2p}{\eta_2^2 + (\eta_0 - \eta_1)^2 + B + 2\sqrt{B}(\eta_0 + \eta_1)\operatorname{th} 2p}. \quad (21)$$

Для предельного угла падения $\sin^2\alpha_0 = n^2(1 - 2\Delta')$, $\eta_0 = n_1\cos\alpha_0 = n_1\sqrt{1 - n^2(1 - 2\Delta')}$, $\eta_1 = -n_1 n\sqrt{|\varkappa|}$, $\eta_2 = |\eta_1|$. В этом случае выражение (21) имеет при $n \simeq 1 - |\varkappa| - \sqrt{2|\varkappa|\Delta'}$ максимум, равный приблизительн[о]

$$R_s^{\max} \approx \frac{\sqrt{2(|\varkappa| + \Delta' + \sqrt{2|\varkappa|\Delta'})} + \sqrt{|\varkappa|} + \sqrt{2\Delta'}\operatorname{th}\left(\frac{\pi\sqrt{|\varkappa|}}{\gamma/n_1}\right)}{\sqrt{2(|\varkappa| + \Delta' + \sqrt{2|\varkappa|\Delta'})} - \sqrt{|\varkappa|} - \sqrt{2\Delta'}\operatorname{th}\left(\frac{\pi\sqrt{|\varkappa|}}{\gamma/n_1}\right)}. \quad (22)$$

Следует отметить, что хотя это выражение получено в предположении $\frac{\Delta'}{|\varkappa|} \gg 1$, оно дает верный результат и при переходе к случаю однородной среды ($\Delta' = 0$). Действительно, при $\Delta' = 0$ из (22) имеем $R_s^{\max} \simeq \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, что совпадает с известным результатом для однородной усиливающей среды [3], причем оказывается справедливым и выражение для экстремального значени[я] $n \simeq 1 - |\varkappa|$. Если $\Delta' \gg |\varkappa|$, то из (22) получаем

$$R_s^{\max} \simeq \frac{1 + \operatorname{th}\left(\frac{\pi\sqrt{|\varkappa|}}{\gamma/n_1}\right)}{1 - \operatorname{th}\left(\frac{\pi\sqrt{|\varkappa|}}{\gamma/n_1}\right) + \frac{|\varkappa|}{2\Delta'}}. \quad (23)$$

Последняя формула может быть использована для расчета максимально возможных коэффициентов отражения при заданных параметрах $\varkappa$, γ/n_1 и Δ'. Согласно расчету, например, при $\gamma/n_1 \simeq 10^{-3}$, $\Delta' \simeq 10^{-3}$ и $|\varkappa| \simeq 2{,}5\cdot 10^{-4}$ ($K \simeq 50\,см^{-1}$ для $\lambda = 7\cdot 10^{-5}\,см$) величина $R_s^{\max} \simeq 16$, в то время как при $\Delta' \simeq 5\cdot 10^{-3}$ и тех же значениях γ/n_1 и $\varkappa$ $R_s^{\max} \simeq 80$. Из (23) прежде всего следует, что чем меньше γ (величине $1/\gamma$ пропорциональна толщина усиливающего слоя), тем при меньших значениях $\varkappa$ достигается $R_s^{\max}$. Оказывается, что при заданных значениях некоторого обобщенного параметра $\sigma = \dfrac{\pi\sqrt{\Delta'}}{\gamma/n_1}$ (по предположению $\sigma \gg 1$) существует так называемый max maximorum $R_s^{\max}$ по параметру $\zeta = \sqrt{\dfrac{|\varkappa|}{\Delta'}}$. Условие его в рассматриваемом приближении ($\zeta \ll 1$) имеет вид

$$\operatorname{th}(\sigma\zeta) + \frac{1}{2}\sigma^{-1}\zeta = 1. \tag{24}$$

При этом величина max maximorum $R_s^{\max}$ приближенно может быть вычислена по формуле

$$R_s^{\max\max} \simeq \frac{4\sigma}{\zeta(1+\sigma\zeta)}. \tag{25}$$

Например, для $\sigma = 10\,(\Delta' \simeq 10^{-3},\ \gamma/n_1 \simeq 10^{-2})$ значение $R_s^{\max\max} \simeq 55$ и достигается при $|\varkappa| = 5\cdot 10^{-5}\,(K \simeq 10\,см^{-1})$, а для $\sigma = 50\,(\Delta' \simeq 25\cdot 10^{-3},\ \gamma/n_1 \simeq 10^{-2})$ $R_s^{\max\max} \simeq 6\cdot 10^2$, что достигается при $|\varkappa| = 1{,}25\cdot 10^{-4}\,(K \simeq 25\,см^{-1})$.

Таким образом, в данной модели усиливающей среды в отличие от рассмотренных ранее [1—4] возможны сколь угодно большие коэффициенты усиления при отражении.

Следует отметить, что аналогичным образом на основании (17) можно рассчитать коэффициент отражения в случае неоднородной среды с нарастающим по глубине профилем показателя преломления, т. е. для $\Delta < 0$. Оказывается, что здесь при тех же предположениях, а именно $\Delta' \gg |\varkappa|$, коэффициент отражения существенно меньше. Отсюда можно заключить, что переотражение излучения вследствие неоднородности среды, имеющее место в обоих случаях ($\Delta < 0$, $\Delta > 0$), существенно на величине коэффициента отражения не сказывается. По-видимому, большие коэффициенты отражения в случае убывающего по глубине профиля показателя преломления связаны с «заходом» излучения в глубь усиливающей среды (при $\varkappa = 0$ это было бы равносильно отражению на некоторой глубине (см. также [5])).

Литература

1. Б. Я. Коган, В. М. Волков, С. А. Лебедев. Письма в ЖЭТФ, **16**, № 3, 114, 1972.
2. Г. Н. Романов, С. С. Шахиджанов. Письма в ЖЭТФ, **16**, № 5, 298, 1972.
3. Б. Б. Бойко, Н. С. Петров, И. З. Джилавдари. ЖПС, **18**, № 4, 727, 1973.
4. С. А. Лебедев, В. М. Волков, Б. Я. Коган. Опт. и спектр., **35**, № 5, 976, 1973.
5. Б. Б. Бойко, Н. С. Петров, И. З. Джилавдари. Квантовая электроника и лазерная спектроскопия. Минск, «Наука и техника», 1974.
6. Ф. И. Федоров. Оптика анизотропных сред. Минск, Изд-во АН БССР, 1958.
7. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. М., ГИФМЛ, 1963.

Поступило в редакцию 9 июля 1974 г.