Министерство образования
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА

*Методические указания
и контрольные задания*

Минск
БНТУ
2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 2»

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА

Методические указания и контрольные задания для студентов инженерных и инженерно-экономических специальностей

Минск
БНТУ
2014

УДК 519.85(075.8)
ББК 18.87я7
Р47

Составитель *А. Д. Корзников*

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доцент *В. В. Веременюк;*
канд. физ.-мат. наук, доцент *И. Н. Катковская*

Методические указания предназначены для студентов экономических и технических специальностей при изучении разделов «Математическое программирование», «Прикладная математика» и «Математические методы поиска оптимальных решений». Описаны алгоритмы решения задач оптимизации транспортного типа, основанные на идеях линейного программирования (модифицированный метод потенциалов) и методах оптимизации на графах. Работа алгоритмов детально проиллюстрирована на примерах. Подобраны задачи для самостоятельного решения. В силу чрезвычайной простоты программная реализация сетевого алгоритма вполне доступна студентам, обладающим элементарными навыками программирования.

Издание также будет полезно для преподавателей, ведущих занятия по соответствующим разделам.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Среди оптимизационных задач особое место занимают задачи оптимизации транспортного типа. Они являются математической моделью задач распределения некоторого продукта в территориально агрегированных системах: информационных, транспортных, энергетических и т.п. Большинство таких моделей являются задачами линейного программирования специального вида, наиболее распространенной из которых является классическая транспортная задача. Следует, однако, отметить, что классическая модель далеко не всегда достаточно адекватно отображает реально существующие задачи. В качестве такой модели больше подходит транспортная задача с ограниченными пропускными способностями, а еще лучше – транспортная задача в сетевой постановке. До настоящего времени трудно назвать какую-либо книгу, имеющую характер практического руководства к решению задач такого типа. Настоящее пособие поможет восполнить этот пробел. Предполагается, что читатель знаком с основами линейного программирования.

В первой части рассматривается классическая транспортная задача и модифицированный метод потенциалов решения транспортной задачи с ограничениями на пропускные способности.

Во второй – оригинальный простой алгоритм решения транспортной задачи в сетевой постановке, позволяющий получить оптимальное распределение продукта с указанием объемов и маршрутов поставки даже в случае, когда ограничения задачи являются несовместными.

Решение любой реальной оптимизационной задачи немыслимы без применения компьютерной техники. Целью пособия является дать представление о содержании процесса решения задачи для его полной или частичной программной реализации.

По каждому разделу подобраны контрольные задания для самостоятельного решения и решения с помощью ЭВМ.

Методические указания предназначены для студентов экономических и технических специальностей при изучении разделов «Математическое программирование», «Прикладная математика» и «Математические методы поиска оптимальных решений». А также будет полезным для преподавателей, ведущих занятия по соответствующим разделам.

1. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ПРОПУСКНЫМИ СПОСОБНОСТЯМИ

Транспортная задача является математической моделью широкого круга задач, которые чаще других встречаются в практических приложениях линейного программирования. Ее классическая формулировка состоит в следующем.

Имеется m источников однородного продукта или взаимозаменяемых продуктов и n пунктов его потребления (или стоков). Заданы объемы продукта a_i у каждого источника (или его мощность) и размеры спроса b_i (мощность) каждого стока. Известны также затраты c_{ij}, связанные с перемещением единицы продукта из источника i в сток j. Кроме того, объем перемещаемого продукта из источника i в сток j не может превышать величины d_{ij} (пропускной способности коммуникации). Требуется составить план перемещения продукта из источников в стоки, обеспечивающий наиболее экономным путем максимальное удовлетворение спроса всех стоков (пунктов потребления), т.е. указать объемы x_{ij}, $0 \le x_{ij} \le d_{ij}$, перемещаемого продукта из каждого источника i в каждый сток j, при которых общие затраты, связанные с этим перемещением будут минимальными.

Таким образом, исходными данными для транспортной задачи являются: вектора $\overline{a} = \left(a_1, a_2, \ldots, a_m\right)$, $\overline{b} = \left(b_1, b_2, \ldots, b_n\right)$ – мощности источников и стоков соответственно; матрица затрат $C = \left\| c_{ij} \right\|_{m \times n}$ и матрица пропускных способностей коммуникаций $D = \left\| d_{ij} \right\|_{m \times n}$.

Построим математическую модель сформулированной задачи. Обозначим через $X = \left\| x_{ij} \right\|_{m \times n}$ – план перемещения продукта. Тогда суммарные затраты , связанные с этим перемещением из всех источников во все стоки, выражаются суммой

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \ . \qquad (1)$$

Если суммарная мощность источников $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \right)$ равна суммарной мощности стоков $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j \right)$, то транспортная задача называется *замкнутой*. Тогда условия полного удовлетворения спроса (мощности) каждого стока имеют вид

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1, 2, \dots, n. \qquad (2)$$

Весь продукт из каждого источника должен быть перемещен в стоки. Формально это означает, что

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1, 2, \dots, m. \qquad (3)$$

Кроме того, объемы переносимого продукта – неотрицательные числа, которые не могут превышать пропускных способностей соответствующих коммуникаций, т.е. должны выполняться условия:

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij}, \ i = 1, 2, \dots, m; \ j = 1, 2, \dots, n. \qquad (4)$$

Таким образом, формально, транспортная задача сводится к минимизации целевой функции (1), при условии, что переменные удовлетворяют ограничениям (2)–(4).

Очевидно, что для любой матрицы $X = \left\| x_{ij} \right\|_{m \times n}$, удовлетворяющей условиям (2) – (4), имеют место неравенства:

$$x_{ij} \le \min\left(a_i, b_j\right), \ i = 1, 2, \dots, m; \ j = 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому, если $d_{ij} \geq \min\left(a_i, b_j\right)$, для всех $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, то мы имеем классическую транспортную модель. Условимся, что если $d_{ij} \geq \min\left(a_i, b_j\right)$, то будем считать пропускную способность этой коммуникации равной любому числу большему, чем $\min\left(a_i, b_j\right)$.

Следует отметить, что во многих прикладных задачах суммарная мощность источников может превосходить суммарную мощность стоков $\left(b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j > 0\right)$ и наоборот $\left(a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i > 0\right)$.

Такая задача называется *открытой транспортной моделью.* Открытую модель можно свести к замкнутой.

В первом случае вводится фиктивный сток $(n+1)$ с мощностью b_{n+1}. Размеры остатка продукта $x_{i,n+1}$ у каждого источника i можно регулировать в зависимости от введенного штрафа за единицу оставшегося у i-го источника продукта. Часто полагают $c_{i,n+1} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Пропускные способности $d_{i,n+1}$ коммуникаций, ведущих в фиктивный сток неограниченны, т.е. равны любому числу, большему, чем $\min\left(a_i, b_{n+1}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Во втором случае вводится фиктивный источник $(m+1)$ с мощностью a_{m+1}. Размер неудовлетворенной мощности $x_{m+1,j}$ j-го стока может регулироваться величиной ущерба $c_{m+1,j}$. Если ущерб для всех стоков одинаков, то полагают $c_{m+1,j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Пропускные $d_{m+1,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ – неограниченны, т.е. равны любому числу, большему, чем величина $\min\left(a_{m+1}, b_j\right)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ соответственно.

В силу выше сказанного, в дальнейшем мы будем рассматривать замкнутую транспортную модель, т.е. полагая, что

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,. \tag{5}$$

Следует, однако, заметить, что если условие (5) является необходимым и достаточным для разрешимости классической транспортной задачи ($d_{ij} \ge \min\left(a_i, b_j\right)$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$), то задача (1)–(4) не всегда разрешима при выполненных условиях (5), поскольку величины пропускных способностей коммуникаций могут оказаться недостаточными для перемещения всего имеющегося продукта. Однако, если существует допустимое решение, удовлетворяющее ограничениям (2)–(4), то это гарантирует разрешимость задачи (1)–(4), так как линейная функция (1) заведомо ограничена на множестве допустимых решений.

Задача (1)–(4) является задачей линейного программирования (ЛП) и может быть решена симплекс-методом (если существует допустимое решение). Но для этого ее необходимо привести к канонической форме, добавив в неравенства (4) неотрицательные слабые переменные $z_{i,j}$; $x_{i,j} + z_{i,j} = d_{i,j}$, $x_{i,j} \ge 0$, $z_{i,j} \ge 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда переменных в задаче ЛП – $2m \cdot n$, а матрица ограничений хоть и имеет специфическую структуру (ее элементы 0 или 1), ее порядок $\left(m + n + mn\right) \times \left(2mn\right)$ очень велик, что, конечно же, нецелесообразно, т.к. вся информация о задаче содержится в матрицах C, D и векторах $\overline{a}, \overline{b}$. Поэтому для ее решения используется модификация симплекс-метода, учитывающая эту специфику, которая называется *методом потенциалов*.

Численный анализ транспортной задачи, как и любой задачи ЛП, существенным образом опирается на критерий оптимальности допустимого решения $X = \left\| x_{ij} \right\|_{m \times n}$, выводить который нет необходимости, поскольку он является частным случаем соответствующих теорем двойственности задачи ЛП. Приведем его формулировку.

Теорема. *Для оптимальности допустимого решения (плана) $X = \left\| x_{ij} \right\|_{m \times n}$ транспортной задачи, необходимо и достаточно существование чисел $u_1, u_2, \ldots, u_m$ и $v_1, v_2, \ldots, v_n$ таких, что*

$$u_i + v_j = c_{ij}, \text{ если } 0 < x_{ij} < d_{ij}, \tag{6}$$

$$u_i + v_j \le c_{ij}, \text{ если } x_{ij} = 0, \tag{7}$$

$$u_i + v_j \ge c_{ij},\ \text{если } x_{ij} = d_{ij}. \tag{8}$$

Заметим, что если речь идет о классической транспортной задаче ($d_{ij} > \min\left(a_i, b_j\right)$), то условия (6) – (8) равносильны тому, что

$$u_i + v_j = c_{ij},\ \text{если } x_{ij} > 0, \tag{9}$$

$$u_i + v_j \le c_{ij},\ \text{если } x_{ij} = 0. \tag{10}$$

Решение любой задачи ЛП симплекс-методом осуществляется путем перехода от одного базисного решения к другому, для которого значение целевой функции уменьшается (в случае отыскания ее минимума). Поэтому и для транспортной задачи (ТЗ) базисные решения, которые мы будет называть *опорными планами*, играют особую роль.

Число переменных ТЗ равно $n \cdot m$, а число ограничений – равенств $\left(m+n\right)$. Переменные x_{ij} удобно нумеровать с помощью двух индексов. Поэтому допустимое решение X задачи целесообразно записывать в виде матрицы $X = \left\|x_{ij}\right\|_{m\times n}$, а не вектора, как в общей задаче ЛП. Однако, при анализе ТЗ бывает полезно записывать условия (2), (3) в векторной форме.

Обозначим через A_{ij} вектор, компоненты которого состоят из коэффициентов при переменной x_{ij}. Размерность вектора A_{ij} совпадает с числом уравнений (2), (3) и равна $\left(m+n\right)$. Поскольку переменная x_{ij} входит только в *i*-е уравнение системы (2) и в *j*-е уравнение системы (3), причем коэффициенты при ней в обоих уравнениях равны единице, то вектор A_{ij} имеет вид (см. ниже), т.е. у $\left(n+m\right)$-мерного вектора A_{ij} *i*-я и (m+*j)*-я компоненты равны единице, а остальные – нулю.

$$A_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \leftarrow m \\ \\ \\ \\ \leftarrow m+j \\ \\ \\ \leftarrow m+n \end{array}$$

Если обозначить $B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, то система уравнений (2), (3) может быть записана в векторной форме

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} A_{ij} = B \,. \tag{11}$$

В ряде случаев оказывается удобным графический способ задания ТЗ. На плоскости отмечаются источники и стоки. Каждый источник соединяется с каждым стоком, направленным отрезком (коммуникацией). На рис. 1 изображена ТЗ с тремя источниками и стоками, мощности которых a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 соответственно, а пропускные способности коммуникаций d_{ij}, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$.

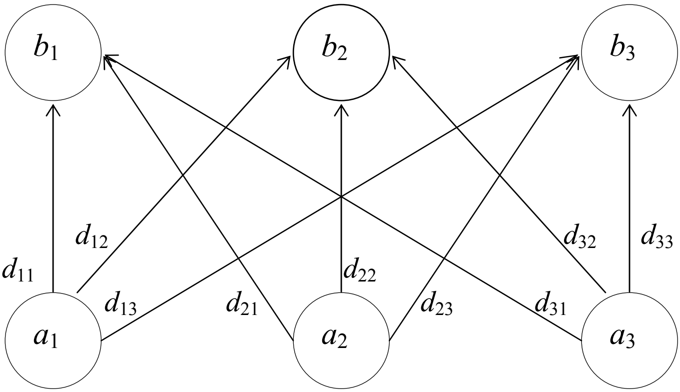

Рис. 1

Решить задачу (1)–(4) – это значит указать объемы x_{ij} перемещаемого продукта по каждой коммуникации (i, j), связывающей i-й источник с j-м стоком, не превыщающие их пропускных способностей таким образом, чтобы сумма перемещаемого продукта из каждого источника и в каждый сток равнялась их мощности. При этом значение целевой функции (1) должно быть минимальным.

Согласно общему определению базисного решения задачи ЛП, решение является базисным, если векторы, соответствующие в системе ограничений положительным переменным, являются линейнонезависимыми. Для ТЗ компоненту (i, j) допустимого решения $X = \|x_{ij}\|_{m \times n}$ назовем основной, если $0 < x_{ij} < d_{ij}$. Для классической ТЗ правая часть неравенства выполняется автоматически, поэтому (i, j) является основной компонентой, если $x_{ij} > 0$. Следуя общему определению, допустимое решение X для ТЗ будет базисным (опорным планом), если система векторов A_{ij} соответствующих основным компонентам допустимого решения *X*, линейно независима.

В силу специфики ТЗ как задачи ЛП, понятие опорного плана имеет наглядный геометрический смысл. Обратимся к графическому способу задания ТЗ. Последовательность коммуникаций вида

$$\left(i_1,\, j_1\right),\, \left(i_2,\, j_1\right),\, \left(i_2,\, j_2\right),...,\left(i_{k-1},\, j_{k-1}\right),\, \left(i_k,\, j_{k-1}\right),\left(i_k,\, j_k\right) \quad (12)$$

назовем *цепью коммуникаций*, связывающей источник i_1 и сток j_k.

Например, цепь $(2,1),(3,1),(3,2),(1,2),(1,3)$ на рис. 1 связывает источник 2 со стоком 3. Цепь коммуникаций характерна тем, что любые две ее соседние коммуникации либо исходят из одного источника, либо заканчиваются в одном стоке. Следует заметить, что в процессе движения по цепи коммуникаций часть из них будет проходить в противоположном направлении (от стока к источнику). Это относится, например, к коммуникациям $(3,1),(1,2)$ (рис. 1).

Цепь (12), к которой добавлена коммуникация $\left(i_1,\, j_k\right)$ является *замкнутой цепью* или *циклом*. Так, если к цепи на рис.1 добавить коммуникацию $(2,3)$, то мы получим цикл, который начинается и заканчивается в источнике, с номером 2.

Каждой коммуникации $(i,\, j)$ соответствует компонента $(i,\, j)$ матрицы $X = \left\|x_{ij}\right\|_{m\times n}$ и вектор A_{ij} ограничений ТЗ. Приводимое ниже утверждение дает возможность охарактеризовать линейно независимые системы векторов ограничений ТЗ в геометрических терминах.

Теорема 1. *Система* $\left\{A_{ij}\right\}$ *векторов ограничений ТЗ является линейно независимой тогда и только тогда, когда из коммуникации соответствующих векторам системы, невозможно составить цикл*.

Эта теорема позволяет дать еще одно эквивалентное определение опорного плана ТЗ, которое имеет понятный геометрический смысл.

План $X = \left\| x_{ij} \right\|_{m \times n}$ транспортной задачи является опорным, если из его основных компонент невозможно составить цикл.

Между компонентами $(i,\ j)$ матрицы X, векторами ограничений A_{ij} и коммуникациями $(i,\ j)$ в сетевой постановке ТЗ существует естественное взаимно однозначное соответствие: вектор A_{ij} соответствует компоненте матрицы X, расположенной в i-й строке и j-м столбце и коммуникации $(i,\ j)$ в сетевой постановке ТЗ. В рассмотренном выше примере ТЗ в сетевой постановке $m = n = 3$, т.е. матрица X имеет порядок 3×3 (рис. 2).

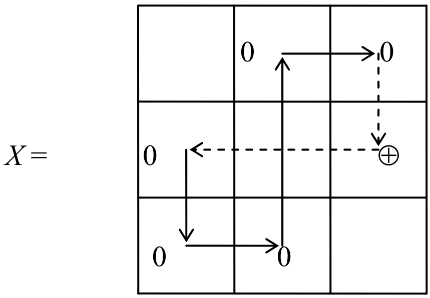

Рис. 2

Компоненты, соответствующие цепи $(2,1),(3,1),(3,2)$, $(1,2)$, $(1,3)$, отмечены нулями. Из них невозможно составить цикл, следовательно, система векторов

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ A_{31} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ A_{32} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ A_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ограничений является линейно независимой.

Если к рассматриваемой цепи добавить коммуникацию $(2,3)$ (компоненту $(2,3)$ в матрице X, пометив знаком «⊕» (рис.2)), то получим цикл. Т.е. добавление в систему векторов ограничений вектора A_{23} делает ее линейно зависимой. Действительно, легко проверить, что $A_{23} = A_{13} - A_{12} + A_{32} - A_{31} + A_{21}$.

Приведем простой формальный алгоритм (правило вычеркивания), который позволяет установить, образует ли некоторое множество *S* компонент матрицы *X* цикл, и построить его в случае существования, либо убедиться в отсутствии цикла. Последнее означает, что компоненты матрицы *X* из данного множества *S* являются базисными.

Последовательно просматриваем строки матрицы *X* и вычеркиваем те из них, которые либо не содержат элементов множества *S*, либо содержат только один такой элемент. Затем просматриваем столбцы матрицы *X* и вычеркиваем те из них, которые содержат не более одного (не вычеркнутого) элемента множества *S*. Далее повторяем весь процесс, просматривая вначале строки, а затем столбцы матрицы *X* (точнее, ее подматрицы, полученной в результате вычеркивания строк и столбцов на предыдущих шагах). Процесс заканчивается одним из двух исходов:

1. Все строки и столбцы матрицы *X* оказались вычеркнутыми. Это означает, что из компонент множества S невозможно составить цикл и, следовательно, они являются базисными.

2. Не вычеркнутые элементы матрицы *X* образуют ее подматрицу, в каждой строке и столбце которой имеется, по крайней мере, две компоненты из множества *S*. Двигаясь от любой компоненты множества *S* к другой строке, затем по столбцу, опять по строке и т.д. мы вернемся к начальной компоненте, так как число элементов множества *S* конечно. То есть, будет получен цикл.

Таким образом, если *X* – опорный план ТЗ, то из его основных (базисных) компонент невозможно составить цикл, а число базисных компонент равно $m+n-1$. Заметим, что если ТЗ является вырожденной, то некоторые базисные компоненты могут равняться *0* либо $d_{ij} < \min(a_i, b_j)$. Мы не будем обсуждать вопросы, связанные с вырожденностью, ограничив себя случаем невырожденной задачи. Заметим только, что если к базисным компонентам опорного плана добавить любую другую компоненту, то, как было показано выше, мы получим цикл, поскольку соответствующая система векторов ограничений A_{ij} станет линейно зависимой.

Опишем отдельную итерацию модифицированного метода потенциалов в предположении, что имеется опорный план $X = \left\| x_{ij} \right\|_{m \times n}$ (допустимое базисное решение) ТЗ. Если в ТЗ все $d_{ij} \geq \min\left(a_i, b_j\right)$, $i = 1,...,m;\ j = 1,...n$, то это обычный метод потеницалов.

Обозначим через $B\left(X\right) = \left\{\left(i, j\right)\right\}$ – множество базисных компонент опорного плана *X, 0(X)* – нулевых (небазисных), а *D(X)* компонент (небазисных), равных $d_{ij} < \min\left(a_i, b_j\right)$.

1. Из системы уравнений $u_i + v_j = c_{ij}$, $\left(i, j\right) \in B\left(X\right)$, составленных для каждой базисной компоненты $\left(i, j\right)$, находим потенциалы $u_i,\ i = 1,...,m;\ v_j,\ j = 1,...n$. Заметим, что поскольку число переменных $m + n$ больше числа уравнений $m + n - 1$, то одна переменная является заведомо свободной и может быть выбрана произвольно (например, равно 0). Это позволяет значительно облегчить процесс отыскания потенциалов.

2. Проверяем опорный план на оптимальность. Вычисляем величины $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ для всех небазисных компонент $\left(i, j\right) \in B\left(X\right)$ опорного плана.Если $\Delta_{ij} \geq 0$ для $\left(i, j\right) \in 0\left(X\right)$ и $\Delta_{ij} \leq 0$ для $\left(i, j\right) \in D\left(X\right)$, то опорный план *X* является решением ТЗ. В противном случае переходим к этапу 3 улучшения опорного плана.

3. Среди чисел Δ_{ij}, $\left(i, j\right) \in 0\left(X\right)$ и $-\Delta_{ij}$, $\left(i, j\right) \in D\left(X\right)$ есть отрицательные, и пусть наименьшее из них соответствует компоненте $\left(i_0, j_0\right)$. Возможны два случая: а)$\left(i_0, j_0\right) \in 0\left(X\right)$; б)$\left(i_0, j_0\right) \in D\left(X\right)$.

Дальнейшее течение этапа 3 определяется тем, какой из этих случаев имеет место.

Замечание. В случае классической ТЗ ($d_{ij} \geq \min\left(a_i, b_j\right)$*), может иметь место только случай а).*

а) $x_{i_0 j_0} = 0$. Улучшение плана X осуществляется путем увеличения количества продукта, перемещаемого по коммуникации $\left(i_0,\, j_0\right)$ (увеличения нулевой компоненты $x_{i_0 j_0}$). Добавление компоненты $x_{i_0 j_0}$ к базисным компонентам порождает единственный цикл

$$x_{i_0 j_0},\, x_{i_0 j_1},\, x_{i_1 j_1},\, x_{i_1 j_2},\, \ldots,\, x_{i_k j_0}. \qquad (13)$$

Определим $\delta_1 = \min\limits_{l=0,1,\ldots,k} x_{i_l j_{l+1}}$ $(j_{k+1} = j_0)$, $\delta_2 = \min\limits_{l=0,1,\ldots,k} (d_{i_l j_l} - x_{i_l j_l})$, и положим $\delta = \min(\delta_1,\, \delta_2,\, d_{i_0 j_0})$.

Для получения нового опорного плана с меньшим значением целевой функции, нечетные компоненты $x_{i_0 j_0}, x_{i_1 j_1}, \ldots, x_{i_k j_k}$, цикла (13) следует увеличить на δ, четные компоненты $x_{i_0 j_1}, \ldots, x_{i_{k-1} j_k}$, $x_{i_k j_{k+1}}$, цикла уменьшить на δ. При этом будет получен новый опорный план.

б) $x_{i_0 j_0} = d_{i_0 j_0}$. Улучшение плана X осуществляется путем уменьшения количества продукта, перемещаемого по коммуникации $\left(i_0,\, j_0\right)$ (уменьшения значения компоненты $x_{i_0 j_0} = d_{i_0 j_0}$).

Для цикла (13) определим $\delta_1 = \min\limits_{l=0,1,\ldots,k} x_{i_l j_l}$, $\delta_2 = \min\limits_{l=0,1,\ldots,k} (d_{i_l j_{l+1}} - x_{i_l j_{l+1}})$ $(j_{k+1} = j_0)$, и положим $\delta = \min(\delta_1,\, \delta_2)$.

Уменьшим нечетные компоненты $x_{i_0 j_0},\, x_{i_1 j_1},\, \ldots,\, x_{i_k j_k}$ цикла (13) на δ, и увеличим четные компоненты $x_{i_0 j_1}, x_{i_1 j_2} \ldots,$ $x_{i_k j_{k+1}}$ $(x_{i_k j_0})$, цикла на величину δ. В результате получим новый опорный план.

Можно проверить, что в случае невырожденности задачи $(\delta > 0)$, значение целевой функции для нового опорного плана будет меньше, чем для предыдущего.

Таким образом, если исходный опорный план ТЗ найден, то через конечное число итераций метод приводит к ее решению (последнее заключение следует, как обычно, из монотонного убывания целевой функции и конечности числа опорных планов задачи).

Как уже отмечалось, в отличие от классической транспортной задачи, рассматриваемая задача может не иметь ни одного опорного плана (ограничения несовместны).

Излагаемый ниже способ дает возможность либо построить достаточно экономичный опорный план ТЗ, либо убедиться в ее неразрешимости.

Процесс построения исходного опорного плана складывается из предварительного этапа (метод минимального элемента) и ряда итераций метода потенциалов, применяемого к так называемой расширенной задаче. Предварительный этап разбивается на несколько однотипных шагов.

На первом шаге, среди элементов матрицы $C = \|c_{ij}\|_{m\times n}$ выбирается минимальный элемент $c_{i_1 j_1} = \min\limits_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} c_{ij}$.

Находим $x_{i_1 j_1} = \min(a_{i_1}, b_{j_1}, d_{i_1 j_1})$. Возможны три случая:

$x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$, $x_{i_1 j_1} = b_{j_1}$, $x_{i_1 j_1} = d_{ij}$.

В первом случае определяем элементы i_1-й строки матрицы $X = \|x_{ij}\|_{m\times n}$, полагая $x_{i_1 j} = 0$ для всех $j \neq j_1$. Во втором случае определяем элементы j_1-ого столбца этой матрицы: $x_{ij_1} = 0$ для всех $i \neq i_1$. В последнем случае определяется только один элемент матрицы X ($x_{i_1 j_1} = d_{i_1 j_1}$). Далее вычеркиваем из матрицы С либо i_1-строку (случай 1), либо j_1-столбец(случай 2), либо элемент $c_{i_1 j_1}$ (случай 3) и изменяем величины a_i, b_j

$$a_i^{(1)} = \begin{cases} a_i,\ i \neq i_1, \\ a_{i_1} - x_{i_1 j_1},\ i = i_1; \end{cases} \qquad b_j^{(1)} = \begin{cases} b_j,\ j \neq j_1, \\ b_{ij} - x_{i_1 j_1},\ j = j_1. \end{cases}$$

Замечание. Если ТЗ вырождена, то может иметь место одна из трех ситуаций $\min(a_{i_1}, b_{j_1}, d_{i_1 j_1}) = a_{i_1} = d_{i_1 j_1}$, $\min(a_{i_1}, b_{j_1}, d_{i_1 j_1}) = b_{i_1} = d_{i_1 j_1}$ *и* $\min(a_{i_1}, b_{j_1}, d_{i_1 j_1}) = a_{i_1} = b_{j_1} = d_{i_1 j_1}$. *В первой ситуации поступаем как в случае 1, во второй – как в случае 2 и в третьей – произвольно: либо как в случае 1, либо как в случае 2.*

Элемент $x_{i_1 j_1}$ матрицы X полученный в случае 1 или 2 помечается как базисный (компонента $(i_1; j_1)$ добавляется к множеству *B(X)* базисных компонент).

Второй шаг состоит в проведении тех же операций применительно к не вычеркнутым элементам матрицы X и величинам $a_i^{(1)}$ и $b_j^{(1)}$.

Шаги предварительного этапа следуют до полного заполнения матрицы X. Заметим, что если $d_{ij} \ge \min\left(a_i, b_j\right)$, для всех $i = 1,...,m$; $j = 1,...n$ (классическая транспортная задача), после предварительного этапа все строки и столбцы матрицы C вычеркнуты, а матрица X является первоначальным опорным планом задачи.

В общем случае, согласно процессу образования матрицы X ее элементы удовлетворяют условиям:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,\ i = 1, 2, \ldots, m, \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n, \qquad 0 \le x_{ij} \le d_{ij},$$

$i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$

Положим $x_{i,n+1} = a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij},\ i = 1,\ldots, m,$

$$x_{m+1,j} = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij},\ j = 1,\ldots, n,$$

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{n} x_{m+1,j}.$$

Если $\varepsilon = 0$, то матрица X является опорным планом ТЗ. В общем случае $\varepsilon > 0$ и для получения опорного плана необходимо провести несколько итераций метода потенциалов для расширенной ТЗ. Она получается добавлением фиктивного источника $(m+1)$ и стока $(n+1)$ с мощностями равными соответственно $a_{m+1} = \varepsilon$ и $b_{n+1} = \varepsilon$.

Если положить $x_{m+1,n+1} = 0$, то полученная в результате предварительного этапа матрица $\overline{X} = \left\| x_{ij} \right\|_{(m+1)\times(n+1)}$ является опорным планом расширенной ТЗ. Если положить $c_{m+1,j} = M$, $j = 1,\ldots, n,$ $c_{i,n+1} = M$, $i = 1,\ldots, m,$ а $c_{m+1,n+1} = 0$, где M сколь угодно большое число, и применить к расширенной задаче метод потенциалов, то могут представиться следующие два случая.

1. После ряда итераций получен опорный план $\overline{X}$ расширенной задачи, для которого $x_{m+1,n+1}=\varepsilon$.

2. В оптимальном опорном плане $\overline{X}$ $x_{m+1,n+1}<\varepsilon$.

В первом случае подматрица X матрицы $\overline{X}$ является опорным планом исходной задачи, во втором – исходная задача не имеет ни одного допустимого решения и, следовательно, неразрешима.

Приведем численный пример, иллюстрирующий описанный способ решения ТЗ.

Вначале рассмотрим ТЗ без ограничений на пропускные способности коммуникаций (классическую транспортную задачу) с вектором мощностей источников $a=(6,3,3)$, стоков $b=(4,2,4,2)$ и матрицей $C=\begin{bmatrix}1&4&2&5\\2&1&4&1\\3&2&1&3\end{bmatrix}$. Процесс решения начинается с предварительного этапа.

$$\overline{X}=\begin{bmatrix}4^{(1)}&0&1^{(5)}&1^{(6)}\\0&2^{(2)}&0&1^{(4)}\\0&0&3^{(3)}&0\end{bmatrix}\begin{array}{cccccc}(1)&(2)&(3)&(4)&(5)&(6)\\6&2&2&2&2&1\\3&3&1&1&&\\3&3&3&&&\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}4&2&4&2&\\&2&4&2&(1)\\&&4&2&(2)\\&&1&2&(3)\\&&1&1&(4)\\&&&1&(5)\\&&&&(6)\end{array}$$

$$
\begin{array}{cc}
C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ (4) \\ (3) \end{array} \\
\begin{array}{cccc} (1) & (2) & (5) & (6) \end{array} &
\end{array}.
$$

Цифры, стоящие в скобках около строк и столбцов матрицы *C*, обозначают номер шага, на котором соответствующие строки и столбцы вычеркиваются. Цифры в скобках над элементами матрицы *X* обозначают номер шага, на котором определяются ее соответствующие элементы, а над столбцами вектора $\overline{a}$ и около строк вектора $\overline{b}$ – номера шагов, на которых они принимают указанные значения. Поскольку после 6-го шага в первой строке нет ни одного не вычеркнутого элемента, она может быть вычеркнута (правило вычеркивания). То есть положительные компоненты матрицы *X* не образуют цикл, их число равно 6 ($m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$). Таким образом, в результате предварительного этапа получен исходный опорный план ТЗ, множество базисных компонент $B(X) = \{(1,1),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3)\}$, $D(X) = \varnothing$, $O(X)$ – все остальные компоненты плана *X*.

Итерация 1. Определяем потенциалы, отвечающие исходному опорному плану путем решения системы уравнений:

$u_1 + v_1 = 1$; $u_2 + v_2 = 1$; $u_1 + v_3 = 2$; $u_2 + v_4 = 1$; $u_1 + v_4 = 5$; $u_3 + v_3 = 1$.

Полагая $u_1 = 0$, последовательно вычисляем $v_1 = 1$, $v_3 = 2$, $v_4 = 5$, $u_2 = 1 - 5 = -4$, $v_2 = 1 - (-4) = 5$, $u_3 = 1 - 2 = -1$. Вычисляем величины Δ_{ij}, $(i, j) \in O(X)$:

$\Delta_{12} = 4 - 0 - 5 = -1$; $\Delta_{21} = 2 - (-4) - 1 = 5$; $\Delta_{23} = 4 - (-4) - 2 = 6$;

$\Delta_{31} = 3 - (-1) - 1 = 3$; $\Delta_{32} = 2 - (-1) - 5 = -2$; $\Delta_{34} = 3 - (-1) - 5 = -1$.

План не является оптимальным, т.к. $\Delta_{12}, \Delta_{32}, \Delta_{34} < 0$, $\min(\Delta_{12}, \Delta_{32}, \Delta_{34}) = \Delta_{32} = -2$. Улучшение плана осуществляется за счет увеличения компоненты x_{32}, добавление ее к базисным компонентам порождает единственный цикл x_{32}, x_{22}, x_{24}, x_{14}, x_{13}, x_{33}. Определяем $\delta_1 = \min(x_{22}, x_{14}, x_{33}) = 1$.

Увеличиваем нечетные компоненты цикла (помеченные знаком «+») и уменьшаем четные (помеченные знаком «–») на величину $\delta_1 = 1$ и получаем новый опорный план (рис. 3) (пустые клетки соответствуют нулевым компонентам плана).

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1^{(+)} & 1^{(-)} \\ 0 & 2^{(-)} & 0 & 1^{(+)} \\ 0 & 0^{(+)} & 3^{(-)} & 0 \end{bmatrix}, \rightarrow X =$$

4		2	
	1		2
	1	2	

Рис. 3

Итерация 2. Множество базисных компонент $B(X) = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,2),(3,3)\}$, $D(X) = \varnothing$, $O(X) -$ все остальные компоненты плана. Определяем потенциалы для полученного опорного плана:

$$u_1 + v_1 = 1;\ u_1 + v_3 = 2;\ u_2 + v_2 = 1;\ u_2 + v_4 = 1;\ u_3 + v_2 = 2;\ u_3 + v_3 = 1.$$

Полагая $u_1 = 0$, последовательно вычисляем $v_1 = 1$, $v_3 = 2$, $u_3 = -1$, $v_2 = 3$, $u_2 = -2$, $v_4 = 3$. Вычисляем величины Δ_{ij}, $(i,j) \in O(X)$:

$$\Delta_{12} = 4 - 0 - 3 = 1; \qquad \Delta_{14} = 5 - 3 - 0 = 2; \qquad \Delta_{21} = 2 - (-2) - 1 = 3;$$

$$\Delta_{23} = 4 - (-2) - 2 = 4; \quad \Delta_{31} = 3 - (-1) - 1 = 3; \quad \Delta_{34} = 3 - (-1) - 3 = 1.$$

Поскольку все величины неотрицательны, то план является решением нашей задачи.

Решим теперь эту задачу в случае, когда пропускные способности коммуникаций ограничены и их пропускные способности определяются матрицей $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Предварительный этап.

Шаг 1. $\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{11} = 1$, $x_{11} = \min(a_1, b_1, d_{11}) = \min(6,4,3) = d_{11} = 3$. Имеет место случай 3. Вычеркиваем элемент c_{11}, изменяем компоненты a_1 и b_1 векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ уменьшив их на 3.

Шаг 2. $\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{22} = 1$, $x_{22} = \min(a_2, b_2, d_{22}) = \min(3,2,1) = d_{22} = 1$. Случай 3, $a_2 = 2$, $b_2 = 2$, вычеркиваем элемент c_{22}.

$$\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{cccccccccc} & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) & (8) & (9) \; (10) \end{array} \\
X = \begin{bmatrix} 3 & & 2 & 0^{(9)} \\ & 1 & 0^{(10)} & 2^{(3)} \\ 1^{(7)} & 1^{(6)} & 1 & 0^{(8)} \end{bmatrix} & \begin{array}{cccccccccc} 6 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & & & & & & & \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & & \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l}
4 & 2 & 4 & 2 & \\
1 & 2 & 4 & 2 & (1) \\
1 & 1 & 4 & 2 & (2) \\
1 & 1 & 4 & 0 & (3) \\
1 & 1 & 3 & 0 & (4) \\
1 & 1 & 1 & 0 & (5) \\
1 & & 1 & 0 & (6) \\
 & & 1 & 0 & (7) \\
 & & 1 & 0 & (8) \\
 & & 1 & & (9)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
C = \begin{bmatrix} 1^{(1)} & 4 & 2^{(5)} & 5 \\ 2 & 1^{(2)} & 4^{(10)} & 1 \\ 3 & 2 & 1^{(4)} & 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ (3) \\ (8) \end{array} \\
\begin{array}{cccc} (7) & (6) & \quad & (9) \end{array} &
\end{array}.$$

Шаг 3. $\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{24} = 1$, $x_{24} = \min(a_2, b_4, d_{24}) = \min(2,2,2) = a_2 = 2$. Случай 1: Вычеркиваем вторую строку матрицы *C*, переменная x_{24} становится базисной, $b_4 = 0$.

Шаг 4. $\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{33} = 1$, $x_{33} = \min(a_3, b_3, d_{33}) = \min(3,4,1) = d_{33} = 1$. Случай 3: вычеркиваем элемент c_{33}, $a_3 = 2$, $b_3 = 3$.

Шаг 5. $\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{13} = 2$, $x_{13} = \min(a_1, b_3, d_{13}) = \min(3,3,2) = d_{13} = 2$. Случай 3: вычеркиваем элемент c_{13} матрицы *C*, $a_1 = 1$, $b_3 = 1$.

Шаг 6. $\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{32} = 2$, $x_{32} = \min(a_3, b_2, d_{32}) = \min(2,1,1) = b_2 = 1$. Случай 2: переменная x_{32} становится базисной, вычеркиваем второй столбец матрицы *C*, $a_3 = 1$.

Шаг 7. $\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{31} = 3$, $x_{31} = \min(a_3, b_1, d_{31}) = \min(1,1,2) = b_1 = 1$. Случай 2, вычеркиваем первый столбец матрицы *C*, переменная x_{31} становится базисной, $a_3 = 0$.

Шаг 8. $\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{34} = 3$, $x_{34} = \min(a_3, b_4, d_{34}) = \min(0,0,1) = a_3 = 0$. Случай 1: вычеркиваем третью строку матрицы *C*, переменная $x_{34} = 0$ становится базисной.

Шаг 9. $\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{14} = 5$, $x_{14} = \min(a_1, b_4, d_{14}) = \min(1,0,1) = b_4 = 0$. Случай 2: вычеркиваем четвертый столбец матрицы *C*, переменная $x_{14} = 0$ становится базисной.

Шаг 10. Первая строка и третий столбец остались не вычеркнутыми. Единственный не вычеркнутый элемент третьего столбца $x_{23} = 0$, помечаем его как базисный и вычеркиваем третий столбец.

Согласно правилу вычеркивания, выделенные компоненты образуют базис, однако построенная матрица *X* не является допустимым решением задачи, так как $\varepsilon = x_{41} = x_{15} = 1$. Поэтому необходимо перейти к решению расширенной ТЗ с матрицей

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 & M \\ 2 & 1 & 4 & 1 & M \\ 3 & 2 & 1 & 3 & M \\ M & M & M & M & 0 \end{bmatrix}$$

и векторами $\overline{a}=(6,3,3,1)$, $\overline{b}=(4,2,4,2,1)$. Исходный опорный план расширенной ТЗ имеет вид

$$\overline{X}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & (0)^{+} & (1)^{-} \\ 0 & 1^{+} & (0) & (2)^{-} & 0 \\ (1) & (1) & 1 & (0) & 0 \\ 0 & 0 & (1)^{-} & 0 & 0^{+} \end{bmatrix}.$$

В скобках записаны базисные элементы опорного плана.

Итерация 1. Определим потенциалы расширенной ТЗ, отвечающие полученному опорному плану $\overline{X}$ путем решения системы уравнений $u_1+v_4=5$; $u_3+v_1=3$; $u_1+v_5=M$; $u_3+v_2=2$; $u_2+v_3=4$; $u_3+v_4=3$; $u_2+v_4=1$; $u_4+v_3=M$.

Полагая $v_4=0$, последовательно вычисляем $u_1=5$, $u_2=1$, $u_3=3$, $v_3=4-1=3$, $v_2=-1$, $v_1=3-3=0$, $u_4=M-3$, $v_5=M-5$.

Для компонент (i,j) из множеств

$O(X)=\{(1,2),(2,1),(2,5),(3,5),(4,1),(4,2),(4,4),(4,5)\}$ и

$D(X)=\{(1,1),(1,3),(2,2),(3,3)\}$ вычисляем величины

$\Delta_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$:

$\Delta_{12}=4-5+1=0$; $\Delta_{21}=2-1-0=1$; $\Delta_{22}=1-1-(-1)=1$;

$\Delta_{25} = M - 1 - (M - 5) = 4$; $\Delta_{35} = M - 3 - (M - 5) - 1 = 2$;

$\Delta_{41} = M - (M - 3) - 0 = 3$; $\Delta_{42} = M - (M - 3) - (-1) = 4$;

$\Delta_{44} = M - (M - 3) - 0 = 3$; $\Delta_{45} = 0 - (M - 3) - (M - 5) = -2M + 8$;

$\Delta_{11} = 1 - 5 - 0 = -4$; $\Delta_{13} = 2 - 5 - 3 = -6$; $\Delta_{33} = 1 - 3 - 3 = -5$.

Поскольку среди величин Δ_{ij} , $(i, j) \in O(\overline{X})$ есть отрицательные, а среди Δ_{ij} , $(i, j) \in D(\overline{X})$ – положительные, план $\overline{X}$ не является оптимальным. Минимальное из значений Δ_{ij} , для $(i, j) \in O(\overline{X})$ и $-\Delta_{ij}$, для $(i, j) \in D(\overline{X})$ равно $\Delta_{45} = -2M + 8$ (M сколь угодно большое число). Поэтому, изменяем опорный план увеличивая (вводя в базис) переменную x_{45} (случай *a*)). Добавление компоненты x_{45} к базисным порождает единственный цикл x_{45} , x_{15} , x_{14} , x_{24} , x_{23} , x_{43} .

Определим

$\delta_1 = \min(x_{15}, x_{24}, x_{43}) = \min(1, 2, 1) = 1$,

$\delta_2 = \min(d_{45} - x_{45}, d_{14} - x_{14}, d_{23} - x_{23}) = \min(\infty - 0, 1 - 0, 1 - 0) = 1$

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2, d_{45}) = \min(1, 1, \infty) = 1$.

Для получения нового опорного плана нечетные компоненты x_{45} , x_{14} и x_{23} увеличиваем на 1, а четные x_{15} , x_{24} , x_{43} уменьшаем на единицу, при этом компонента x_{15} или x_{43} должна быть выведена из базиса. Исключим из базиса x_{43} .

Переходим к новому опорному плану

$$\overline{X} = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 2 & (1) & (0) \\ 0 & 1 & (1) & (1) & 0 \\ (1) & (1) & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (1) \end{array}\right].$$

Поскольку $x_{45} = \varepsilon = 1$, то матрица $X = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & (1) \\ 0 & 1^{-} & (1) & (1)^{+} \\ (1) & (1)^{+} & 1 & (0)^{-} \end{bmatrix}$ является опорным планом исходной задачи.

Итерация II. Для базисных компонент плана X составляем систему уравнений $u_1 + v_4 = 5$; $u_3 + v_1 = 3$; $u_1 + v_3 = 4$; $u_3 + v_2 = 2$; $u_2 + v_4 = 1$; $u_3 + v_4 = 3$, решив которую найдем потенциалы. Полагая $u_3 = 0$, последовательно вычисляем $v_1 = 3$, $v_2 = 2$, $v_4 = 3$, $u_2 = -2$, $v_3 = 6$, $u_1 = 2$.

Для компонент (i, j) из множеств $O(X) = \{(1,2),(2,1)\}$ и $D(X) = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,3)\}$ вычисляем величины $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$:

$\Delta_{12} = 4 - 2 - 2 = 0$; $\Delta_{21} = 2 - (-2) - 3 = 1$; $\Delta_{11} = 1 - 2 - 3 = -4$;

$\Delta_{13} = 2 - 2 - 6 = -6$; $\Delta_{22} = 1 - (-2) - 2 = 1$; $\Delta_{33} = 1 - 0 - 6 = -5$.

Так как $\Delta_{22} > 0$ ($(2,2) \in D(X)$), план X не является оптимальным, и его улучшение должно производиться за счет уменьшения величины $x_{22} = d_{22} = 1$ (случай б)). Добавление компоненты x_{22} к базисным порождает единственный цикл x_{22}, x_{24}, x_{34}, x_{42}.

Определим $\delta_1 = \min(x_{22}, x_{34}) = \min(1,0) = 0$,

$\delta_2 = \min(d_{24} - x_{24},\ d_{32} - x_{32}) = \min(1,0) = 0$,

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2, x_{22}) = 0$.

Переменная x_{22} становится базисной, а x_{34} выводится из базиса. Новый опорный план отличается от предыдущего только тем, что в число базисных переменных включена $x_{22} = d_{22} = 1$ взамен переменной $x_{34} = 0$.

$$X=\begin{bmatrix} 3 & 0^{+} & 2 & (1)^{-} \\ 0 & (1)^{-} & (1) & (1)^{+} \\ (1) & (1) & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Итерация III. Как и на предыдущих итерациях находим потенциалы $u_1=4$, $u_2=0$, $u_3=1$, $v_1=2$, $v_2=1$, $v_3=4$, $v_4=1$. Для компонент (i,j) из множеств $O(X)=\{(1,2),(2,1),(3,4)\}$ и $D(X)=\{(1,1),(1,3),(3,3)\}$ вычисляем величины $\Delta_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$:

$\Delta_{12}=4-4-1=-1$; $\Delta_{21}=2-0-2=0$; $\Delta_{11}=1-4-2=-5$

$\Delta_{13}=2-4-4=-6$; $\Delta_{33}=1-1-4=-4$ $\Delta_{34}=3-1-1=1$.

Так как $\Delta_{12}=-1<0$, $(1,2)\in O(X)$, то план X не является оптимальным и его улучшение производится за счет увеличения величины $x_{12}=0$ (случай а)), ее добавление к базисным порождает единственный цикл: x_{12}, x_{22}, x_{24}, x_{14}.

Находим $\delta_1=\min(x_{22},x_{14})=\min(1,1)=1$,

$\delta_2=\min(d_{12}-x_{12},\ d_{24}-x_{24})=\min(1-0,2-1)=1$,

$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)=1$.

Новый опорный план получается путем увеличения переменных x_{12}, x_{24} и уменьшения x_{22}, x_{14} на 1.

$$X=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & (0) \\ 0 & (0) & (1) & (2) \\ (1) & (1) & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В число базисных переменных вводится x_{12}. Поскольку все элементы цикла равны либо 0, либо d_{ij} ($x_{12}=d_{12}=1$, $x_{24}=d_{24}=2$,

$x_{22} = x_{14} = 0$), из базиса должна быть исключена одна из переменных $x_{12}, x_{24}, x_{22}, x_{14}$. Исключим из базиса переменную x_{12} (т.е. она так и не вошла в число базисных). Это облегчит следующую итерацию.

Итерация IV. Поскольку множество базисных переменных не изменилось, то потенциалы и величины остались прежними. Изменяются только множества $O(X)$ и $D(X)$: $O(X) = \{(2,1),(3,4)\}$,

$D(X) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,3)\}$.

Так $\Delta_{21} = 0$, $\Delta_{34} = 1$, а $\Delta_{11} = -5$, $\Delta_{12} = -1$, $\Delta_{13} = -6$, $\Delta_{33} = -4$, то условия критерия оптимальности выполняются, т.е. полученный опорный план является оптимальным.

2. ДВОЙСТВЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Как уже отмечалось, в наиболее общей постановке транспортная задача может быть сформулированы в следующем виде.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \qquad i = \overline{1,m}, \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \qquad j = \overline{1,n}, \tag{2.3}$$

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij}, \qquad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{2.4}$$

Введением фиктивных поставщика или потребителя она легко сводится к замкнутой модели с выполненным балансовым соотношением: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, которые являются необходимым и достаточным условием разрешимости классической транспортной задачи. Ограничения на пропускные способности коммуникаций существенно усложняют решение задачи. В этой ситуации возникают проблемы не только с применением симплекс-метода или его модификаций к решению задачи, но и с построением первоначального базисного решения. Условия разрешимости задачи также непригодны для практического применения.

Как известно, для того, чтобы ТЗ с ограничениями на пропускные способности коммуникаций имела решение необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\sum_{i=1}^{m} \min(a_i, \sum_{j \in J} d_{ij}) \geq \sum_{j \in J} b_j, \ \forall J \subset \left\{\overline{1,n}\right\}. \tag{2.5}$$

Понятно, что проверка выполнения условий (2.5) задача более трудоемкая, чем ее решение. Поэтому для построения первоначального допустимого решения используется метод искусственного базиса, который в случае несовместимости ограничений позволяет установить неразрешимость задачи. Однако, при решении конкретных прикладных задач, в случае несовместности ограничений, может потребоваться составить план перемещения максимально возможного объема продукта с минимальными затратами. При этом, естественно, необходим анализ, позволяющий установить «узкое место», то есть те коммуникации, пропускные способности которых не позволяют осуществить поставки в полном объеме. Такой анализ может быть осуществлен, если рассматриваемую задачу сформулировать в терминах теории графов (графический способ задания ТЗ).

Естественно полагать, что $d_{ij} \leq \min\left(a_i, b_j\right), \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}.$

Рассмотрим ТЗ, заданную векторами мощностей источников $\overline{a} = \left(a_1, a_2, ..., a_m\right)$ и стоков $\overline{b} = \left(b_1, b_2, ..., b_n\right)$, матрицами пропускных способностей $D = \left\| d_{ij} \right\|_{m \times n}$ и стоимостей перемещения единицы продукта $C = \left\| c_{ij} \right\|_{m \times n}$.

На плоскости отмечаются (кружками) источники (с номерами 1, 2, …, m) и стоки (с номерами $m+1$, $m+2$, $m+n$), а также отмечаются фиктивный источник и сток с номерами $n+m+1$ и $n+m+2$ соответственно (рис. 4).

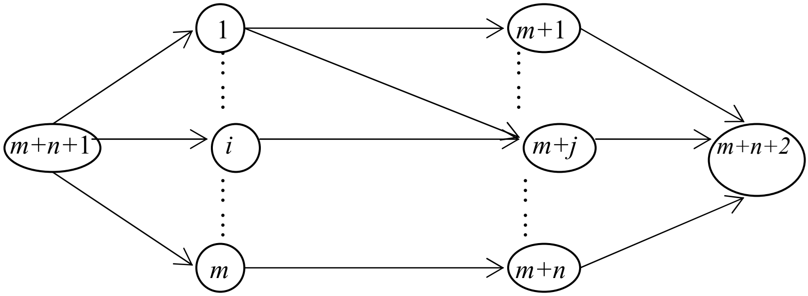

Рис. 4

Если определить пропускную способность коммуникации ($m+n+1, i$) равной a_i, коммуникации ($m+j,\ m+n+2$) равной b_j, а стоимости переноса по ним единицы продукта равными 0, то задача может быть сформулирована следующим образом: построить максимальный поток продукта из фиктивного источника ($m+n+1$) в фиктивный сток ($m+n+2$), стоимость которого минимальна. Понятно, что величина потока $x_{kl} > 0$ по любой коммуникации (k,l) не может превышать ее пропускной способности d_{kl}. Суммарный объем продукта, перемещаемого из каждого источника i, равен величине продукта перемещаемого в i из фиктивного источника ($m+n+1$), а суммарный объем продукта, перемещаемого в каждый сток j, равен величине продукта перемещаемого из j в фиктивный сток ($m+n+2$).

Графическое представление рассмотренного выше численного примера представлено на рис. 5, где над каждой коммуникацией (в скобках) первое число – стоимость переноса по ней единицы продукта, а второе – ее пропускная способность.

Графическое представление ТЗ очень удобно для ее анализа, однако алгоритмы решения, связанные с графическим представлением, трудно реализуемы. Тогда как вся информация о задаче содержится в векторах $\overline{a}, \overline{b}$ и матрицах C и D.

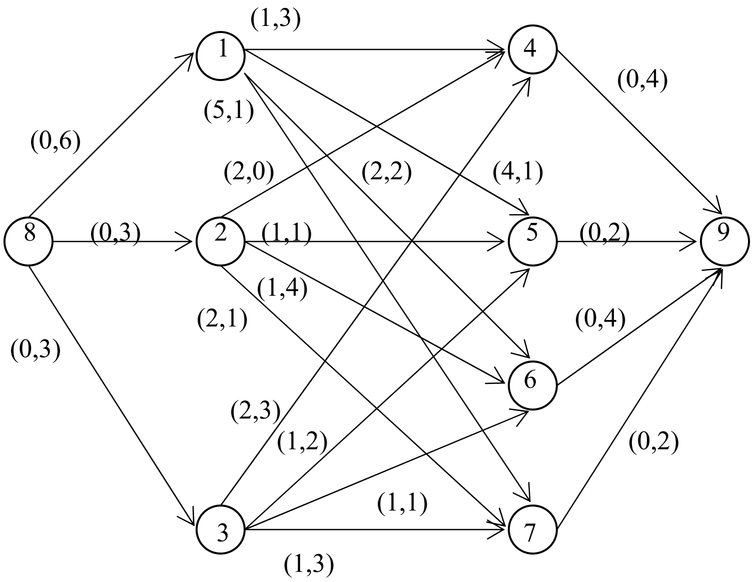

Рис. 5

Введем в рассмотрение векторы модифицированных мощностей

$$\bar{a}^* = \left(a_1^*, ..., a_{n+m}^*\right) = \left(a_1, ..., a_m,\ b_1, ..., b_n\right),$$

$$\bar{b}^* = \left(b_1^*, ..., b_{n+m}^*\right) = \left(a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_n\right),$$

матрицы модифицированных стоимостей $C^* = \left\| c_{ij}^* \right\|$ и пропускных способностей $D^* = \left\| d_{ij}^* \right\|$ порядка $(m+n+1)\times(m+n+2)$, определенных следующим образом:

$$c_{ij}^* = \begin{cases} 0, & i = m+n+1, \quad j = \overline{1,m}, \\ 0, & i = \overline{m+1, m+n}, \quad j = m+n+2, \\ c_{ij}, & i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{m+1, m+n}, \\ \infty, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$d^*_{ij} = \begin{cases} a_j, & i = m+n+1, \quad j = \overline{1,m}, \\ b_i, & i = \overline{m+1, m+n}, \; j = m+n+2, \\ d_{ij}, & i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{m+1, m+n}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Опишем алгоритм решения задачи ТЗ. Не уменьшая общности, будем предполагать, что $d_{ij} = \min\left(a_i, b_j\right)$, если $d_{ij} > \min\left(a_i, b_j\right)$ для всех $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Предварительный этап. Обозначим $X^* = \left\| x^*_{ij} \right\|$ – нулевая матрица порядка $(m+n+2)\times(m+n+2)$. Если $\sum_i a_i \le \sum_j b_j$, последовательно для каждой строки $i = 1, 2, ..., m$ матрицы $C = \left\| c_{ij} \right\|_{m\times n}$, находим минимальный элемент $c_{il} = \min_j c_{ij}$. Если при этом $\delta_{il} = \min\left(a_i, d_{il}, b_l\right) > 0$, то полагаем:

$$c^*_{i,\ m+l} = \begin{cases} c_{il}, & \text{если } \delta_{il} < d_{il}, \\ \infty, & \text{если } \delta_{il} = d_{il}, \end{cases}$$

$$c^*_{m+l,\ i} = -c_{i,l}, \quad x^*_{i,m+l} := \delta_{il}, \quad x^*_{m+l,i} := -\delta_{il},$$

$$d^*_{i,m+l} := d_{i,m+l} : -\delta_{il}, \quad d^*_{m+l,i} := d_{m+l,i} : +\delta_{il},$$

$$a^*_{m+l} : = a_{m+l} : +\delta_{il}, \quad b^*_{m+l} := b_{m+l} : -\delta_{il},$$

$$a^*_i \, : = \, a^*_i - \delta_{il}, \quad b^*_i \, : = \, b^*_i + \delta_{il}.$$

Если после осуществления указанных выше действий получим $\sum_{i=1}^{m} a^*_i = 0$, то задача решена, иначе переходим к общей итерации. В случае, когда $\sum_i a_i \ge \sum_j b_j$, последовательно для каждого столбца

$j = 1, 2, ..., n$ матрицы $C = \left\| c_{ij} \right\|_{m \times n}$ находим минимальный элемент $c_{lj} = \min_i c_{ij}$. Если $\delta_{lj} = \min\left(a_l, d_{lj}, b_j\right) > 0$, то для столбца j полагаем:

$$x_{lj} = \delta_{lj},$$

$$c^*_{l,\ m+j} = \begin{cases} c_{lj}, & \text{если } \delta_{lj} < d_{lj}, \\ \infty, & \text{если } \delta_{lj} = d_{lj}, \end{cases} \qquad c^*_{m+j,\ l} = -c_{lj},$$

$$x^*_{l,\ m+j} := \delta_{lj},\ x^*_{m+j,l} = -\delta_{lj}.$$

$$d^*_{l,\ m+j} := d^*_{l,m+j} - \delta_{lj},\ d^*_{m+j,l} = d^*_{m+j,l} + \delta_{lj},$$

$$a^*_l := a^*_l - \delta_{lj},\ b^*_{m+j} := b^*_{m+j} - \delta_{lj},\ a^*_{m+j} := a^*_{m+j} + \delta_{lj},\quad b^*_l := b^*_l + \delta_{lj}.$$

Если после выполнения этих операций $\sum_j b_j = 0$, то задача решена. В противном случае переходим к общей итерации.

Замечание. Предварительный этап не является обязательным, т.е. решение может начинаться с общей итерации с нулевой матрицей $X^* = \left\| x^*_{ij} \right\|$ *порядка* $(m+n+2)\times(m+n+2)$. *Однако при ручной обработке результатов выполнения тернарных операций на каждой итерации, предварительный этап позволяет уменьшить их число.*

Общая итерация. Осуществляем тернарные операции над элементами матрицы модифицированных стоимостей $\overline{C}^* = C^* = \left\| c^*_{ij} \right\|$, последовательно по всем $k = 1, 2, ..., n+m+2$; полагая

$$\bar{c}^*_{ij} := \begin{cases} \bar{c}^*_{ij}, & \text{если } \bar{c}^*_{ij} \le \bar{c}^*_{ik} + \bar{c}^*_{kj}, \\ \bar{c}^*_{ik} + \bar{c}^*_{kj}, & \text{если } \bar{c}^*_{ij} > \bar{c}^*_{ik} + \bar{c}^*_{kj}, \end{cases} \tag{2.6}$$

для всех $i \ne j \ne k$, $\quad i = \overline{1, n+m+2}$, $\quad j = \overline{1, n+m+2}$.

Одновременно с выполнением операций (2.6) изменяем элементы вспомогательной матрицы $R^* = \left\| r_{ij}^* \right\|$ порядка $(m+n+2)\times(m+n+2)$ (первоначально полагаем $r_{ij}^* = j, i, \ \ j = \overline{1, n+m+2}$):

$$r_{ij}^* := \begin{cases} r_{ij}^*, & \text{если} \quad \overline{c}_{ij}^* \le \overline{c}_{ik}^* + \overline{c}_{kj}^*, \\ r_{ik}^*, & \text{если} \quad \overline{c}_{ij}^* > \overline{c}_{ik}^* + \overline{c}_{kj}^*. \end{cases} \tag{2.7}$$

Если $\overline{c}_{m+n+1,\, m+n+2}^* = \infty$ – задача решена. В противном случае, с помощью вспомогательной матрицы R^* определяем множество индексов $l = m+n+1, i_1, i_2, ..., l_k, m+n+2 = p$, где $i_1 = r_{m+n+1,\, m+n+2}$, $i_2 = r_{i_1,\, m+n+2}$, $i_3 = r_{i_2,\, m+n+2} ...$, $p = r_{l_k p}$, и множество $L = \{(l, i_1), (i_1, i_2), ..., (i_k, p)\}$.

Находим $\delta = \min\limits_{(i,j)\in L} \left(a_i, d_{ij}, b_j \right)$ и вычисляем:

$$x_{ij}^* := \begin{cases} x_{ij}^* + \delta, & (i,j) \in L, \\ x_{ij}^* - \delta, & (j,i) \in L, \\ x_{ij}^* & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$d_{ij}^* := \begin{cases} d_{ij}^* - \delta, & (i,j) \in L, \\ x_{ij}^* + \delta, & (j,i) \in L, \\ d_{ij}^* & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$a_l^* := a_l^* - \delta, \; b^*_p := b^*_p - \delta, \quad a^*_p := a^*_p + \delta, \quad b_l^* : = b_l^* + \delta_j.$$

$$c_{ij}^* = \begin{cases} \infty, & j = \overline{1, n+m}, \quad \text{если} \quad a_i^* = 0, \\ \infty, & i = \overline{1, n+m}, \quad \text{если} \quad b_j^* = 0, \\ c_{ij}^*, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Переходим к общей итерации.

После окончания работы алгоритма находим матрицу $X = \left\| x_{ij} \right\|_{m\times n}$, где $x_{ij} = x_{i,m+j}^*$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, которая является решением задачи. Если одно из ограничений не выполнено, то это означает, что исходная задача не имеет допустимых решений. Тем не менее, полученный план является оптимальным планом перемещения максимально возможного количества продукта из источников в стоки при данных ограничениях. Отметим, что на каждой итерации работы алгоритма увеличение объема перемещаемого продукта перевозки на величину δ осуществляется с *минимально* возможным увеличением значения целевой функции, то есть, получаемый на каждой итерации план является оптимальным, но недопустимым. На каждой итерации мы получаем оптимальное решение (минимальное значение целевой функции) для данной величины $V=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}$, которое не является допустимым, если $V<V_{\max}$. В этом случае, описанный алгоритм естественно трактовать как двойственный.

Проиллюстрируем работу алгоритма на рассмотренном выше примере: $\bar{a}=(6,3,3)$, $\bar{b}=(4,2,4,2)$, $C=\begin{bmatrix}1&4&2&5\\2&1&4&1\\3&2&1&3\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}3&1&2&1\\1&1&1&2\\2&1&1&1\end{bmatrix}$.

Формируем матрицы модифицированных стоимостей и пропускных способностей.

$$C=\begin{bmatrix}-&-&-&1&4&2&5&-&-\\-&-&-&2&1&4&1&-&-\\-&-&-&3&2&1&3&-&-\\-&-&-&-&-&-&-&-&0\\-&-&-&-&-&-&-&-&0\\-&-&-&-&-&-&-&-&0\\-&-&-&-&-&-&-&-&0\\0&0&0&-&-&-&-&-&-\\-&-&-&-&-&-&-&-&-\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}0&0&0&3&1&2&1&0&0\\0&0&0&1&1&1&2&0&0\\0&0&0&2&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&4\\0&0&0&0&0&0&0&0&2\\0&0&0&0&0&0&0&0&4\\0&0&0&0&0&0&0&0&2\\6&3&3&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Прочерки вместо элементов матрицы означают сколь угодно большое число (∞).

Предварительный этап. Так как $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 12$, то имеют место оба случая: $\sum_{i=1}^{m} a_i \le \sum_{j=1}^{n} b_j$ и $\sum_{i=1}^{m} a_i \ge \sum_{j=1}^{n} b_j$. Находим $\delta_{11} = 3$, $\delta_{22} = 1$, $\delta_{24} = 2$, $\delta_{33} = 1$ и преобразовываем матрицы X^*, C^*, D^*.

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C^* = \begin{bmatrix} - & - & - & - & 4 & 2 & 5 & 0 & - \\ - & - & - & 2 & - & 4 & - & 0 & - \\ - & - & - & 3 & 2 & - & 3 & 0 & - \\ -1 & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\ - & -1 & - & - & - & - & - & - & 0 \\ - & - & -1 & - & - & - & - & - & 0 \\ - & -1 & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & - & 0 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - \end{bmatrix},$$

$$D^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Итерация I. После осуществления тернарных операций получаем $\overline{C^*}$, R^*:

$$\overline{C}^* = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & - & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & - & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & - & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & - & 0 & 0 & -1 & 01 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & - & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & - & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & - & 2 \\ -1 & - & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & - \end{bmatrix}$$

$$R^* = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 8 & 6 & 8 & 6 & 6 & 8 & 6 \\ 8 & 2 & 8 & 4 & 8 & 8 & 4 & 8 & 4 \\ 8 & 5 & 3 & 5 & 5 & 8 & 5 & 8 & 5 \\ 1 & 9 & 1 & 4 & 9 & 9 & 9 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 9 & 5 & 9 & 9 & 2 & 9 \\ 3 & 9 & 3 & 9 & 9 & 6 & 9 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 8 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 7 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

$C^*_{89} = 2$, с помощью матрицы R^* находим $\overset{*}{r}_{89} = 3$, $\overset{*}{r}_{39} = 5$, $\overset{*}{r}_{59} = 9$, $L = \{(8,3), (3,5)\ (5,9)\}$ и изменяем матрицы X^*, C^*, D^*:

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C^* = \begin{bmatrix} - & - & - & - & 4 & 2 & 5 & 0 & - \\ - & - & - & 2 & - & 4 & - & 0 & - \\ - & - & - & 3 & - & - & 3 & 0 & - \\ -1 & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\ - & -1 & -2 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & -1 & - & - & - & - & - & 0 \\ - & -1 & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & - & 0 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - \end{bmatrix},$$

$$D^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

После осуществления над этими матрицами еще трех итераций получаем матрицы $\overline{C^*}$, R^*.

$$\overline{C^*} = \begin{bmatrix} - & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 5 & 0 & 7 \\ -1 & - & -1 & 2 & 3 & 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & - & 3 & 4 & 6 & 3 & 0 & 6 \\ -3 & -1 & -3 & - & 1 & 3 & 0 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & - & 3 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & - & 0 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 2 & 3 & - & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 5 & - & 7 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & - \end{bmatrix},$$

$$R^* = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 7 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 8 & 7 & 7 & 8 & 7 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 5 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 6 & 9 & 9 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Так как $C^*{}_{89} = 7$, с помощью матрицы R^* определяем множество индексов $r^*{}_{89} = 1,\ r_{19} = 5,\ r_{59} = 2,\ r_{29} = 6,\ r_{69} = 67$, т.е. $L = \{(8,1),\ (1,5),\ (5,2), (2,6), (6,9)\}$. Находим $\delta = 1$ и вычисляем $x^*{}_{81} = 6,\ x^*{}_{15} = 1,\ x_{51} = -1,\ x_{52} = 1,\ x_{25} = 0,\ x_{26} = 1, x_{62} = -1,\ x_{69} = 2.$

Новые матрицы X^*, C^*, D^*.

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & -4 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C^* = \begin{bmatrix} - & - & - & - & - & - & 5 & 0 & - \\ - & - & - & 2 & - & - & - & 0 & - \\ - & - & - & 3 & - & - & 3 & 0 & - \\ -1 & - & -3 & - & - & - & - & - & - \\ -4 & - & -2 & - & - & - & - & - & - \\ -2 & -4 & -1 & - & - & - & - & - & - \\ - & -1 & - & - & - & - & - & - & - \end{bmatrix},$$

$$D^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

После осуществления тернарных операций над матрицей $\overline{C^*}$ получим $C^*_{89} = \infty$, т.е. задача решена, оптимальное решение

$X = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, при значении целевой функции $z_{\min} = 23$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Варианты

1. $\overline{a}=(35,25,45)$, $\overline{b}=(30,\ 25,10,20)$.

$$C=\begin{bmatrix}2&7&5&8\\7&3&8&2\\7&11&8&6\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}15&20&10&10\\10&5&5&6\\10&10&20&10\end{bmatrix}.$$

Ответ. $X=\begin{bmatrix}15&16&0&4\\10&5&4&6\\5&4&6&10\end{bmatrix}$, $z=490$.

2. $\overline{a}=(70,20,50)$, $\overline{b}=(40,\ 30,30,25)$.

$$C=\begin{bmatrix}2&7&6&4\\7&4&6&8\\6&9&11&5\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}10&20&20&25\\20&10&10&15\\15&5&5&30\end{bmatrix}.$$

Ответ. Задача не имеет решения. Максимальный объем перемещаемого продукта 120 ед., план $X=\begin{bmatrix}10&20&20&20\\10&5&5&0\\15&5&5&5\end{bmatrix}$, $z=695$.

3. $\overline{a}=(35,30,40)$, $\overline{b}=(30,\ 45,15,30)$.

$$C=\begin{bmatrix}4&8&7&5\\8&6&5&10\\4&7&6&2\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}5&5&20&10\\15&10&20&5\\15&35&10&20\end{bmatrix}.$$

Ответ. $X=\begin{bmatrix}5&5&15&10\\15&10&0&5\\10&15&0&15\end{bmatrix}$, $z=620$.

4. $\overline{a}=(20,50,35)$, $\overline{b}=(30,\ 10,40,10)$.

$$C=\begin{bmatrix}2&6&3&5\\8&7&10&5\\2&7&5&3\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}5&5&15&5\\15&20&5&15\\15&15&25&5\end{bmatrix}.$$

Ответ. $X=\begin{bmatrix}5&0&15&0\\10&10&5&10\\15&0&20&0\end{bmatrix}$, $z=435$.

5. $\overline{a}=(40,25,35)$, $\overline{b}=(20,\ 25,40,20)$.

$$C=\begin{bmatrix}7&5&9&4\\6&2&5&5\\8&12&10&7\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}10&5&20&10\\10&5&10&5\\5&15&15&10\end{bmatrix}.$$

Ответ. $X=\begin{bmatrix}10&5&15&10\\5&5&10&5\\5&10&15&5\end{bmatrix}$, $z=730$.

6. $\overline{a}=(30,70,40)$, $\overline{b}=(35,\ 10,\ 55,\ 45)$.

$$C=\begin{bmatrix}2&6&9&7\\5&8&2&3\\3&7&5&9\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}10&5&15&5\\20&30&10&15\\10&20&35&30\end{bmatrix}.$$

Ответ. Задача не имеет решения. Максимальный объем перемещаемого продукта 125 ед., план $X=\begin{bmatrix}10&0&15&5\\20&10&10&15\\5&0&30&5\end{bmatrix}$, $z=675$.

7. $\overline{a}=(30,65,25)$, $\overline{b}=(30,\ 10,15,45)$.

$$C=\begin{bmatrix}6&11&5&7\\8&9&11&10\\2&6&5&3\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}10&10&5&10\\20&30&10&10\\10&20&10&30\end{bmatrix}.$$

$$\textit{Ответ}.\ X=\begin{bmatrix}10&0&5&10\\20&10&10&10\\0&0&0&25\end{bmatrix},\ z=690.$$

8. $\overline{a}=(25,45,30)$, $\overline{b}=(20,\ 40,10,25)$.

$$C=\begin{bmatrix}4&5&9&3\\5&2&5&6\\8&9&5&4\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}10&10&15&10\\10&10&20&10\\20&25&15&10\end{bmatrix}.$$

$$\textit{Ответ}.\ X=\begin{bmatrix}10&10&0&5\\10&10&10&10\\0&20&0&10\end{bmatrix},\ z=505.$$

9. $\overline{a}=(60,80,10)$, $\overline{b}=(30,\ 55,\ 15,\ 30)$.

$$C=\begin{bmatrix}8&8&9&5\\7&2&3&8\\5&8&6&7\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}10&10&30&20\\25&15&20&20\\10&30&20&10\end{bmatrix}.$$

Ответ. Задача не имеет решения. Максимальный объем перемещаемого продукта 110 ед., план $X=\begin{bmatrix}5&10&0&20\\25&15&15&10\\0&10&0&0\end{bmatrix}$, $z=630$.

10. $\overline{a}=(45,25,60)$, $\overline{b}=(20,\ 20,35,25)$.

$$C=\begin{bmatrix}5&9&4&8\\9&2&7&5\\5&7&6&4\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}15&10&20&10\\20&10&10&5\\25&10&10&15\end{bmatrix}.$$

$$\textit{Ответ}.\ X=\begin{bmatrix}15&0&20&5\\0&10&5&5\\5&10&10&15\end{bmatrix},\ z=445.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов, А. В. Математическое программирование / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод. – Минск: Вышэйшая школа, 2000.

2. Кузнецов, А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию: учебное пособие / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич. – Минск, 2001. – 448 с.

3. Гольштейн, Е. Г. Задачи линейного программирования транспортного типа / Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. – М.: Наука, 1969.

Учебное издание

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА

Методические указания и контрольные задания для студентов инженерных и инженерно-экономических специальностей

Составитель
КОРЗНИКОВ Александр Дмитриевич

Технический редактор *Д. А. Исаев*

Подписано в печать 05.03.2014. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,56. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 100. Заказ 1007.
Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.