УДК 811.161.3

Интеграция планиметрии и тригонометрии при обобщающем повторении курса элементарной математики

Ковалёнок Н.В., Чернявская С.В.
Белорусский национальный технический университет

Аннотация:

В статье рассматриваются задачи, в которых комбинируется теоретический материал геометрии и алгебры (в частности тригонометрии). Данный материал может быть использован на факультативных курсах 10–11 классов, изучающих математику на повышенном уровне, а также при обобщающем повторении при подготовке к сдаче ЦТ.

Если вспомнить исторические факты, тригонометрия возникла на геометрической основе и применялась к решению геометрических задач. Развитие алгебры позволило записывать тригонометрические соотношения в виде формул. Таким образом, тригонометрия служила средством решения вычислительных геометрических задач. Её содержанием считалось вычисление элементов простейших геометрических фигур, то есть треугольников.

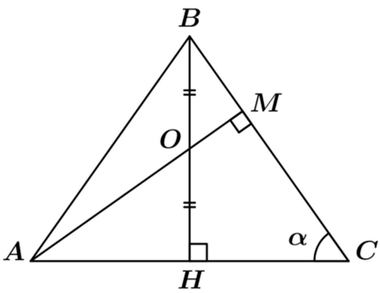
На протяжении многих лет школьный курс математики строился таким образом, что раздел «Тригонометрические выражения и их преобразования» изучался в курсе 9-го класса, параллельно с изучением курса планиметрии.

В последнее десятилетие в связи со значительным изменением программы основная часть раздела «Тригонометрические выражения и их преобразования» перешла в программу 10-го класса, а в 9-ом классе только остались поверхностные сведения (основные табличные значения и основные тригонометрические тождества), что значительно сузило спектр планиметрических задач.

Для того чтобы восполнить этот пробел, учителям необходимо включать этот материал в факультативный курс после прохождения тем тригонометрии при подготовке учащихся в классах с повышенным уровнем изучения математики к олимпиадам различного уровня и сдаче ЦТ.

Рассмотрим задачи планиметрического содержания с применением формул тригонометрии.

Пример 1. Найти косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если точка пересечения высот делит высоту, проведённую к основанию, пополам.



Решение:

Пусть $\angle A = \angle C = \alpha$, значит $\angle MAC = 90° - \alpha$.

Рассмотрим треугольник AOH:

$$\text{tg}\angle OAH = \frac{OH}{AH} = \text{tg}(90° - \alpha) = \text{tg}\alpha. \ (1)$$

Рассмотрим треугольник BHC:

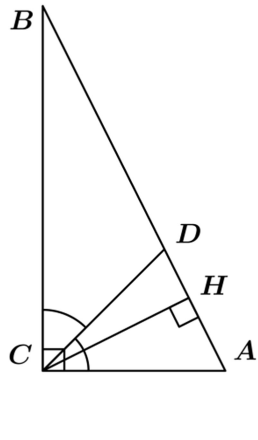
$$\text{tg}\alpha = \frac{BH}{HC} = \frac{2OH}{AH} = 2\text{tg}(90° - \alpha) = 2\text{ctg}\alpha. \ (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $\text{tg}\alpha = 2\text{ctg}\alpha,$ откуда $\text{tg}\alpha = \frac{2}{\text{tg}\alpha}$ и $\text{tg}^2\alpha = 2$. (3)

Подставив в формулу $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ значения из выражения (3), получим $\cos^2\alpha = \frac{1}{3}$, учитывая, что α – угол первой четверти, получаем $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ или $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример 2. Высота и биссектриса прямоугольного треугольника, опущенные из вершины прямого угла, равны соответственно 3 и 4. Найти площадь треугольника.



Решение:

Пусть $\angle B = \beta$, значит $\angle BCH = 90° - \beta$ и $\angle DCH = 45° - \beta$.

Рассмотрим треугольник CHD:

$$\cos\angle DCH = \cos(45° - \beta) = \frac{3}{4}; \ DH = \sqrt{7},$$

по теореме Пифагора, тогда:

$$\sin DCH = \sin(45° - \beta) = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos(45° - \beta) = \dfrac{3}{4} \\ \sin(45° - \beta) = \dfrac{\sqrt{7}}{4} \end{cases}$$

и, применив формулы сложения, получим:

$$\begin{cases} \cos\beta + \sin\beta = \dfrac{3\sqrt{2}}{4} \\ \cos\beta - \sin\beta = \dfrac{\sqrt{14}}{4} \end{cases}$$

Решив последнюю систему методом сложения, получим:

$$\begin{cases} \cos\beta = \dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{14}}{8} \\ \sin\beta = \dfrac{3\sqrt{2} - \sqrt{14}}{8} \end{cases}$$

Рассмотрим треугольник BCH:

Так как $\sin\beta = \dfrac{CH}{CB}$, то $BC = \dfrac{CH}{\sin\alpha} = \dfrac{3 \cdot 8}{3\sqrt{2} - \sqrt{14}} = 6(3\sqrt{2} + \sqrt{14})$.

Так как $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{AC}{BC}$, то $AC = BC \cdot \mathrm{tg}\beta$. Выполнив преобразования, получим, что $AC = 6(3\sqrt{2} - \sqrt{14})$.

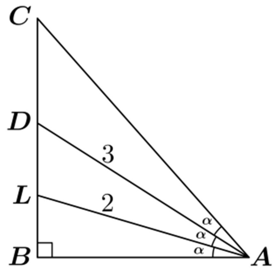
Найдем площадь треугольника ABC:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} 6(3\sqrt{2} - \sqrt{14}) \cdot 6(3\sqrt{2} + \sqrt{14}) = 72.$$

Ответ: 72.

При решении следующей задачи необходимо составить и решить тригонометрическое уравнение.

Пример 3. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle B = 90°$) точки D и L расположены на катете BC так, что AD и AL делят угол BAC на три равные части; $AD = 3$; $AL = 2$. Найдите отношение площадей треугольников ADB и ALB.



Решение:

Так как BA – общая высота треугольников DBA и LBA, то $\frac{S_{DBA}}{S_{LBA}} = \frac{DB}{LB}$.

Из треугольника LBA следует, что $LB = 2\sin\alpha$, $BA = 2\cos\alpha$. (1)

Из треугольника DBA следует, что $DB = 3\sin 2\alpha$, $BA = 3\cos 2\alpha$. (2)

Из (1) и (2) получим, что $2\cos\alpha = 3\cos 2\alpha$, откуда $2\cos\alpha = 3(2\cos^2\alpha - 1)$, следовательно, $6\cos^2\alpha - 2\cos\alpha - 3 = 0$. Решив квадратное уравнение, найдем, что $\cos\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{19}}{6}$.

Так как $\alpha < 90°$, то $\cos\alpha = \frac{1+\sqrt{19}}{6}$.

Так как $\frac{S_{DBA}}{S_{LBA}} = \frac{DB}{LB}$ и $\frac{DB}{LB} = \frac{3\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} = 3\cos\alpha$, то $\frac{S_{DBA}}{S_{LBA}} = \frac{3\cdot(1+19)}{6} = \frac{1+\sqrt{19}}{2}$.

Ответ: $\frac{1+\sqrt{19}}{2}$.

Литература

1. Первое сентября. Математика. Учебно-методическая газета. – 2005. – № 17.
2. Литвиненко, В.Н. Практикум по элементарной математике. Геометрия / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – Москва: Просвещение, 1991.