

**Белорусский национальный технический университет**

**Факультет транспортных коммуникаций**

**Кафедра сопротивления материалов и теории упругости**

СОГЛАСОВАНО

Заведующий (начальник) кафедрой

\_\_\_\_\_2014 г.

СОГЛАСОВАНО

Декан (начальник) факультета

\_\_\_\_\_2014 г.

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО  
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

**ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ**

(название учебной дисциплины)

1-70 03 02 Мосты, транспортные тоннели и метрополитены

код и наименование специальности (направление специальности, специализации)

Составители: доцент, к.т.н. Вербицкая О.Л., доцент, к.т.н. Шевчук Л.И.,  
доцент, к.т.н. Зиневич С.И.

Рассмотрено и утверждено

на заседании совета факультета транспортных  
коммуникаций

протокол №

2014 г.

## Перечень материалов

Курс лекций, практические занятия, индивидуальные задачи, материалы для самостоятельной работы, методические указания, контрольные вопросы к зачету, примеры выполнения самостоятельной работы, программа курса.

### Пояснительная записка

Учебно-методический комплекс по курсу "Теория упругости и пластичности" предназначен для студентов третьего курса обучения по специальности 1 70 03 02 "Мосты, транспортные тоннели и метрополитены". Объем изучаемого раздела дисциплины в соответствии с учебным планом составляет 17 часов лекций, 17 часов практических занятий.

**Целью ЭУМК** является научить студентов проводить расчеты типовых элементов строительных конструкций на прочность, жесткость, устойчивость и долговечность. Правильно выбирать конструкционные материалы и форму сечений конструкций, обеспечивающие требуемые запасы надежности, безопасность их эксплуатации и экономичность сооружений.

**Структурирование и подача учебного материала.** Материал курса представлен в виде лекционного материала, практических занятий, самостоятельной работы студентов и консультаций. Учебный материал четко разделен по темам курса и излагается в соответствии с типовой программой и в объеме, предусмотренном учебным планом.

**Рекомендации по организации работы с ЭУМК.** Изучение учебного материала в ЭУМК может быть использовано студентами дневной и заочной форм обучения. Предварительно следует изучить тему лекционного материала, затем ознакомиться и проанализировать решение задач соответствующей темы, представленной в разделе практических занятий. Самостоятельно решить индивидуальную задачу в соответствии с вариантом исходных данных. При выполнении и оформлении самостоятельной работы использовать пример, приведенный в ЭУМК (п.4.5). В случае появления вопросов при изучении учебного материала необходимо обратиться за консультацией к преподавателю.

## СОДЕРЖАНИЕ

1 КУРС ЛЕКЦИЙ .....	4
1.1 Теория напряженно-деформированного состояния в точке .....	4
1.2 Основные уравнения теории упругости .....	23
1.3 Плоская задача теории упругости в декартовых координатах .....	34
1.4 Плоская задача теории упругости в полярных координатах .....	38
1.5 Изгиб пластин на упругом основании .....	43
1.6 Вариационные методы решения задач теории упругости .....	48
1.7 Расчет пластины на упругом основании методом конечных элементов .....	50
1.8 Основы теории пластичности и ползучести .....	52
2 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ .....	56
2.1 Темы практических занятий .....	56
2.2 Теория напряженно-деформированного состояния в точке .....	56
2.3 Основные уравнения теории упругости .....	59
2.4 Плоская задача теории упругости в декартовых координатах .....	66
2.5 Плоская задача теории упругости в полярных координатах .....	73
2.6 Изгиб круглых пластин .....	74
2.7 Основы теории пластичности и ползучести .....	79
3 КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ .....	81
3.1 Индивидуальные задачи для самостоятельной работы .....	81
3.2 Контрольные вопросы к зачету .....	83
4 ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ .....	85
4.1 Модули курса .....	85
4.2 Тематический план дисциплины .....	88
4.3 Учебно-методическое обеспечение дисциплины .....	89
4.4 Информационное обеспечение дисциплины .....	90
4.5 Пример решения индивидуальной задачи .....	91
4.6 Описание и инструкция к программе <i>Sturm</i> .....	103
4.7 Описание и инструкция к программе <i>TUP</i> .....	109

# 1 КУРС ЛЕКЦИЙ

## 1.1 Теория напряженно-деформированного состояния в точке

### 1.1.1 Теория упругости и ее место среди других наук механики

*Все науки, изучающие поведение твёрдых тел, объединены в одно научное направление, которое называется механикой твёрдого деформируемого тела.* Самой общей наукой этого направления, в которой изучается поведение не только твердых, но и газообразных и жидких тел, является *реология*. Механика твердого тела включает основные разделы: теоретическая механика; сопротивление материалов; строительная механика; линейная (классическая) теория упругости; нелинейная теория упругости; теория пластичности; теория ползучести; теория упругости анизотропного тела; теория упругости неоднородного тела и др.

*Теоретическая механика* – это наука изучающая взаимодействие абсолютно твердых тел и их движение.

*Сопротивление материалов* - это инженерная дисциплина изучает распределение внутренних сил в прямых (или кривых) брусках. В основу исследований положена гипотеза плоских сечений. Изучаются вопросы прочности материалов при различных воздействиях на строительные конструкции, детали машин и механизмов.

*Строительная механика (классическая)* - занимается определением внутренних сил в сложных стержневых системах. В специальных разделах строительной механики изучаются пластины, оболочки, арки и др.

*Линейная (классическая) теория упругости* – изучает деформации и напряжения в линейно упругих телах: толстых брусках, пластинах, оболочках, массивах. Линейная теория упругости основывается на предположении об идеальной упругости тела и законе Гука. Диаграмма деформирования для такого материала показана на рисунке 1а. *Идеальная упругость* есть способность тела, получившего деформацию, после устранения причин, ее вызвавших, полностью восстанавливает свою первоначальную форму и размеры.

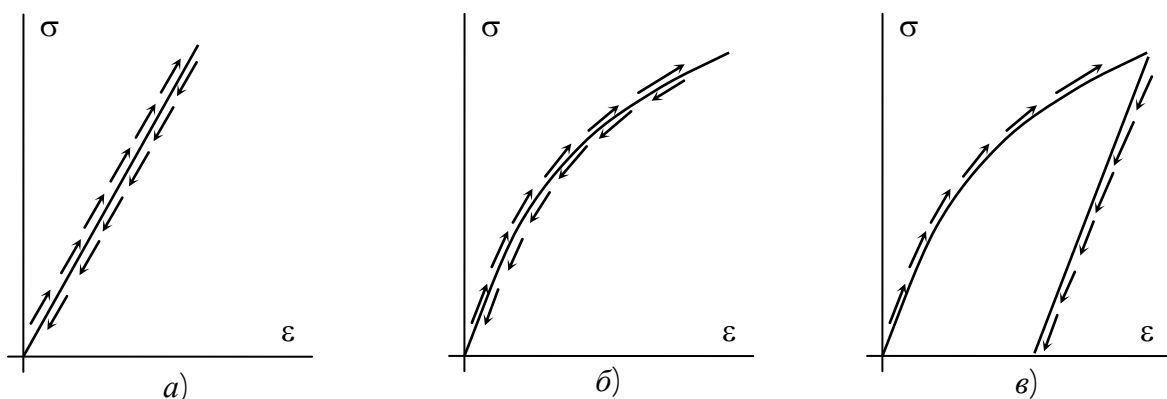


Рис.1. Закон деформирования тела:

- а) из линейно упругого материала;
- б) из нелинейно упругого материала;
- в) из нелинейно пластического материала

*Нелинейная теория упругости* – изучает деформации и напряжения в телах с нелинейной диаграммой деформирования материала. При этом закон деформирования должен быть обратимым. Диаграмма деформирования материала приведена на рисунке 1б.

*Теория пластичности* – изучает деформацию тел, имеющих нелинейную диаграмму деформирования, когда процесс деформирования необратим. Закон деформирования материала приведен на рисунке 1в.

*Теория ползучести* - изучает изменение деформаций и напряжений во времени в результате начального нагружения тела. В теории ползучести вводится понятие о релаксации и ползучести.

*Релаксация* – это явление изменения во времени напряжений при постоянной деформации тела.

*Ползучесть* - это явление изменения во времени деформаций, возникающих в результате начального нагружения тела.

Самой сложной наукой в механике твердого тела является *реология*.

*Реология* - это наука, устанавливающая общие закономерности образования и развития во времени деформаций любого вещества от различных причин и в различных термодинамических и физико-химических условиях.

### 1.1.2 Основные гипотезы теории упругости

В линейной (классической) теории упругости приняты следующие гипотезы:

1) *Гипотеза о сплошности строения тел*. Непрерывное до деформации тело остается непрерывным и после деформации. Поэтому в теории упругости деформации и напряжения могут быть выражаться непрерывными функциями, что позволяет использовать дифференциальное и интегральное исчисление.

2) *Гипотеза о естественном ненапряженном состоянии тела*. До приложения нагрузки напряжения в теле считаются равными нулю. В действительности в деталях машин и элементах строительных конструкций и до приложения нагрузок напряжения уже существуют, которые могут появляться при их изготовлении и обработке. Но установить их величину и характер распределения в телах практически невозможно. Поэтому и принимается такое допущение.

3) *Гипотеза об идеальной упругости*. Все тела являются идеально упругими, а процесс деформирования является обратимым. Для большинства материалов это не так. Но нелинейность деформирования слабо выражена. Поэтому с некоторым приближением такая гипотеза может быть принята.

4) *Гипотеза о шаровой изотропии*. Физико-механические свойства материала одинаковые по всем направлениям, проведенным из данной точки тела. Если это не так, то такие материалы называются *анизотропными*. Расчетом конструкций, изготовленных из анизотропных материалов, занимается *теория упругости анизотропного тела*,

5) *Гипотеза о совершенной однородности*. Во всех точках тела механические свойства материала совершенно одинаковые. Отметим, что если материал имеет кристаллическое строение, то за счет хаотичной ориентации самих кристаллов материал считается квазиизотропным и квазиоднородным.

6) *Принцип “автономной” прочности.* Напряженное состояние в данной точке тела зависит от состояния деформации в этой же точке, но не в любой другой.

7) *Принцип локальности эффекта самоуравновешенных внешних нагрузок - принцип Сен-Венана.* Если в какой-либо малой части тела приложена уравновешенная система сил, то она вызывает в теле напряжения, которые очень быстро убывают по мере удаления от этой части тела.

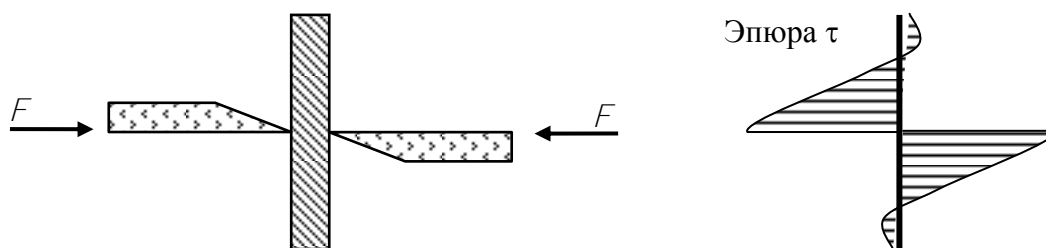


Рис.2. Быстрое убывание касательных напряжений при удалении от места разреза

8) *Гипотеза о малости перемещений.* Перемещения точек тела, вызванные его деформацией, малы по сравнению с размерами самого тела.

### 1.1.3 Обозначения напряжений. Тензор напряжений

Дадим определения некоторым понятиям.

*Волокно* - это совокупность всех материальных точек, расположенных вдоль некоторой непрерывной линии.

*Линейный элемент* - это малый отрезок некоторого волокна.

*Слой тела* - совокупность точек тела, расположенных на некоторой поверхности.

*Элементарная площадка* - бесконечно малый элемент какого-либо слоя.

В механике твердого тела различают внешние и внутренние силы.

*Внешние силы* – это силы взаимодействия двух тел в результате их соприкосновения или за счет взаимодействия полей (гравитационного, электромагнитного).

*Внутренние силы* - это силы взаимодействия между частями одного и того же тела. Интенсивностью внутренних сил являются *напряжения*. Дадим определения напряжениям.

*Полным напряжением в точке*  $P_v$  является интенсивность внутренних сил, проходящих через элементарную площадку, взятую вблизи этой точки, и равной пределу отношения

$$\rho_v = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_v}{\Delta A}, \quad (1)$$

где  $\Delta P_v$  – элементарная внутренняя сила, передающаяся через площадку  $\Delta A$ ;  $\Delta A$  – площадь элементарной площадки.

Проекции полного напряжения на координатные оси  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  соответственно обозначим  $P_{xv}$ ,  $P_{yv}$ ,  $P_{zv}$ . Проекция полного напряжения на нормаль площадки и на плоскость самой площадки принято обозначать  $\sigma_v$  и  $\tau_v$ .

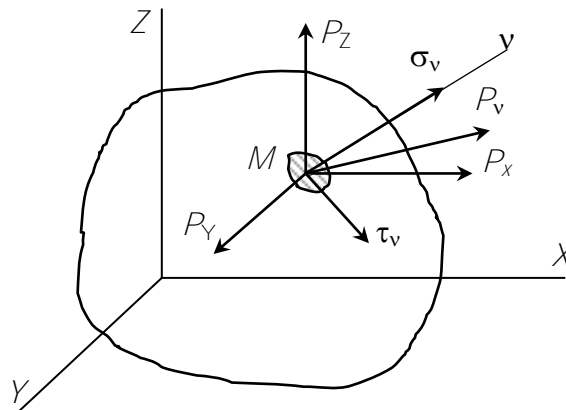


Рис. 3. Полное напряжение и его проекции на координатные оси, на нормаль и плоскость выделенной площадки

Связь полного напряжения с его проекциями имеет вид

$$P_v^2 = P_{xv}^2 + P_{yv}^2 + P_{zv}^2. \quad (2)$$

Общее правило индексации - *первый индекс* соответствует той оси, параллельно которой действует само напряжение, а *второй индекс* - соответствует нормали к площадке, к которой приложено напряжение.

*Нормальным напряжением в точке*  $\sigma_v$  называется проекция полного напряжения в точке на нормаль площадки, к которой приложено само полное напряжение.

*Касательным напряжением в точке*  $\tau_v$  называется проекция полного напряжения в точке на плоскость площадки, к которой приложено само полное напряжение.

Поясним правила индексации нормальных и касательных напряжений.

*Нормальное напряжение* имеет один индекс, совпадающий с обозначением той оси, параллельно которой оно направлено. Нормальное напряжение считается *положительным*, если оно вызывает растяжение, то есть совпадает по направлению с направлением внешней нормали. Нормальные напряжения обозначаются следующим образом -  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ .

Касательные напряжения имеют два индекса.

*Первый индекс* совпадает с обозначением той оси, вдоль которой действует само касательное напряжение. *Второй индекс* совпадает с обозначением той оси, которая является нормалью к площадке, где приложено само касательное напряжение.

Касательное напряжение считается *положительным*, если его направление и направление внешней нормали площадки, к которой оно приложено, одновременно совпадают или одновременно не совпадают с положительными

направлениями соответствующих осей координат. Касательные напряжения обозначаются следующим образом –  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ .

Рассмотрим элементарный тетраэдр, вырезанный внутри тела в окрестности какой-либо точки (рис. 4). Тетраэдр находится в состоянии равновесия. На его наклонной площадке и на координатных площадках действуют напряжения.

Отметим, что проекции напряжения на наклонной площадке  $\rho_{xv}, \rho_{yv}, \rho_{zv}$  вызывают нормальные и касательные напряжения на координатных площадках тетраэдра соответственно

$$\rho_{xv} \Rightarrow \sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}; \quad \rho_{yv} \Rightarrow \tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}; \quad \rho_{zv} \Rightarrow \tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z. \quad (3)$$

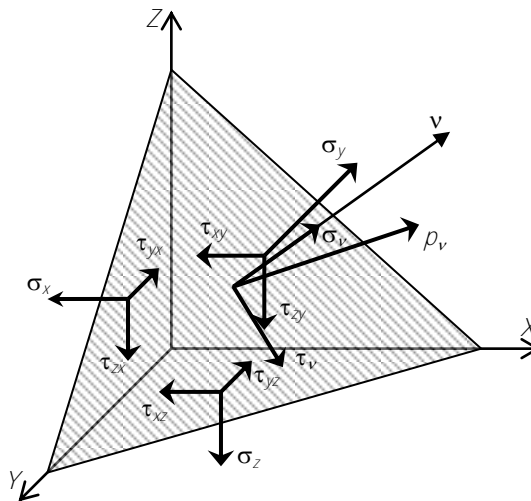


Рис. 4. Тетраэдр и напряжения на его площадках

Выделим в окрестности внутренней точки тела параллелепипед (рис.5) и покажем напряжения на его видимых для нас площадках.

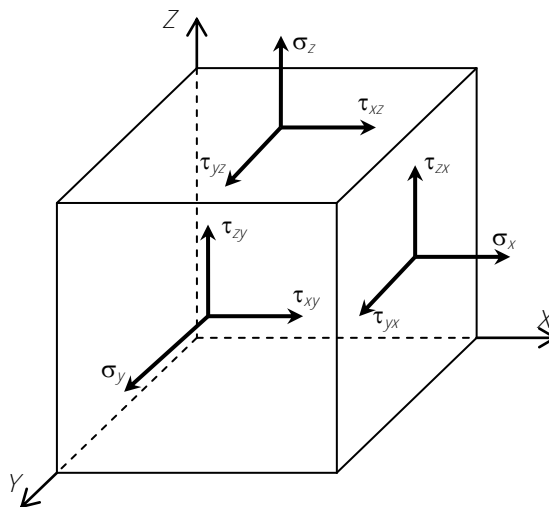


Рис. 5 – Элемент в форме параллелепипеда и напряжения на его площадках



В классической теории упругости предполагается, что напряжения по площадкам элемента распределены равномерно. На площадках элементарного параллелепипеда всего появляется *девять* напряжений. Но согласно закону парности касательных напряжений, полученному в курсе сопротивления материалов,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (4)$$

только шесть из них являются независимыми.

**Тензор напряжений.** Матрица, составленная из компонент напряжения, расположенных в определенном порядке, называется *тензором напряжения*.

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (5)$$

#### 1.1.4 Напряженное состояние в точке. Частные случаи напряженных состояний

*Напряженным состоянием в точке* тела называется совокупность напряжений, приложенных к всевозможным площадкам, проведенным в окрестности данной точки. Напряженное состояние считается вполне определенным, если можно найти напряжения на любой площадке, проведенной в окрестности исследуемой точки.

Различают линейное (одноосное), плоское (двуосное) и объемное (трехосное) напряженные состояния.

*Линейным напряженным состоянием* называется такое состояние, при котором две пары площадок элементарного параллелепипеда свободны от напряжений (рис. 6 а).

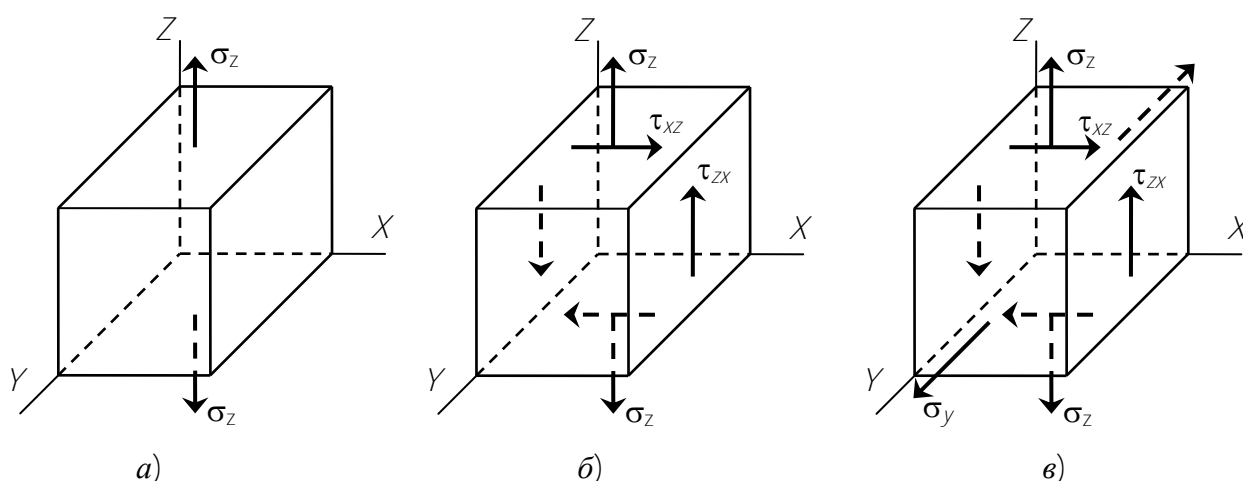


Рис. 6. Примеры видов напряженных состояний:  
а. – линейное; б. – плоское; в. – объемное

*Плоским напряженным состоянием* называется такое состояние, при котором одна пара противоположных площадок элементарного параллелепипеда

свободна от напряжений (рис. 6 б).

*Объемным напряженным состоянием* называется такое состояние, при котором в элементарном параллелепипеде нет свободных от напряжений площадок (рис. 6 в).

### 1.1.5 Условие на контуре или граничные условия

Между интенсивностью внешней нагрузки, действующей на какую-либо точку поверхности тела, и компонентами напряжения, действующими в окрестности той же точки, существует зависимость. Получим ее. Для этого рассмотрим элементарный тетраэдр, вырезанный в окрестности точки поверхности тела (рис. 7).

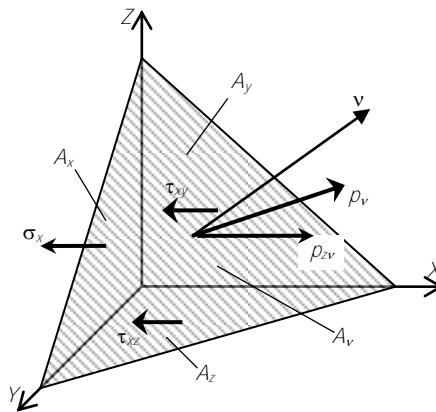


Рис. 7. Элементарный тетраэдр и напряжения на его площадках

Введем обозначения:  $A_v$  - площадь наклонной грани с нормалью  $v$ ;  $A_x$  - площадь грани с нормалью  $X$ ;  $A_y$  - площадь грани с нормалью  $Y$ ;  $A_z$  - площадь грани с нормалью  $Z$ . Обозначим  $l = \cos(X, v)$ ;  $m = \cos(Y, v)$ ;  $n = \cos(Z, v)$  направляющие косинусы наклонной площадки.

Площади граней тетраэдра связаны между собой зависимостью

$$A_x = A_v l; \quad A_y = A_v m; \quad A_z = A_v n. \quad (6)$$

Из геометрических соображений, очевидно, что направляющие косинусы связаны между собой уравнением

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (7)$$

Под действием внешних и внутренних сил элементарный тетраэдр должен находиться в состоянии равновесия. Условие равновесия выражается уравнениями равновесия. Запишем одно из них

$$\sum X = 0; \quad \rho_{xv} A_v - \sigma_x A_x - \tau_{xy} A_y - \tau_{xz} A_z = 0. \quad (8)$$

Выполним перенос и учтем зависимость между площадями граней элемента

$$\rho_{xv} A_v = \sigma_x A_v l + \tau_{xy} A_v m + \tau_{xz} A_v n. \quad (9)$$

Разделим левую и правую части уравнения на  $A_v$  и получим

$$\rho_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n. \quad (10)$$

Аналогично составим два других уравнения равновесия и в итоге получим условие на поверхности тела или статические граничные условия

$$\begin{cases} \rho_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ \rho_{yv} = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ \rho_{zv} = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{cases} \quad (11)$$

### 1.1.6 Исследование напряженного состояния в точке

Уравнения, выражающие граничные условия, справедливы и для точек, расположенных внутри тела (рис. 7). Только в этом случае  $\rho_{xv}$ ,  $\rho_{yv}$ ,  $\rho_{zv}$ , являются проекциями не интенсивности нагрузки, а проекциями полного напряжения  $P_v$  в рассматриваемой точке.

Проекции полного напряжения  $P_v$  на координатные оси  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  могут быть выражены через компоненты тензора напряжений  $T_\sigma$

$$\begin{cases} \rho_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ \rho_{yv} = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ \rho_{zv} = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{cases} \quad (12)$$

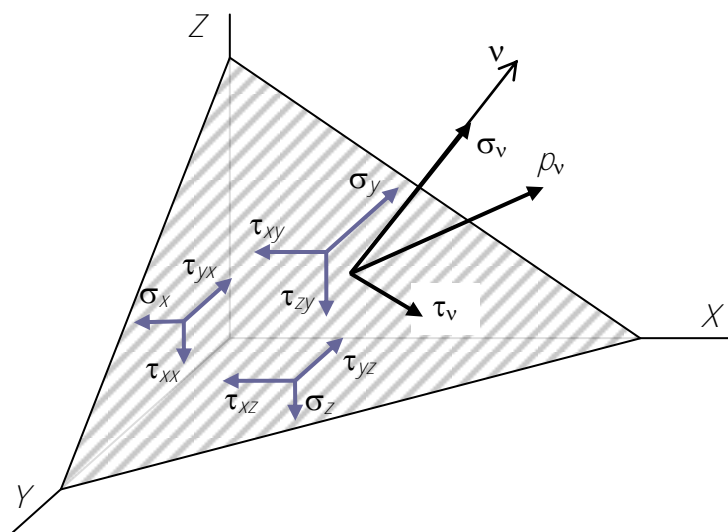


Рис. 8. Тетраэдр и напряжения на его площадках, взятый около точки внутри тела

Разложим полное напряжение  $P_v$  на две составляющие: нормальное напряжение  $\sigma_v$  и касательное напряжение  $\tau_v$ . Полное напряжение равно

$$\rho_v^2 = \rho_{xv}^2 + \rho_{yv}^2 + \rho_{zv}^2. \quad (13)$$

Проектируем каждую составляющую  $\rho_{xv}$ ,  $\rho_{yv}$ ,  $\rho_{zv}$  полного напряжения  $\rho_v$  на нормаль к наклонной площадке и проекции суммируем. В результате получим нормальное напряжение на наклонной площадке.

$$\begin{aligned} \sigma_v = \rho_{xv}l + \rho_{yv}m + \rho_{zv}n = & (\sigma_x l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n)l + (\tau_{yx}l + \sigma_y m + \tau_{yz}n)m + \\ & + (\tau_{zx}l + \tau_{zy}m + \sigma_z n)n + \sigma_x l^2 + \tau_{xy}lm + \tau_{xz}ln + \tau_{yx}ml + \sigma_y m^2 + \tau_{yz}mn + \\ & + \tau_{zx}ml + \sigma_z n^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая закон парности касательных напряжений, и приведя подобные, получим уравнение для нормального напряжения на наклонной площадке внутри тела

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy}lm + \tau_{yz}mn + \tau_{zx}ml). \quad (15)$$

Касательные напряжения на наклонной площадке вычисляются как разность квадратов полного напряжения и нормального напряжения

$$\tau_v^2 = \rho_v^2 - \sigma_v^2. \quad (16)$$

### 1.1.7 Главные напряжения и главные площадки

Из сопротивления материалов известно, что площадки, проведенные около некоторой точки, на которых касательные напряжения равны нулю, называются *главными площадками*.

Нормальные напряжения, действующие на таких площадках, называются *главными напряжениями*.

Пусть на наклонной площадке касательные напряжения равны нулю (рис. 9). Тогда полное напряжение  $P_v$  должно располагаться на нормали площадки  $v$  и быть равной по величине своей проекции на нормаль

$$\tau_v = 0, \quad \rho_v = \sigma_v. \quad (17)$$

Выразим проекции полного напряжения на наклонной площадке с учетом (17)

$$\begin{cases} \rho_{xv} = \rho_v l = \sigma_v l = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ \rho_{yv} = \rho_v m = \sigma_v m = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ \rho_{zv} = \rho_v n = \sigma_v n = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{cases} \quad (18)$$

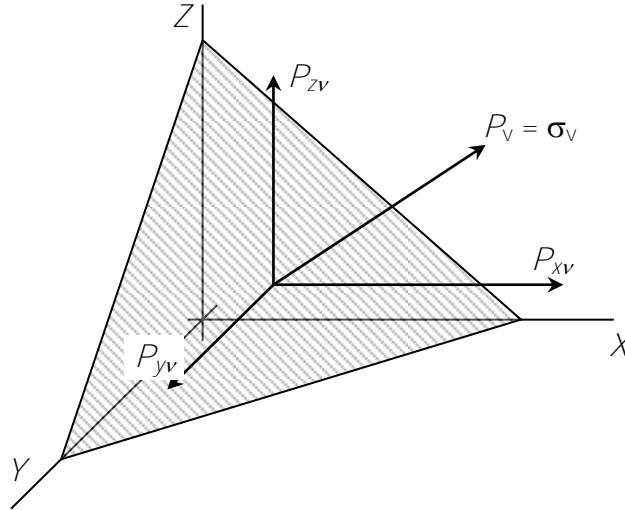


Рис. 9. Тетраэдр, взятый около точки внутри тела, и напряжения на его площадках

Обозначим для удобства  $\sigma_v \rightarrow \sigma$ , учитываем последние уравнения в трех выражениях, получим

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma) l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = 0; \\ \tau_{yx} l + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{yz} n = 0; \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + (\sigma_z - \sigma) n = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Кроме того, из геометрии известна зависимость между направляющими косинусами

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (20)$$

В результате получена система четырех уравнений (19) и (20) с четырьмя неизвестными ( $l$ ,  $m$ ,  $n$  и  $\sigma$ ). Первые три уравнения (19) однородны и образуют систему, имеющую нулевое решение. Но это решение не подходит к четвертому уравнению (20). Поэтому следует потребовать, чтобы система первых трех уравнений имела кроме нулевого еще и ненулевое решение. А это возможно только в том случае, когда определитель матрицы коэффициентов системы первых трех уравнений равен нулю.

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0. \quad (21)$$

Это требование дает нам уравнение, с помощью которого устанавливаются значения  $\sigma$ , обеспечивающие выполнение условия, которому соответствует рисунок 9.

$$\sigma^3 - \sigma' \sigma^2 + \sigma'' \sigma - \sigma''' = 0. \quad (22)$$

Если существуют действительные корни кубического уравнения (22), то существуют и площадки, на которой касательные напряжения равны нулю.

Коэффициенты  $\sigma'$ ,  $\sigma''$ ,  $\sigma'''$  выражаются через компоненты тензора напряжений  $T_{\sigma}$ . Три корня полученного кубического уравнения являются главными напряжениями, которые принято индексировать по следующему условию

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (23)$$

Подставляя какое-либо главное напряжение  $\sigma_k$  в первые два уравнения (19) и, учитывая зависимость между направляющими косинусами  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , можно определить направляющие косинусы  $k$ -ой площадки, на которой касательные напряжения равны нулю. Такие площадки принято называть *главными площадками*. Исследования показали, что по главным площадкам действуют экстремальные нормальные напряжения. Для объемного напряженного состояния в любой точке тела всегда существует три главных площадки или в особых случаях их может быть бесконечное множество.

### 1.1.8 Инварианты тензора напряжений

Если около заданной точки вырезать два элементарных параллелепипеда, по-разному ориентированные в пространстве, то на их площадках будут действовать разные напряжения. Однако, независимо от ориентации этих параллелепипедов около рассматриваемой точки будут действовать строго определенные главные напряжения. То есть главные напряжения не будут зависеть от компонентов тензора напряжения, а зависят от напряженного состояния в той точке тела, которая рассматривается.

Поэтому главные напряжения инвариантны по отношению к преобразованию системы координат. Но главные напряжения являются корнями кубического уравнения (22). Поэтому и коэффициенты кубического уравнения (22) тоже будут инвариантны по отношению к преобразованию координат.

Пусть задан тензор напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Первый инвариант тензора напряжений  $\sigma^I$  равен сумме элементов тензора напряжений, расположенных на его главной диагонали

$$\sigma^I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z. \quad (25)$$

Второй инвариант тензора напряжений  $\sigma^{II}$  равен сумме миноров определителя тензора напряжений, если производить разложение по элементам его главной диагонали.

$$\sigma^{II} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_x \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2. \quad (26)$$

Третий инвариант тензора напряжений  $\sigma^{III}$  равен развернутому в строку определителю тензора напряжений

$$\sigma^{III} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \quad (27)$$

В теории напряжений и в теории деформаций инварианты следует рассматривать как основные характеристики напряженного и деформированного состояний в точке. Полученные инварианты являются базисными. Любые комбинации инвариантов – это тоже инварианты.

### 1.1.9 Наибольшие (экстремальные) касательные напряжения

Для объемного напряженного состояния экстремальные касательные напряжения определяются по формулам

$$\tau_{12} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2); \quad \tau_{23} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3); \quad \tau_{31} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1). \quad (28)$$

Площадки с экстремальными касательными напряжениями расположены под углом  $45^\circ$  к соответствующим главным площадкам.

Пример расположения площадок с экстремальными касательными напряжениями показан на рисунке 10.

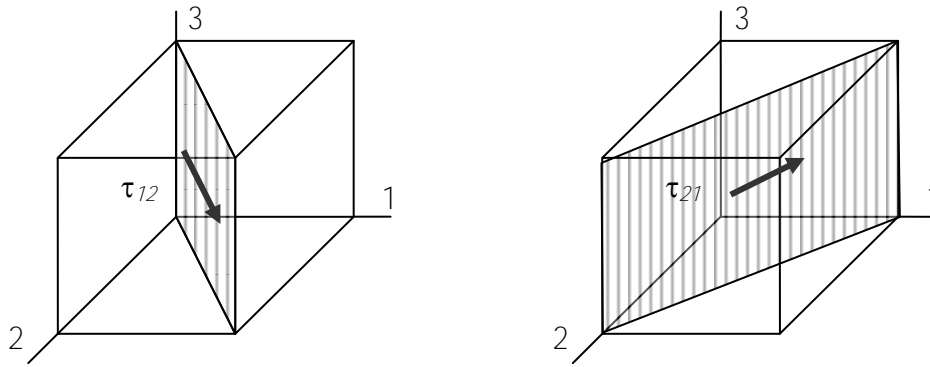


Рис. 10. Положения площадок с экстремальными касательными напряжениями

### 1.1.10 Октаэдрические площадки и напряжения

Площадки, равно наклоненные к главным площадкам, называются *октаэдрическими*. Все направляющие косинусы октаэдрической площадки равны между собой и равны

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (29)$$

Проекции полного октаэдрического напряжения на нормали главных площадок равны

$$\rho_{1v} = \sigma_1 l; \quad \rho_{2v} = \sigma_2 m; \quad \rho_{3v} = \sigma_3 n, \quad (30)$$

Отсюда следует выражение для полного напряжения на октаэдрической площадке

$$\rho_{oct}^2 = \rho_{1v}^2 + \rho_{2v}^2 + \rho_{3v}^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 \quad (31)$$

или, учитывая, что  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , получим

$$\rho_{oct}^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2). \quad (32)$$

Условимся называть *средним напряжением* величину равную

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (33)$$

Отметим, что среднее напряжение можно выразить через первую инварианту тензора напряжений

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma^I. \quad (34)$$



Выведем уравнение для нормального октаэдрического напряжения. Для этого воспользуемся уравнением (15)

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy}lm + \tau_{yz}mn + \tau_{zx}ml). \quad (35)$$

Для октаэдрической площадки, учитывая значения ее направляющих косинусов, получим выражение для *октаэдрического нормального напряжения, выраженные через главные напряжения*

$$\sigma_{oct} = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (36)$$

или через среднее напряжение

$$\sigma_{oct} = \sigma_m. \quad (37)$$

Определим *октаэдрическое касательное напряжение*

$$\tau_{oct}^2 = \rho_{oct}^2 - \sigma_{oct}^2 \quad (38)$$

или

$$\begin{aligned} \tau_{oct}^2 &= \frac{1}{3}\sigma_1^2 + \frac{1}{3}\sigma_2^2 + \frac{1}{3}\sigma_3^2 - \left[ \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 = \frac{1}{3}\sigma_1^2 + \frac{1}{3}\sigma_2^2 + \frac{1}{3}\sigma_3^2 - \frac{1}{9}\sigma_1\sigma_2 - \frac{1}{9}\sigma_1\sigma_2 - \\ &- \frac{1}{9}\sigma_1\sigma_3 - \frac{1}{9}\sigma_2\sigma_1 - \frac{1}{9}\sigma_2\sigma_2 - \frac{1}{9}\sigma_2\sigma_3 - \frac{1}{9}\sigma_3\sigma_1 - \frac{1}{9}\sigma_3\sigma_2 - \frac{1}{9}\sigma_3\sigma_3 = \frac{2}{9}\sigma_1^2 + \frac{2}{9}\sigma_2^2 + \frac{2}{9}\sigma_3^2 - \\ &- \frac{2}{9}\sigma_1\sigma_2 - \frac{2}{9}\sigma_2\sigma_3 - \frac{2}{9}\sigma_3\sigma_1. \end{aligned} \quad (39)$$

Окончательно имеем

$$\tau_{oct}^2 = \frac{2}{9}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1). \quad (40)$$

или

$$\tau_{oct}^2 = \frac{1}{9} \left[ (\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) + (\sigma_2^2 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2) + (\sigma_3^2 - 2\sigma_3\sigma_1 + \sigma_1^2) \right]. \quad (41)$$

Окончательно получим

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (42)$$

В сопротивлении материалов для суждения с прочности материала введено понятие *приведенного напряжения* (*интенсивности напряжения*), которое может быть выражено через главные напряжения или через октаэдрическое напряжение.

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad \text{или} \quad \sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct}. \quad (43)$$

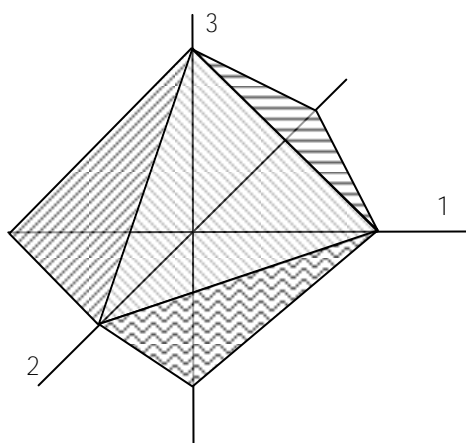


Рис. 11. Октаэдр, построенный из октаэдрических площадок

Около любой точки тела всегда можно провести восемь октаэдрических площадок, которые образуют тело, называемое *октаэдром* (рис. 11) Отсюда происходит и название площадок.

#### 1.1.11 Понятие о шаровом тензоре напряжений и о тензоре девиатора напряжения

Экспериментально установлено, что опасность разрушения материала зависит в большей мере от деформации изменения формы тела. Поэтому для суждения о прочности необходимо из общей деформации тела выделить те компоненты, которые зависят от изменения формы, и те, которые зависят от изменения объема. Таким же образом следует разделять и компоненты тензора напряжения.

Тензор напряжения можно представить как сумму двух тензоров – шарового тензора напряжений *и* тензора девиатора напряжения

$$T_{\sigma} = T_{\sigma}^0 + D_{\sigma}, \quad (44)$$

где  $T_{\sigma}^0$  – шаровой тензор напряжений

$$T_{\sigma}^0 = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}.$$

$D_{\sigma}$  – тензор-девиатор (или девиатор) напряжения

$$D_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{xy} & \sigma_x - \sigma_m \end{bmatrix}.$$

### 1.1.12 Обозначения компонент деформации. Тензор деформации

*Относительная линейная деформация в точке* вдоль некоторого волокна  $\varepsilon_v$  называется величина, равная пределу отношения

$$\varepsilon_v = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{S}. \quad (45)$$

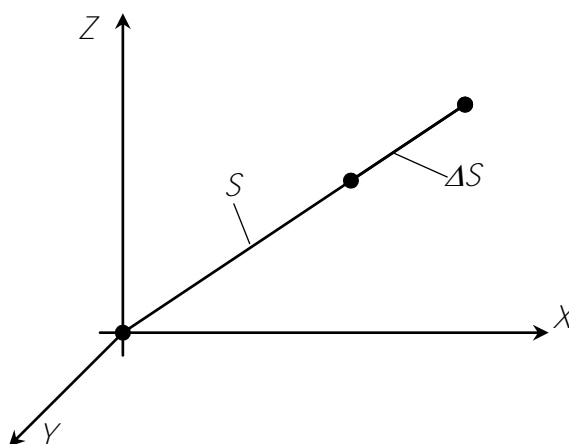


Рис. 12. Волокно и его линейная деформация

Деформацию элементарного параллелепипеда можно разложить на три линейных  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  и три угловых деформации  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ .

Индекс относительной линейной деформации совпадает с обозначением той оси, в направлении которой происходит деформация. При удлинении волокна деформация считается положительной, а при укорочении - отрицательной.

Индексы относительной угловой деформации (угла сдвига) совпадают с обозначением осей координат, расположенных в плоскости сдвига. При увеличении углового размера тела угол сдвига принимается положительным, а при уменьшении – отрицательным.

Линейные деформации вызывают изменение объема тела, а деформации сдвига вызывают изменение его формы.

Рассмотрим параллелепипед с ребрами равными единице (рис. 13). Пусть его линейные относительные деформации по направлениям соответствующих

осей координат равны  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ . Но, так как длина его ребер равна единице, то и абсолютные деформации ребер по своим значениям равны  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ .

Тогда изменение объема элементарного параллелепипеда равно

$$\theta = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1. \quad (46)$$

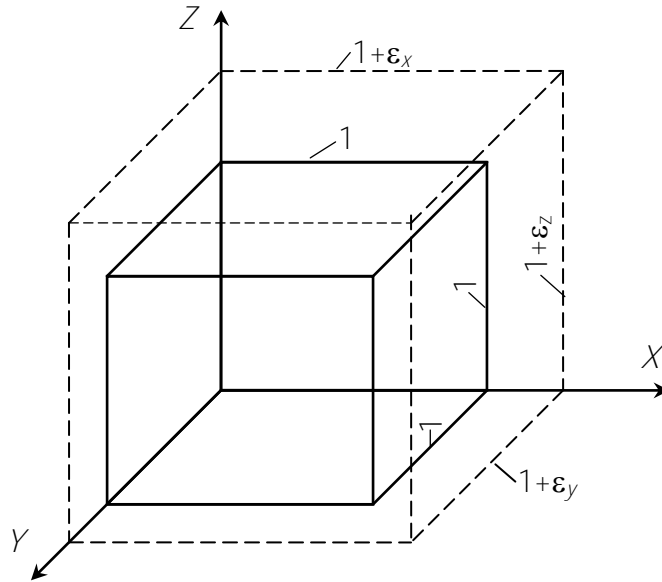


Рис. 13. Линейные деформации элементарного параллелепипеда

Раскроем скобки и получим

$$\begin{aligned} \theta &= 1 - (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_z + \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z) = \\ &= 1 - (1 + \varepsilon_z + \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z). \end{aligned} \quad (47)$$

Единицы взаимно уничтожаются. Учитывая, что относительные линейные деформации гораздо меньше единицы, слагаемыми  $\varepsilon_y \varepsilon_z, \varepsilon_x \varepsilon_z, \varepsilon_x \varepsilon_y, \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$  пренебрегаем. В результате получим

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \text{ или } \theta = 3\varepsilon_m. \quad (48)$$

Из геометрических соображений в теории упругости имеет место тождественность

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}; \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz}. \quad (49)$$

Из компонент деформации строится тензор деформации

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Одна вторая перед углами сдвига введена для удобства записей операций с тензорами напряжений и деформаций. Деформированное состояние в точке тела вполне определено, если для этой точки задан тензор деформаций.

### 1.1.13 Исследование деформированного состояния в окрестности точки

Удлинение отрезка какого-либо прямолинейного волокна, проходящего через заданную точку тела и расположенного вдоль оси  $v$  можно выразить через компоненты деформации той же точки

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl. \quad (51)$$

В окрестности каждой точки тела существует три взаимно перпендикулярные главные направления – *главные оси деформации*. Эти оси обладают тем свойством, что волокна, лежащие на них, испытывают только изменение длины, но не искривляются. Для изотропных тел главные оси деформации совпадают с направлениями главных напряжений. Деформации по направлениям главных осей деформации называются *главными деформациями*. Для вычисления значений главных деформаций необходимо решить кубическое уравнение.

$$\varepsilon^3 - \varepsilon' \varepsilon^2 + \varepsilon'' \varepsilon - \varepsilon''' = 0, \quad (52)$$

где  $\varepsilon'$ ,  $\varepsilon''$ ,  $\varepsilon'''$  – инварианты тензора напряжений.

Корни кубического уравнения (52) и будут значениями главных деформаций. Главные деформации индексируются по условию

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3. \quad (53)$$

*Первая инварианта тензора деформации* равна сумме его элементов, расположенных на главной диагонали

$$\varepsilon' = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (54)$$

**Вторая инварианта тензора деформации** равна сумме миноров, взятых при элементах, расположенных на его главной диагонали

$$\begin{aligned} \varepsilon^{II} &= \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_z & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \varepsilon_x \end{vmatrix} = \\ &= \varepsilon_x \varepsilon_x + \varepsilon_y \varepsilon_y + \varepsilon_z \varepsilon_z - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2). \end{aligned} \quad (55)$$

**Третья инварианта тензора деформации** равна определителю тензора деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon^{III} &= \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \\ &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \frac{1}{4}(\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z \gamma_{xy}^2). \end{aligned} \quad (56)$$

**Октаэдрическая линейная деформация** вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{oct} = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \varepsilon_m. \quad (57)$$

**Октаэдрический угол сдвига** равен

$$\gamma_{oct} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (58)$$

**Наибольший угол сдвига** определяется по формуле

$$\gamma_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3. \quad (59)$$

В теории упругости вводится понятие **интенсивности деформаций**

$$\varepsilon_i = \frac{3}{2\sqrt{2}(1+\nu)}\gamma_{oct}. \quad (60)$$

В пределах упругих деформаций между обобщенным напряжением и обобщенной деформацией существует простая связь

$$\sigma_j = E\varepsilon_j. \quad (61)$$

#### 1.1.14 Понятие о шаровом тензоре деформации и о тензоре деформации

Тензор деформации представляют как сумму двух тензоров

$$T_\varepsilon = T_\varepsilon^0 + D_\varepsilon, \quad (62)$$

где  $T_\varepsilon^0$  - шаровой тензор деформации, который характеризует изменение объема в окрестности некоторой точки;

$D_\varepsilon$  - девиатор тензора деформации, который характеризует формоизменение

$$T_\varepsilon^0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix}, \quad D^0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_m \end{bmatrix}.$$

## 1.2 Основные уравнения теории упругости

### 1.2.1 Дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье)

В окрестности точки тела выделим элементарный параллелепипед (рис. 14). Обозначим  $U, V, W$  - перемещения по направлениям, соответственно, осей  $X, Y$  и  $Z$ . Покажем только те напряжения на его площадках, которые параллельны оси  $X$ . Учитывая, что элементарный параллелепипед находится в состоянии равновесия, составим уравнение равновесия

$$\sum X = m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (63)$$

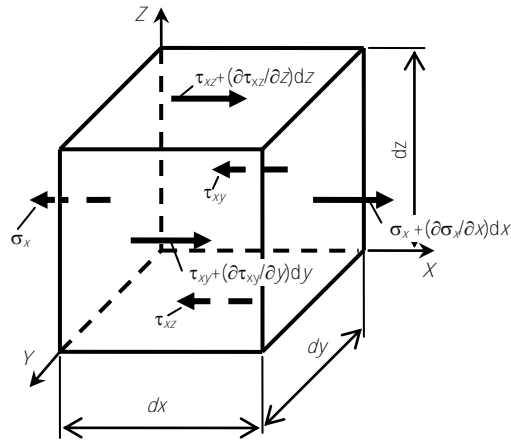


Рис. 14. Элемент с напряжениями на его площадках, параллельными оси  $X$

Запишем уравнение (63) в развернутом виде

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dzdx - \tau_{xy} dzdx + \\ & + \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dxdy - \tau_{xz} dxdy + X\rho dxdydz = \rho dxdydz \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (64)$$

где  $\rho$  – плотность материала;

$X$  – проекция на ось  $X$  объемной силы, то есть распределенной силы, отнесенной к единице массы (например, сила тяжести).

Раскроем скобки

$$\begin{aligned} & \sigma_x dydz + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dydz - \sigma_x dydz + \tau_{xy} dzdx + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy dzdx - \tau_{xy} dzdx + \\ & + \tau_{xz} dxdy + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz dxdy - \tau_{xz} dxdy + X\rho dxdydz = \rho dxdydz \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (65)$$

Приведем подобные и разделим на объем элементарного параллелепипеда  $dxdydz$ .

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X\rho = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (66)$$

Составляя аналогичные уравнения равновесия на оси  $Y$  и  $Z$ , получим еще два дифференциальных уравнения. Все три уравнения можно объединить в систему, так как они содержат общие неизвестные функции.



$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X\rho = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y\rho = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z\rho = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (67)$$

### 1.2.2 Геометрические уравнения. (Уравнения Коши)

Вырежем элементарный объем в окрестности исследуемой точки. В результате деформации тела будет деформироваться и элементарный объем.

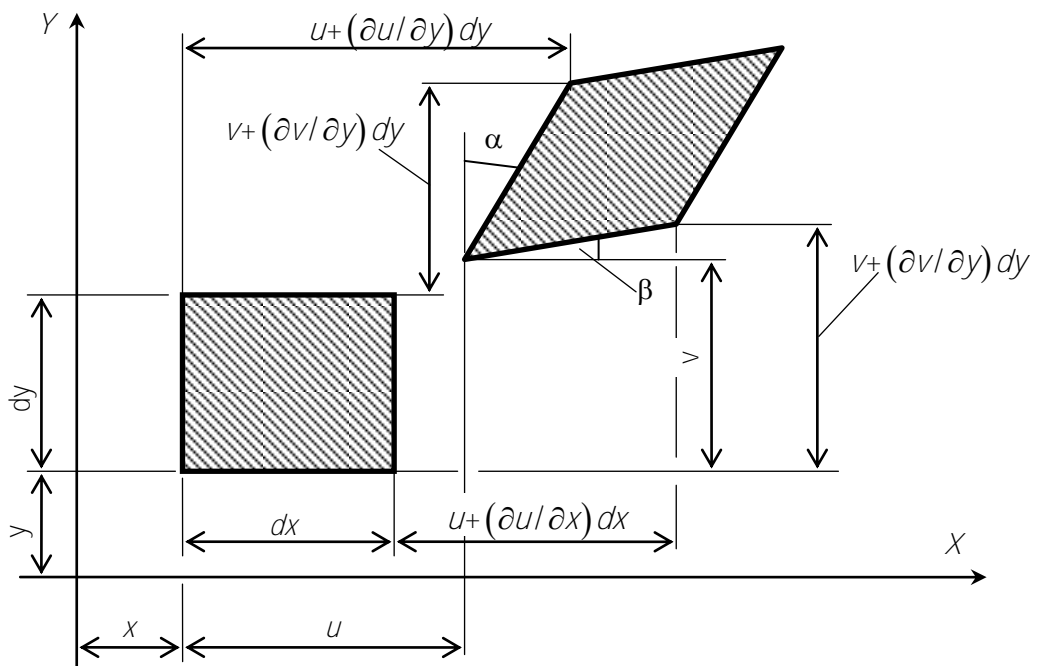


Рис. 15. Смещения, линейные и угловые деформации элементарного объема

Относительные линейные деформации элемента равны

$$\epsilon_x = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + dx - u\right) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy + dy - v\right) - dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (68)$$

Угловая деформация (угол сдвига) элемента равна сумме углов. В выражениях для углов учтено, что  $\epsilon_x$  и  $\epsilon_y$  малы по сравнению с единицей

$$\alpha = \operatorname{tg} \alpha = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial y} dy - u}{v + \frac{\partial v}{\partial y} dy + dy - v} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{\frac{\partial v}{\partial y} dy + dy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{(\epsilon_y + 1) dy} = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad (69)$$

$$\beta = \operatorname{tg}\beta = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + dx - u} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{\frac{\partial u}{\partial x} dx + dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{(\varepsilon_x + 1) dx} = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (70)$$

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (71)$$

По аналогии можно получить все зависимость между деформациями и перемещениями для объемного напряженного состояния

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{cases} \quad (72)$$

Полученные уравнения называются *геометрическими уравнениями* или *уравнениями Коши*.

### 1.2.3 Уравнения неразрывности деформаций (уравнения Сененана)

Перемещение любой точки сплошного тела определяется тремя функциями  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$ . Деформации в любой точке определяются шестью функциями  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ .

Если заданы три функции перемещений  $u$ ,  $v$  и  $w$ , то этим определены все шесть составляющих деформации, так как они выражаются через частные производные перемещений (Ур. Коши). Однако, обратно, если заданы шесть составляющих деформации, то это не значит, что определены три составляющие перемещений. Очевидно, между составляющими деформации должны быть еще какие-то дополнительные зависимости. Получим эти зависимости. Имеем

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (73)$$

Продифференцируем их дважды

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}. \quad (74)$$

Сложим эти уравнения

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (75)$$

или

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x}. \quad (76)$$

Возьмем уравнения Коши

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (77)$$

Продифференцируем

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}; \quad \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}. \quad (78)$$

Сложим первое и второе уравнения и вычтем третье

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (79)$$

Продифференцируем по  $\partial z$  и получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} \quad (80)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^3 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \quad (81)$$

Аналогично можно получить все шесть зависимостей для объемного напряженного состояния.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}; \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}.
\end{aligned} \quad (82)$$

Эти уравнения впервые получены Сен-Венаном и называются **уравнениями Сен-Венана** или **уравнениями неразрывности**.

*Физический смысл уравнений Сен-Венана.*

Если для каждого параллелепипеда, на которые мысленно разделено все тело, назначить шесть независимых составляющих деформации, то из таких деформированных параллелепипедов нельзя сложить непрерывное деформированное тело. Для того, чтобы неразрывность тела была обеспечена при заданных деформациях, следует их задавать так, чтобы были обеспечены уравнения Сен-Венана.

*Энергетический смысл уравнений Сен-Венана.* Осуществление принципа неразрывности деформаций соответствует в упругом теле минимальное значение накапливаемой телом потенциальной энергии деформации.

#### 1.2.4 Обобщенный закон Гука

Для линейно деформируемого тела связь между деформациями и напряжениями устанавливается по закону Гука, полученному в сопротивлении материалов в обратной форме.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right]; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x) \right]; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right]; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}.
\end{aligned} \quad (83)$$

Из уравнений (83) выразим напряжения и получим прямую форму записи закона Гука

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\theta; & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\
\sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda\theta; & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}; \\
\sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda\theta; & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx},
\end{aligned} \quad (84)$$

где  $G$  – модуль сдвига;  $\nu$  – коэффициент Пуассона

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \lambda = \frac{2\nu G}{1-2\nu}; \quad \theta = 3\varepsilon_m = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (85)$$

### 1.2.5 Закон изменения объема

Запишем закон Гука в обратной форме

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \quad (86)$$

Сложим первые уравнения, расположенные в каждой строчке системы (86), и раскроем скобки

$$\begin{aligned} \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] + \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \\ &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_y + \sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x + \sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) = \\ &= \frac{1}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2\nu\sigma_x - 2\nu\sigma_y - 2\nu\sigma_z) = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \end{aligned} \quad (87)$$

Учитывая выражения для средней деформации, среднего напряжения и относительной объемной деформации, получим

$$\varepsilon_m = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_m; \quad \theta = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_m. \quad (88)$$

Этот закон может быть записан в тензорной форме

$$\mathcal{T}_\sigma^0 = E_0 \mathcal{T}_\varepsilon^0, \quad \text{где } E_0 = \frac{E}{1-2\nu}. \quad (89)$$

### 1.2.6 Закон изменения формы

Выведем закон изменения формы, то есть зависимость между компонентами девиаторов напряжения и деформации

$$D^0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_m \end{bmatrix}; \quad D_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{xy} & \sigma_x - \sigma_m \end{bmatrix}. \quad (90)$$

Установим зависимость между элементами девиаторов, расположенных на верхней строке и левом столбце девиаторов.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon_m &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y - \sigma_z)] - \frac{1-2\nu}{E} \sigma_m = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y - \sigma_z)] - \\ &- \frac{1-2\nu}{3E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3E} [3\sigma_x - 3\nu\sigma_y - 3\nu\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y - \sigma_z + \\ &= +2\nu\sigma_x + 2\nu\sigma_y + 2\nu\sigma_z] = \frac{1}{3E} [2(1+\nu)\sigma_x - (1+\nu)\sigma_y - (1+\nu)\sigma_z] = \\ &= \frac{1+\nu}{3E} (3\sigma_x - 3\sigma_m) = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_x - \sigma_m) = \frac{2(1+\nu)}{2E} (\sigma_x - \sigma_m) = \frac{1}{2G} (\sigma_x - \sigma_m). \end{aligned} \quad (91)$$

Чтобы перейти к прямой форме записи закона изменения формы, выразим элементы, содержащие напряжения

$$\sigma_x - \sigma_m = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_m). \quad (92)$$

Связь элементов девиаторов, содержащих углы сдвига и касательные напряжения очевидна.

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 2G\frac{1}{2}\gamma_{xy}. \quad (93)$$

Аналогично можно получить зависимости и для других элементов девиаторов напряжения и деформации

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_m &= 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_m); & \tau_{xy} &= 2G\frac{1}{2}\gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_m &= 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_m); & \tau_{yz} &= 2G\frac{1}{2}\gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_m &= 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_m); & \tau_{zx} &= 2G\frac{1}{2}\gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (94)$$

Полученную зависимость можно записать и в тензорной форме

$$D_{\sigma} = 2GD_{\varepsilon}. \quad (95)$$

### 1.2.7 Удельная потенциальная энергия

Энергия, накапливаемая при деформации в единичном объеме материала, называется *удельной потенциальной энергией* или *упругим потенциалом* в окрестности рассматриваемой точки

$$2W = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}. \quad (96)$$

Разложим полную потенциальную энергию на два слагаемых

$$W = W_0 + W_F, \quad (97)$$

где  $W_0$  – удельная энергия, расходуемая на изменение объема материала в рассматриваемой точке

$$W_0 = 3 \left( \frac{1}{2} \sigma_m \varepsilon_m \right) = \frac{3}{2} \sigma_m \varepsilon_m. \quad (98)$$

Удельную энергию изменения формы можно определить как разность полной потенциальной энергии и энергии, затраченной на изменение объема.

$$W_F = \frac{1}{4G} \left[ (\sigma_x - \sigma_m)^2 + (\sigma_y - \sigma_m)^2 + (\sigma_z - \sigma_m)^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]. \quad (99)$$

### 1.2.8 Гипотезы наступления предельного упругого и предельного пластического состояний

В курсе сопротивления материалов рассмотрены некоторые теории прочности. Задача теорий прочности заключается в том, чтобы на основании стандартных экспериментальных данных о разрушении конкретного материала при простой деформации (осевое растяжение) определить условие, при котором возможно разрушение того же материала при заданной сложной деформации.

**Теория прочности Кулона-Геста.** Предельное упругое состояние в данной точке сплошной среды наступит тогда, когда наибольшее касательное напряжение достигнет значения, равного значению наибольшего касательного напряжения при предельном состоянии для того же материала, испытывающего простое растяжение. При простом растяжении

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_y}{2} \quad (100)$$

при сложном напряженном состоянии (в конструкции)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (101)$$

Отсюда имеем

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_y}{2} \quad \text{или} \quad \sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y, \quad (102)$$

где  $\sigma_y$  – предел текучести материала.

**Теория прочности Губера-Мизеса-Роша.** Упругое предельное состояние в данной точке тела наступит тогда, когда касательное октаэдрическое напряжение достигнет значения касательного октаэдрического напряжения, соответствующего упругому предельному состоянию для того же материала при простом растяжении. При сложном напряженном состоянии октаэдрическое касательное напряжение может быть выражено через главные напряжения

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (103)$$

При простом растяжении

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_y. \quad (104)$$

Отсюда получим условие наступления предельного напряженного состояния

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_y. \quad (105)$$

### 1.2.9 Постановка задачи в теории упругости

При постановке задачи в теории упругости задаются граничные условия в виде информации о поверхностных силах - **статические граничные условия**

$$p_{xv} = p_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}); \quad p_{yv} = p_2(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}); \quad p_{zv} = p_3(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \quad (106)$$

либо в виде кинематических граничных условий

$$u = u(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}); \quad v = v(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}); \quad w = w(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}). \quad (107)$$

Могут быть заданы и объемные силы

$$X = X(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}); \quad Y = Y(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}); \quad Z = Z(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}). \quad (108)$$



В качестве неизвестных принимаются компоненты перемещения

$$u(x, y, z); \quad v(x, y, z); \quad w(x, y, z) \quad (109)$$

или компоненты напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_x(x, y, z); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y, z); \quad \sigma_z = \sigma_z(x, y, z); \\ \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z) \end{aligned} \quad (110)$$

или компоненты деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_x(x, y, z); \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y(x, y, z); \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z(x, y, z); \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y, z); \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y, z); \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y, z). \end{aligned} \quad (111)$$

Таким образом, имеется 15 неизвестных. Следовательно, для решения задачи должно быть 15 уравнений и условия на границе тела для определения постоянных интегрирования. Такие уравнения имеются. Это дифференциальные уравнения равновесия - 3; уравнения Коши - 6; уравнения неразрывности - 6. Таким образом, задача теории упругости в принципе решается

#### 1.2.10 Решение задач теории упругости в перемещениях

В физические уравнения подставим геометрические уравнения, продифференцируем и подставим полученные выражения в уравнения Навье.

В результате получим уравнения в перемещениях, которые называются *уравнениями Ляме*

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u + X \rho = \rho \frac{d^2 u}{dt^2}; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y \rho = \rho \frac{d^2 v}{dt^2}; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial z} + G \nabla^2 w + Z \rho = \rho \frac{d^2 w}{dt^2}. \end{aligned} \quad (112)$$

#### 1.2.11 Решение задач теории упругости в напряжениях

В качестве неизвестных принимаются напряжения. Используя физические уравнения, уравнения неразрывности и уравнения равновесия, получим уравнения в напряжениях, которые называются *уравнениями Бельтрами*.

$$\begin{aligned}
(1+\nu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2\sigma'}{\partial x^2} &= 0; & (1+\nu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2\sigma'}{\partial x\partial y} &= 0; \\
(1+\nu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2\sigma'}{\partial y^2} &= 0; & (1+\nu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2\sigma'}{\partial y\partial z} &= 0; \\
(1+\nu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2\sigma'}{\partial z^2} &= 0; & (1+\nu)\nabla^2\tau_{zx} + \frac{\partial^2\sigma'}{\partial z\partial x} &= 0,
\end{aligned} \tag{113}$$

где  $\sigma' = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$  – первая инварианта тензора напряжений;

$$\nabla^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2} \text{ – оператор функции.}$$

Для решения задачи к уравнениям Бельтрами присоединяются условия на границе

$$\rho_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \quad \rho_{yv} = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \quad \rho_{zv} = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \tag{114}$$

### 1.3 Плоская задача теории упругости в декартовых координатах

#### 1.3.1 Плоское напряженное состояние

Примером плоского напряженного состояния может служить состояние тонкой пластинки (рис. 18). В этом случае  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ . Предполагается, что другие составляющие напряжения равномерно распределены по толщине пластинки. Тензор напряжений и тензор деформации имеют следующий вид

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \tag{115}$$

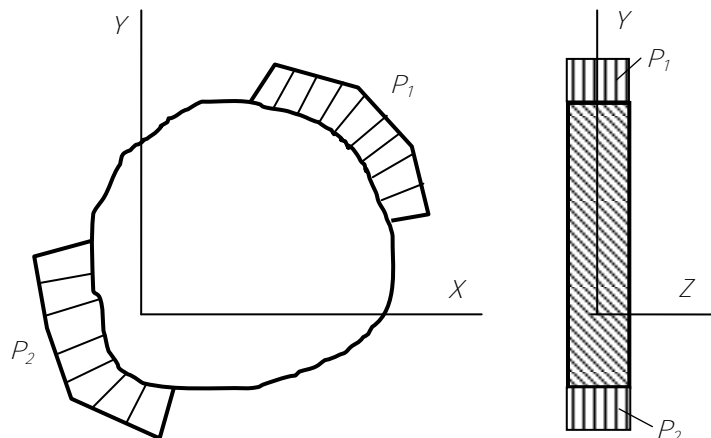


Рис. 16. Тонкая пластинка, испытывающая плоское напряженное состояние

В этом случае  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ . Предполагается, что другие составляющие напряжения равномерно распределены по толщине пластинки  
Тензор напряжений и тензор деформации имеют следующий вид

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (116)$$

Система дифференциальных уравнений равновесия сокращается до двух

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X\rho = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y\rho = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \quad (117)$$

Условие на контуре пластины принимает следующий вид

$$\rho_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m; \quad \rho_{yv} = \tau_{yx} l + \sigma_y m. \quad (118)$$

Связь между перемещениями и деформациями выражается тремя уравнениями

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (119)$$

Закон Гука в обратной форме принимает вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x); \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_z(\sigma_x + \sigma_y); \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \quad (120)$$

Уравнение неразрывности выражается одним уравнением

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (121)$$

### 1.3.2 Плоское деформированное состояние

Примером плоской деформации являются состояние, испытывающее ленточным фундаментом, дамбой или плотиной (рис. 17). В этом случае

$$\varepsilon_z = 0; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (122)$$

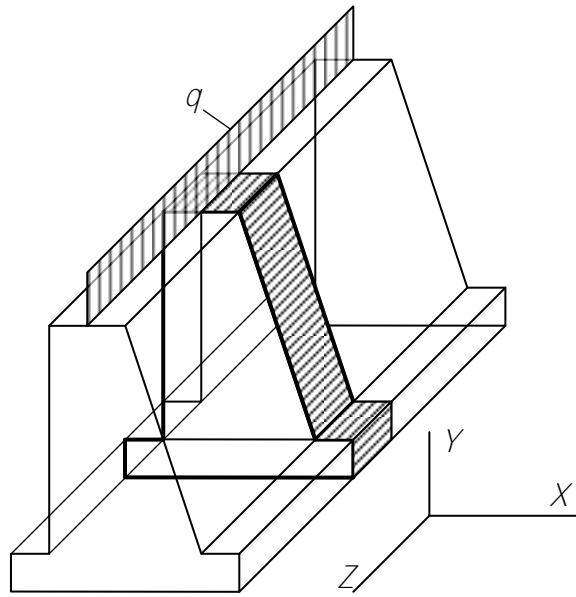


Рис. 17. Дамба, испытывающая плоское деформируемое состояние

В этом случае тензор напряжений и тензор деформации имеют следующий вид

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}; \quad T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (123)$$

Система дифференциальных уравнений равновесия сокращается до двух

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X\rho = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y\rho = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \quad (124)$$

Условие на контуре пластины принимает следующий вид

$$\rho_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m, \quad \rho_{yv} = \tau_{yx} l + \sigma_y m. \quad (125)$$

Связь между перемещениями и деформациями выражается тремя уравнениями

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (126)$$

Закон Гука в обратной форме принимает вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[ (1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y \right]; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[ (1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x \right]; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \quad (127)$$

Уравнение неразрывности выражается одним уравнением

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (128)$$

Уравнение неразрывности деформаций можно записать в в напряжениях

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad \text{или} \quad \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (129)$$

Это уравнение называется *уравнением Леви*.

### 1.3.3 Функция напряжений для плоской задачи теории упругости (функция Эри)

При решении плоской задачи в напряжениях требуется найти три неизвестные  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ . Чтобы упростить решение вводится функция напряжений  $\varphi$ . Эта функция должна определять напряжения путем ее дифференцирования

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + q_x. \quad (130)$$

Таким образом, вместо трех неизвестных имеем одно неизвестное  $\varphi$ . Легко проверить существование такой функции. Для этого подставим ее в дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + q - q = 0. \quad (131)$$

Очевидно, что уравнения равновесия удовлетворяются тождественно. Сумму напряжений выразим через функцию напряжений

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (132)$$

Для определения вида самой функции  $\varphi$  подставим ее в уравнение неразрывности (уравнение Леви)

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = \\ &= \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0. \end{aligned} \quad (133)$$

И окончательно получим

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (134)$$

В сокращенной форме полученное уравнение можно записать в виде оператора

$$\nabla^4 \varphi = 0, \quad \text{где } \nabla^4 (\cdot) = \nabla^2 [\nabla^2 (\cdot)]. \quad (135)$$

Таким образом, решение плоской задачи сводится к нахождению решения бигармонического уравнения, которое должно удовлетворять условиям на контуре.

## 1.4 Плоская задача теории упругости в полярных координатах

### 1.4.1 Обозначения перемещений, напряжений и деформаций

В некоторых случаях, например, при расчете плоских колец или дисков, удобно пользоваться полярными координатами.

Положение точки на срединной плоскости пластины определяется расстоянием  $r$  от начала координат  $O$  и углом  $\theta$  между этим направлением  $r$  и некоторой осью  $Ox$ , занимающей определенное положение на срединной плоскости.

Для исследования в случае использования полярных координат выделяется малый элемент двумя радиальными и двумя цилиндрическими поверхностями. Нормальные напряжения в радиальном направлении обычно обозначаются  $\sigma_r$ , нормальные напряжения в тангенциальном направлении –  $\sigma_\theta$ . Касательные напряжения обозначаются по тем правилам, что и в декартовых координатах –  $\tau_{r\theta}$  и  $\tau_{\theta r}$ . Проекции объемной силы, отнесенные к единице объема, обозначаются следующим образом:  $R$  – действующая в радиальном направлении и  $\Theta$  –

действующая в тангенциальном направлении. Перемещение в радиальном и перемещение в тангенциальном направлениях обозначаются, соответственно,  $U$  и  $V$ .

Относительные удлинения в радиальном и в тангенциальном направлениях обозначаются, соответственно,  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_\theta$ , а деформации сдвига (угол сдвига) –  $\gamma_{r\theta}$ ,  $\gamma_{\theta r}$ .

Учитывая принятые обозначения, тензор напряжений и тензор деформаций для плоской задачи в полярных координатах записываются в следующем виде

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_\theta \end{bmatrix}; \quad T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & \frac{1}{2}\gamma_{r\theta} \\ \frac{1}{2}\gamma_{\theta r} & \varepsilon_\theta \end{bmatrix}. \quad (136)$$

#### 1.4.2 Основные уравнения для плоской задачи в полярных координатах

Приведем без вывода основные уравнения теории упругости в полярных координатах для общего случая деформации тела, когда присутствуют и касательные напряжения  $\tau_{r\theta}$ .

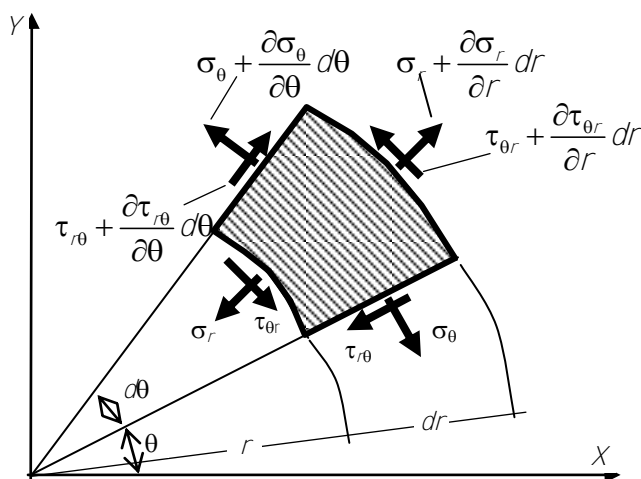


Рис. 18. Обозначения напряжений в полярных координатах

Применительно к обозначениям (рис. 18), если спроектировать все силы на направление радиуса и на перпендикулярное к нему направление, то после отбрасывания бесконечно малых высших порядков получим аналогично дифференциальным уравнениям равновесия в декартовых координатах следующие выражения:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0, \quad (137)$$

где  $R$  – объемная сила, отнесенная к единице объема, и действующей только в радиальном направлении.

Если составляющие перемещения точки в радиальном и тангенциальном направлениях обозначить  $u$  и  $v$ , то соответствующие им направления деформации можно представить в следующем виде:

относительное удлинение в радиальном направлении

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad (138)$$

относительное удлинение в тангенциальном направлении

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta}; \quad (139)$$

деформация сдвига

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (140)$$

Функцию напряжений можно применять и при полярной системе координат. Так как между декартовыми и полярными координатами имеются зависимости

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{и} \quad \theta = \text{arctg} \frac{y}{x}, \quad (141)$$

то, учитывая и подставляя их в вытекающие из них соотношения, после ряда преобразований получим следующие уравнения неразрывности деформаций в полярных координатах:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (142)$$

Зависимости напряжений от функции напряжений имеют следующий вид (при отсутствии объемных сил):

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \quad (143)$$



### 1.4.3 Понятия и основные уравнения для осесимметрической задачи в цилиндрических координатах

Ограничимся рассмотрением тел вращения, к которым приложены силы, распределенные симметрично относительно оси этого тела. В качестве примеров можно привести круглый цилиндр, усеченный конус и другие тела с осевой симметрией. При этом такие тела должны подвергаться, например, внутреннему или внешнему давлению, распределенными симметрично и приложенными к торцам тела нагрузкам и др.

Ось симметрии тела обозначим  $Z$ . Ось, перпендикулярную к оси  $Z$ , обозначим  $R$ . Для рассматриваемого случая двух координат достаточно, так как все точки тела с одинаковыми координатами  $r$  и  $z$  находятся в одинаковых условиях, то есть в их окрестностях будут одинаковыми все напряжения и деформации.

Так как каждая меридиональная плоскость  $zOr$  представляет собой плоскость симметрии как относительно формы, так и относительно нагрузки тела, то в меридиональных плоскостях касательных напряжений быть не может. Поэтому площадки в окрестности каждой точки тела, расположенной на меридиональной плоскости, являются главными площадками. Главное напряжение, действующее по этой площадке, обозначим  $\sigma_\theta$ .

Кроме меридионального сечения, через точку с координатами  $z, r$  проведем еще одно сечение, перпендикулярное к оси  $Z$ . Для исследования проводят и третье сечение, которое перпендикулярно к первым двум. Следы второго и третьего сечений на меридиональном сечении соответственно параллельны осям  $R$  и  $Z$ .

Вследствие симметрии в обеих секущих плоскостях в точках  $z, r$  могут действовать лишь такие касательные напряжения, которые параллельны меридиональной плоскости. Нормальные напряжения, действующие в секущих плоскостях, обозначаются  $\sigma_z$  и  $\sigma_r$ , касательные –  $\tau_{rz}$ . Эти напряжения являются функциями координат  $z$  и  $r$ .

Проектируем все силы, приложенные к площадкам элементарного объема на оси  $Z, R$  и получим дифференциальные уравнения равновесия в цилиндрических координатах.

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} r d\theta \cdot dz \cdot dr - \tau_{zr} r d\theta dz + \left( \tau_{zr} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz = 0; \quad (144)$$

$$-\sigma_r r d\theta dz + \left( \sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} dz \cdot r \cdot d\theta dr - \sigma_\theta r dr dz d\theta = 0. \quad (145)$$

Делим уравнения на произведение  $r dr dz d\theta$  и получим

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial z} + \tau_{zr} + r \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} = 0; \quad \sigma_r + r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + r \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \sigma_\theta = 0. \quad (146)$$

В более компактной форме статические уравнения можно представить так

$$\frac{r\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{zr}) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) - \sigma_\theta + r\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} = 0. \quad (147)$$

Если обозначить  $W$  упругие перемещения точки  $(z, r)$  в направлении оси  $Z$ , а  $U$  в направлении радиуса (в тангенциальном направлении перемещения отсутствуют), геометрические уравнения в цилиндрических координатах принимают вид

$$\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}; \quad \varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{U}{r}; \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (148)$$

Физические уравнения (закон Гука) в цилиндрических координатах записываются следующим образом

$$\sigma_z = 2G\frac{\partial W}{\partial z} + \lambda\theta; \quad \sigma_\theta = 2G\frac{\partial U}{\partial r} + \lambda\theta; \quad \tau_{rz} = G\left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}\right). \quad (149)$$

Здесь  $\theta = \varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_\theta$ .

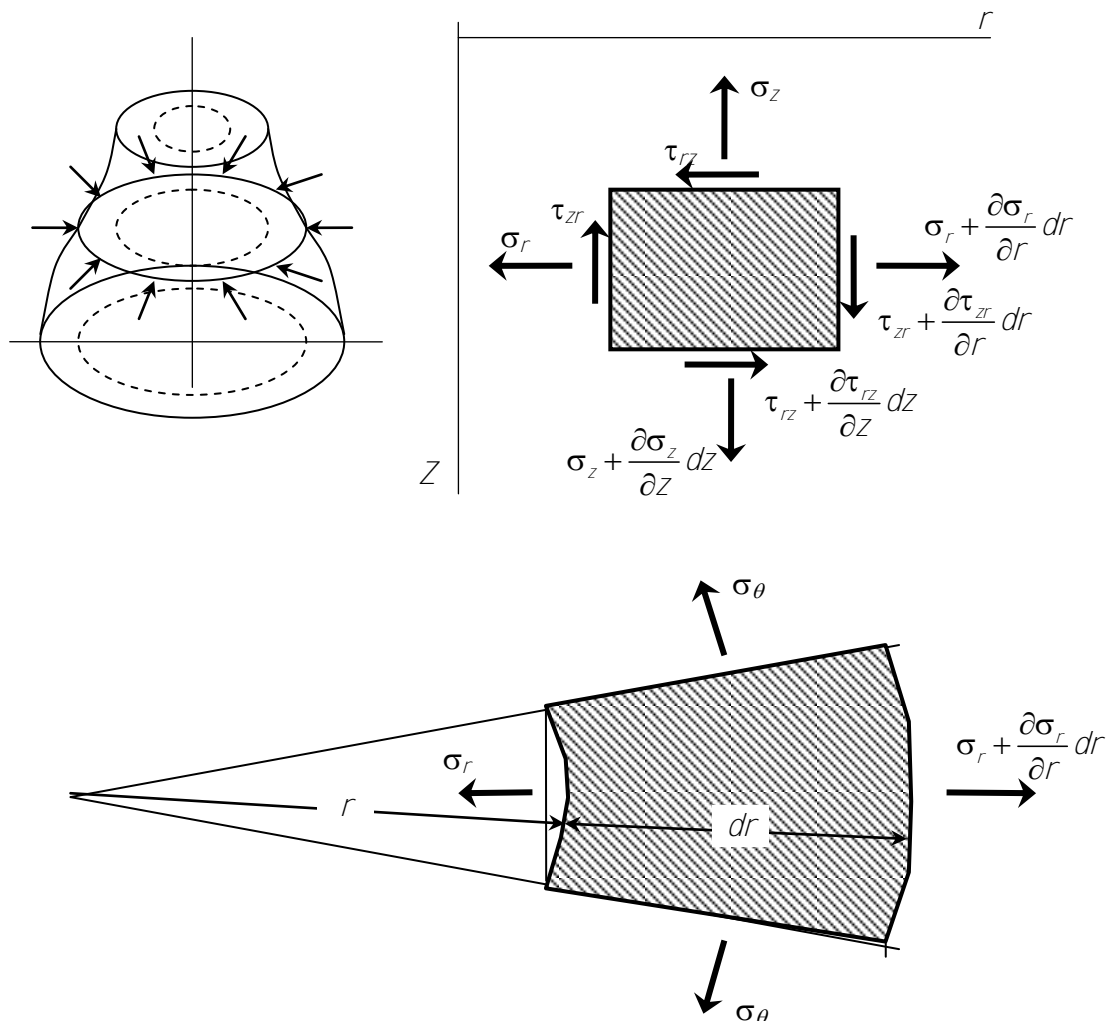


Рис. 19. Напряжения на площадках элементарного объема

## 1.5 Изгиб пластин на упругом основании

### 1.5.1 Основные понятия

**Тонкой пластиной** принято называть упругое тело призматической или цилиндрической формы с малой по сравнению с ее генеральными размерами толщиной. Отношение толщины пластины к ее любому другому размеру должно быть не более  $1/10$ , а ожидаемые прогибы не превышать  $1/5$  ее толщины (рис.20).

Плоскость, параллельная поверхности пластины и разделяющая ее толщину пополам называется *срединной плоскостью*. В теории тонких пластин приняты следующие две гипотезы.

**Гипотеза прямолинейного элемента.** Совокупность точек, лежащих до деформации пластины на какой-либо прямой, нормальной к срединной поверхности, остается на прямой, нормальной к упругой поверхности деформируемой пластины.

**Статическая гипотеза.** Давление слоев пластины, параллельных ее срединной поверхности не учитывается.

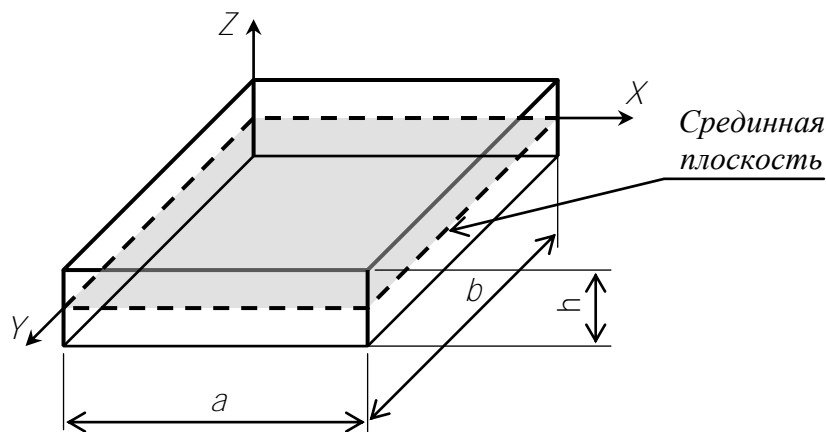


Рис. 20. Прямоугольная пластина и ее срединная плоскость

Отметим, что эти гипотезы аналогичны гипотезам, принимаемым в курсе сопротивления материалов для балок - гипотеза плоских сечений и гипотеза об отсутствии давлений между слоями балки. Координатные оси в плоскости срединной поверхности обозначаются буквами  $X$  и  $Y$ , а перемещения по их направлениям  $U$  и  $V$ . Ось, перпендикулярная к срединной поверхности пластины обозначена буквой  $Z$ , а перемещения по ее направлению (прогиб) буквой  $W$ .

### 1.5.2 Классические модели упругого основания

**Модель Фусса-Винклера (модель Винклера).** Фусс Н.И., русский академик, в 1798 г. исследовал движения колес конной повозки с образованием колеи, то есть рассматривал локальное развитие деформаций под нагруженной площадкой. Согласно его наблюдениям деформации оказались полностью необратимыми. По такой схеме действительно ведут себя рыхлые и слабо уплот-

ненные грунты. В связи с этим Винклер Э. предложил модель грунта в виде ничем не связанных между собой упругих пружин, опирающихся на абсолютно жесткую опору. При нагружении локальной нагрузкой будут сжиматься только те пружины, которые непосредственно расположены под площадью нагружения. Такая модель не обладает распределительной способностью и в этом ее главный недостаток. Для расчета конструкций на основании Винклера используются методы строительной механики. Для характеристики такой модели достаточно установить только один параметр – *коэффициент постели*. Это упрощает инженерно-геологические изыскания на строительной площадке. Это является достоинством модели Винклера. Модель используется в инженерных расчетах при больших площадях опирания конструкций на основание, например, плит на упругом основании.

**Модель упругого полупространства.** Основание представляется как упругое полупространство неограниченное снизу и по сторонам. Модель характеризуется двумя параметрами – модулем упругости  $E$  (его в механике грунтов называют модулем деформации) и коэффициентом поперечной деформации  $\nu$ .

Главным недостатком этой модели является очень большая распределительная способность – осадки от действия местной нагрузки распределяются неограниченно далеко.

Кроме того, в отличие от модели Винклера приходится определять два параметра, что усложняет инженерно-геологические изыскания. Очень важным недостатком является необходимость при расчетах использовать не более простые методы строительной механики, а более сложные методы теории упругости. Достоинством этого метода является возможность учета взаимного влияния на осадки рядом стоящих фундаментов.

**Модель слоя конечной толщины.** В этой модели была сделана попытка избавиться от тех недостатков, которые имели место для двух, выше указанных, моделей. Отсутствие или чрезмерная распределительная способность. Слой конечной толщины характеризуется тремя параметрами: модулем упругости, коэффициентом поперечной деформации и толщиной слоя. Эти параметры требуется установить при инженерно-геологических изысканиях, что существенно их усложняет и удорожает. Кроме того, для расчета требуется использовать методы теории упругости. Это является недостатком этой модели.

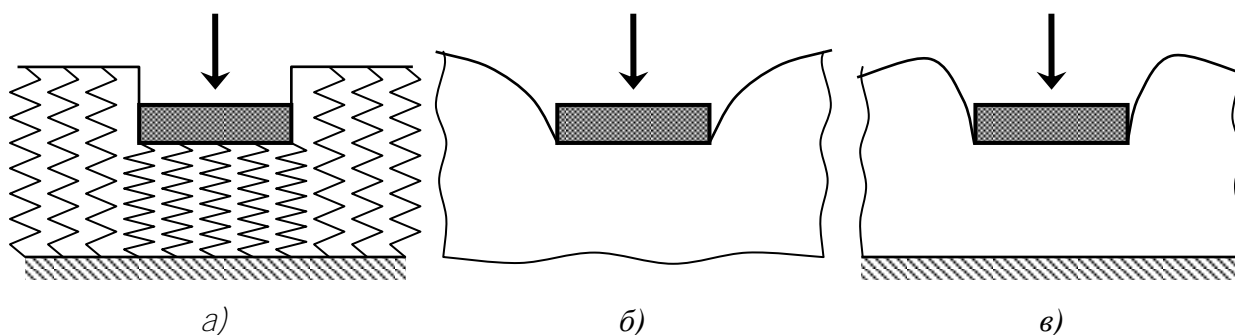


Рис. 21. Классические модели грунтовых оснований:

а) Фюсса-Винклера; б) упругое полупространство; в) упругий слой конечной толщины

### 1.5.3 Уравнение упругой поверхности плиты на упругом винклеровском основании

При расчете пластины разрешающей функцией является функция, описывающая прогиб пластины  $W(x, y)$ . Эта функция должна удовлетворять уравнению Софи Жермен и граничным условиям по краям пластины. Так как площадь опирания плиты на грунтовое основание большая, используется модель Фусса-Винклера. В этом случае для прямоугольной плиты на упругом основании уравнение Софи-Жермен имеет следующий вид

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{\rho(x, y) - r(x, y)}{D}, \quad (150)$$

где  $\rho(x, y)$  – интенсивность распределенной нагрузки на плиту;

$r(x, y)$  – интенсивность реактивного давления со стороны грунтового основания;

$$D – \text{цилиндрическая жесткость плиты, } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

### 1.5.4 Связь между прогибами пластины и внутренними силами в ней

В сечениях пластины появляются пять внутренних сил – два изгибающих момента в двух плоскостях  $M_x$  и  $M_y$ , крутящие моменты  $M_{xy}$  и две поперечные силы  $Q_{xz}$  и  $Q_{yz}$ . Так как пластина нагружается поперечными нагрузками, то есть нагрузками, перпендикулярными ее срединной поверхности, то перемещения точек ее срединной поверхности  $u$  и  $v$  по направлениям осей  $X$  и  $Y$  пренебрегаем. Учитываются перемещения точек срединной поверхности пластины только перпендикулярные к ней  $w$ . Функция, описывающая эти перемещения, является разрешающей. Если эта функция определена, то это значит, что определено все – кривизна пластины, внутренние силы и напряжения в ней. Между прогибами пластины (разрешающей функцией  $W(x, y)$ ) и внутренними силами в ней существует связь, выражающаяся следующими уравнениями.

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right); & M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right); \\ M_{xy} &= -(1-\nu) D \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}; & & \end{aligned} \quad (151)$$

$$Q_{xz} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right); \quad Q_{yz} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right).$$

### 1.5.5 Граничные условия для прямоугольной пластины

Различают три вида закрепления пластины: защемление, шарнирное закрепление и случай, когда край пластинки свободен (рис.22). Рассмотрим граничные условия для всех трех случаев закрепления левого края пластины.

Если край пластины защемлен, то прогиб и угол поворота сечения на левом краю равны нулю.

$$(W)_{x=0} = 0; \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x=0} = 0. \quad (152)$$

При шарнирном опирании края пластины ставится условие

$$(W)_{x=0} = 0; (M_x)_{x=0} = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (153)$$

Для свободного края пластины условие на левом краю имеет вид

$$(M_x)_{x=0} = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0; (R_x)_{x=0} = \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) = 0. \quad (154)$$

Если пластинка опирается на упругое основание, то контур пластины свободен и условия на краях пластины выражаются формулами (154)

### 1.5.6 Напряжения в сечениях плиты

В поперечном сечении пластины появляется пять внутренних сил: изгибающие моменты  $M_x$ ,  $M_y$ , крутящий момент  $M_{xy}$  и поперечные силы  $Q_{zx}$ ,  $Q_{zy}$ . Изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  вызывают в поперечных сечениях пластины нормальные напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , а крутящий момент  $M_{xy}$  касательные напряжения, направленные параллельно срединной плоскости (рис. 23).

$$\sigma_x = \frac{M_x}{J} z, \quad \sigma_y = \frac{M_y}{J} z, \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{J} z, \quad (155)$$

где  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  – изгибающие и крутящий моменты, приходящиеся на единицу ширины сечения;

$z$  – расстояние от срединной поверхности пластины до точки, в которой вычисляются напряжения;

$J$  – момент инерции сечения пластины с шириной равной единице  $J = \frac{h^3}{12}$ .

Отметим, что в теории тонких пластин (плит) понятие об изгибающих моментах отличается от такого понимания в других разделах механики твердо-

го деформируемого тела – теоретической механики, сопротивлении материалов, теории упругости и др. Здесь изгибающий момент  $M_x$  следует понимать, как изгибающий момент, который искривляет волокно пластины, расположенное вдоль оси  $X$ , а  $M_y$  – изгибающий момент, искривляющий волокно, расположенное вдоль оси  $Y$ .

Характер распределения нормальных и касательных напряжений, вызванных изгибающими и крутящим моментами, показан на рисунке 22.

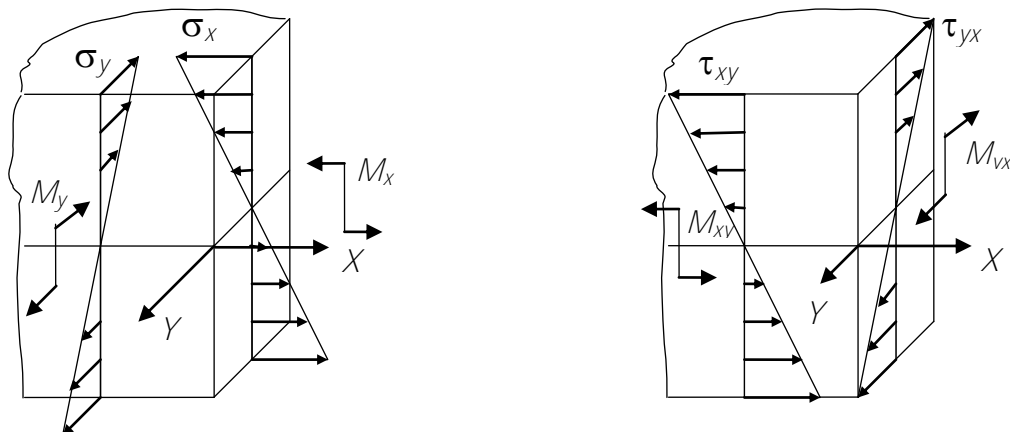


Рис. 22. Нормальные и касательные напряжения в поперечных сечениях пластины от изгибающих и крутящего моментов

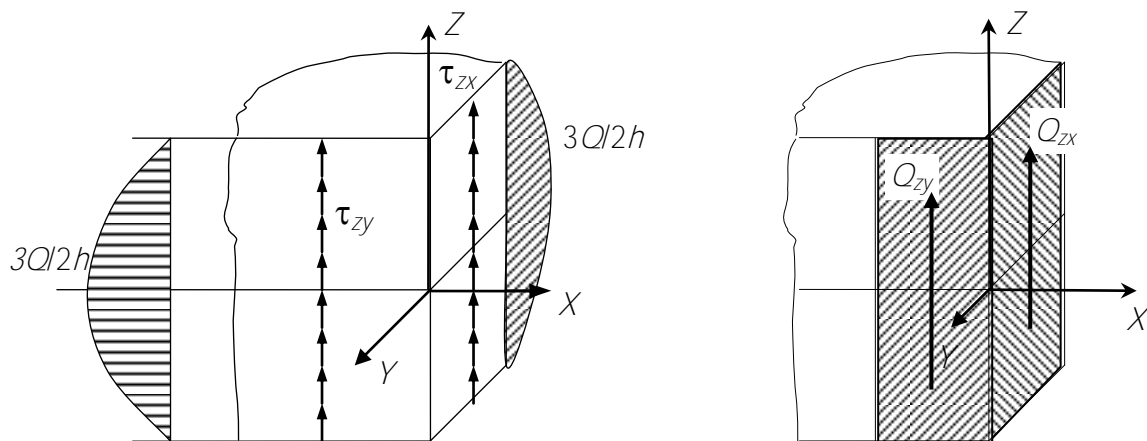


Рис. 23. Касательные напряжения в поперечных сечениях пластины от поперечных сил

Поперечные силы  $Q_{zx}$  и  $Q_{zy}$  вызывают касательные напряжения, действующие в сечениях с нормальми, соответственно,  $X$  и  $Y$  (рис. 23).

$$\tau_{zx} = \frac{Q_{zx} S_y^0}{J}; \quad \tau_{zy} = \frac{Q_{zy} S_x^0}{J}, \quad (156)$$

где  $S_x^0$  и  $S_y^0$  – статические моменты относительно осей  $X$  и  $Y$  части площади

сечения пластины с шириной равной единице, расположенной выше точки, в которой вычисляется касательно напряжении;

$Q_{zx}$  и  $Q_{zy}$  - поперечные силы, приходящиеся на ширину сечения, равную единице.

Кроме указанных выше напряжений в пластине появляются нормальные напряжения  $\sigma_z$  от местной нагрузки, приложенной к ее верхней поверхности (рис. 24). Учитывая, что напряжение изменяется по закону кубической параболы, его значение можно вычислить по формуле

$$\sigma_z = -\rho \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^2 \left( 3 - \frac{2z+h}{h} \right), \quad (157)$$

где  $\rho$  – интенсивность местной нагрузки, приложенной к верхней поверхности пластины;

$h$  – толщина пластины;

$z$  – удаление точки, в которой вычисляется напряжение, от верхней поверхности пластины.

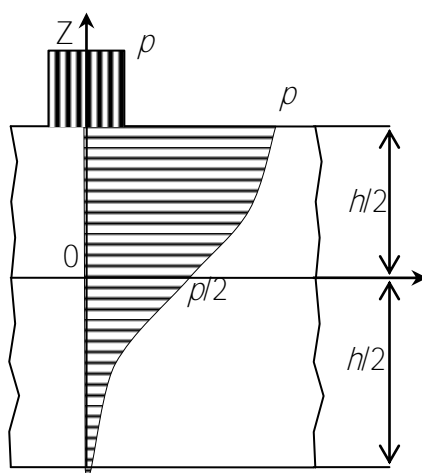


Рис. 24. Нормальные вертикальные напряжения от местной нагрузки

На нижнюю поверхность пластины действуют еще и реактивное давление со стороны основания, которое также вызывает напряжения  $\sigma_z$ . Эти напряжения могут быть вычислены по формуле (157), если ось  $Z$  направить вниз.

Таким образом, могут быть установлены все напряжения в окрестности любой точки пластины.

## 1.6 Вариационные методы решения задач теории упругости

Для многих задач теории упругости аналитических решений найти не удастся. К таким задачам относится и расчет плиты на упругом основании. Поэтому в последнее время широко используются численные методы, среди которых самым распространенным является *метод конечных элементов (МКЭ)*.



Метод конечных элементов обычно используется для вариант перемещений, так как это упрощает алгоритмизацию, что очень важно при составлении прикладных программ. Метод конечных элементов реализуется в вариационной постановке

$$I(V) = \Pi - W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{\varepsilon}^T \vec{\sigma} d\Omega - \int \vec{f}^T \vec{V} d\Omega = 0, \quad (158)$$

где  $\Pi$  – потенциальная энергия деформаций;  
 $W$  – работа внешних сил;  
 $\vec{\sigma}$  – вектор напряжений;  
 $\vec{f}$  – вектор узловых сил;  
 $\vec{V}$  – вектор узловых перемещений.

То есть, МКЭ является методом нахождения минимума функционала (158). Основная концепция МКЭ заключается в дискретизации пластины, которая расчленяется сеткой на конечные элементы (рис. 25). На полученной дискретной модели вводятся кусочно-линейные функции в виде полинома высокой степени  $\{\varphi(\vec{X})\}$ , определенные на каждом конечном элементе.

Такие функции  $\varphi(\vec{X})$  называются координатными или аппроксимирующими. Искомая функция по области  $\Omega$ , то есть в пределах одного конечного элемента, может быть записана для прямоугольного элемента в следующем виде (в виде полинома высокой степени)

$$U(\vec{X}) = \sum_{k=1}^L \vec{V}_k \varphi_k(\vec{X}), \quad (159)$$

где  $L$  – общее количество степеней свободы, равное утроенному количеству узлов (для прямоугольного конечного элемента количество узлов равно 4);

$\vec{V}$  – вектор узловых перемещений, который формируется из перемещений узлов конечного элемента.

Таким образом, задача определения непрерывной функции  $u_k(\vec{X})$  сводится к определению значений конечного числа перемещений узлов модели, которые находятся из условия минимума функционала (159), то есть из системы линейных алгебраических уравнений

$$K\vec{V} = \vec{F}, \quad (160)$$

где  $\vec{V}, \vec{F}, K$  – вектор узловых перемещений, вектор узловых сил и матрица жесткости конечно-элементной модели.

### 1.7. Расчет пластины на упругом основании методом конечных элементов

Для расчета прямоугольной плиты на упругом основании используется прямоугольный несовместный конечный элемент, имеющий четыре узла и двенадцать степеней свободы (рис. 25 б). Основание Фусса-Винклера моделируется упругими вертикальными стержнями, которые одним концом шарнирно прикрепляются к узлам модели плиты, а другим - к неподвижной опоре (рис. 25 а). Жесткость этих стержней учитывается при формировании объединенной матрицы жесткости конечно-элементной системы.

Матрица жесткости  $K$  получается путем объединения матриц жесткости всех конечных элементов, составляющих численную модель. Для автоматизации объединения матриц жесткостей и векторов узловых сил в МКЭ используются три системы нумераций: нумерация конечных элементов; глобальная и местная нумерация узлов (рис. 26). Матрица жесткости прямоугольного конечного элемента является квадратной и содержит 12 строк и 12 столбцов. При ее формировании для каждого конечного элемента предварительно строят геометрическую матрицу и матрицу физических коэффициентов, а затем их перемножают

$$K_j = B_j^T D_j B_j, \quad (161)$$

где  $B$  – матрица геометрических параметров;  
 $D$  – матрица физических коэффициентов.

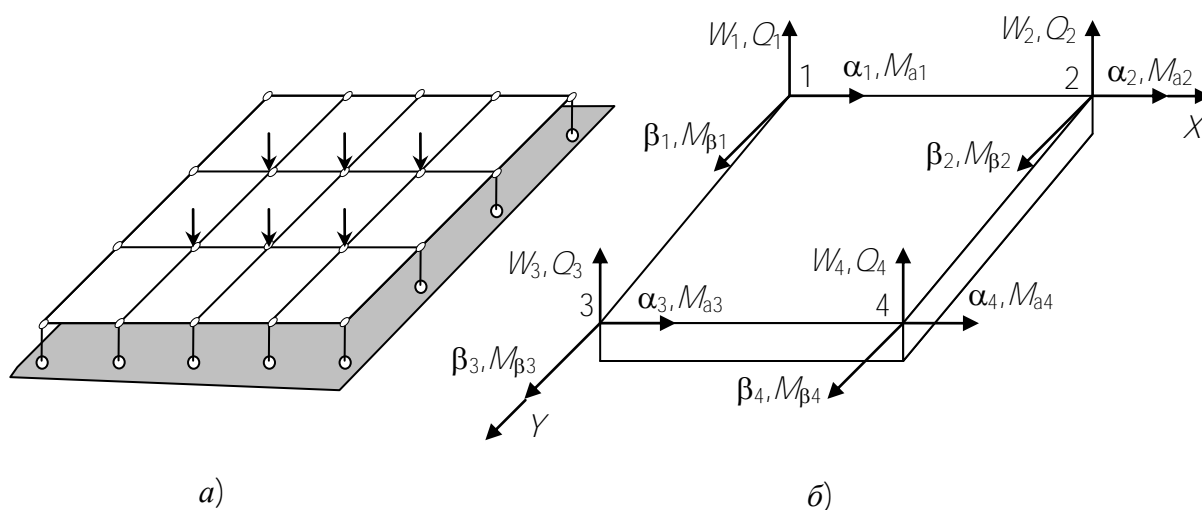


Рис. 25. Конечно-элементная модель прямоугольной пластины на упругом основании (а); узловые перемещения и узловые силы несовместного конечного элемента прямоугольной формы (б)

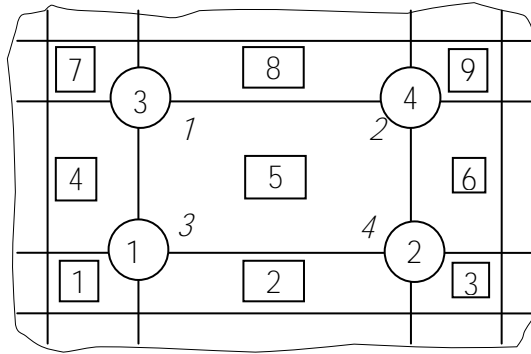


Рис. 26. Нумерация конечных элементов и узлов численной модели:  
 1, 2, 3, 4 – местные номера узлов пятого конечного элемента;  
 1, 2, 3, 4 – глобальные номера узлов, проставленные в кружках;  
 1, 2, ..., 9 – номера конечных элементов, проставленные в квадратах

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix},$$

где  $h$  – толщина пластины;

$E$  – модуль упругости материала пластины;

$\nu$  – коэффициент Пуассона;

$W$  – геометрическая функция, принятая для пластины в виде полинома

$$W(x, y) = \sum_{j=1}^4 (\varphi_{jW} W_j + \varphi_{j\alpha} \alpha_j + \varphi_{j\beta} \beta_j), \quad (162)$$

где  $\varphi_{jW}$ ,  $\varphi_{j\alpha}$ ,  $\varphi_{j\beta}$  – функция, подбираемая в каждом отдельном случае по предполагаемой форме изгиба конечного элемента.

Матрица жесткости  $K$  в МКЭ является сильно разреженной, так как в каждой ее строке число ненулевых элементов очень мало и составляет менее одного процента от всех элементов строки. Поэтому в прикладных программах; реализующих метод конечных элементов, применяется специальная технология операций над такими сильно разреженными матрицами: хранение, сложение, умножение на вектор, вычеркивание строк и столбцов, факторизация (приведение к треугольному виду). Применение такой технологии позволяет уменьшить требуемые затраты памяти и сократить время решения задачи. Ре-

шение системы уравнений (160) дает вектор узловых перемещений  $\vec{V}$ . Используя принятые системы нумерации (рис. 26), из вектора  $\vec{F}$  выделяют вектора узловых перемещений для каждого конечного элемента, содержащегося в численной модели  $\vec{V}_i (i=1, 2, \dots, n)$ . Вектор напряжений в каждом конечном элементе вычисляется по формуле

$$\vec{\sigma}_i = DB_i \vec{V}_i. \quad (163)$$

## 1.8. Основы теории пластичности и ползучести

### 1.8.1 Основные положения и понятия

Наука, устанавливающая общие законы образования пластических деформаций и возникающие при этом напряжения называется **теорией пластичности**.

Существует два подхода при изучении пластических деформаций. Один основан на **теории малых упруго пластических деформациях** (теории А.А.Ильюшина), а другой на **теории пластического течения**.

Особо важным в теории пластичности являются понятия простого и сложного нагружения, активной и пассивной деформации.

**Нагружение** считается **простым**, если все внешние силы возрастают пропорционально общему параметру.

Если все внешние нагрузки убывают пропорционально общему параметру, то имеет место **простое разгружение**.

При сложном напряженном состоянии, отмечено А.А.Ильюшиным, **деформация** считается **активной**, если интенсивность напряжения, для этой точки в данный момент времени имеет значение, превышающее все предыдущие его значения.

Если интенсивность напряжения меньше предшествующего его значения, то деформацию считают **пассивной**.

### 1.8.2 Теорема А.А.Ильюшина о простом нагружении

В нелинейной теории упругости используется зависимость между напряжениями и деформациями

$$G' = \frac{E'}{3} = \frac{\sigma_j}{3\varepsilon_j}. \quad (164)$$

Если ограничиться активным процессом деформации и простым нагружением, то в теории пластичности можно использовать уравнения, которые характеризуют изменение формы в окрестности некоторой точки.

$$\begin{aligned}\sigma_x - \sigma_m &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_j}(\varepsilon_x - \varepsilon_m); & \sigma_y - \sigma_m &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_j}(\varepsilon_y - \varepsilon_m); & \sigma_z - \sigma_m &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_j}(\varepsilon_z - \varepsilon_m); \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_j}\gamma_{xy}; & \tau_{yz} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_j}\gamma_{yz}; & \tau_{zx} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_j}\gamma_{zx},\end{aligned}\tag{165}$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \\ \varepsilon_j &= \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.\end{aligned}$$

Возникает вопрос, можно ли подобрать такое нагружение, при котором все элементы тела оказались бы в состоянии активной деформации. Оказывается, что такое нагружение возможно.

**Теорема Ильюшина о простом нагружении** по теории малых упруго-пластических деформациях получают правильные (согласующиеся с опытом) результаты в том случае, когда процесс нагружения является простым.

А.А.Ильюшиным это доказано для случая степенной зависимости между обобщенными напряжениями и деформациями

$$\sigma_i = A\varepsilon_j^m.\tag{166}$$

### 1.8.3 Теорема разгрузке

Рассмотрим стержень при простом растяжении. Пусть  $\sigma_1 > \sigma_{pr}$ . Разгрузим стержень до  $\sigma_2 < \sigma_1$ . Тогда  $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ .  $\varepsilon_2$  – упругая часть деформации, для вычисления которой можно использовать зависимость

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma'}{E},\tag{167}$$

где  $\sigma' = \sigma_1 - \sigma_2$ ;  $E$  – тангенс угла наклона к горизонту прямой разгрузки.

То есть, для вычисления остаточной деформации стержня необходимо из полученной ранее деформации вычесть упругую деформацию, соответствующую значению той силы (или напряжения), на величину которой уменьшается первоначальная сила. Это положение характерно и для случая неоднородного (сложного) напряженного состояния при пассивной разгрузке.

### 1.8.4 Основные уравнения теории пластичности

Многочисленные теории пластичности можно разделить на два вида. Теории, основанные на связи напряжений и деформаций (*теории упруго пла-*

стических деформаций) и теории, основанные на связи между напряжениями и скоростью деформации (теории пластического течения).

Пока существует одна-единственная теория пластичности, которая достаточно достоверно описывает свойства твердых тел при малых упругих и пластических деформациях. Это теория малых упруго пластических деформаций Ильюшина.

Математический аппарат теории пластичности составляют 18 уравнений с 18 неизвестными. Это статические уравнения; геометрические уравнения; физические уравнения; выражения для интенсивности напряжения и деформации; уравнение связи интенсивностей напряжения и деформации.

Дифференциальные уравнения равновесия и геометрические уравнения такие же как и в классической теории упругости. Физические уравнения (эти уравнения мы не можем уже назвать законом Гука, так как зависимости между деформациями и напряжениями нелинейная) отличаются тем, что модуль сдвига не постоянная величина, а величина, зависящая от деформации.

В теории пластичности закон изменения формы обычно записывают так

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_m &= 2G'\varepsilon_x; & \tau_{xy} &= 2G'\frac{1}{2}\gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_m &= 2G'\varepsilon_y; & \tau_{yz} &= 2G'\frac{1}{2}\gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_m &= 2G'\varepsilon_z; & \tau_{zx} &= 2G'\frac{1}{2}\gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (168)$$

Выражение для обобщенного модуля деформации имеет вид

$$G' = G[1 - \omega(\varepsilon_j)]. \quad (169)$$

Выражения для обобщенной деформации и для интенсивности напряжения имеют такой же вид как в классической теории упругости

$$\varepsilon_j = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}; \quad (170)$$

$$\sigma_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (171)$$

Подводя итогу, можно отметить, что в теории пластичности имеется 18 уравнения с 18-ю неизвестными

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, U, V, W, \varepsilon_j, \sigma_j, G'.$$

Поэтому в задачи теории пластичности в принципе решаемы. Однако, из-за математических трудностей практически решение получено для очень не-

многих задач. Решения теории пластичности используются для расчета строительных конструкций, деталей машин и агрегатов, грунтовых оснований и др.

### 1.8.5 Понятие о теории пластического течения

В теории пластического течения положены в основу уравнения, связывающие напряжения и скорости деформаций.

Приведем основные уравнения теории пластического течения.

Связь перемещений и скоростей движения точек тела имеет вид

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}; \quad \dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t}; \quad \dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (172)$$

Уравнения скоростей деформации

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}; & \dot{\epsilon}_y &= \frac{\partial \dot{v}}{\partial y}; & \dot{\epsilon}_z &= \frac{\partial \dot{w}}{\partial z}; \\ \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x}; & \dot{\gamma}_{yz} &= \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y}; & \dot{\gamma}_{zx} &= \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z}; \\ \dot{\epsilon}_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)^2 + (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3)^2 + (\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1)^2}. \end{aligned} \quad (173)$$

Зависимости напряжений от компонентов скоростей деформаций

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_m &= m(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_m); & \tau_{xy} &= m \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_m &= m(\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_m); & \tau_{yz} &= m \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_m &= m(\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_m); & \tau_{zx} &= m \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{zx}, \end{aligned} \quad (174)$$

где  $m$  – модуль (переменная величина, подлежащая определению).

Этот модуль отражает связь обобщенного напряжения с обобщенной скоростью деформации

$$\sigma_i = m \dot{\epsilon}_i. \quad (175)$$

В приведенных уравнениях предполагается, что из опыта известна зависимость

$$m = f(\dot{\epsilon}_i). \quad (176)$$

Теория пластического течения используется для расчета параметров технологических процессов при штамповке, при волочении проволоки и др.

## 2 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

### 2.1 Темы практических занятий

- 1 Теория напряженно-деформированного состояния в точке.
- 2 Основные уравнения теории упругости.
- 3 Плоская задача теории упругости в декартовых координатах.
- 4 Плоская задача теории упругости в полярных координатах.
- 5 Изгиб прямоугольных и круглых пластин.
- 6 Вариационные методы решения задач теории упругости.
- 7 Решение задач теории упругости методом конечных элементов – консультации по решению индивидуальных задач.
- 8 Основы теории пластичности и ползучести.

### 2.2 Теория напряженно-деформированного состояния в точке

**Пример 1.** Пусть на видимых площадках элемента в форме параллелепипеда действуют нормальные и касательные напряжения, показанные на рисунке. Требуется дополнить недостающие напряжения и обозначить их, установить их знаки и записать тензор напряжений.

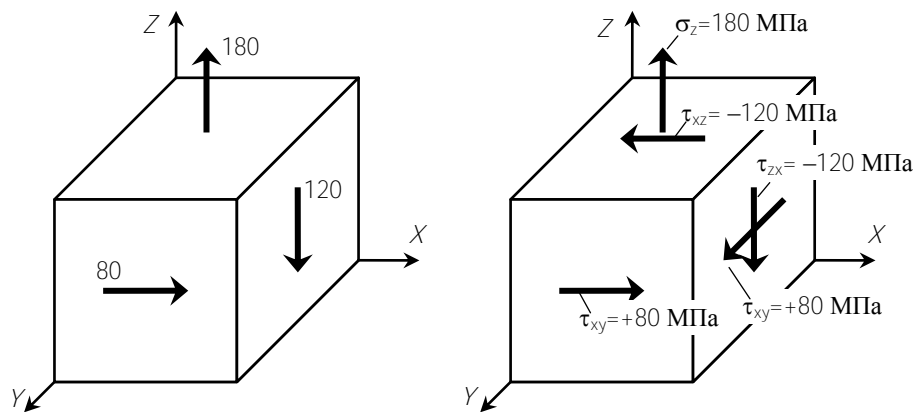


Рис. 27. Напряжения на площадках элемента в форме параллелепипеда

Запишем тензор напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +80 & -120 \\ +80 & 0 & 0 \\ -120 & 0 & +180 \end{bmatrix}, \text{ МПа .}$$



**Пример 2.** Найти нормальное и касательное напряжения на наклонной площадке, если известны ее направляющие косинусы и тензор напряжений в окрестности исследуемой точки деформируемого тела.

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & -60 & 100 \\ -60 & 140 & 90 \\ 100 & 90 & 80 \end{bmatrix}, \text{ МПа}; \quad l = \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad m = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad n = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Найдем проекции полного напряжения на координатные оси

$$\begin{cases} \rho_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - 60 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 36,07 \text{ МПа}; \\ \rho_{yv} = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = -60 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 140 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 90 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 119,97 \text{ МПа}; \\ \rho_{zv} = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n = +100 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 90 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 80 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 149,35 \text{ МПа}. \end{cases}$$

Вычислим полное напряжение на наклонной площадке

$$\rho_v = \sqrt{\rho_{xv}^2 + \rho_{yv}^2 + \rho_{zv}^2} = \sqrt{36,07^2 + 119,97^2 + 149,35^2} = 194,93 \text{ МПа}.$$

Вычислим нормальное напряжение на наклонной площадке

$$\sigma_v = \rho_{xv} l + \rho_{yv} m + \rho_{zv} n = 36,07 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 119,97 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 149,35 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 189,60 \text{ МПа}.$$

Вычислим касательное напряжение на наклонной площадке

$$\tau_v = \sqrt{\rho_v^2 - \sigma_v^2} = \sqrt{194,93^2 - 189,60^2} = 45,27 \text{ МПа}.$$

**Пример 3.** Пусть длинный стержень переменного сечения, показанный на рисунке 28, растянут силой  $F$ . Доказать, что в поперечных сечениях стержня появляются не только нормальные напряжения, но также и касательные напряжения, нормальные и касательные напряжения в продольных сечениях стержня. Найти их значения, если площадь поперечного сечения равна  $A$ .

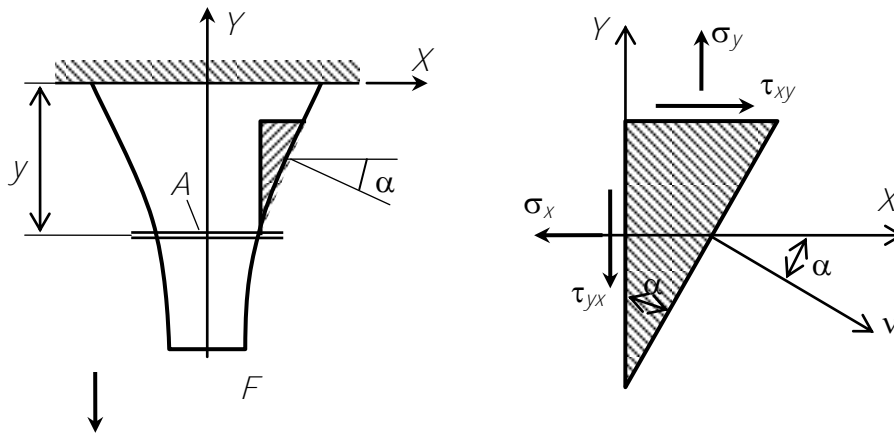


Рис. 28. Стержень переменной жесткости, нагруженный сосредоточенной силой

Полагаем, что нормальные напряжения распределяются по площади сечения равномерно. Тогда по формуле сопротивления материалов нормальное напряжение в поперечном сечении равно

$$\sigma_y = \frac{F}{A}.$$

Запишем уравнения, выражающие условия на границе стержня, учитывая, что имеет место плоское напряженное состояние, а на поверхности стержня нагрузка отсутствует.

$$\begin{cases} \rho_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = 0; \\ \rho_{yv} = \tau_{yx} l + \sigma_y m = 0. \end{cases}$$

Значения направляющих косинусов выразим через угол  $\alpha$ .

$$l = \cos(x, v) = \cos \alpha; \quad m = \cos(y, v) = \sin(\alpha).$$

Из второго уравнения граничных условий выразим касательное напряжение  $\tau_{yx}$

$$\tau_{yx} = -\sigma_y \frac{m}{l} = -\frac{F \sin \alpha}{A \cos(\alpha)} = -\frac{F}{A} \operatorname{tg} \alpha.$$

По закону парности имеем

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{F}{A} \operatorname{tg} \alpha.$$

Из первого уравнения выразим нормальное напряжение  $\sigma_x$

$$\sigma_x = -\tau_{xy} \frac{m}{l} = \frac{F}{A} \operatorname{tg} \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{F}{A} \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Утверждение доказано. Значение напряжений найдено.

$$\sigma_y = \frac{F}{A}; \quad \sigma_x = \frac{F}{A} \operatorname{tg}^2 \alpha; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{F}{A} \operatorname{tg} \alpha.$$

### 2.3. Основные уравнения теории упругости

**Пример 4.** В консольной балке, показанной на рисунке, составить выражения для напряжений  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ , исходя из формул сопротивления материалов. Получить функцию для напряжения  $\sigma_y$ , применив для этого дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье).

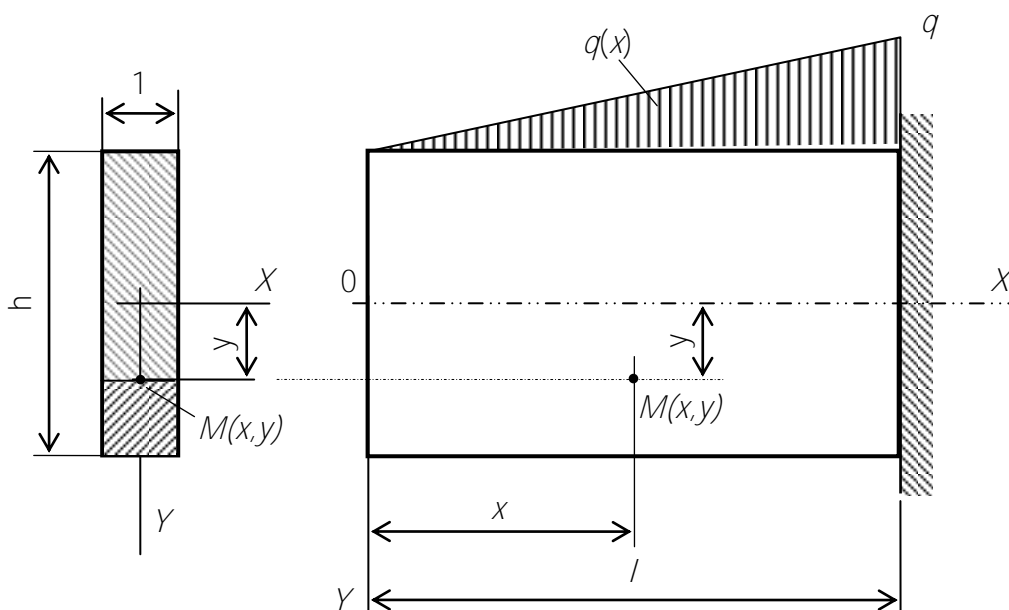


Рис. 29. Консольная балка, нагруженная распределенной нагрузкой

Составим функцию для нагрузки  $q(x)$

$$q(x) = \frac{q}{l} x.$$

Проверим пригодность этой функции

$$\text{при } x=0, \quad q(0) = \frac{q}{l} \cdot 0 = 0;$$

$$\text{при } x=l, \quad q(l) = \frac{q}{l} \cdot l = q.$$

Очевидно, что функция правильно описывает закон изменения нагрузки.

Составим функцию для поперечной силы  $Q_y(x)$  в произвольном сечении балки

$$Q_y(x) = \frac{1}{2} q(x) \cdot x = \frac{qx^2}{2l}.$$

Составим функцию для изгибающего момента  $M_z(x)$

$$M_z(x) = \frac{1}{2} q(x) x \frac{1}{3} x = \frac{1}{2} \frac{qx^3}{3l} = \frac{qx^3}{6l}.$$

Используя решение, полученное в сопротивлении материалов, составим функцию для нормального напряжения  $\sigma_x(x, y)$ . Предварительно запишем выражение для осевого момента инерции поперечного сечения относительно центральной оси  $Z$ .

$$J_z = \frac{1 \cdot h^3}{12} = \frac{h^3}{12}, \quad \sigma_x(x, y) = \frac{M_x(x)}{J_x} y = \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot l} \frac{12}{h^3} = \frac{2qx^3}{6h^3l}.$$

Используя формулу Журавского, составим функцию для касательных напряжений  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yx}$

$$S_z^0 = \left(\frac{h}{2} - y\right) b \left[ y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y\right) \right] = \left(\frac{h}{2} - y\right) \left( y + \frac{h}{4} - \frac{y}{2} \right) = \left(\frac{h}{2} - y\right) \left( \frac{y}{2} + \frac{h}{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (h - 2y) \cdot \frac{1}{4} (2y + h) = \frac{1}{8} (2yh + h^2 - 4y^2 - 2yh) = \frac{1}{8} (h^2 - 4y^2);$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q_y S_z^0}{J_x b} = \frac{qx^2}{2l} \cdot \frac{1}{8} (h^2 - 4y^2) \frac{12}{h^3} = \frac{3}{4} \frac{qx^2}{h^3 l} (h^2 - 4y^2).$$

Функцию нормального напряжения  $\sigma_y(x, y)$  определим, используя дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

Из второго уравнения равновесия выразим частную производную нормального напряжения  $\sigma_y$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{3}{4} \frac{qx^2}{h^3 l} (h^2 - 4y^2) \right] = \frac{3}{2} \frac{qx}{h^3 l} (h^2 - 4y^2).$$

Разделим дифференциалы и получим

$$\partial \sigma_y = -\frac{3}{2} \frac{qx}{h^3 l} (h^2 - 4y^2) \partial y.$$

Проинтегрируем по  $y$ , учитывая, что появится постоянная интегрирования (функция от  $x$ )

$$\sigma_y(x, y) = \int \frac{3}{2} \frac{qx}{h^3 l} (h^2 - 4y^2) dy + f(x) = \frac{3}{2} \frac{qx}{h^3 l} \left( h^2 y - \frac{4}{3} y^3 \right) + f(x).$$

Функцию  $f(x)$  следует определить по граничным условиям на верхней и на нижней поверхностях балки. На верхней поверхности балки  $\sigma\left(x, \frac{h}{2}\right) = \frac{-qx}{l}$ . Воспользуемся этим и найдем функцию  $f(x, y)$ . Вначале вычислим интеграл при  $y = -h/2$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{qx}{h^3 l} \left[ h^2 \left( -\frac{h}{2} \right) - \frac{4}{3} \left( -\frac{h}{2} \right)^3 \right] &= \frac{3}{2} \frac{qx}{h^3 l} \left[ -\frac{h^3}{2} + \frac{4h^3}{3 \cdot 8} \right] = \frac{3}{2} \frac{qx}{h^3 l} \left[ -\frac{h^3}{2} + \frac{h^3}{6} \right] = \\ &= \frac{3}{2} \frac{qx}{h^3 l} \left[ \frac{-3h^3 + h^3}{6} \right] = \frac{3qx}{2h^3 l} \left( -\frac{h^3}{3} \right) = -\frac{qx}{2l}. \end{aligned}$$

Тогда условие по верхнему краю балки запишется так

$$\sigma(x, -h/2) = -\frac{qx}{2l} + f(x) = -\frac{qx}{l}.$$

Отсюда имеем

$$f(x) = -\frac{qx}{2l}.$$

Значит, нормальное напряжение  $\sigma(x, y)$  будет выражаться функцией

$$\sigma(x, y) = \frac{3qx}{2h^3l} \left( h^2 y - \frac{4}{3} y^3 \right) - \frac{qx}{2l}$$

Проверим выполнение граничных условий на верхнем и нижнем краях балки.

На верхнем краю балки  $y = -h/2$

$$\sigma(x, -h/2) = \frac{3qx}{2h^3l} \left[ h^2 \left( -\frac{h}{2} \right) - \frac{4}{3} \left( -\frac{h}{2} \right)^3 \right] - \frac{qx}{2l} = -\frac{qx}{2l} - \frac{qx}{2l} = -\frac{qx}{l}$$

На нижнем краю балки  $y = +h/2$

$$\sigma(x, +h/2) = \frac{3qx}{2h^3l} \left[ h^2 \left( +\frac{h}{2} \right) - \frac{4}{3} \left( +\frac{h}{2} \right)^3 \right] - \frac{qx}{2l} = -\frac{qx}{2l} + \frac{qx}{2l} = 0$$

Очевидно, что оба граничных условия выполняются. Следовательно, задача решена.

**Пример 5.** Определить полную удельную потенциальную энергию, удельную энергию изменения объема и удельную энергию изменения формы, если известен тензор напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 0 \\ -100 & 0 & -120 \end{bmatrix}, \text{ МПа .}$$

Принять значения модуля упругости и коэффициента Пуассона, соответственно, равными  $E = 200$  ГПа и  $\nu = 0,3$ .

Так как в тензоре напряжений имеется один нулевой столбец и одна нулевая строка, материал в окрестности исследуемой точки испытывает плоское напряженное состояние.

Определим модуль сдвига

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200}{2(1+0,3)} = 76,92 \text{ ГПа .}$$

Используя закон Гука, вычислим деформации

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_z) = \frac{1}{200 \cdot 10^9} [160 - 0,3(-120)] \cdot 10^6 = 0,98 \cdot 10^{-3}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = -\frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x) = -\frac{0,3}{200 \cdot 10^9} [160 - 120] \cdot 10^6 = \\ &= -0,06 \cdot 10^{-3}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x) = \frac{1}{200 \cdot 10^9} [120 - 0,3 \cdot 160] \cdot 10^6 = 0,36 \cdot 10^{-3}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{0}{76,92 \cdot 10^9} = 0; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{0}{76,92 \cdot 10^9} = 0; \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{100 \cdot 10^6}{76,92 \cdot 10^9} = -1,30 \cdot 10^{-3}.\end{aligned}$$

Запишем тензор деформаций

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,98 & 0 & -0,65 \\ 0 & -0,06 & 0 \\ -0,65 & 0 & 0,36 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

Вычислим удельную полную потенциальную энергию

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) = \\ &= \frac{1}{2} [160 \cdot 0,98 + 0 \cdot (-0,06) + (-120) \cdot 0,36 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-100) \cdot (-0,65)] \cdot 10^3 = \\ &= 89,30 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3}.\end{aligned}$$

Вычислим среднее напряжение и среднюю деформацию

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(160 + 0 - 120) = 13,33 \text{ МПа}; \\ \varepsilon_m &= \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3}(0,98 - 0,06 + 0,36) \cdot 10^{-3} = 0,427 \cdot 10^{-3}.\end{aligned}$$

Вычислим удельную потенциальную энергию изменения объема

$$W_V = 3 \cdot \left( \frac{1}{3} \sigma_m \varepsilon_m \right) = 3 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 13,33 \cdot 10^6 \cdot 0,427 \cdot 10^{-3} \right) = 5,69 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3}.$$

Вычислим удельную потенциальную энергию изменения формы

$$W_F = W - W_V = 89,30 - 5,69 = 83,61 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3}.$$

**Пример 6.** Пусть в окрестности внутренней точки деформируемого тела задан тензор напряжений

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -140 & 80 & -60 \\ 80 & 120 & 70 \\ -60 & 70 & 90 \end{bmatrix}, \text{МПа}.$$

Учитывая закон Гука, вычислить деформации и записать тензор деформаций. Принять модуль упругости и коэффициент Пуассона, соответственно, равными  $E = 200 \text{ ГПа}$  и  $\nu = 0,3$ .

Так как в тензоре напряжений нет нулевых строк и столбцов, то есть в элементе, вырезанном в окрестности исследуемой точки, нет площадок свободных от напряжений, то материал испытывает объемное напряженное состояние. Определим модуль сдвига

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200}{2(1+0,3)} = 76,92 \text{ ГПа}.$$

По закону Гука вычислим деформации

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{200 \cdot 10^9} [-140 - 0,3(120 + 90)] \cdot 10^6 = -1,015 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = \frac{1}{200 \cdot 10^9} [120 - 0,3(90 - 140)] \cdot 10^6 = 0,675 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{200 \cdot 10^9} [90 - 0,3(-140 + 120)] \cdot 10^6 = 0,480 \cdot 10^{-3};$$



$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{80 \cdot 10^6}{76,92 \cdot 10^9} = 1,040 \cdot 10^{-3};$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{70 \cdot 10^6}{76,92 \cdot 10^9} = 0,910 \cdot 10^{-3};$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{-60 \cdot 10^6}{76,92 \cdot 10^9} = -0,780 \cdot 10^{-3}.$$

Запишем тензор деформаций

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,015 & 0,520 & -0,390 \\ 0,520 & 0,675 & 0,455 \\ -0,390 & 0,455 & 0,480 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

**Пример 7.** Пусть в окрестности внутренней точки деформируемого тела задан тензор деформаций

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,65 & 0,45 & 0,75 \\ 0,45 & -0,84 & 0,32 \\ 0,75 & 0,32 & 0,96 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

Учитывая, что материал тела деформируется по закону Гука, вычислить напряжения и записать тензор напряжений. Принять модуль упругости и коэффициент Пуассона, соответственно, равными  $E = 200$  ГПа и  $\nu = 0,3$ .

Вычислим модуль сдвига, коэффициент Ляме и относительную объемную деформацию в окрестности рассматриваемой точки

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200}{2(1+0,3)} = 76,92 \text{ ГПа};$$

$$\lambda = \frac{2\nu G}{1-2\nu} = \frac{2 \cdot 0,3 \cdot 76,92}{1-2 \cdot 0,3} = 115,38 \text{ ГПа};$$

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (0,65 - 0,84 + 0,96) \cdot 10^{-3} = 0,77 \cdot 10^{-3}.$$

По закону Гука вычислим напряжения

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\theta = 2 \cdot 76,92 \cdot 10^9 \cdot 0,65 \cdot 10^{-3} + 115,38 \cdot 10^9 \cdot 0,77 \cdot 10^{-3} = 188,84 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\theta = 2 \cdot 76,92 \cdot 10^9 \cdot (-0,84 \cdot 10^{-3}) + 115,38 \cdot 10^9 \cdot 0,77 \cdot 10^{-3} = -40,38 \text{ МПа};$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\theta = 2 \cdot 76,92 \cdot 10^9 \cdot 0,96 \cdot 10^{-3} + 115,38 \cdot 10^9 \cdot 0,77 \cdot 10^{-3} = 236,53 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 76,92 \cdot 10^9 \cdot (-0,45 \cdot 10^{-3}) \cdot 2 = -69,23 \text{ МПа};$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = 76,92 \cdot 10^9 \cdot 0,32 \cdot 10^{-3} \cdot 2 = 49,23 \text{ МПа};$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = 76,92 \cdot 10^9 \cdot 0,75 \cdot 10^{-3} \cdot 2 = 57,69 \text{ МПа}.$$

Запишем тензор напряжений

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 188,84 & -69,23 & 57,69 \\ -69,23 & -40,38 & 49,23 \\ 57,69 & 49,23 & 236,53 \end{bmatrix}, \text{ МПа}$$

#### 2.4. Плоская задача теории упругости в декартовых координатах

**Пример 8.** Пусть на площадках элементарного параллелепипеда, взятого в окрестности исследуемой точки деформируемого тела действуют напряжения  $\sigma_x = 120 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_z = -100 \text{ МПа}$ ;  $\tau_{xz} = -90 \text{ МПа}$ . Вычислить октаэдрические полное, нормальное и касательное напряжения.

Запишем тензор напряжений

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & 0 & -90 \\ 0 & 0 & 0 \\ -90 & 0 & -100 \end{bmatrix}, \text{ МПа}.$$

Очевидно, что материал в окрестности исследуемой точки тела испытывает плоское напряженное состояние, так как в тензоре напряжений одна строка и один столбец являются нулевыми.

Учитывая наличие нулевых напряжений, вычислим инварианты тензора напряжений

$$\sigma' = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 120 - 100 = 20 \text{ МПа};$$

$$\sigma^{II} = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 120 \cdot (-100) + 0 + 0 - 90^2 = -18400 (\text{МПа})^2;$$

$$\sigma^{III} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = 0.$$

Кубическое уравнение

$$\sigma^3 - \sigma' \sigma^2 + \sigma'' \sigma - \sigma''' = 0$$

можно записать в следующем виде

$$\sigma(\sigma^2 - \sigma' \sigma + \sigma'') = 0.$$

Один корень кубического уравнения равен нулю  $\sigma_{(1)} = 0$ . Два других корня определяются решением квадратного уравнения

$$\sigma^2 - \sigma' \sigma + \sigma'' = \sigma^2 - 20\sigma - 20100 = 0;$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{\sigma'}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma'}{2}\right)^2 - \sigma''} = \frac{20}{2} + \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 + 20100} = 152,13 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(3)} = \frac{\sigma'}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma'}{2}\right)^2 - \sigma''} = \frac{20}{2} - \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 + 20100} = -132,13 \text{ МПа}.$$

Расставим индексы главных напряжений

$$\sigma_1 = 152,13 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -132,13 \text{ МПа};$$

Вычислим полное октаэдрическое напряжение

$$\rho_{oct} = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)} = \sqrt{\frac{1}{3}(152,13^2 + 0 + 132,13^2)} = 116,34 \text{ МПа}.$$

Вычислим нормальное октаэдрическое напряжение

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 152,13 + 0 - 132,13 = 20 \text{ МПа}.$$

Вычислим касательное октаэдрическое напряжение

$$\tau_{oct} = \sqrt{\rho_{oct}^2 - \sigma_{oct}^2} = \sqrt{116,34^2 - 20^2} = 114,61 \text{ МПа.}$$

**Пример 9.** Рассмотрим пластину, нагруженную по торцам двумя парами сил с моментом  $M$ .

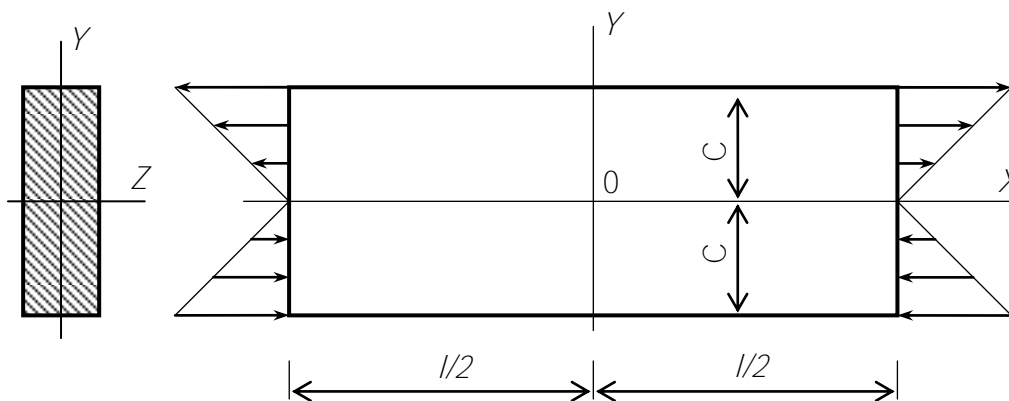


Рис. 30. Балка, нагруженная распределенной нагрузкой по торцам

Из сопротивления материалов известно

$$\sigma_x = \frac{M}{J} y; \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

Так как напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  выражаются линейными функциями, то уравнение неразрывности удовлетворяются тождественно

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

Чтобы убедиться в пригодности решения, предложенного сопротивлением материалов, достаточно только проверить выполнение дифференциальных уравнений равновесия и условие на контуре пластины. Возьмем производные

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{M}{J} y \right) = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0.$$

Подставим производные в дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

Уравнения равновесия тождественно удовлетворяются. Следовательно, предложенные функции пригодны для решения задачи теории упругости. Требуется уточнить граничные условия.

Подставим условие на торце пластины. Пусть  $x = \pm \frac{l}{2}$ . Напряжение на торцах пластины согласно предложенному решению имеет вид

$$\sigma_x = \frac{M}{J} y; \quad \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0.$$

То есть, по торцам пластины действуют только нормальные напряжения, которые распределены по высоте сечения по линейному закону. Из граничных условий на правом торце пластины имеем  $l = +1$ ,  $m = 0$ ,  $n = 0$ . Тогда проекции нагрузки на торцах пластины выражаются зависимостями

$$\begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m = \frac{M}{J} y \cdot 1 + 0 \cdot 0 = \frac{M}{J} y; \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Выразим продольную силу на правом торце пластины. При этом принимаем толщину пластины равной единице.

$$N = \int_A p_{xv} dA = \int_A \frac{M}{J} y dA = \int_{-C}^{+C} \frac{M}{J} y dy = \frac{M}{J} \int_{-C}^{+C} y dy = \left[ \frac{M}{2J} y^2 \right]_{-C}^{+C} = 0.$$

Очевидно, что продольная сила равна нулю. Выразим момент сил на торце пластины

$$\int_A p_{xv} y dA = \int_A \left( \frac{M}{J} y \right) y dA = \frac{M}{J} \int_A y^2 dA = \frac{M}{J} J = M.$$

Аналогично получается и на правом торце пластины.

Следовательно, решение, полученное в сопротивлении материалов, пригодно в том случае, если по торцам пластины приложены распределенные нагрузки, показанные на рисунке и создающие момент  $M$ .

**Пример 10.** Пластина постоянной толщины произвольного очертания равномерно сжата по наружному контуру давлением  $p$ . Доказать, что во всех точках пластинки касательное напряжение  $\tau_{xy}$  равно нулю, а нормальные напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  – давлению сжатия.

Вырежем элемент около произвольной точки контура пластинки. Пусть направляющие косинусы  $l$  и  $m$  наклонной площадки известны. Полное напряжение на наклонной площадке равно давлению на контур пластинки  $\rho_v = -p$ .

Найдем проекции полного напряжения

$$\rho_{xv} = \rho_v l; \quad \rho_{yv} = \rho_v m.$$

Запишем граничные условия

$$\begin{cases} \rho_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = \rho_v l & \times m \\ \rho_{yv} = \tau_{yx} l + \sigma_y m = \rho_v m & \times n \end{cases} \quad (*)$$

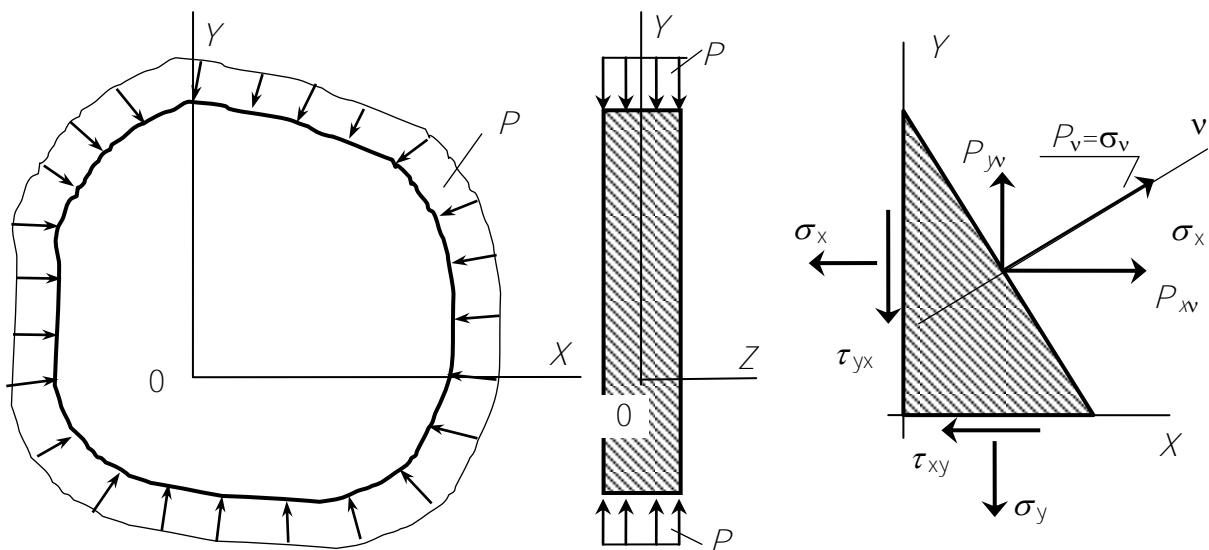


Рис. 31. Равномерно сжатая пластинка произвольного очертания постоянной толщины

Решим полученную систему уравнений, принимая в качестве неизвестных напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$  и учитывая, что, согласно закона парности касательных напряжений,  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ .

В результате получим уравнение, содержащее касательное напряжение

$$m^2 \tau - l^2 \tau = lm \cdot \rho_v - ml \cdot \rho_v$$

или

$$(m^2 - l^2) \tau = 0. \quad (**)$$

Это равенство должно выполняться при любых положениях наклонной площадки. При этом направляющие косинусы  $l$  и  $m$  могут принимать значения

на отрезке  $[-1, +1]$ . Учитывая соотношение направляющих косинусов для плоской задачи  $l^2 + m^2 = 1$  уравнение (\*\*\*) можно записать следующим образом

$$\left[ m^2 - (1 - m^2) \right] \cdot \tau = \left[ 2m^2 - 1 \right] \cdot \tau = 0.$$

При различных положениях наклонной площадки множитель  $\left[ 2m^2 - 1 \right]$  может принимать значения на отрезке  $[-1, +1]$ . Поэтому, чтобы уравнение (\*\*\*) всегда выполнялось, требуется, чтобы  $\tau = 0$ . То есть,  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau = 0$ .

Из первого уравнения системы (\*) получим значение нормального напряжения  $\sigma_x$

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m = \sigma_x l + 0 \cdot m = \rho_v l; \quad \sigma_x = \rho_v = -p.$$

Из второго уравнения системы (\*) получим значение нормального напряжения  $\sigma_y$

**Пример 11.** Дана квадратная пластина и заданы функции для напряжений

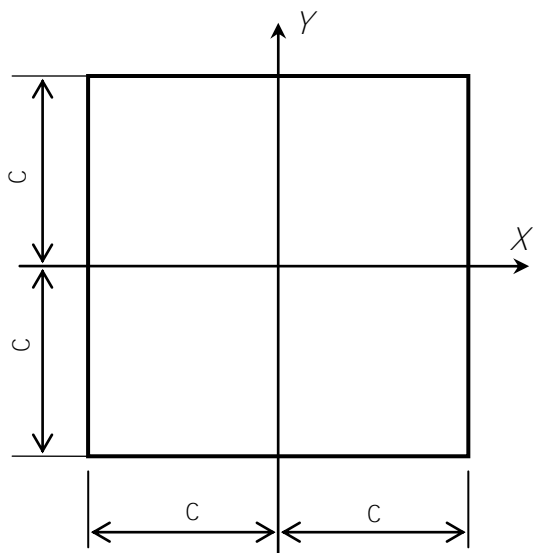


Рис. 32. Квадратная пластина

$$\sigma_x = -\frac{1}{2} C x^4 y;$$

$$\sigma_y = -C x^2 y^3;$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = C x^3 y^2.$$

Требуется установить соответствующую нагрузку по контуру пластины.

**Решение.**

Проверим пригодность заданных функций для напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  для задачи теории упругости. Так как функции

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , их производные и взятые от них интегралы являются непрерывными, то уравнения Сен-Венана (уравнения неразрывности деформаций) будут удовлетворяться. Следует проверить, будут ли выполняться условия равновесия, то есть дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье).

Возьмем производные

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot 4Cx^3 y = -2Cx^3 y, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -3Cx^2 y^2;$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 2Cx^3 y, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 3Cx^2 y^2.$$

Подставим производные в уравнения Навье

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

и получим  $-2Cx^2 y + 2Cx^2 y = 0; \quad 3Cx^2 y^2 - 3Cx^2 y^2 = 0.$

Очевидно, что заданные функции для напряжений удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия.

Определим нагрузки по краям пластины

на верхнем краю пластины  $-C \leq x \leq C, \quad y = C, \quad l = 0, \quad m = 1.$

$$\rho_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = -\frac{1}{2} Cx^4 y \cdot 0 + Cx^3 y^2 \cdot 1 = Cx^3 y^2 = C^3 x^3;$$

$$\rho_{yv} = \tau_{yx} m + \sigma_y l = Cx^3 y^2 \cdot 0 - Cx^2 y^3 \cdot 1 = -Cx^2 y^3 = -C^4 x^2.$$

на нижнем краю пластины  $-C \leq x \leq C, \quad y = -C, \quad l = 0, \quad m = -1.$

$$\rho_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = -\frac{1}{2} Cx^4 y \cdot 0 - Cx^3 y^2 \cdot 1 = -Cx^3 y^2 = -C^3 x^3;$$

$$\rho_{yv} = \tau_{yx} m + \sigma_y l = Cx^3 y^2 \cdot 0 - Cx^2 y^3 \cdot (-1) = Cx^2 y^3 = C^4 x^2.$$

на левом краю пластины  $x = -C, \quad -C \leq y \leq C, \quad l = -1, \quad m = 0.$

$$\rho_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = -\frac{1}{2} Cx^4 y \cdot (-1) = \frac{1}{2} Cx^4 y = \frac{1}{2} C^5 y;$$

$$\rho_{yv} = \tau_{yx} m + \sigma_y l = Cx^3 y^2 \cdot (-1) = -Cx^3 y^2 = C^4 y^2.$$

на правом краю пластины  $x = C, \quad -C \leq y \leq C, \quad l = +1, \quad m = 0.$

$$\rho_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = -\frac{1}{2} Cx^4 y \cdot 1 = -\frac{1}{2} Cx^4 y = -\frac{1}{2} C^5 y;$$

$$\rho_{yv} = \tau_{yx} m + \sigma_y l = Cx^3 y^2 \cdot 1 = Cx^3 y^2 = C^4 y^2.$$



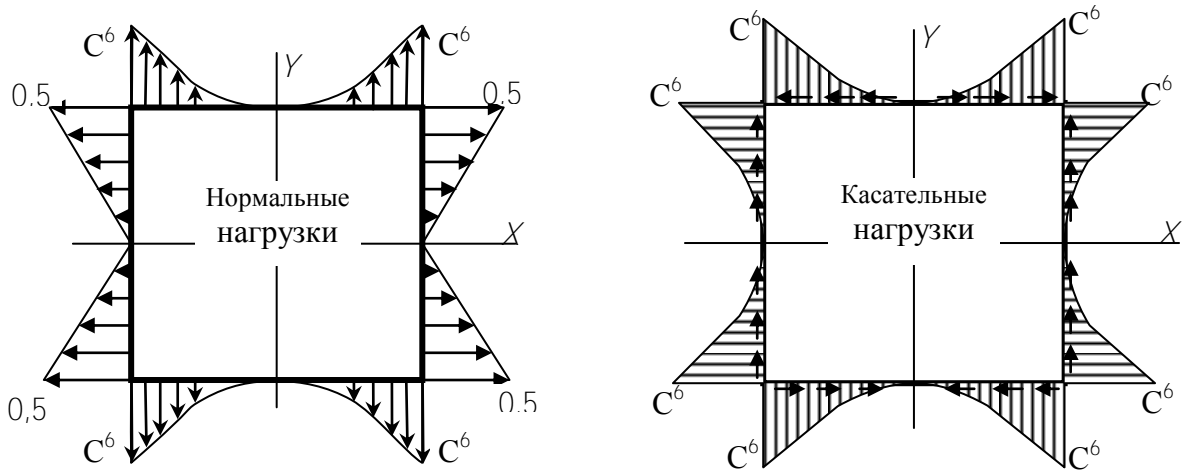
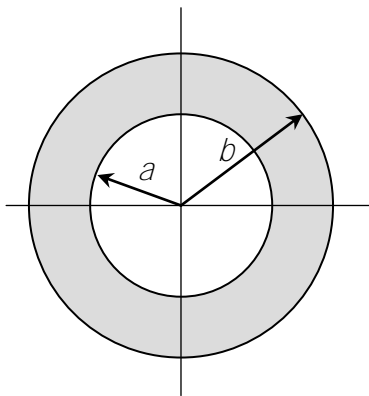


Рис. 33. Эпюры нормальных и касательных нагрузок

## 2.5. Плоская задача теории упругости в полярных координатах

**Пример 12.** Для плоского кольца известны выражения для напряжений



$$\sigma_{\theta} = p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b}{r^2} \right); \quad \sigma_r = p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b}{r^2} \right);$$

$$\tau_{r\theta} = 0.$$

Проверить выполнение условия равновесия и найти нагрузку на кольцо.

Рис. 34. Кольцо, нагруженное распределенной нагрузкой

Найдем слагаемые дифференциальных уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = p \frac{2a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^3}; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} = 0; \quad \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0; \quad \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{r} = -p \frac{2a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^3}.$$

Подставим в дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{2a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^3} - \rho \frac{2a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^3} = 0;$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Оба уравнения удовлетворяются тождественно. Следовательно, условия равновесия соблюдаются.

Найдем нагрузку, действующую на краях кольца.

При  $r = b$

$$\sigma_r = \rho \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{b^2} \right) = 0.$$

При  $r = a$

$$\sigma_r = \rho \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) = \rho \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left( \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) = -\rho.$$

На внутренний край кольца действует равномерно распределенная нагрузка  $-\rho$ .

## 2.6. Изгиб круглых пластин

**Пример 13.** Пластина круглого очертания и постоянной толщина шарнирно опирается по своему контуру и загружена равномерно распределенной нагрузкой. Прогиб пластины задан функцией

$$W(\rho) = C \left[ (5 + \mu) - 2(3 + \mu)\rho^2 + (1 + \mu)\rho^4 \right], \quad C = const.$$

Приняты: радиус пластины  $a = 2$  м; толщина пластины  $h = 0,2$  м; коэффициент  $\mu = 0,25$ . Требуется найти функции для изгибающих моментов, поперечной силы, прогибов и построить эпюры.

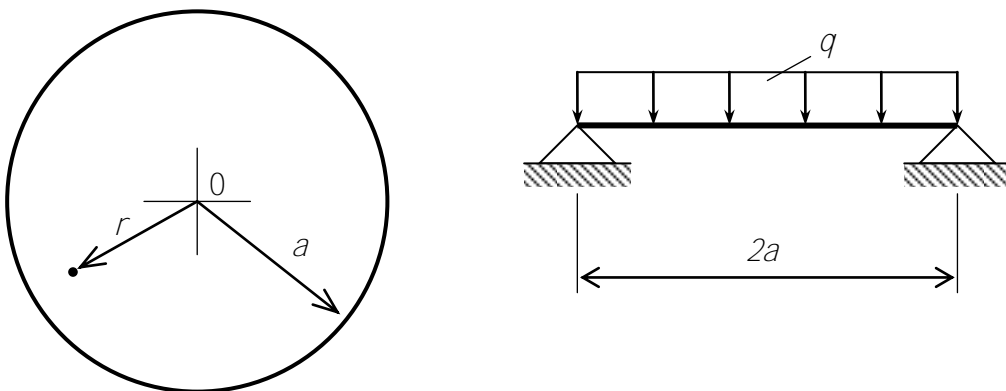


Рис. 35. Шарнирно опертая пластина круглого очертания, загружена распределенной нагрузкой

Перейдем к абсолютной координате  $\rho = \frac{r}{a}$ . Перепишем функцию прогибов

$$W = C \left[ (5 + \mu) - 2(3 + \mu) \frac{r^2}{a^2} + (1 + \mu) \frac{r^4}{a^4} \right].$$

Найдем производные

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dr} &= \left[ -4(3 + \mu) \frac{r}{a^2} + 4(1 + \mu) \frac{r^3}{a^4} \right]; & \frac{d^2W}{dr^2} &= \left[ -4(3 + \mu) \frac{1}{a^2} + 12(1 + \mu) \frac{r^2}{a^4} \right]; \\ \frac{d^3W}{dr^3} &= \left[ 24(1 + \mu) \frac{r}{a^4} \right]; & \frac{d^4W}{dr^4} &= \left[ 24(1 + \mu) \frac{1}{a^4} \right]. \end{aligned}$$

Проверим выполнение граничных условий на краю пластины

Первое условие – при  $r = a$ ,  $W = 0$ .

$$W = C \left[ (5 + \mu) - 2(3 + \mu) \frac{a^2}{a^2} + (1 + \mu) \frac{a^4}{a^4} \right] = C[5 + \mu - 6 - 2\mu + 1 + \mu] = 0.$$

Второе условие – при  $r = a$   $M_r = 0$ .

Момент в радиальной плоскости

$$\begin{aligned} M_r = -D \left( \frac{d^2W}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dW}{dr} \right) = - \left\{ \left[ -4(3 + \mu) \frac{1}{a^2} + 12(1 + \mu) \frac{r^2}{a^4} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{r} \left[ -4(3 + \mu) \frac{r}{a^2} + 4(1 + \mu) \frac{r^3}{a^4} \right] \right\}. \end{aligned}$$

После преобразования получим выражение

$$M_r = -\frac{4DC}{a^2} (1 + \mu)(3 + \mu) \left( \frac{r^2}{a^2} - 1 \right).$$

Согласно второму граничному условию, имеем

$$M_r = -\frac{4DC}{a^2} (1 + \mu)(3 + \mu) \left( \frac{a^2}{a^2} - 1 \right) = 0.$$

Условия на краю пластины выполняется.

Определим постоянный коэффициент  $C$ , используя дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластины.

$$D \left( \frac{d^4 W}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 W}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dW}{dr} \right) = q.$$

Подставим выражения для производных

$$DC \left\{ 24(1+\mu) \frac{1}{a^4} + \frac{2}{r} \left[ 24(1+\mu) \frac{r}{a^4} \right] - \frac{1}{r^2} \left[ -4(3+\mu) \frac{1}{a^2} + 12(1+\mu) \frac{r^2}{a^4} \right] + \frac{1}{r^3} \left[ -4(3+\mu) \frac{r}{a^2} + 4(1+\mu) \frac{r^3}{a^4} \right] \right\} = q.$$

Раскроем скобки, выполним сокращения и приведем подобные

$$DC \{ 24 + 48 - 12 + 4 \} = q.$$

В результате получим

$$C = \frac{qa^4}{64D(1+\mu)}.$$

Учитывая выражения для  $C$ , получим функцию прогибов

$$W = \frac{qa^4}{64D(1+\mu)} \left[ (5+\mu) - 2(3+\mu) \frac{r^2}{a^2} + (1+\mu) \frac{r^4}{a^4} \right].$$

Составим выражение для радиального изгибающего момента  $M_r$  (получено выше)

$$M_r = -\frac{4DC}{a^2} (1+\mu)(3+\mu) \left( \frac{r^2}{a^2} - 1 \right).$$

Составим выражение для тангенциального изгибающего момента  $M_\theta$

$$M_\theta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} + \mu \frac{d^2 W}{dr^2} \right) = -DC \left\{ \frac{1}{r} \left[ -4(3+\mu) \frac{r}{a^2} + 4(1+\mu) \frac{r^3}{a^4} \right] + \mu \left[ -4(3+\mu) \frac{1}{a^2} + 12(1+\mu) \frac{r^2}{a^4} \right] \right\}.$$

Раскроем скобки и приведем подобные. В результате получим

$$M_{\theta} = -\frac{4DC}{a^2}(1+\mu) \left[ (1+3\mu)\frac{r^2}{a^2} - (3+\mu) \right].$$

Составим выражение для поперечной силы

$$Q_r = -D \left( \frac{d^3W}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2W}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dW}{dr} \right) = \left\{ DC24(1+\mu)\frac{r}{a^4} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \left[ -4(3+\mu)\frac{1}{a^2} + 12(1+\mu)\frac{r^2}{a^4} \right] - \frac{1}{r^2} \left[ -4(3+\mu)\frac{r}{a^2} + 4(1+\mu)\frac{r^3}{a^4} \right] \right\}.$$

Раскроем скобки, приведем подобные и получим выражение для поперечно силы

$$Q_r = \frac{DC}{a^4}(1+\mu)r.$$

Выразим произведение коэффициентов  $CD$  через известные величины

$$DC = D \frac{qa^4}{64D(1+\mu)} = \frac{qa^4}{64(1+\mu)} = \frac{q2^4}{64(1+0,25)} = \frac{q}{5}.$$

Вычислим значения изгибающих моментов и поперечной силы в центре пластины,  
 $r=0$ .

$$M_r = -\frac{4DC}{a^2}(1+\mu)(3+\mu) \left( \frac{r^2}{a^2} - 1 \right) = -\frac{4q/5}{2^2}(1+0,25)(3+0,25) \left( \frac{0^2}{a^2} - 1 \right) = \\ = 0,8125q;$$

$$M_{\theta} = -\frac{4DC}{a^2}(1+\mu) \left[ (1+3\mu)\frac{r^2}{a^2} - (3+\mu) \right] = \\ = -\frac{4q/5}{2^2}(1+0,25) \left[ (1+3 \cdot 0,25)\frac{0^2}{a^2} - (3+0,25) \right] = 0,8125q;$$

$$Q_r = \frac{DC}{a^4}(1+\mu)r = \frac{q/5}{2^4}(1+0,25) \cdot 0 = 0.$$

Вычислим значения изгибающих моментов и поперечной силы на краю пластины,  
 $r = a = 2$ .

$$M_r = -\frac{4DC}{a^2}(1+\mu)(3+\mu)\left(\frac{r^2}{a^2}-1\right) = -\frac{4q/5}{2^2}(1+0,25)(3+0,25)\left(\frac{r^2}{a^2}-1\right) = 0;$$

$$\begin{aligned} M_\theta &= -\frac{4DC}{a^2}(1+\mu)\left[(1+3\mu)\frac{a^2}{a^2}-(3+\mu)\right] = \\ &= -\frac{4q/5}{2^2}(1+0,25)\left[(1+3\cdot 0,25)\frac{2^2}{2^2}-(3+0,25)\right] = 0,375q, \end{aligned}$$

$$Q_r = \frac{DC}{a^4}(1+\mu)a = \frac{q/5}{2^4}(1+0,25)\cdot 2 = 0,03125q.$$

Вычислим прогибы пластины  
 при  $r = 0$

$$\begin{aligned} W &= \frac{qa^4}{64D(1+\mu)}\left[(5+\mu)-2(3+\mu)\frac{r^2}{a^2}+(1+\mu)\frac{r^4}{a^4}\right] = \\ &= \frac{q2^4}{64D(1+0,25)}\left[(5+0,25)-2(3+0,25)\frac{0^2}{a^2}+(1+0,25)\frac{0^4}{2^4}\right] = 1,05\frac{q}{D}; \end{aligned}$$

при  $r = a/2 = 1$

$$\begin{aligned} W &= \frac{qa^4}{64D(1+\mu)}\left[(5+\mu)-2(3+\mu)\frac{r^2}{a^2}+(1+\mu)\frac{r^4}{a^4}\right] = \\ &= \frac{q2^4}{64D(1+0,25)}\left[(5+0,25)-2(3+0,25)\frac{1^2}{2^2}+(1+0,25)\frac{1^4}{2^4}\right] = 0,741\frac{q}{D}; \end{aligned}$$

при  $r = a = 2$

$$\begin{aligned} W &= \frac{qa^4}{64D(1+\mu)}\left[(5+\mu)-2(3+\mu)\frac{r^2}{a^2}+(1+\mu)\frac{r^4}{a^4}\right] = \\ &= \frac{q2^4}{64D(1+0,25)}\left[(5+0,25)-2(3+0,25)\frac{2^2}{2^2}+(1+0,25)\frac{2^4}{2^4}\right] = 0. \end{aligned}$$

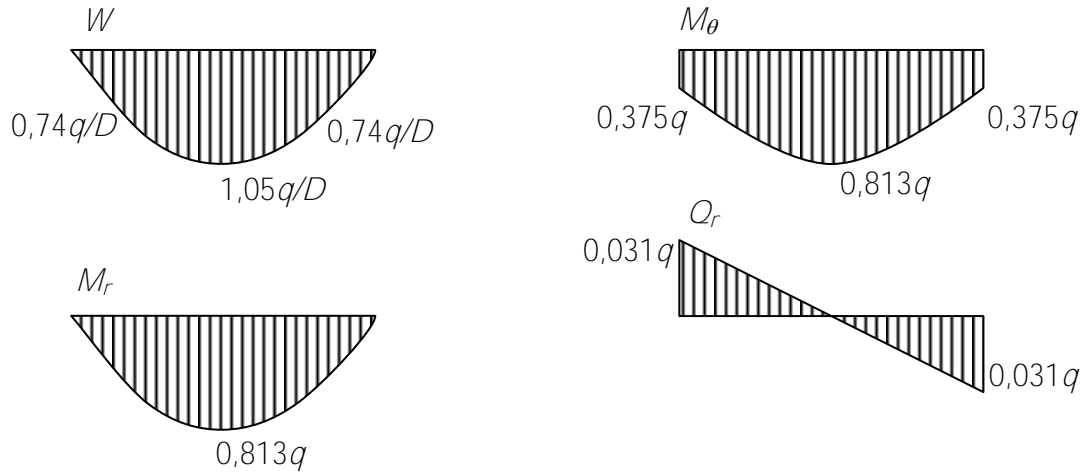


Рис. 36. Эпюры прогибов, изгибающих моментов и поперечных сил

Вычислим максимальные нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_r = \frac{6M_r}{h^2} = \frac{6 \cdot 0,816q}{0,2^2} = 122,4q;$$

$$\sigma_\theta = \frac{6M_\theta}{h^2} = \frac{6 \cdot 0,816q}{0,2^2} = 122,4q;$$

$$\tau_r = \frac{3Q_r}{2h} = \frac{3 \cdot 0,031q}{2 \cdot 0,2} = 0,233q.$$

## 2.7. Основы теории пластичности и ползучести

**Пример 14.** Абсолютно жесткий стержень  $AC$  шарнирно опертый в точке  $C$  удерживается тремя тяжами в точках  $A$ ,  $B$  и  $E$ , составленными из шести стержней с одинаковой площадью поперечных сечений  $A$ . Определить комбинацию стержней, при которой предельная нагрузка  $F$  будет самой большой, если материал деформируется по диаграмме Прандтля.

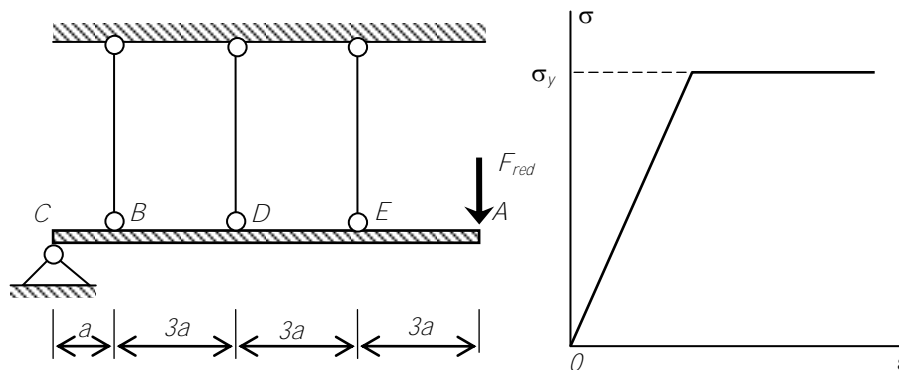


Рис. 37. Статически неопределимая система с учетом пластических деформаций материала тяжей

**Р е ш е н и е.** Обозначим количество стержней в тросах  $B, D, E$ , соответственно,  $n_B, n_D, n_E$ . Согласно условию задачи при всех комбинациях расположения стержней суммарное их количество равно шести, то есть  $n_B + n_D + n_E = 6$ . Система потеряет прочность, то есть способность воспринимать сколь угодно малую дополнительную нагрузку, если во всех тросах напряжения будут равными пределу текучести  $\sigma_y$ . Составим уравнение предельного равновесия заданной системы

$$\sum M_C = \sigma_y n_B A \cdot a + \sigma_y n_D A \cdot 4a + \sigma_y n_E A \cdot 7a - F_{red} \cdot 10a = 0.$$

Из уравнения получим значение предельной нагрузки

$$F_{red} = \frac{\sigma_y A}{10} (n_B + 4n_D + 7n_E).$$

Отсюда следует, что наибольшая нагрузка будет при наибольшем значении выражения в скобках. Составим возможные варианты расположения стержней в тросах  $B, D, E$  и посчитаем выражение в скобках для каждого варианта.

Таблица 1 – Результаты расчета статически неопределимая система с учетом пластических деформаций материала тросов

Вариант	Распределение стержней по тросам			Количество стержней	Значение $(n_B + 4n_D + 7n_E)$
	$n_B$	$n_D$	$n_E$		
1	1	2	3	6	30
2	1	3	2	6	27
3	2	1	3	6	27
4	2	2	2	6	24
5	2	3	1	6	21
6	3	1	2	6	21
7	3	2	1	6	18

Очевидно, что заданная система может нести наибольшую предельную нагрузку при варианте распределения стержней по тросам, обозначенным номером 1. При этом наибольшая предельная нагрузка равна

$$F_{red} = 3\sigma_y A.$$



### 3 КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

#### 3.1 Индивидуальные задачи для самостоятельной работы

На квадратную пластинку, опирающуюся на упругое основание Фусса-Винклера, действуют четыре вертикальные силы  $F$ , приложенные к расчетным точкам (рис. 38), в соответствии с таблицей 3.

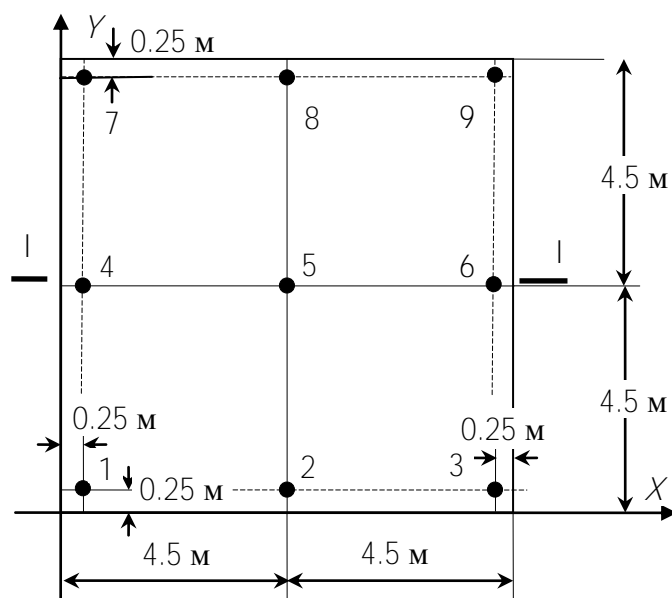


Рис. 38. Расчетные точки приложения нагрузки к пластинке

Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,25$ , размеры пластинки  $9.5 \times 9.5$  м, коэффициент жесткости основания  $k_0 = 10$  МН/м коэффициент запаса  $n_0 = 1.5$ , опасное напряжение (предел текучести)  $\sigma_y = 20$  МПа, размеры площадки нагружения  $25 \times 25$  см принимаются одинаковыми для всех вариантов. Другие данные выбираются из таблиц 2 и 3 по шифру студента (заочная форма обучения) или по указанию преподавателя.

#### Т р е б у е т с я:

1. Изобразить конечно-элементную модель пластинки и все расчетные точки.
2. Подготовить исходные данные и выполнить расчет пластинки по программе *Sturm*, получить карты изолиний  $V$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_{xy}$ , сделать их анализ и выводы о деформации пластинки и о характере распределения в ней внутренних сил (*только для студентов очной формы обучения*)
3. В окрестности одной из точек приложения сил  $F$  (на усмотрение студента) определить - изгибающие и крутящие моменты, интенсивность давления и поперечные силы от местной нагрузки; вычислить нормальные и касательные напряжения и изобразить их эпюры.
4. В окрестности выбранной точки (п.3) вблизи верхней поверхности пластинки вырезать элементарный объем показать все напряжения на его площадках, установить вид напряженного состояния, найти главные напряжения и положение главных площадок.
5. Используя теорию прочности Губера-Мизеса-Генки, определить допустимое значение нагрузки  $F_{adm}$ .

Таблица 2 – Данные к контрольной (расчетно-графической) работе

Вариант	Модуль упругости пластинки $E$ , ГПа	Толщина пластинки $t$ , см	Вариант	Координаты расчетных точек									
				Точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9
				X, м	0.25	4.75	9.25	0.25	4.75	9.25	0.25	4.75	9.25
				Y, м	0.25	0.25	0.25	4.75	4.75	4.75	9.25	9.25	9.25
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	80	18	1		$F$	-	$F$	$F$	$F$	-	-	-	-
2	58	20	2		-	$F$	$F$	$F$	$F$	-	-	-	-
3	44	22	3		$F$	$F$	-	-	$F$	-	$F$	-	-
4	34	24	4		$F$	-	-	$F$	$F$	-	-	-	$F$
5	27	26	5		-	-	$F$	$F$	$F$	$F$	-	-	-
6	21	28	6		-	-	$F$	$F$	$F$	-	$F$	-	-
7	17	30	7		-	$F$	-	$F$	-	-	$F$	-	$F$
8	14	32	8		-	-	$F$	-	$F$	-	$F$	-	$F$
9	12	34	9		-	$F$	-	-	$F$	-	$F$	-	$F$
0	10	36	0		-	$F$	-	-	$F$	-	-	$F$	$F$
<i>a</i>				<i>б</i>									

Таблица 3 – Значение силы  $F$ , приложенной к пластинке

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Сила $F$ , кН	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
<b>в</b>										

Примечание. Пример выполнения самостоятельной работы приведен в разделе 4.7. Для проверки решения задачи преподавателям можно использовать учебную компьютерную программу *TUP*, инструкция к которой дана в п.4.7.

### 3.2 Контрольные вопросы к зачету

1. Какое место и значимость имеет теория упругости среди других наук механики твердого тела?
2. Какие основные гипотезы приняты в классической теории упругости?
3. Как обозначаются и как определяются полное, нормальное и касательное напряжения?
4. По каким правилам расставляются индексы и знаки напряжений?
5. Как записывается и какие особенности имеет тензор напряжений?
6. Что следует понимать под напряженным состоянием в точке?
7. Какие частные случаи напряженного состояния выделяют в теории упругости и как записываются соответствующие им тензоры напряжений?
8. Какими уравнениями выражаются условия на границе тела?
9. Как обозначаются и как определяются направляющие косинусы площадки?
10. Как выражаются нормальное и касательное напряжения на наклонной площадке?
11. Какие напряжения и площадки называются главными?
12. Как определить значения главные напряжений?
13. Как выражаются инварианты тензора напряжений через напряжения на координатных площадках?
14. Как найти значения максимальных (экстремальных) касательных напряжений при объемном напряженном состоянии?
15. Какие площадки и напряжения называются октаэдрическими?
16. Как выражаются октаэдрические напряжения через главные напряжения?
17. Как записывается шаровой тензор напряжения и тензор-девиатор напряжения?
18. Как записывается тензор деформации?
19. Как обозначаются и какие знаки принимаются для линейных и угловых деформаций?
20. Как выражается относительная линейная деформация волокна по произвольному направлению через компоненты тензора деформации?
21. Как вычислить значения главных деформаций?
22. Как выражаются инварианты тензора деформаций через компоненты тензора деформации?
23. Как записывается шаровой тензор деформации и тензор-девиатор деформации?
24. Как записывается дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Нав'е)?
25. Как записываются геометрические уравнения (уравнения Коши)?
26. Как записываются и что выражают уравнения неразрывности деформаций (уравнения Сен-Венана)? Их физический и энергетический смысл?
27. Как записываются физические уравнения (закон Гука) для объемного напряженного состояния?
28. Как записываются закон изменения объема и закон изменения формы?

29. Как формулируются гипотезы наступления предельного состояния Кулона-Геста и Губера-Мизеса-Роша?
30. Как формулируется решение задачи теории упругости в перемещениях?
31. Как формулируется решение задачи теории упругости в напряжениях?
32. Как записываются основные уравнения для плоской задачи теории упругости – плоское напряженное состояние?
33. Как записываются основные уравнения для плоской задачи теории упругости – плоское деформированное состояние?
34. Как получить решение плоских задач теории упругости с использованием функции напряжений (функции Эри)?
35. Какие понятия и допущения приняты в теории тонких пластин?
36. Какие классические модели грунтовых оснований применяются для расчета строительных сооружений?
37. Как записывается уравнение упругой поверхности тонкой пластины. (уравнение Софи-Жермен)?
38. Как выражаются внутренние силы через разрешающую функцию прогибов  $W$ ?
39. Как выражаются граничные условия для тонких прямоугольных пластин?
40. Как вычисляются нормальные и касательные напряжения в тонкой пластине от изгибающих моментов и поперечных сил?
41. Как выражаются напряжения, вызванные действием местной нагрузки?
42. Какая модель принимается для расчета тонкой пластины методом конечных элементов (суть метода)?
43. Как обозначаются напряжения и деформации в полярной системе координат?
44. Как записываются основные уравнения теории упругости в полярной системе координат?
45. В каких случаях используется цилиндрическая система координатных осей при решении задач теории упругости?
46. Как записываются основные уравнения теории упругости в цилиндрических координатах?
47. Какие понятия принимаются в теории пластичности?
48. Что заложено в понятиях простое нагружение и простое разгружение?
49. Какие основные постулаты приняты в теории малых упруго пластических деформаций А.А.Ильюшина?
50. Как записываются основные уравнения в теории пластичности?

## 4 ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

### 4.1 Модули курса

#### **Модуль 1 Теория напряженно-деформированного состояния в точке**

Нагрузки и напряжения. Напряженное состояние в точке. Его полное математическое описание с помощью тензора напряжений. Компоненты тензора, его симметричный характер (закон парности касательных напряжений). Напряжения на наклонных площадках.

Представление тензора напряжений в диагональной форме. Главные напряжения. Их экстремальные свойства. Шаровой тензор и девиатор напряжений. Инварианты напряженного состояния. Наибольшие касательные напряжения. Октаэдрические напряжения. Интенсивность напряжений, их связь со вторым инвариантом девиатора.

Перемещения и деформации в точке тела. Деформированное состояние в точке тела. Его полное математическое описание с помощью тензора деформаций. Компоненты и инварианты тензора деформаций.

Главные оси деформации и главные деформации. Их свойства. Шаровой тензор и девиатор деформаций. Интенсивность деформаций.

#### **Модуль 2 Основные уравнения теории упругости**

Три группы основных уравнений. Дифференциальные уравнения равновесия. Геометрические соотношения Коши. Уравнения неразрывности (совместности) деформаций (Сен-Венана). Физические уравнения теории упругости. Частные случаи. Упругие постоянные. Обобщенный закон Гука для изотропного и анизотропного тела.

Уравнения равновесия в перемещениях (уравнения Ламе). Уравнения неразрывности деформаций в напряжениях (уравнения Бельтрами-Митчела).

Формулировка основной задачи теории упругости: полная система уравнений в напряжениях и перемещениях, типы граничных условий на поверхности тела. Теорема о единственности решения. Понятие о температурных напряжениях и деформациях в упругих телах. Задачи теплопроводности и термоупругости.

Основные уравнения пространственной задачи теории упругости в цилиндрической системе координат. Осесимметрическая пространственная задача теории упругости.

#### **Модуль 3 Плоская задача теории упругости в декартовых координатах**

Два вида плоской задачи: плоская деформация и обобщенное плоское напряженное состояние. Кинематическая и статическая гипотезы. Запись тен-

зоров напряжений и деформаций, основных уравнений и граничных условий плоской задачи в декартовых координатах.

Решение плоской задачи в перемещениях и напряжениях. Уравнение Леви. Функция напряжений Эри. Бигармоническое уравнение. Понятие о решении бигармонического уравнения в полиномах, тригонометрических рядах, методом конечных разностей.

#### **Модуль 4 Плоская задача теории упругости в полярных координатах**

Запись тензоров напряжений и деформаций, основных уравнений и граничных условий плоской задачи в полярных координатах. Простое радиальное напряженное состояние. Сжатие и изгиб клина сосредоточенной силой. Действие на полуплоскость одной и нескольких сосредоточенных сил, распределенных нагрузок.

Задачи Грюблера и Кирша о концентрации напряжений в пластинке около круглых отверстий. Описание результатов решения задач о концентрации напряжений вокруг отверстий некруглой формы. Понятие о зонах концентрации напряжений в конструкциях.

#### **Модуль 5 Изгиб прямоугольных и круглых пластин**

Классификация пластин. Основные понятия и гипотезы. Выражение деформаций, напряжений, изгибающих, крутящих моментов и поперечных сил через функцию прогибов пластины. Уравнения равновесия элемента пластины. Основное дифференциальное уравнение изгиба пластин в прямоугольных координатах (уравнение Софи Жермен-Лагранжа). Формулировка граничных условий для основных случаев закрепления краев пластины. Элементарные примеры изгиба пластин. Энергия деформации при изгибе пластин.

Дифференциальное уравнение изгиба круглых и кольцевых пластин. Внутренние усилия в пластине в полярной системе координат. Осесимметричный изгиб пластин. Общее решение задачи и частные случаи осесимметричного изгиба.

Понятие об изгибе многослойных пластин. Особенности расчета ортотропных пластин. Изгиб пластин на упругом основании.

Понятие об устойчивости пластин и методах определения критических нагрузок. Дифференциальное уравнение продольно-поперечного изгиба прямоугольных пластин. Примеры определения критических сжимающих нагрузок для шарнирно опертых прямоугольных пластин.

#### **Модуль 6 Вариационные методы решения задач теории упругости**

Сущность вариационных методов. Работа внешних сил и потенциальная энергия деформации. Ее вид для пространственных и плоских задач, изгибаемых пластин. Дополнительная энергия. Принципы Лагранжа и Кастильяно. Вариационные методы Релея-Ритца-Тимошенко, Бубнова-Галеркина и Власова - Канторовича.

## **Модуль 7 Решение задач теории упругости методом конечных элементов**

Метод конечных элементов (МКЭ). Построение конечно-элементных моделей. Регулярные и нерегулярные конечно-элементные сетки. Типы конечных элементов. Плоские конечные элементы: треугольные, прямоугольные, полигональные. Объемные конечные элементы: тетраэдры, параллелепипеды, кольцеобразные элементы. Система нумерации в МКЭ. Понятие о векторе узловых сил и векторе узловых перемещений. Координатная функция. Совместные и несовместные КЭ.

Связь перемещений и узловых сил. Понятие о матрице жесткости КЭ. Объединение матриц жесткости. Особенности структуры объединенной матрицы жесткости: разреженность и симметрия. Учет кинематических и статических граничных условий. Вычисление напряжений и деформаций в КЭ.

Методы решения систем разрешающих конечно-элементных уравнений: точные и итерационные. Понятие об ошибках аппроксимации, вычислительных ошибках и об устойчивости численных решений.

Алгоритмизация МКЭ. Реализация этих методов на современных ЭВМ. Сведения о библиотеке прикладных программ.

## **Модуль 8 Основы теории пластичности и ползучести**

Механические свойства конструкционных материалов при напряжениях выше предела пропорциональности. Два типа задач теории пластичности. Модели идеально-пластического, упруго-пластического и жестко-пластического тел. Критерии пластичности Сен-Венана и Мизеса. Активная, пассивная и нейтральная деформации.

Теория малых упруго-пластических деформаций Ильюшина. Решение задач упруго-пластического деформирования в перемещениях. Метод упругих решений. Теория пластического течения.

Решение частных задач теории пластичности: чистый изгиб балки, кручение бруса круглого сечения, действие внутреннего давления на толстостенную трубу. Линии скольжения. Задача о вдавливании жесткого штампа.

Общие понятия о ползучести. Модели вязкоупругого тела. Зависимость между напряжениями и деформациями при линейной ползучести. Вариационные принципы теории вязкоупругости. Принцип Вальтеры. Плоская задача теории ползучести. Изгиб пластин из вязкоупругого материала. Численные методы решения задач ползучести строительных конструкций.

## 4.2 Тематический план дисциплины

Таблица 4 – Наименование тем и разделов дисциплины

Номер модуля и занятия	Наименование разделов, модуля, занятия, перечень изучаемых вопросов	Количество аудиторных работ			
		лекции	практические занятия	лабораторные занятия	управляемая самостоятельная работа студентов
1	2	3	4	5	9
	<b>Раздел II ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ</b>	17	17	–	–
<b>М 1</b>	<b>Теория напряженно-деформированного состояния в точке</b>	4	2	–	–
1.1	Понятие о напряжениях. Тензор напряжений. Главные напряжения и главные площадки. Наибольшие касательные напряжения. Октаэдрические напряжения.	3	2	–	–
1.2	Понятие о перемещениях и деформациях. Тензор деформации. Главные оси деформации и главные деформации. Октаэдрические деформации.	1	–	–	–
<b>М 2</b>	<b>Основные уравнения теории упругости</b>	3	3	–	–
2.1	Основные уравнения теории упругости в декартовых координатах. 1. Уравнения Навье. 1. Уравнения Коши. 2. Уравнения Сен-Венана..	2	2	–	–
2.2	Основные уравнения теории упругости в цилиндрических координатах. 1. Уравнения Навье. 1. Уравнения Коши. 2. Уравнения Сен-Венана.	1	1	–	–
<b>М 3</b>	<b>Плоская задача теории упругости в декартовых координатах</b>	2	3	–	–
3.1	Плоское напряженное и деформированное состояние. 1. Тензор напряжений и тензор деформаций. 2. Основные уравнения теории упругости для плоской задачи.	2	–	–	–
3.2	Решение плоской задачи теории упругости. 1.Решение в перемещениях. 2.Решение в напряжениях. Функция Эри.	2	2	–	–
<b>М 4</b>	<b>Плоская задача теории упругости в полярных координатах</b>	1	–	–	–
4.1	Решение плоской задачи теории упругости в полярных координатах. 1.Тензор напряжений. Основные уравнения. 2.Сжатие и изгиб клина	1	–	–	–
<b>М 5</b>	<b>Изгиб прямоугольных и круглых пластин</b>	3	5	–	–
5.1	Основные понятия о пластинах. 1.Выражение деформаций, моментов и напряжений.	1	3	–	–
5.2	Прямоугольные пластины. 1.Ур. Софи-Жермен 2.Граничные условия.	1	2	–	–
5.3	Устойчивость и продольно-поперечный изгиб. 1.Понятия. 2.Примеры.	1	–	–	–



1	2	3	4	5	9
<b>М 6</b>	<b>Вариационные методы решения задач теории упругости</b>	1	–	–	–
6.1	Вариационные методы. 1.Метод Релея-Ритца-Тимошенко. 2.Метод Бубнова-Галеркина 3.Метод Власова-Контаровича.	1	–	–	–
<b>М 7</b>	<b>Решение задач теории упругости методом конечных элементов</b>	1	2	–	–
7.1	Построение конечно-элементной модели. Конечные элементы. Матрицы жесткости конечных элементов. Методы решения систем разрешающих уравнений. Алгоритмы МКЭ.	1	–	–	–
<b>М 8</b>	<b>Основы теории пластичности и ползучести</b>	2	2	–	–
8.1	Основы теории пластичности. 1.Понятия в теории пластичности. 2.Теория Ильюшина.	1	2	–	–
8.2	Основные понятия о теории ползучести. 1.Модели ползучести. 2.Численные методы решения задач ползучести	1	–	–	–
	<b>Всего</b>	17	17	–	–

#### 4.3 Учебно-методическое обеспечение дисциплины

##### Основная литература

1. Александров А.В. Основы теории упругости и пластичности/ А.В.Александров, В.Д.Потапов. – М.: Высш. шк.,1990.– 400 с.
2. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н.И.Безухов. – М.: Высш. шк., 1968. – 512 с.
3. Безухов Н.И. Примеры и задачи по теории упругости, пластичности и ползучести / Н.И.Безухов – М.: Высш. шк., 1965. – 320 с.
4. Хечумов Р.А. Применение метода конечных элементов к расчету конструкций: учебное пособие для технических вузов / Р.А.Хечумов, Х.Кепплер, В.И.Прокопьев. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 1994. – 353 с.

##### Дополнительная литература

1. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П.Тимошенко, Дж.Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности / В.И.Самуль.– М.: Высш. шк., 1982. – 264 с.
3. Шевчук Л.И. Методические указания к контрольным (расчетно-графическим) работам по теории упругости и пластичности/ Л.И.Шевчук, О.Л.Вербицкая, А.Е.Кончиц. – БНТУ, 2003. – 42 с.

## **Компьютерные программы и другие научно-методические материалы**

1. Макаров Е.Г. Сопротивление материалов на базе *Mathcad* – СТБ: БХВ – Петербург, 2003. – 512 с.
2. Компьютерная программа *STURM* – Расчет прямоугольных плит переменной жесткости на упругом основании методом конечных элементов.
3. Учебная компьютерная программа *TUP* по исследованию напряженного состояния в точке.

### **4.4 Информационное обеспечение дисциплины**

Для успешного усвоения всех разделов дисциплины используются следующие средства:

1. Учебная литература по курсу;
2. Конспект лекций;
3. Плакаты по разделам МКЭ и МКР;
4. Компьютерное и программное обеспечение кафедры.

#### 4.5 Пример решения индивидуальной задачи

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Сопротивление материалов и теория упругости»

### САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

по теории упругости

«Расчет пластинки на упругом основании методом конечных элементов»

Шифр 832

Исполнитель

Студент(ка)

Группы \_\_\_\_\_

Ф. И. О. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Руководитель

Ф.И.О. \_\_\_\_\_

Минск 20\_\_

Согласно шифра (выданного преподавателем задания) дано.

На квадратную пластинку 9.5 x 9.5 м, опирающуюся на упругое основание с коэффициентом жесткости  $k_0 = 10$  МН/м, действуют четыре силы  $F=550$  кН (табл.3), приложенные в расчетных точках 1, 2, 5, 7 (табл. 2).

Принимаем коэффициент Пуассона  $\nu = 0.25$ , опасное напряжение  $\sigma_{dan} = \sigma_y = 20$  МПа, площадку приложения нагрузки  $F$  квадратной со стороной 25 см. Модуль упругости и толщина пластинки соответственно равны  $E = 14$  ГПа и  $t = 32$  см (табл. 2).

### Р е ш е н и е.

1. Изобразим конечно-элементную модель пластинки, все ее расчетные точки и нагрузку (рис. 39).

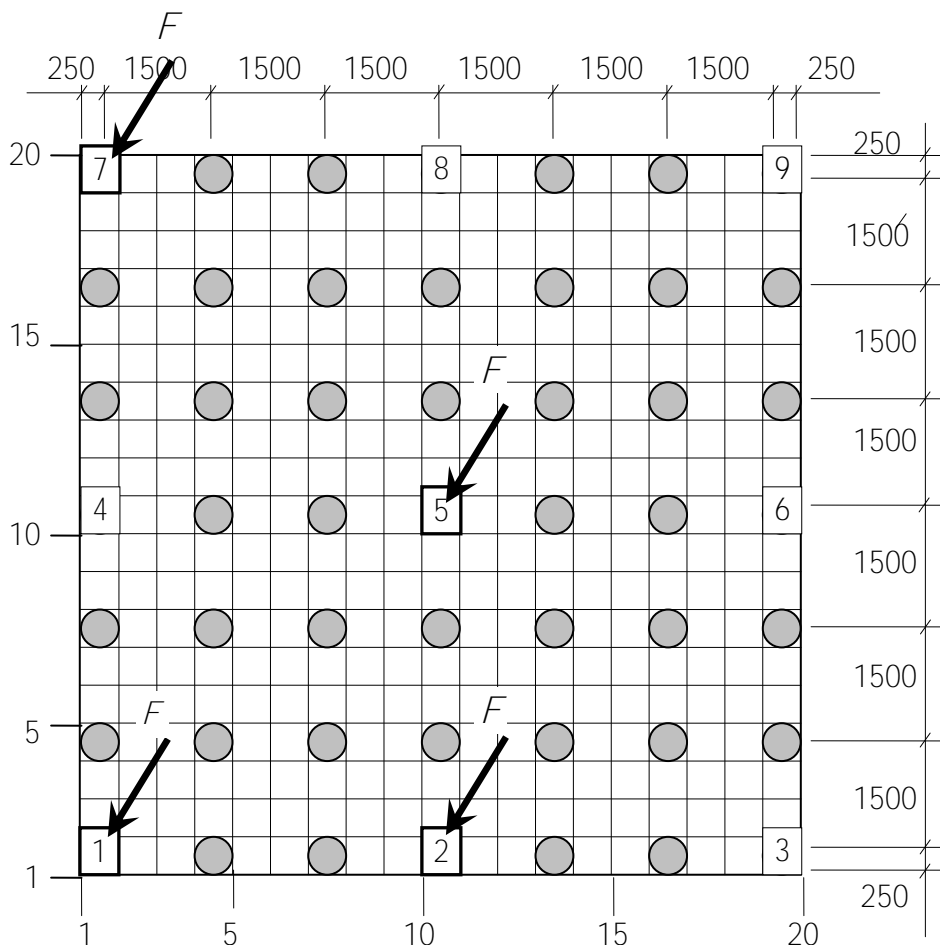


Рис. 39. Конечно-элементная модель пластинки, расчетные точки и нагрузка (жирно напечатанные номера расчетных точек, соответствуют местам приложения сил)

2. Подготовим исходные данные для расчета пластинки по программе *Sturm*.

Длина пластинки

9.5 м

Ширина пластинки	9.5 м
Количество узлов вдоль пластинки	20
Количество узлов поперек пластинки	20
Модуль упругости материала пластинки	14 ГПа
Коэффициент Пуассона материала пластинки	0,25
Толщина пластинки	32 см
Коэффициент жесткости основания	10 МН/м

Нагрузка  $F$ , приложенная к ячейке, распределяется по четырем соседним узлам, примыкающим к этой ячейке в виде сил, равных  $F/4 = 550/4 = 137.5$  кН

Таблица 5 – Значения сил и их место приложения

Нагрузка, кН	Номер вертикали	Номер горизонтали	Нагрузка, кН	Номер вертикали	Номер горизонтали
137.5	1	1	137.5	10	10
137.5	2	1	137.5	11	10
137.5	1	2	137.5	10	11
137.5	2	2	137.5	11	11
137.5	10	1	137.5	1	19
137.5	11	1	137.5	2	19
137.5	10	2	137.5	1	20
137.5	11	2	137.5	2	20

Примечание. Вертикали и горизонталы нумеруются, соответственно, от левого и нижнего краев пластины.

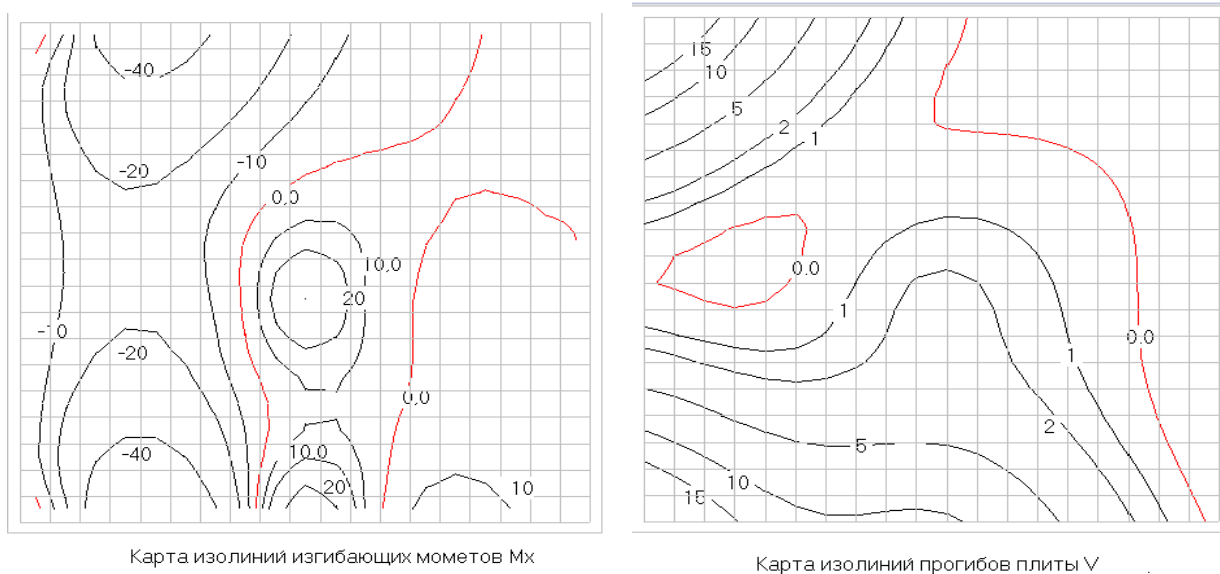
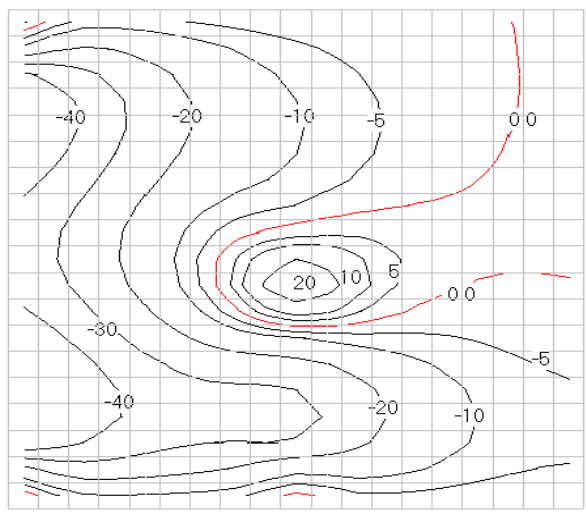
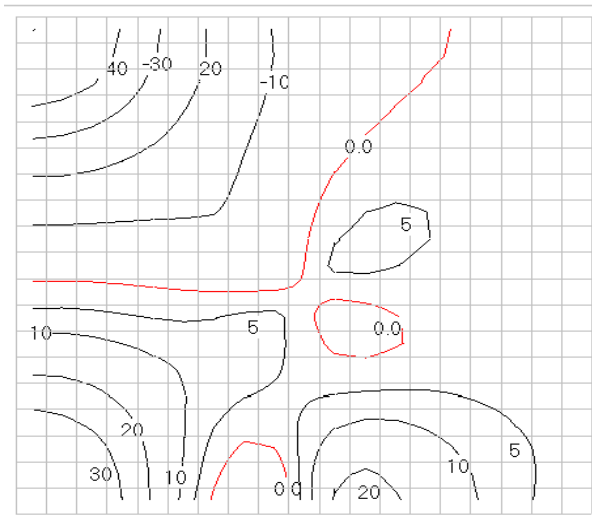


Рис. 40. Карты изолиний прогибов и изгибающих моментов  $M_x$



Карта изолиний изгибающих моментов  $M_y$



Карта изолиний крутящих моментов  $M_{xy}$

Рис. 41. Карты изолиний прогибов, изгибающих и крутящего моментов

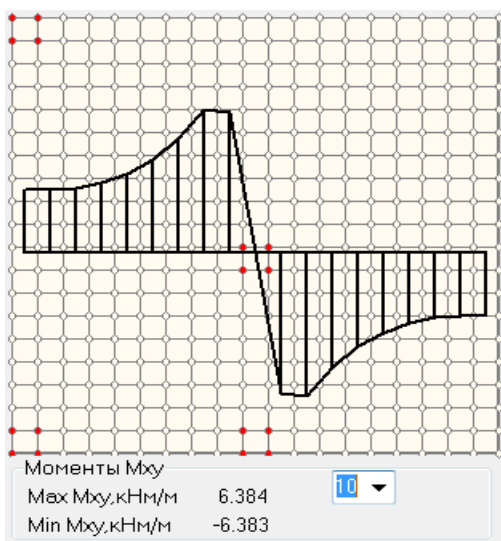
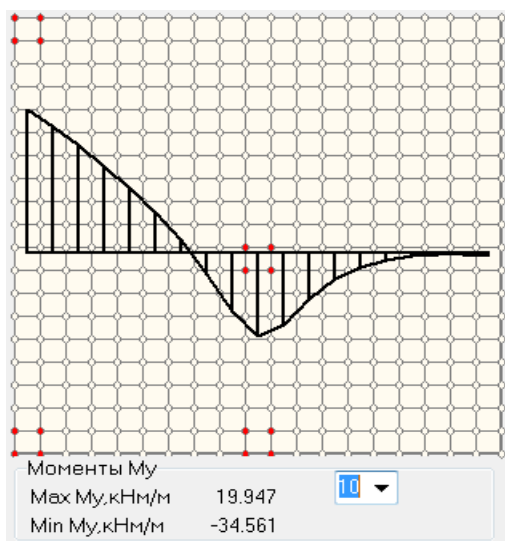
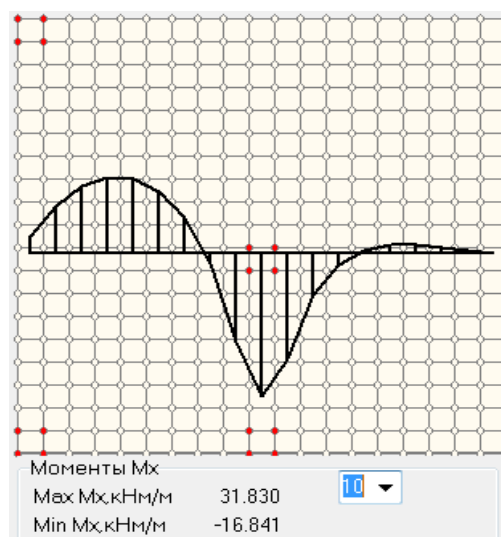
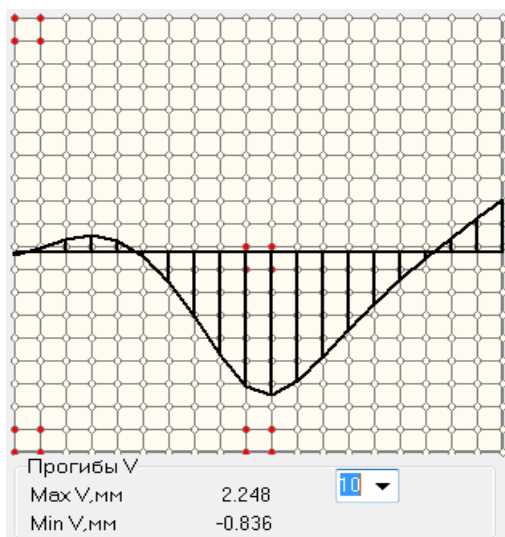


Рис. 42. Эпюры прогибов  $W$ , изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$  и крутящих моментов  $M_{xy}$  в сечении  $l-l$

В результате расчета пластины на упругом основании по программе *Sturm* получены карты изолиний (рис. 40, 41) и эпюры (рис. 42) в среднем сечении для прогибов пластины, изгибающих и крутящих моментов.

На основе анализа эпюр установлен характер распределения прогибов, изгибающих и крутящего моментов в среднем сечении пластины:

- наибольший прогиб пластины имеет в средней части сечения направлен вниз и достигает 2,25 мм, а на правом краю сечения – направлен вверх и равен 0,84 мм;
- изгибающий момент  $M_x$  в левой части сечения искривляет пластину выпуклостью вверх и равен 16,84 кНм/м, а в средней части сечения – искривляет пластину выпуклостью вниз и равен 31,83 кНм/м;
- из эпюры изгибающего момента  $M_y$  видно, что на левом краю сечения пластины искривляется выпуклостью вверх от момента 34,86 кНм/м, а в средней части сечения – выпуклостью вниз от момента 19,95 кНм/м;
- эпюра крутящих моментов  $M_{xy}$  кососимметрична с максимальными значениями моментов 6,38 кНм/м;
- из карты изолиний прогибы пластины установлено, что максимальные прогибы свыше 15 мм наблюдаются на верхнем и нижнем краях пластины слева;
- максимальные изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  превышают 40 кНм/м и появляются не левых углах пластины.

К пластине приложены четыре силы  $F = 550$  кН в расчетных узлах конечно-элементной модели

$$\begin{aligned} 1 - x_F = 0.25 \text{ м}, y_F = 0.25 \text{ м}; & \quad 2 - x_F = 4.75 \text{ м}, y_F = 0.25 \text{ м}; \\ 5 - x_F = 4.25 \text{ м}, y_F = 4.25 \text{ м}; & \quad 7 - x_F = 0.25 \text{ м}, y_F = 9.25 \text{ м}; \end{aligned}$$

Выпишем изгибающие и крутящие моменты в этих точках от совместного действия всех четырех сил. Для этого используем результаты расчета пластины по программе *Sturm*.

Таблица 6 – Изгибающие и крутящий моменты в расчетных узлах

Моменты, кНм/м	Координаты расчетных узлов, м			
	$x_F=0,25; y_F=0,25$	$x_F=4,75; y_F=0,25$	$x_F=4,25; y_F=4,25$	$x_F=0,25; y_F=9,25$
$M_x$	3,06	61,22	31,83	-5,29
$M_y$	3,34	1,25	19,95	-5,33
$M_{xy}$	39,17	20,57	0	36,59

Выберем точку 4 и проведем исследование в ней напряженно-деформированного состояния. Определим давление местной нагрузки на поверхность пластины, принимая площадку приложения нагрузки квадратной со стороной равной 0,25 м.

$$p = \frac{F}{a^2} = \frac{550 \cdot 10^3}{0,25^2} = 8,80 \text{ МПа}.$$

Определим поперечные силы от местной нагрузки  $F$

$$Q_{zx} = Q_{zy} = \frac{F}{4 \cdot a} = \frac{550 \cdot 10^3}{4 \cdot 0,25} = 550 \text{ кН/м}.$$

Найдем момент инерции сечения шириной в один метр

$$J = \frac{h^3}{12} = \frac{32^3}{12} = 2731 \text{ см}^3.$$

Вычислим максимальные нормальные напряжения от изгибающих моментов, которые появляются в узле 4  $M_x = 5.29 \text{ кНм/м}$  и  $M_y = 5.33 \text{ кНм/м}$ .

$$\sigma_{x\max} = -\frac{M_x}{J} z_{\max} = -\frac{M_x}{J} \frac{h}{2} = -\frac{5,29 \cdot 10^3}{2731 \cdot 10^{-6}} \frac{0,32}{2} = 0,310 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{y\max} = -\frac{M_y}{J} z_{\max} = -\frac{M_y}{J} \frac{h}{2} = -\frac{5,33 \cdot 10^3}{2731 \cdot 10^{-6}} \frac{0,32}{2} = +0,312 \text{ МПа}.$$

Вычислим касательные напряжения от крутящего момента в узле 4

$$\tau_{xy\max} = \frac{M_{xy}}{J} z_{\max} = \frac{M_{xy}}{J} \frac{h}{2} = \frac{36,59 \cdot 10^3}{2731 \cdot 10^{-6}} \frac{0,32}{2} = 2,144 \text{ МПа}.$$

Определим максимальное нормальное напряжение от местной нагрузки

$$\rho = 8.80 \text{ МПа} \quad \sigma_z = -\rho = 8,800 \text{ МПа}.$$

Вычислим максимальное касательное напряжение, вызванное поперечными силами  $Q_{zx}$  и  $Q_{zy}$

$$\tau_{zx\max} = \tau_{zy\max} = \frac{Q_{zy} S_x}{J} = \frac{3Q_{zy}}{2h} = \frac{3 \cdot 550 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,32} = 2,578 \text{ МПа}..$$

Построим эпюры нормальных и касательных напряжений, вызванные внутренними силами в рассматриваемой расчетной точке 4



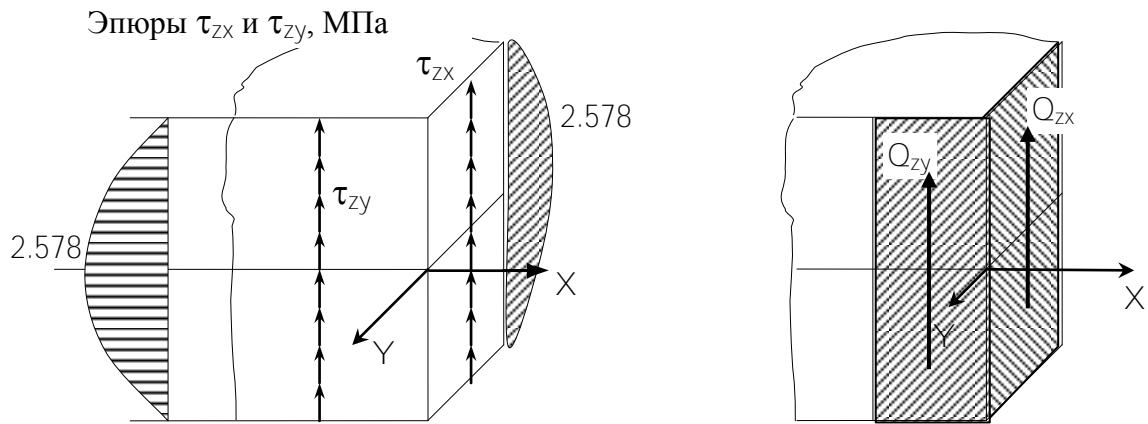


Рис. 43. Касательные напряжения  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{zy}$  в поперечных сечениях пластинки

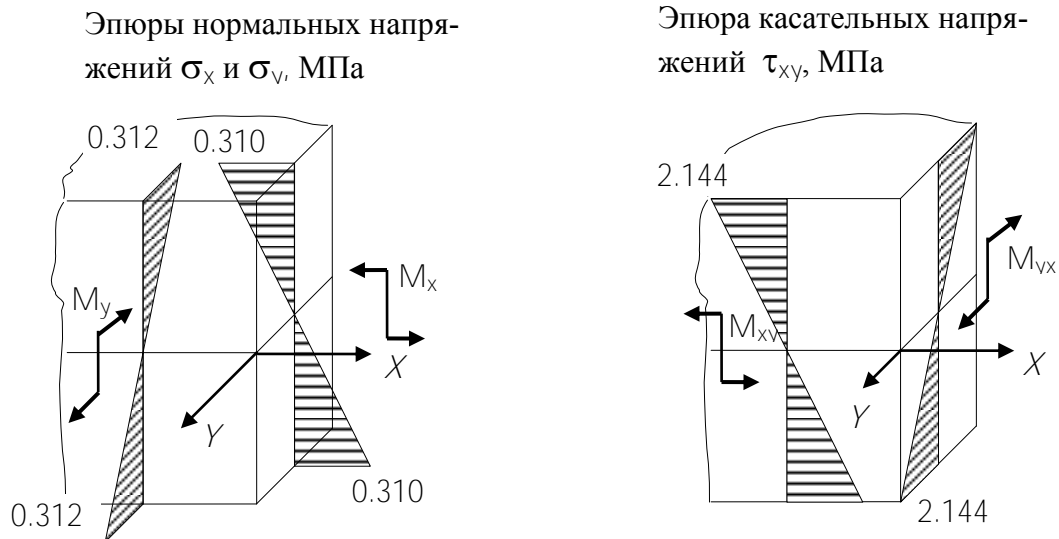


Рис. 44. Нормальные и касательные напряжения в поперечных сечениях пластинки от изгибающих и скручивающего моментов

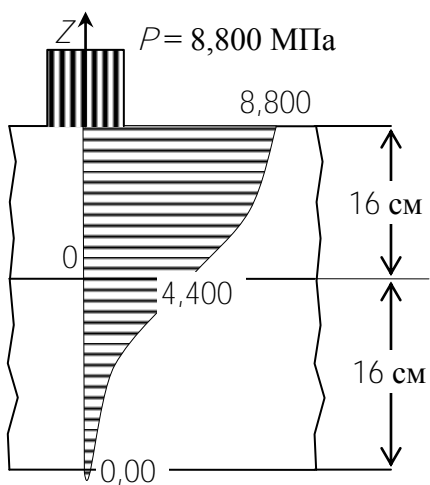


Рис. 45. Вертикальные нормальные напряжения от местной нагрузки

В окрестности выбранной точки на верхней поверхности пластинки вырежем элементарный объем в форме кубика, покажем все напряжения, действующие на его площадках, и запишем тензор напряжений

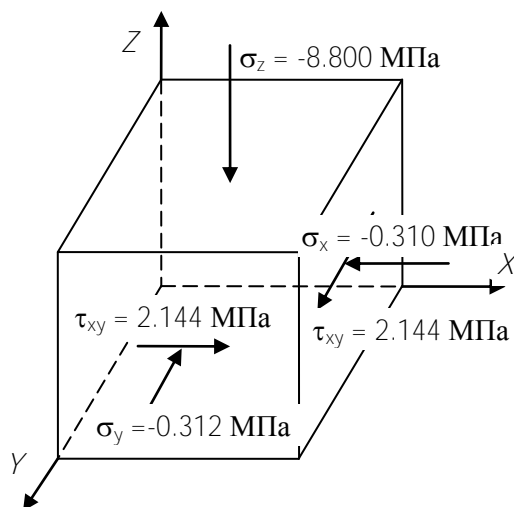


Рис. 46. Элементарный объем и напряжения на его площадках

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,310 & 2,144 & 0 \\ 2,144 & 0,312 & 0 \\ 0 & 0 & -8,800 \end{bmatrix}, \text{ МПа}$$

На всех площадках элементарного объема действуют напряжения (рис.46). Поэтому материал в окрестности исследуемой точки испытывает объемное напряженное состояние.

Вычислим инварианты тензора напряжений

$$\sigma^I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0,310 + 0,312 - 8,800 = -8,178 \text{ МПа};$$

$$\sigma^{II} = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 0,310 \cdot 0,312 + 0,312 \cdot (-8,800) + (-8,800) \cdot 0,310 - 2,144^2 - 0 - 0 = -9,976 (\text{МПа})^2;$$

$$\sigma^{III} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = 0,310 \cdot 0,312 \cdot (-8,800) + 2 \cdot 2,144 \cdot 0 \cdot 0 - 0,310 \cdot 0^2 - 0,312 \cdot 0^2 - (-8,800) \cdot 2,144^2 = 4,597 (\text{МПа})^3.$$

Решим кубическое уравнение

$$\sigma^3 - \sigma^I \sigma^2 + \sigma^{II} \sigma - \sigma^{III} = 0.$$

Подставим значения инвариант в кубическое уравнение

$$\sigma^3 + 8,178\sigma^2 - 9,976\sigma - 4,597 = 0.$$

Сделаем подстановку  $\sigma = y + \sigma'/3$  и приведем уравнение к виду

$$y^3 + 3py + 2q = 0.$$

В полученном приведенном уравнении коэффициенты равны

$$p = \frac{1}{3} \left[ \sigma'' - \frac{(\sigma')^2}{3} \right] = \frac{1}{3} \left[ -9,976 - \frac{8,178^2}{3} \right] = -10,756 (\text{МПа})^2;$$

$$q = \frac{1}{2} \left[ -\frac{2}{27} (\sigma')^3 + \frac{1}{3} \sigma' \sigma'' - \sigma''' \right] = \\ = \frac{1}{2} \left[ -\frac{2}{27} (-8,178)^3 + \frac{1}{3} (-8,178) \cdot (-9,976) - 4,597 \right] = 14,053 (\text{МПа})^3.$$

Определим параметр  $r = \pm \sqrt{|\rho|}$ , знак которого должен совпадать со знаком  $q$

$$r = +\sqrt{|10,756|} = 3,280.$$

Вычислим вспомогательный угол  $\varphi$

$$\varphi = \arccos \left( \frac{q}{r^3} \right) = \arccos \left( \frac{14,053}{3,280^3} \right) = 66,523^\circ.$$

Корни промежуточного уравнения равны

$$y_1 = -2r \cdot \cos \left( \frac{\varphi}{3} \right) = -2 \cdot 3,089 \cdot \cos \left( \frac{66,523^\circ}{3} \right) = -6,074 \text{ МПа};$$

$$y_2 = 2r \cdot \cos \left( 60^\circ - \frac{\varphi}{3} \right) = 2 \cdot 3,280 \cdot \cos \left( 60^\circ - \frac{66,523^\circ}{3} \right) = 5,181 \text{ МПа};$$

$$y_3 = 2r \cdot \cos \left( 60^\circ + \frac{\varphi}{3} \right) = 2 \cdot 3,280 \cdot \cos \left( 60^\circ + \frac{66,523^\circ}{3} \right) = 0,893 \text{ МПа}.$$

Проверим решение промежуточного уравнения

$$y_1 + y_2 + y_3 = -6,074 + 5,181 + 0,893 = 0,000.$$

Вычислим значения главных напряжений

$$\sigma_{(1)} = y_1 + \frac{\sigma'}{3} = -6,074 + \frac{-8,178}{3} = -8,800 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(2)} = y_2 + \frac{\sigma'}{3} = 5,181 + \frac{-8,178}{3} = 2,455 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(3)} = y_3 + \frac{\sigma'}{3} = 0,893 + \frac{-8,178}{3} = -1,833 \text{ МПа}.$$

Расставим индексы главных напряжений в соответствии с условием

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3; \quad \sigma_1 = 2,455 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -1,833 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = -8,800 \text{ МПа}.$$

Проверим полученные значения главных напряжений

$$\sigma' = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 2,455 - 1,833 - 8,800 = -8,178 \text{ МПа};$$

$$\begin{aligned} \sigma'' &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = 2,455 \cdot (-1,833) + (-1,833)(-8,800) + (-8,800) \cdot 2,455 = \\ &= -9,976 (\text{МПа})^2; \end{aligned}$$

$$\sigma''' = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 2,455 \cdot (-1,833)(-8,800) = 39,597 (\text{МПа})^3.$$

Определим положение главных площадок. Так как на верхней (нижней) площадке касательные напряжения отсутствуют, то эта площадка и нормальное напряжение  $\sigma_3 = \sigma_z = -8,800 \text{ МПа}$ , действующее на ней, являются главными. Следовательно,  $l_3 = 0$ ,  $m_3 = 0$ ,  $n_3 = 1$ .

Найдем положение главной площадки, на которой действует  $\sigma_1 = 2,455 \text{ МПа}$ . Для этого воспользуемся первым уравнением равновесия, разделив его на  $m_1$ , и учтем, что  $n_1 = 0$ , получим

$$(\sigma_x - \sigma_1) \frac{l_1}{m_1} + \tau_{xy} = (-0,310 - 2,144) \frac{l_1}{m_1} + 2,578 = 0.$$

Отсюда имеем  $\frac{l_1}{m_1} = 1,000$ .

Учитывая, что  $l_1^2 + m_1^2 = 1$ , найдем направляющие косинусы площадки, на которой действует главное напряжение  $\sigma_1$

$$n_1 = 0;$$

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{l_1}{m_1}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1,000^2}} = 0,707; \quad l_1 = \left(\frac{l_1}{m_1}\right) \cdot m_1 = 1,000 \cdot 0,707 = 0,707.$$

Аналогично определим направляющие косинусы для площадки, где действует главное напряжение  $\sigma_2 = -1,833$  МПа. Для этого воспользуемся тем же первым уравнением равновесия, разделив его на  $m_2$ , и учтем, что  $n_2 = 0$ , получим

$$(\sigma_x - \sigma_2) \frac{l_2}{m_2} + \tau_{xy} = (-0,310 - 1,833) \frac{l_2}{m_2} + 2,144 = 0.$$

Из уравнения найдем  $\frac{l_2}{m_2} = -1,000$ .

Учитывая, что  $l_2^2 + m_2^2 = 1$ , найдем направляющие косинусы площадки, на которой действует главное напряжение  $\sigma_2$

$$n_2 = 0;$$

$$m_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{l_2}{m_2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1,000^2}} = 0,707; \quad l_2 = \left(\frac{l_2}{m_2}\right) \cdot m_2 = -1,000 \cdot 0,707 = -0,707.$$

Проверим ортогональность (взаимно перпендикулярность) главных площадок.

$$l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0,707 \cdot 0,707 + 0,707 \cdot (-0,707) + 0 \cdot 0 = 0;$$

$$l_2 \cdot l_3 + m_2 \cdot m_3 + n_2 \cdot n_3 = 0,707 \cdot 0 + (-0,707) \cdot 0 + 0 \cdot 1,000 = 0;$$

$$l_3 \cdot l_1 + m_3 \cdot m_1 + n_3 \cdot n_1 = 0 \cdot 0,707 + 0 \cdot 0,707 + 1,000 \cdot 0 = 0.$$

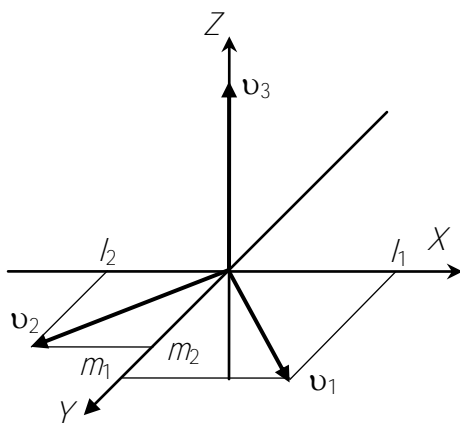


Рис. 47. Положение нормалей главных площадок

Ортогональность соблюдается.

Покажем положение нормалей главных площадок в окрестности исследуемой точки (рис. 47).

Используя теория прочности Губера-Мизеса-Генки, определим допускаемую нагрузку  $F_{adm}$ , из условия наступления предельного состояния в окрестности расчетной точки

$$\sigma_{eqw} = \sigma_i = \sigma_{dan}.$$

где  $\sigma_{dan}$  – опасное напряжение, соответствующее предельному состоянию материала, полученное при испытании на осевое растяжение

$$\sigma_{dan} = \sigma_y = 20 \text{ МПа},$$

где  $\sigma_j$  – интенсивность напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (2,455 + 1,833)^2 + (-1,833 + 8,800)^2 + (-8,800 - 2,455)^2 \right]} = 9,839 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Вычислим допускаемую нагрузку

$$F_{adm} = \frac{\sigma_{dan} \cdot F}{\sigma_j \cdot n_0} = \frac{20 \cdot 550}{9,839 \cdot 1,5} = 745,35 \text{ кН} \approx 740 \text{ кН}.$$

## 4.6 Описание и инструкция к программе *Sturm*

### 4.6.1 Назначение программы

Компьютерная программа *Sturm* составлена на алгоритмическом языке *Delphi-7 (Pascal)* и предназначена для расчета прямоугольных плит переменной жесткости на упругом винклеровском основании. Интерфейс программы *Sturm* приведен на рисунке. Программа отличается простотой ввода исходных данных и вывода результатов расчета в цифровом и графическом виде.

Расчет плиты выполняется методом конечных элементов. Для построения конечно-элементной модели использованы прямоугольные несовместные конечные элементы с четырьмя узлами и двенадцатью степенями свободы. Конечно-элементная модель ограничена и не может содержать более 400 элементов.

Винклеровское основание моделируется вертикальными упругими стержнями, верхние концы которых соединяются с узлами конечно-элементной сетки, а нижние – опираются на абсолютно жесткую опору. Упругое винклеровское основание характеризуется одним параметром – коэффициентом жесткости.

### 4.6.2 Установка и запуск программы

Для подготовки программы к работе достаточно поместить выполняемый файл программы на жесткий диск в отдельный каталог. Для запуска программы требуется щелкнуть указателем мышки по имени выполняемого файла. После этого на экран компьютера выводится меню и окно для ввода данных. При этом управление передается программе.

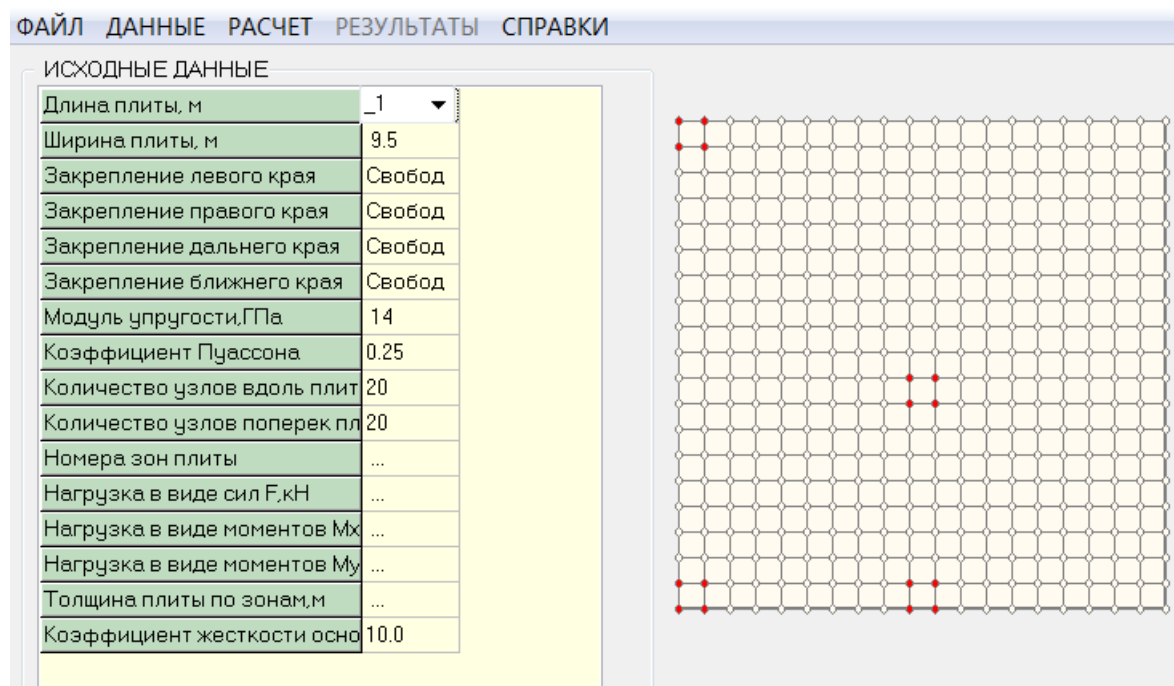


Рис. 48. – Интерфейс программы *Sturm*

### 4.6.3 Управление работой программы

Управление работой программы осуществляется с помощью меню, состоящего из списков команд, имеющих иерархическое строение. Программа снабжена диагностикой ошибок в исходных данных, а также контролем процесса работы, сопровождающегося активизацией или деактивизацией команд меню. Список команд и их назначение приведены в таблице

Таблица 7 – Меню программа *Sturm*

Команды	Назначение команды
<b>ФАЙЛ</b>	
Открыть	Считываются исходные данные из файла на жестком диске, подготовленного и сохраненного в предыдущих сеансах работы с программой.
Сохранить	Сохраняет исходные данные в файле на жестком диске. Предварительно программа требует проверки данных. Сохранение возможно, если программа не нашла ошибок в данных.
Закончить	Завершает работу и передает управление <i>Windows</i> .
<b>ДАННЫЕ</b>	
Проверить данные	Проверяет считанные из файла, введенные или откорректированные исходные данные. Если в исходных данных программа не обнаружила ошибок, то выводится сообщение – ОШИБКИ НЕ ОБНАРУЖЕНЫ. При этом активизируются команды для выполнения расчета плиты. Если программа обнаружила ошибку, то на экран выводится диагностическое сообщение о характере этой ошибки и выполнение расчета блокируется.
Показать схему	Команда открывается только после успешной проверки исходных данных. По этой команде рисуется конечно-элементная сетка с изображением узловых нагрузок.
<b>РАСЧЕТ</b>	
Выполнить	Выполняется расчет плиты с индикацией процесса выполнения. После выполнения расчета становится активным список команд – РЕЗУЛЬТАТЫ
<b>РЕЗУЛЬТАТЫ</b>	
<b>ТАБЛИЦЫ</b>	
Перемещения	В табличной форме выводятся перемещения и углы поворота узлов конечно-элементной сетки.
Внутренние силы	В табличной форме выводятся значения изгибающих и крутящих моментов в конечных элементах численной модели.
<b>ЭПЮРЫ</b>	
Прогибов $V$	Строится эпюра прогибов плиты по указанному сечению.
Моментов $M_x$	Строится эпюра изгибающих моментов $M_x$ по указанному сечению.
Моментов $M_y$	Строится эпюра изгибающих моментов $M_y$ по указанному сечению.
Моментов $M_{xy}$	Строится эпюра крутящих моментов $M_{xy}$ по указанному сечению.
Прогибов $V$	Строится карта изолиний прогибов плиты. Значение каждой изолинии задается пользователем.



ИЗОКАРТЫ	
Моментов $M_x$	Строится карта изолиний изгибающих моментов $M_x$ . Значение каждой изолинии задается пользователем.
Моментов $M_y$	Строится карта изолиний изгибающих моментов $M_y$ . Значение каждой изолинии задается пользователем.
Моментов $M_{xy}$	Строится карта изолиний крутящих моментов $M_{xy}$ . Значение каждой изолинии задается пользователем.
<b>СПРАВКИ</b>	
О подготовке данных	Изложены требования к исходным данным.
Об управлении	Дано пояснение об управлении работой программы.
О программе	Приведены сведения о создании программы.

#### 4.6.3.1 Ввод исходных данных

Если исходные данные заранее не введены и не сохранены на жестком диске, то выполняется их ввод в следующей последовательности.

- 1 Количество узлов конечно-элементной модели по длине плиты.
- 2 Количество узлов конечно-элементной модели по ширине плиты.
- 3 Выбирается способ закрепления краев пластинки – свободно, шарнирно или защемлено.
- 4 Модуль упругости материала плиты.
- 5 Коэффициент Пуассона материала плиты.
- 6 Количество узлов по длине плиты.
- 7 Количество узлов по ширине плиты.
- 8 Номера зон плиты – каждому конечному элементу присваивается номер зоны, к которому он принадлежит (рисунок 49).
- 9 Для каждого узла конечно-элементной сетки задается значение нагрузки в виде вертикальной сосредоточенной силы.
- 10 Для каждого узла конечно-элементной сетки задается значение нагрузки в виде сосредоточенного момента  $M_x$ .
- 11 Для каждого узла конечно-элементной сетки задается значение нагрузки в виде сосредоточенного момента  $M_y$ .
- 12 Задается толщина плиты в каждой помеченной зоне.
- 13 Задается значение коэффициента жесткости основания.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	137.5	137.5	0	0	0	0	0	0	0	0	137.5	137.5	0	0	0	0	0	0	0	0
2	137.5	137.5	0	0	0	0	0	0	0	0	137.5	137.5	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	137.5	137.5	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	137.5	137.5	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	137.5	137.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	137.5	137.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 49. Таблицы ввода номеров зон пластинки (слева) и нагрузки (справа)

#### 4.6.3.2 Проверка исходных данных

Для выполнения расчета плиты предварительно требуется выполнить проверку данных. Для этого следует обратиться к команде «Проверить данные» из списка «ДАННЫЕ». Программа осуществляет проверку исходных данных и в случае обнаружения ошибок выводит сообщение о характере ошибки. Требуемые для выполнения расчета команды меню остаются неактивными до тех пор, пока не будут внесены все исправления в исходных данных.

#### 4.6.3.3 Изображение конечно-элементной модели плиты

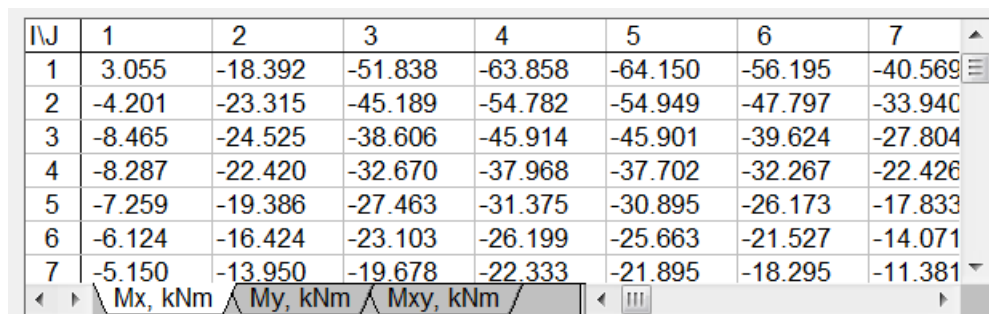
Для наглядности и визуальной проверки исходных данных воспользоваться командой «Показать схему». Программа изображает на дисплее конечно-элементную сетку модели плиты и отмечает узлы, где приложена нагрузка.

#### 4.6.3.4 Расчет плиты

Расчет плиты выполняется по команде «Выполнить» из списка «РАСЧЕТ». Программа выполняет расчет. Процесс выполнения сопровождается индикацией.

#### 4.6.3.5 Вывод результатов расчета плиты в цифровой форме

Для вывода в цифровой форме следует воспользоваться командами из списков «РЕЗУЛЬТАТЫ», «ПЕРЕМЕЩЕНИЯ» или «ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ». Программа выводит таблицу прогибов плиты в каждом узле конечно-элементной сетки или многостраничную таблицу внутренних сил в каждом конечном элементе. На первой, второй и третьей страницах таблицы, соответственно, выводятся изгибающие и крутящие моменты  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_{xy}$ .



И\J	1	2	3	4	5	6	7
1	3.055	-18.392	-51.838	-63.858	-64.150	-56.195	-40.569
2	-4.201	-23.315	-45.189	-54.782	-54.949	-47.797	-33.940
3	-8.465	-24.525	-38.606	-45.914	-45.901	-39.624	-27.804
4	-8.287	-22.420	-32.670	-37.968	-37.702	-32.267	-22.426
5	-7.259	-19.386	-27.463	-31.375	-30.895	-26.173	-17.833
6	-6.124	-16.424	-23.103	-26.199	-25.663	-21.527	-14.071
7	-5.150	-13.950	-19.678	-22.333	-21.895	-18.295	-11.381

Рисунок 50 – Таблицы вывода внутренних сил в плите

#### 4.6.3.6 Вывод результатов расчета плиты в графической форме

Для вывода эпюр воспользоваться списком команд «РЕЗУЛЬТАТЫ», «ЭПЮРЫ». Выбрать необходимую команду «Прогибов  $\frac{1}{2}$ », «Моментов  $M_x$ », «Моментов  $M_y$ » или «Моментов  $M_{xy}$ ». Затем следует указать номер ряда узлов в конечно-элементной схеме. По этой команде программа выводит на экран эпюру выбранной величины.

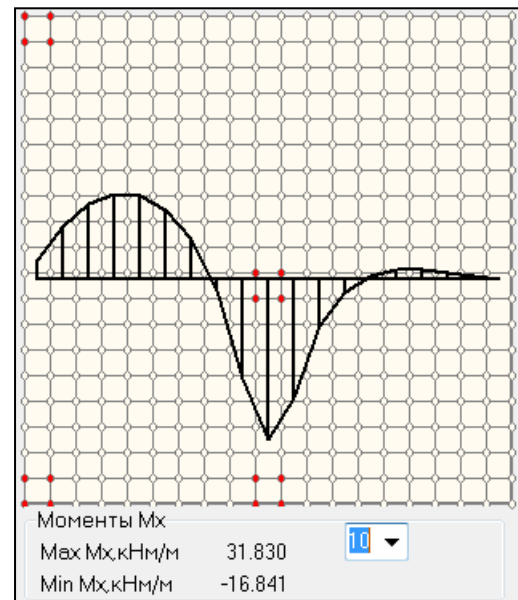
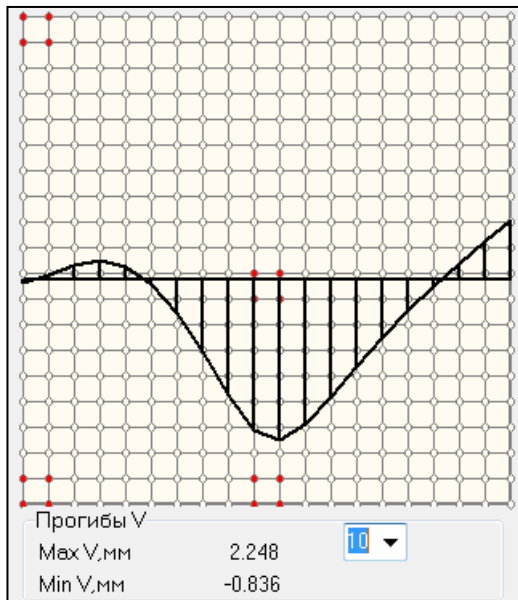


Рис. 51 – Эпюры прогибов  $V$  и изгибающих моментов  $M_x$

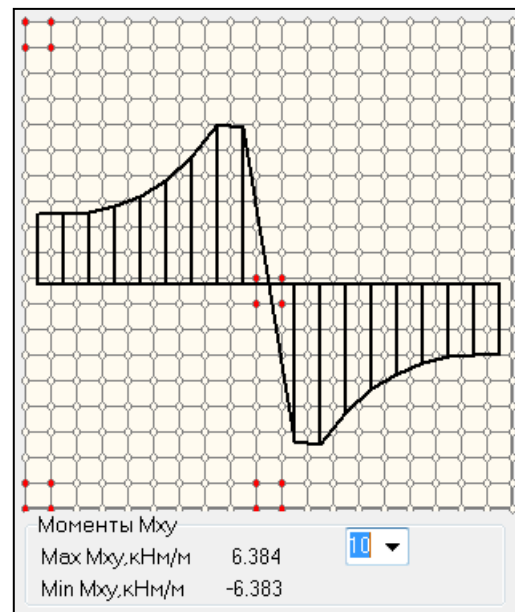
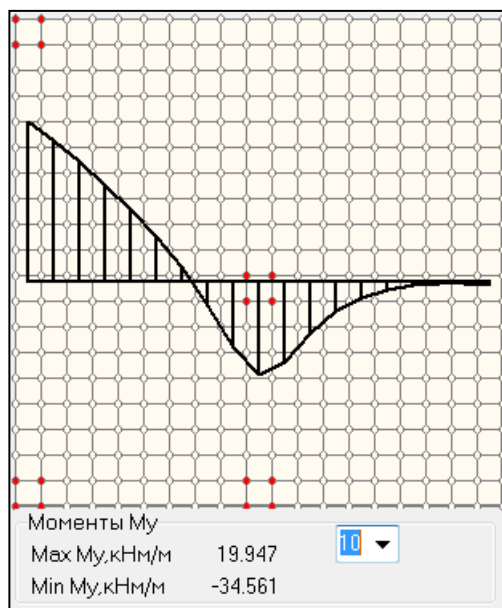


Рис. 52 – Эпюры изгибающих  $M_y$  и крутящих моментов  $M_{xy}$

Для вывода карты изолиний воспользоваться списком команд «РЕЗУЛЬТАТЫ», «ИЗОКАРТЫ». Затем следует выбрать одну из команд: «Прогибов  $V$ », «Моментов  $M_x$ », «Моментов  $M_y$ » или «Моментов  $M_{xy}$ ». Программа выведет максимальное и минимальное значения выбранной величины. Выбрать цвет изолинии и ее значение. После этого программа строит изолинию с указанным значением. Карта изолиний может быть откомментирована – подписаны значения на изолиниях и помещены на поле графического ввода пояснения.

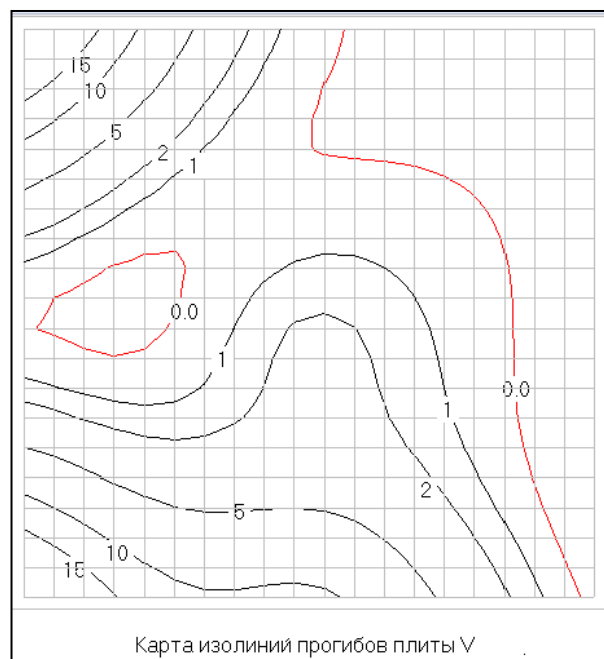
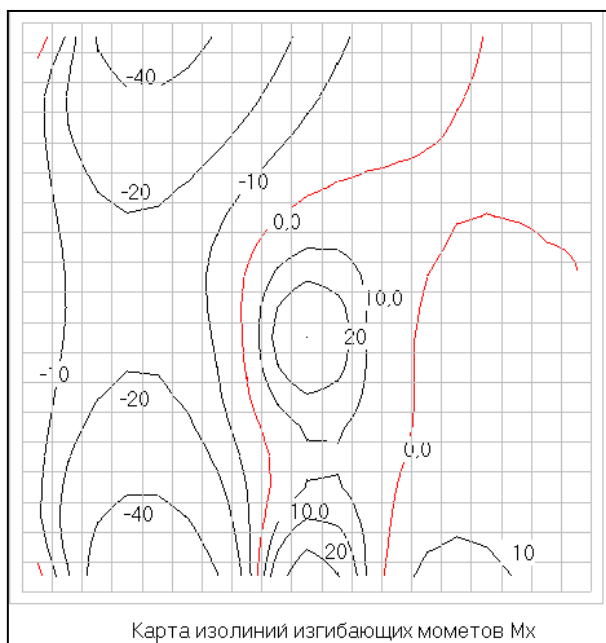


Рис. 53 – Карта изолиний прогибов  $V$  и изгибающих моментов  $M_x$

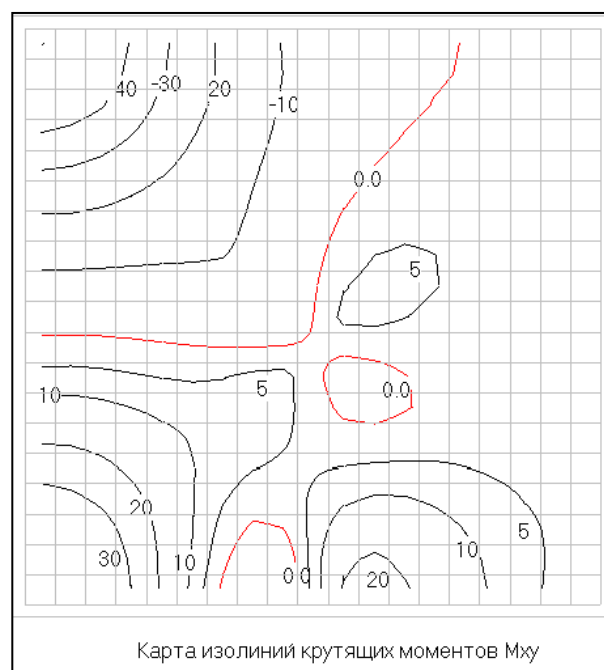
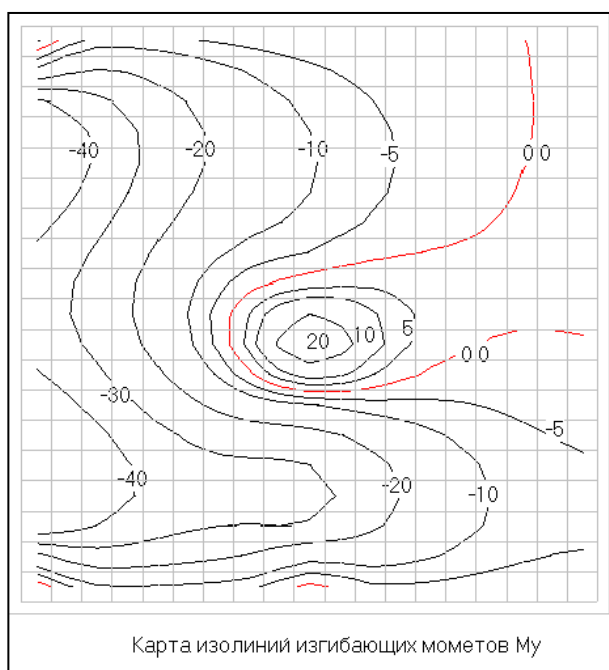


Рис. 54 – Карта изолиний изгибающих  $M_x$  и крутящих  $M_{xy}$  моментов

#### 4.6.3.7 Вывод справки

Для вывода справки воспользоваться списком команд «СПРАВКИ», который содержит три команды: «О подготовке данных», «Об управлении программой» и «О программе». Обращаясь к этим командам, можно получить краткую информацию о подготовке исходных данных и возможностях программы, о способах управления работой программы и о происхождении самой программы.

## 4.7 Описание и инструкция к программе TUP

### 4.7.1 Назначение программы

Компьютерная программа TUP составлена на алгоритмическом языке Delphi-7 (Pascal) и предназначена для проверки самостоятельной работы студентов по исследованию напряженного состояния в окрестности выбранной точки плиты. Интерфейс программы TUP приведен на рисунке. Программа отличается простотой ввода исходных данных и вывода результатов расчета.

### 4.7.2 Установка и запуск программы

Для подготовки программы к работе достаточно поместить выполняемый файл программы, файл со списком студентов и файл исходных данных на жесткий диск в отдельный каталог. Для запуска программы требуется щелкнуть указателем мышки по имени выполняемого файла. После этого на экран компьютера выводится меню и окно для ввода данных. При этом управление передается программе TUP.

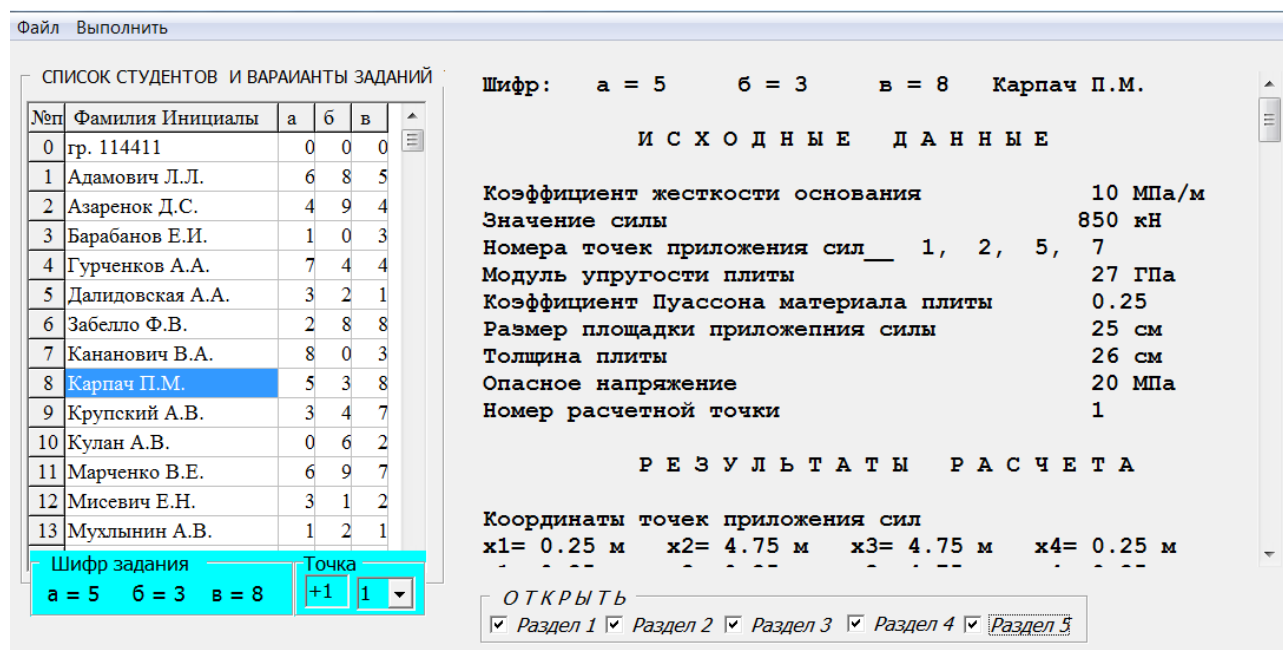


Рис. 55 – Интерфейс программы TUP

### 4.7.3 Управление работой программы

Управление работой программы осуществляется с помощью меню, состоящего из двух команд: «ФАЙЛ»–«Закончить» и «ВЫПОЛНИТЬ»–«Расчет».

### 4.7.4 Ввод исходных данных

Списки студентов и все исходные данные готовятся и вводятся заранее. Для каждого студента задается отдельный блок исходных данных, состоящий из набора значений для величин:

- номера узлов, к которым приложена нагрузка в виде вертикальных сосредоточенных сил;
- значение модуля упругости материала плиты;
- толщина плиты;
- значение сосредоточенной нагрузки;
- коэффициент жесткости основания;
- коэффициент Пуассона материала плиты;
- размер площадки приложения нагрузки;
- изгибающие и крутящий момент в расчетной точке.

#### 4.7.5 Расчет

Расчет выполняется по команде «Выполнить» из списка «РАСЧЕТ». Программа выполняет расчет. Вся работа разделена на пять разделов. Перед выполнением следует отметить те разделы работы, которые планируется выводить на экран.

#### 4.7.6 Вывод результатов расчета

Результаты расчета выводятся на экран компьютера в той последовательности, которая соблюдается студентами при оформлении отчета о самостоятельной работе. Последовательность вывода приведена на рисунках

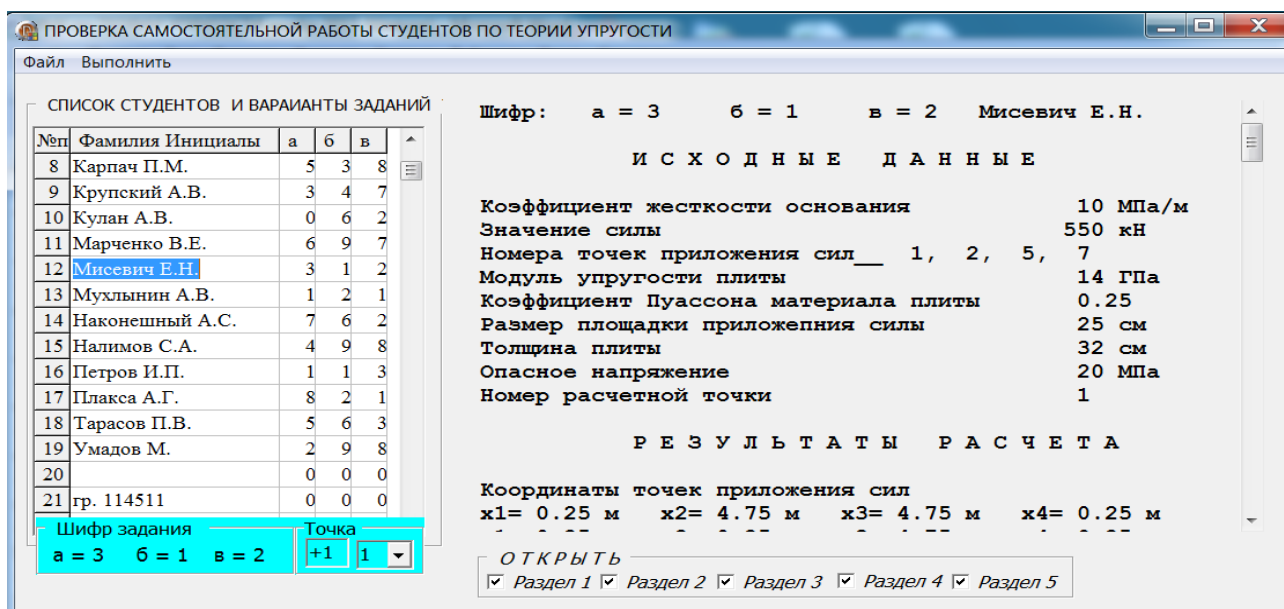


Рис. 56 – Вывод исходных данных TUP

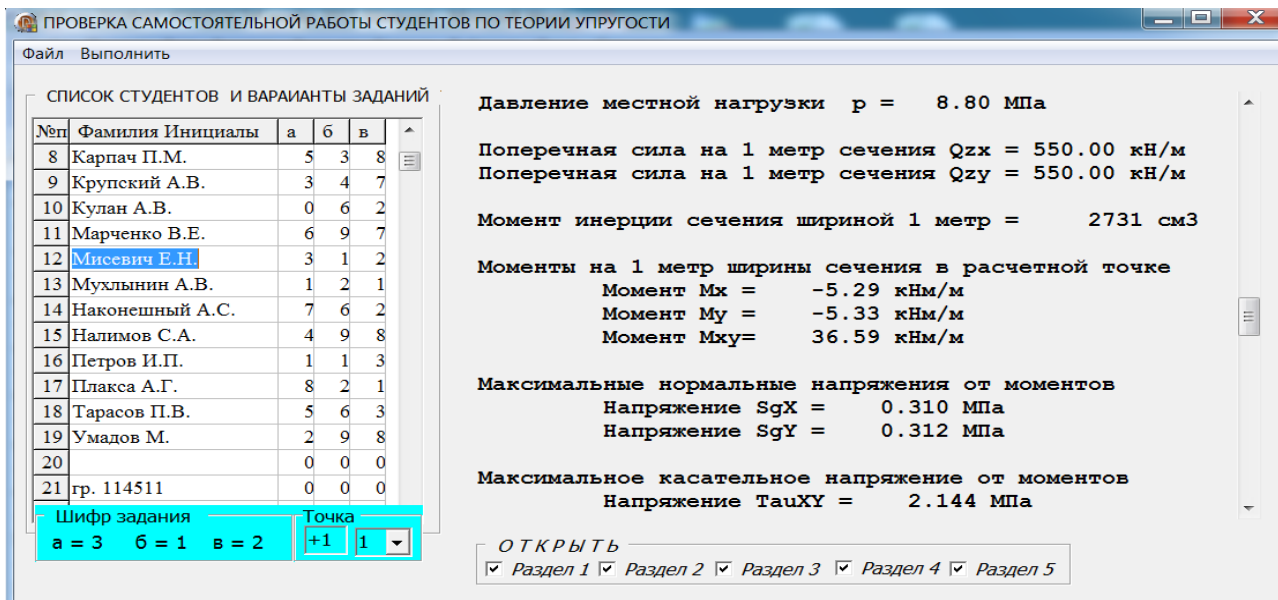


Рис. 57 – Вывод первого раздела результатов расчета по программе TUP

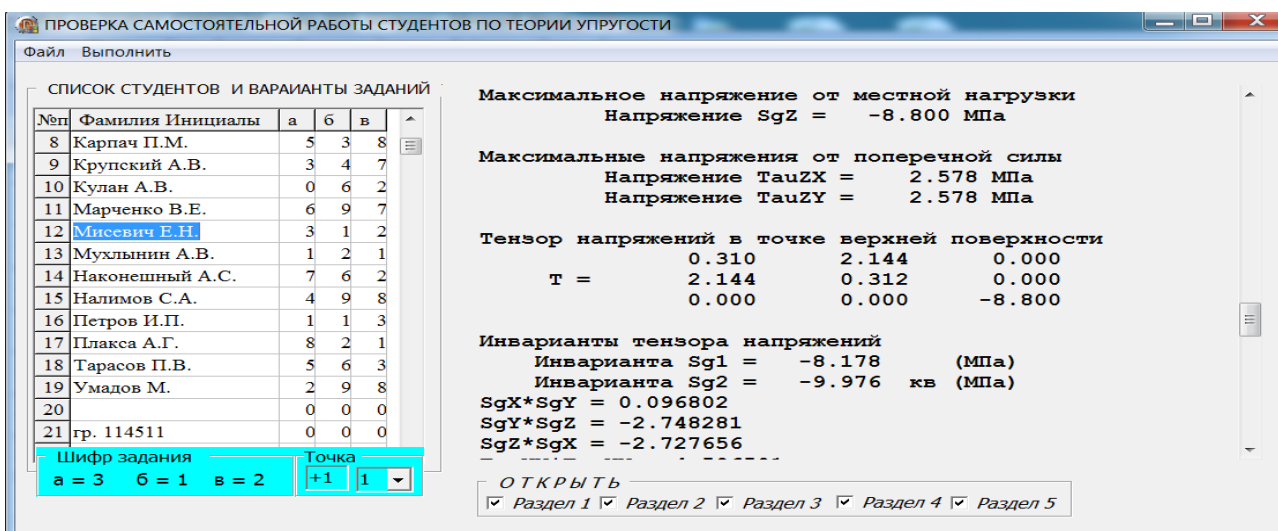


Рис. 58 – Вывод второго раздела результатов расчета по программе TUP

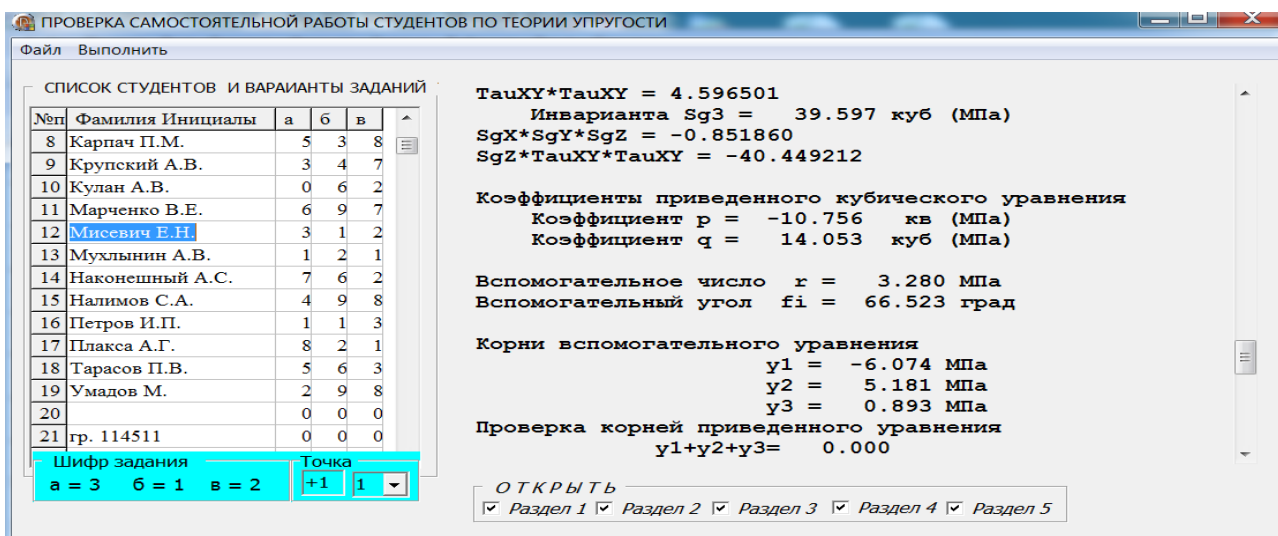


Рис. 59 – Вывод третьего раздела результатов расчета по программе TUP

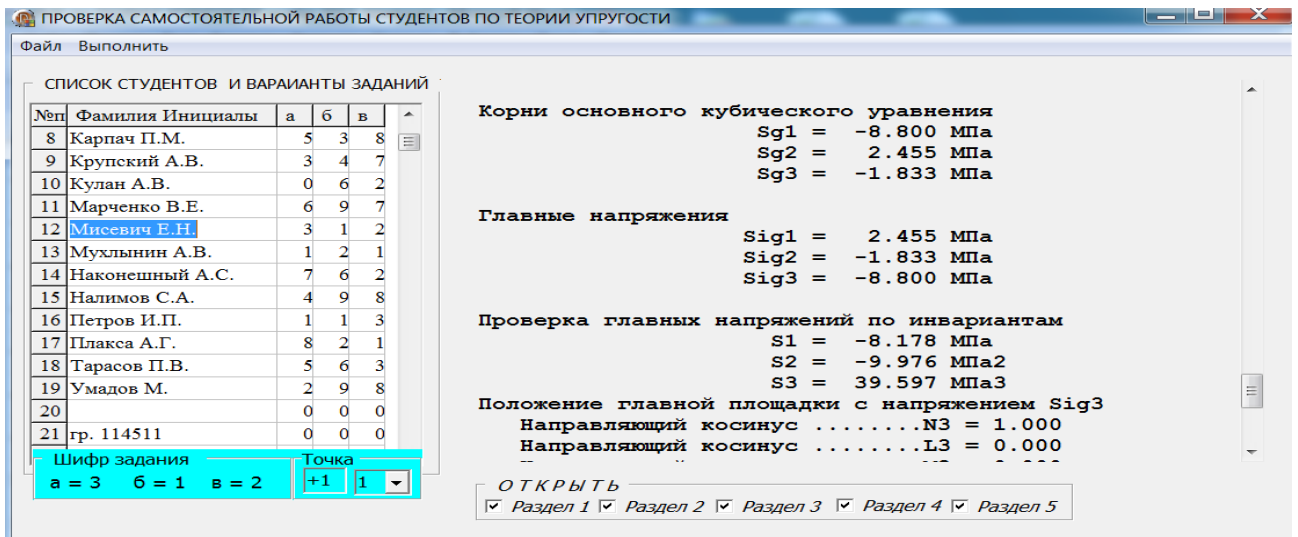


Рис. 60 – Вывод четвертого раздела результатов расчета по программе *TUP*

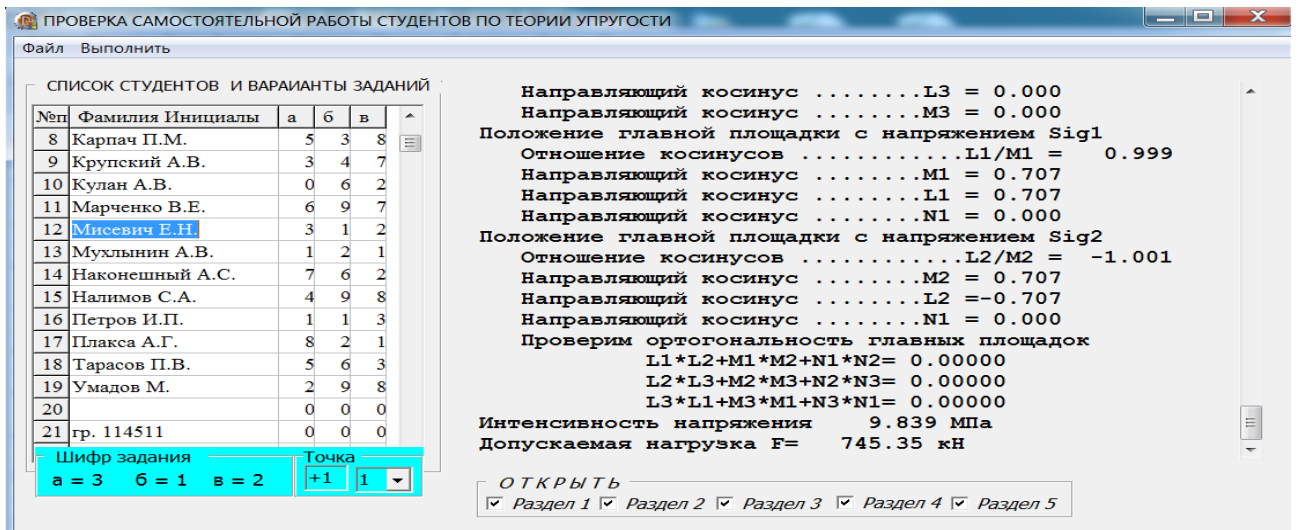


Рис. 61 – Вывод пятого раздела результатов расчета по программе *TestTU*