МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Инженерная экономика»

А. И. Гурко

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Пособие
для студентов и магистрантов, обучающихся по специальности
направления образования «Экономика и организация производства»

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области экономики и организации производства

Минск
БНТУ
2020

УДК 330.4(075.8)+519.86(075.8)
ББК 65в631я7
Г95

Р е ц е н з е н т ы:
заведующий лабораторией идентификации систем
Государственного научного учреждения «Объединенный
институт проблем информатики Национальной академии
наук Беларуси», д-р техн. наук, профессор *А. А. Дудкин*;
кафедра экономики учреждения образования «Белорусский
государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Гурко, А. И.
Г95 Экономико-математические методы и модели : пособие для студентов и магистрантов, обучающихся по специальности направления образования «Экономика и организация производства» / А. И. Гурко. – Минск : БНТУ, 2020. – 236 с.
ISBN 978-985-583-119-9.

В пособии рассматриваются вопросы построения основных экономико-математических моделей и типовые методы их исследования. На конкретных примерах рассмотрены методы решения задач линейного программирования, матричных игр, теории графов, систем массового обслуживания, управления запасами, прогнозирования спроса, распределения инвестиций. В конце каждой главы приведены вопросы для самоконтроля и задачи для самостоятельного решения.

УДК 330.4(075.8)+519.86(075.8)
ББК 65в631я7

ISBN 978-985-583-119-9

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью изучения экономико-математических методов и моделей является формирование научного понимания анализа экономических процессов, а также овладение навыками построения математических моделей этих процессов и математическими методами решения важнейших задач в экономической сфере.

Задачи курса «Экономико-математические методы и модели» заключаются в том, чтобы изучить и усвоить:

– современные математические методы и модели сложных экономических систем, применяемых для их исследования;

– построение моделей и использование математических методов и алгоритмов решения экономических задач;

– интерпретацию полученных количественных оценок и выбор эффективного решения на их основе.

В пособии рассматриваются конкретные модели на примере промышленных предприятий. Большое внимание при этом уделяется экономико-математическим методам анализа показателей выполнения заданий, а также динамике, структуре, взаимосвязи, сравнениям и оценке деятельности предприятий приборостроения, выявлению резервов производства и возможности их использования.

Материал пособия базируется на знаниях, полученных при изучении таких дисциплин как высшая математика (математическое программирование, математическая статистика, теория вероятностей), экономика предприятия, менеджмент, маркетинг, производственные технологии, прогнозирование и планирование экономики, финансы предприятий, статистика и другие. Методологической основой книги является высшая и прикладная математика. Без глубокого знания этих предметов нельзя моделировать конкретные экономические процессы или явления, составлять и решать на ЭВМ реальные экономико-математические задачи, производить глубокий анализ полученных решений и выбирать из них оптимальные.

В результате освоения материала настоящего пособия студент должен знать:

– основные принципы системного анализа применительно к моделированию экономических систем;

– содержание и характерные черты всех этапов экономико-математического моделирования;

– особенности моделирования задач экономических процессов и явлений, возможности математических методов для нахождения их оптимального решения, в том числе состав типовых программных продуктов реализации изучаемых методов средствами вычислительной техники.

Студент должен уметь:

– делать экономическую постановку задачи и формулировать на ее основе экономико-математическую модель для реальных задач в сфере экономики;

– формировать в терминах экономико-математического моделирования экономико-математические задачи основных производственно-экономических объектов, систем и процессов;

– самостоятельно вносить дополнения в типовые, базовые экономико-математические модели, составляющие специфику функционирования или особенности моделируемого объекта приборостроения;

– самостоятельно, на основе пакета прикладных программ, решать на персональном компьютере задачу, расшифровывать ее и определять последовательность ее реализации в конкретных условиях производства.

Также студент должен приобрести навыки:

– анализа и постановки экономических задач оптимального планирования и управления на основе количественной и качественной информации с использованием эконометрических и экономико-математических методов;

– применения методологических принципов построения, анализа и внедрения моделей оптимального планирования с использованием современных информационных технологий.

1. ВВЕДЕНИЕ В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

1.1. Экономико-математические методы и моделирование

Предмет экономико-математического моделирования – исследование количественных характеристик экономических объектов, процессов и явлений, изучение взаимосвязей и взаимозависимостей на основе их математически формализованного описания.

Основным понятием является понятие математической модели. В общем случае *модель* – это приблизительное описание реального объекта: карта, схема, эскиз, фотография, график, таблица и т. п.

Математическая модель – это система математических уравнений, неравенств, формул и различных математических выражений, описывающих реальный объект, составляющие его характеристики и взаимосвязи между ними.

Математическое моделирование – это процесс построения математической модели. Моделирование и построение математической модели экономического объекта позволяют свести экономический анализ производственных процессов к математическому анализу и принятию эффективных решений.

Содержанием экономико-математической модели является выраженная в математических соотношениях экономическая сущность задачи и поставленной цели.

Отметим, что в экономико-математической модели экономическая величина представлена математическим соотношением, но не всегда математическое соотношение является экономической величиной.

По содержанию различают *эконометрические* и *экономико-математические модели.* Различие между ними состоит в характере функциональных зависимостей, связывающих их величины.

Эконометрические модели связаны с показателями, сгруппированными различным образом. Они устанавливают корреляционные зависимости между показателями и определяющими их факторами в виде линейных или нелинейных функций.

Экономико-математическая модель включают в себя *систему ограничений*, состоящую из отдельных математических уравнений или неравенств, а также *целевую функцию*, связывающую между собой исследуемые величины модели.

В качестве цели исследования выбирается экономический показатель: прибыль, рентабельность, себестоимость, валовая продукция, запасы и т. д.

Критерий оптимальности – экономический показатель, выражающийся при помощи целевой функции через другие экономические показатели.

Одному критерию могут соответствовать несколько разных целевых функций.

Замечания.

1. Модели с одной и той же системой ограничений могут иметь различные критерии оптимальности (общее) и различные целевые функции (частное).

2. Смешивать понятия критерий оптимальности и целевая функция нельзя.

3. Критерии оптимальности могут быть натуральными или стоимостными.

4. Одни критерии максимизируются (число наборов конечных продуктов, валовая или условная продукция, прибыль, рентабельность и т. п.), другие минимизируются (затраты, сроки, расстояния и т. п.).

Решением экономико-математической модели или ***допустимым планом*** называется набор значений неизвестных, который удовлетворяет ее системе ограничений. Модель имеет множество решений или множество допустимых планов и среди них надо найти единственное, удовлетворяющее системе ограничений и целевой функции.

Оптимальный план – допустимый план, удовлетворяющий целевой функции.

Для поиска *оптимального решения* любой экономической задачи необходимо построить ее экономико-математическую модель, по структуре включающую в себя:

– систему ограничений;

– целевую функцию;

– критерий оптимальности;

– решение.

Замечания.

1. Если модель задачи *линейна*, то оптимальный план достигается в крайней точке области изменения переменных величин системы ограничений.

2. Если экономико-математическая модель *не линейна*, то оптимальных планов и оптимальных значений целевой функции может быть несколько. Определяют экстремальные планы и экстремальные значения целевой функции.

Основные этапы построения экономико-математической модели:

1. *Определение цели* решения задачи, т. е. чего хотят добиться, решая данную задачу.

2. *Определение параметров модели*, т. е. заранее известных фиксированных факторов, на значение которых исследователь не влияет.

3. *Формирование управляющих переменных*, значения которых являются решением задачи и при изменении которых можно достичь поставленной цели.

4. *Определение области допустимых решений*, т. е. ограничений, которым должны удовлетворять управляющие переменные.

5. *Выявление неизвестных факторов*, т. е. величин, которые могут изменяться случайным или неопределенным образом.

6. *Выражение цели через управляющие переменные, параметры и неизвестные факторы*, т. е. формирование целевой функции, называемой также критерием эффективности или критерием оптимальности задачи.

Методика построения экономико-математической модели состоит в том, чтобы экономическую сущность задачи представить математически, используя различные символы:

– переменные и постоянные величины;

– индексы и другие обозначения.

В первую очередь определяют систему переменных величин (это может быть объем производства продуктов на предприятии, количество перевозимого груза от поставщиков к потребителям и т. п.). x_{isj} может означать объем производства продукции i-вида на s-оборудовании j-м технологическим способом.

Итак, обозначим:

– переменные величины – $x, y, z, \tilde{x}, \hat{x}, x', x_1, x_{ij}, x_{ijk}, ...$;

– индексы – $i, j, s, l, ...$;

– количество переменных – $n, k, m, ...$;

– постоянные величины – $a, b, c, d, ...$;

– целевая функция – $f, F, Z, ...$

Математически ***общую модель задачи оптимизации*** можно представить в следующем виде: найти значения *n* переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, которые удовлетворяют системе ограничений:

$$f_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\{\le, \ge, =\} b_i, \left(i = 1, 2, ..., m\right)$$

и максимизируют (или минимизируют) целевую функцию:

$$Z = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right).$$

Дополнительно, по экономическому смыслу должно быть задано условие неотрицательности переменных:

$$x_j \ge 0, \left(j = 1, 2, ..., n\right).$$

В случае необходимости задается условие целочисленности переменных:

$$x_j = 0, 1, 2, ...$$

Для моделирования и решения экономико-математических задач необходим определенный объем информации о ресурсах, процессах производства, распределения, потребления и т. д.

Разнообразны *формы* носителей такой информации (экономические данные):

– планы, нормы, нормативы;

– отчеты, наряды, сведения и т. п.

Экономическая информация подразделяется на *первичную*, носителями которой служат технологические, нормативные и другие первичные документы, и *вторичную*, носителями которой являются результаты обработки первичных документов.

Используется вся возможная информация. Отсюда важное значение имеют сбор и обработка информации для принятия решений.

Требования к информации:

1. *Достоверная,* правильно отражает реальную ситуацию. Обработка проводится научными методами с использованием современных средств. Она может изменяться по форме, но не по содержанию.

2. *Неизбыточна*. Должна содержать только необходимые данные.

3. *Оперативная и своевременная*.

4. *Максимально возможно полная*. Частичная, не охватывающая всех связей информация мало эффективна.

При подготовке информации широко применяются экспертные методы и оценки.

1.2. Классификация экономико-математических моделей

Классификация экономико-математических моделей носит условный характер в зависимости от выбранных оснований.

По *назначению* экономико-математические модели подразделяются на:

– ***статистические*** (эконометрические), с помощью которых изучаются корреляционно-регрессионные зависимости экономических процессов от одного или нескольких переменных факторов. Такие модели широко используются для построения производственных функций, а также при анализе экономических систем;

– ***балансовые***, представляющие систему балансов производства и распределения продукции. Модели служат для установления пропорций и взаимосвязей при планировании различных отраслей народного хозяйства и записываются в форме шахматных квадратных матриц.

– ***оптимизационные***, которые служат для отыскания наилучших, с точки зрения выбранного критерия, решений конкретной экономической задачи.

По *применению* различают экономико-математические модели:

– анализа экономических систем;

– экономического прогнозирования;

– выработки управленческих решений.

Различают *типы* математических моделей:

– дискретные и непрерывные;

– статические и динамические;

– линейные и нелинейные;

– детерминированные и стохастические;

– оптимизационные.

Типичные *классы* экономико-математических моделей и задач:

– линейного и не линейного программирования;

– сетевого планирования и управления;

– балансовые;
– игровые;
– имитационного моделирования;
– модели исследования операций;
– модели массового обслуживания и т. д.

1.3. Типовые задачи экономико-математического моделирования

1.3.1. Задача распределения ресурсов

Данная задача возникает, когда набор операций (работ) надо выполнять в условиях ограниченности ресурсов. Типичными являются три случая.

1. Заданы и работы и ресурсы.

Требуется распределить ресурсы между работами таким образом, чтобы было max прибыли или min затрат.

Пример.

Известны производственные задания и производственные мощности предприятия. Ограничения по мощности не позволяют для каждого изделия выбрать наилучшую технологию. Какие способы производства надо выбрать для каждого вида изделий, чтобы выполнить задание с наименьшими затратами?

2. Заданы только наличные ресурсы.

Определить какой состав работ можно выполнить с учетом этих ресурсов, чтобы обеспечить максимум некоторого критерия эффективности.

Пример.

Имеется предприятие с определенными производственными мощностями. Требуется определить, какую продукцию следует производить, чтоб получить максимальный доход.

3. Заданы только работы.

Определить какие ресурсы необходимы для того, чтоб минимизировать суммарные издержки производства.

1.3.2. Задачи управления запасами

Под *управлением запасами* понимается совокупность мероприятий по обеспечению их оптимального уровня на предприятии:

– разрабатываются прогрессивные нормы запасов;

– устанавливается их рациональная структура;

– создается эффективная система оперативного контроля за состоянием запасов.

Содержание запасов на предприятии связано с издержками:

– *организационные издержки* – расходы по оформлению и доставке товаров, необходимых для каждого цикла складирования;

– *издержки содержания запасов* – расходы по хранению (рента складирования, амортизация в процессе складирования, порча, устаревание, уменьшение количества);

– *издержки, связанные с дефицитом* – потери дохода в расчете на единицу дефицитных материалов, замена на более дорогие, штрафы за нарушение сроков поставки, переналадка оборудования.

С увеличением запасов увеличиваются расходы на их хранение, но уменьшаются потери из-за их нехватки. Требуется определить такой уровень запасов, который удовлетворяет критерию: минимум затрат по хранению запасов, минимум потерь из-за их дефицита.

Таким образом, *управление запасами* заключается в правильном размещении заказов и установлении объемов поставок.

Каждый вариант стратегии управления запасами связан с определенными затратами. Стратегию, при которой эти затраты минимальны, называют оптимальной, а ее определение является предметом теории управления запасами.

Многообразие реальных ситуаций является причиной большого количества различных систем управления запасами.

1.3.3. Задачи систем массового обслуживания

При решении задач систем массового обслуживания рассматриваются вопросы образования и функционирования очередей. Очереди возникают из-за того, что поток требований или клиентов на обслуживание не управляем и случаен. Требуется определить, какое количество пунктов обслуживания необходимо, чтобы минимизировать суммарные ожидаемые потери от несвоевременного обслуживания и простоя оборудования.

Области применения теории массового обслуживания весьма разнообразны.

Сфера услуг:

– обслуживание клиентов в банке;

– регистрация пассажиров в аэропорту;

– предоставление мест в гостинице.

Менеджмент и администрирование:

– рассмотрение предложений о купле-продаже товаров и услуг и принятие решений;

– организация производственных, обеспечивающих и управленческих процессов.

Логистика:

– организация складского хозяйства.

Маркетинг:

– планирование мощностей каналов сбыта.

Информационные услуги:

– обеспечение доступа клиентов к сайту фирмы.

1.3.4. Сетевые задачи

Теория графов предназначена для решения задач о геометрических конфигурациях, состоящих из точек и линий. В таких задачах форма линий, соединяющих точки, несущественная и может быть отрезком или дугой. Важно только то, что некоторая линия соединяет две точки из некоторого множества. Модели в виде графов оказываются удобным для описания многих физических, технических, экономических, биологических, социальных и других систем.

Приведем примеры применения теории графов.

– *транспортные задачи,* где вершинами графа являются населенные пункты, а ребрами – дороги (автомобильные, железные) или другие транспортные маршруты;

– *сети снабжения* (энергоснабжения, газоснабжения, снабжения товарами и т. д.), в которых вершинами являются пункты производства и потребления, а ребрами – возможные маршруты перемещения (маршруты доставки товаров, линии электропередач, газопроводы, дороги и т. д.). Класс задач оптимизации потоков грузов, размещения пунктов производства и потребления и т. д. иногда называют *задачами обеспечения* или *задачами о размещении*. Их подклассом являются *задачи о грузоперевозках*.

– *технологические задачи,* в которых вершины графа отражают производственные элементы (заводы, цеха, станки и т. д.), а дуги – потоки сырья, материалов и продукции между ними. Решение задачи заключается в определении оптимальной загрузки производственных элементов и обеспечивающих эту загрузку потоков;

– *обменные схемы,* являющиеся моделями таких операций как бартер, взаимозачеты и т. д. Вершины графа при этом описывают участников обменной схемы (цепочки), а дуги – потоки материальных и финансовых ресурсов между ними. Задача заключается в определении оптимальной последовательности обменов, согласованной с интересами участников и существующими ограничениями.

– *управление проектами.* С точки зрения теории графов проект – совокупность операций и зависимостей между ними (*сетевой график*);

– *календарно-сетевое планирование и управление* – это совокупность моделей и методов, использующих язык и результаты теории графов, ориентированных на управление проектами. Решаются задачи определения последовательности выполнения операций и распределения ресурсов между ними, оптимальных с точки зрения тех или иных критериев времени выполнения проекта, затрат, риска и др.;

– *модели коллективов и групп,* используемые в социологии, основываются на представлении людей или их групп в виде вершин, а отношений между ними – в виде ребер или дуг (например, отношений знакомства, доверия, симпатии и т. д.). В рамках подобного описания решаются задачи исследования структуры социальных групп, их сравнения, определения агрегированных показателей, отражающих степень напряженности, согласованности взаимодействия и др.;

– *модели организационных структур,* в которых вершинами являются элементы организационной системы, а ребрами или дугами – связи между ними (информационные, управляющие, технологические и др.).

1.3.5. Задачи теории игр

В экономике это задачи о выборе управленческих решений в условиях экономической неопределенности и риска. Такие задачи возникают в маркетинге, менеджменте, проведении финансово-банковских операций, выполнении инвестиций в проекты и т. д.

В задачах теории игр неопределенность может носить различный характер:

– осознанные действия противоборствующей стороны (конкурентов);

– ситуации риска для оценки результатов принятых решений;

– вероятность появления различных условий, влияющих на принятие решений (курсы валют, инфляция, постановления правительства и т. п.);

– известны последствия принимаемых решений, но неизвестны вероятности различных состояний внешней среды. Решение принимается в условиях полной неопределенности;

– цель решаемой задачи не достаточно точно определена, показатель эффективности не отражает полную картину.

1.3.6. Комбинированные задачи

Комбинированные задачи могут включать в себя несколько типовых моделей задач одновременно.

Например, требуется распределить производственные заказы по видам оборудования, после того, как определен оптимальный план производства (задача распределения).

1.4. Общая постановка задачи оптимизации

Оптимизационная задача – это математическая задача, которая состоит в нахождении экстремального (минимального или максимального) значения целевой функции, когда значения переменных принадлежат некоторой области допустимых значений.

Для того чтобы *решить* задачу оптимизации, достаточно найти ее оптимальное решение, т. е. указать $X_0 \in W$ такое, что $f(X_0) \geq f(X)$ при любом $X \in W$ или для случая минимизации $f(X_0) \leq f(X)$ при любом $X \in W$.

Оптимизационная задача является неразрешимой, если она не имеет оптимального решения. В частности, задача максимизации будет неразрешима, если целевая функция $f(X)$ не ограничена сверху на допустимом множестве W.

Методы решения оптимизационных задач зависят:

– от вида целевой функции $f(X)$;

– от строения допустимого множества W.

Если целевая функция в задаче является функцией n-переменных, то методы решения называют ***методами математического программирования***.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Для чего предназначено экономико-математическое моделирование?
2. Какова структура экономико-математической модели оптимального планирования?
3. Определите основные этапы построения экономико-математической модели.
4. Приведите математическую формулировку общей модели задачи оптимизации.
5. Назовите виды и источники информации, используемой при моделировании экономических процессов. Общие требования к информации.
6. Классифицируйте экономико-математические модели.
7. Сформулируйте в общем виде типовые задачи экономико-математического моделирования.
8. Что является решением задачи оптимизации?

2. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. Постановка задачи линейного программирования

Математическое программирование изучает задачи поиска экстремума (минимума или максимума) функции нескольких переменных при наличии ограничений на эти переменные.

Сущность экстремальных задач состоит в том, чтобы из множества допустимых наборов значений выбрать оптимальный с определенной точки зрения.

Математическое программирование называется ***линейным,*** если функция нескольких переменных и все ограничения являются линейными относительно этих переменных.

Математическая модель задачи линейного программирования (ЗЛП) имеет следующие составные части:

1. *Искомый план ЗЛП* – набор значений совокупности переменных:

$$x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right). \tag{2.1}$$

2. *Целевая функция*

$$Q\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = Q\left(x\right) \to \text{extr} \tag{2.2}$$

позволяет выбирать оптимальный, т. е. наилучший план из множества возможных планов ЗЛП. В экономике целевая функция может представлять собой прибыль, издержки производства, объем реализации и т. п.

3. *Система ограничений на план ЗЛП*, представленная в виде уравнений или неравенств. В экономике эти ограничения следуют из имеющихся ресурсов, возможностей оборудования, персонала и т. п.

4. Система ограничений по смыслу дополняется *требованием неотрицательности* значения всех переменных.

Системы ограничений образуют *область допустимых решений* (планов) ЗЛП. Допустимый план $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$, дающий целевой функции экстремальное значение, называется ***оптимальным*** планом и является решением ЗЛП.

2.2. Формы представления задачи линейного программирования

Стандартной формой ЗЛП называют:

$$Q = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \max \qquad (2.3)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ ...;\ x_n \ge 0. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Если в равенстве (2.3) нужно искать не максимум, а минимум целевой функции $Q(x)$, то для записи ЗЛП в стандартной форме, достаточно это равенство умножить на (–1) и искать $\max(-Q(x))$.

Действительно, план ЗЛП, придающий функции $(-Q(x)) \to \max$, дает $(Q(x)) \to \min$.

Если какие либо неравенства в системе ограничений (2.4) имеют знак ≥, то их также можно умножить на (–1), чтобы получить знак $\le$.

В ***свернутом виде*** ЗЛП имеет вид:

$$Q = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \qquad (2.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ m; \qquad (2.6)$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2,\ ...,\ n.$$

Если система ограничений представляет собой систему уравнений, можно использовать методы решения систем линейных алгебраических уравнений из линейной алгебры.

ЗЛП в ***канонической форме*** имеет вид:

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max; \tag{2.7}$$

при ограничениях -

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ ...;\ x_n \geq 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Рассмотрим ***матричную форму*** представления ЗЛП в каноническом виде:

– матрица коэффициентов системы ограничений

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \tag{2.9}$$

– матрица-строка коэффициентов целевой функции

$$C = (c_1, c_2, ..., c_n); \tag{2.10}$$

– матрица-столбец свободных членов

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \tag{2.11}$$

– матрица-столбец неизвестных

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (2.12)$$

Тогда каноническую форму записи ЗЛП можно представить в следующем матричном виде, эквивалентном первоначальному:

$$Z = C \cdot X \to \max; \qquad (2.13)$$

$$A \cdot X = B; \qquad (2.14)$$

$$X \geq 0,$$

где 0 – нулевая матрица-столбец той же размерности, что и X.

Чтобы перейти от стандартной формы ЗЛП к канонической, по количеству неравенств m вводят m дополнительных неотрицательных переменных $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$.

Действительно, поскольку левые части неравенств из системы ограничений (2.4) не больше правых, то добавление к левой части неравенства неотрицательной переменной позволяет перевести неравенство в уравнение. Количество вводимых дополнительных переменных должно соответствовать количеству неравенств в системе ограничений.

$$Q = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + 0 \cdot x_{n+1} + \ldots + 0 \cdot x_{n+m} \to \max \qquad (2.15)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ \ldots;\ x_n \geq 0;\ x_{n+1} \geq 0;\ \ldots;\ x_{n+m} \geq 0 \end{cases} \qquad (2.16)$$

или в свернутой форме с использованием символов суммирования:

$$Q = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} 0 \cdot x_{n+i} \to \max; \qquad (2.17)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = 1, ..., m; \qquad (2.18)$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, ..., n + m.$$

Задача 2.2.1.

Привести задачу линейного программирования к канонической форме:

$$L = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 \leq 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq -1 \\ 2x_1 - x_2 \leq -3 \\ x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Решение.

Введем в каждое неравенство системы ограничений выравнивающие переменные x_4, x_5, x_6.

Запишем систему в виде равенств. В первое и третье уравнения x_4, x_6 вводятся в левую часть со знаком «+», а во второе уравнение вводится x_5 со знаком «–».

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_6 = -3 \\ x_1 \leq 0,\ x_j \geq 0,\ j = 2, 3, ..., 6. \end{cases}$$

Свободные члены в канонической форме должны быть положительными, для этого два последних уравнения умножим на (–1):

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ -2x_1 + x_2 - x_6 = 3 \\ x_1 \leq 0, x_j \geq 0, j = 2, 3, ..., 6. \end{cases}$$

В канонической форме записи задач линейного программирования все переменные, входящие в систему ограничений, должны быть неотрицательными.

Допустим, что $x_1 = x_1' - x_7$, где $x_1' \geq 0, x_7 \geq 0$.

Подставляя данное выражение в систему ограничений и целевую функцию и записывая переменные в порядке возрастания индекса, получим задачу линейного программирования, представленную в канонической форме:

$$\begin{cases} L = -2x_1' - x_2 + x_3 + 2x_7 \to \max \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ -x_1' - x_2 + x_3 + x_5 + x_7 = 1 \\ -2x_1' + x_2 - x_6 + 2x_7 = 3 \\ x_1' \geq 0,\ x_j \geq 0,\ j = 2, 3, ..., 7. \end{cases}$$

2.3. Линейные модели экономических и производственных процессов

2.3.1. Задача планирования производства

Постановка задачи.

1. Пусть предприятие может производить n различных изделий (продуктов). Пронумеруем эти изделия $j = 1, 2, ..., n$.

Обозначим x_j – количество выпускаемых j-изделий в плановую единицу времени. Тогда план производства можно задать вектором количества изделий, выпускаемых предприятием в планируемую единицу времени $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$.

Ясно, что $\forall x_j \geq 0,\ j = 1, ..., n$.

2. Пусть для выпуска этих изделий необходимы m-видов ресурсов (сырье, электроэнергия, рабочая сила и т. п.).

Пронумеруем эти ресурсы $i = 1, 2, ..., m$.

Обозначим b_i – предельное количество i-ресурса, находящегося в распоряжении предприятия.

3. Пусть a_{ij} – количество i-ресурса, расходуемое на производство j-изделия.

4. Прибыль от продажи единицы j-изделия обозначим c_j.

Принятые обозначения для наглядности сведем в табл. 2.1.

Таблица 2.1.

Таблица представления данных задачи
планирования производства

<table>
<tr><td rowspan="3">Номер ресурса</td><td>Номер изделия</td><td>1</td><td>2</td><td>…</td><td>n</td></tr>
<tr><td>Количество изделий x_j</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>…</td><td>x_n</td></tr>
<tr><td>Запас ресурса b_i</td><td colspan="4">Количество ресурса
на изготовление изделия – a_{ij}</td></tr>
<tr><td>1</td><td>b_1</td><td>a_{11}</td><td>a_{12}</td><td>…</td><td>a_{1n}</td></tr>
<tr><td>2</td><td>b_2</td><td>a_{21}</td><td>a_{22}</td><td>…</td><td>a_{2n}</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>m</td><td>b_m</td><td>a_{m1}</td><td>a_{m2}</td><td>…</td><td>a_{mn}</td></tr>
</table>

Составление экономико-математической модели.

1. Затраты ресурса i-вида при выполнении плана производства представим в виде:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n.$$

Это не должно превышать предельное количество этого ресурса b_i.

2. Прибыль предприятия при выполнении плана $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$.

3. Основная задача планирования производства – выбор плана $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, обеспечивающего при имеющихся ресурсах получение максимальной прибыли.

Математически это выглядит так:

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max,$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ ...;\ x_n \ge 0. \end{cases}$$

Таким образом, задача планирования производства сводится к задаче линейного программирования в ее стандартной форме (2.3–2.4).

2.3.2. Использование мощностей оборудования

Постановка задачи.

1. Предприятие имеет m моделей машин различных мощностей. Задан план по времени работы машин и номенклатуре выпускаемой продукции.

Пусть T – время работы каждой машины, а также пусть продукции j вида должно быть выпущено не менее N_j-единиц.

2. Известны также b_{ij}-производительность каждой i-машины по выпуску j-вида продукции и стоимость единицы времени, затрачиваемого i-машиной на выпуск j-вида продукции c_{ij}.

3. Необходимо составить такой план работы оборудования, чтобы обеспечить минимальные затраты на производство.

Другими словами, задача для предприятия состоит в следующем: требуется определить время работы i-машины по выпуску j-вида продукции x_{ij}, обеспечивающее минимальные затраты на производство при соблюдении ограничений:

– по общему времени работы машин T;

– заданному количеству продукции N_{ij}.

Составление экономико-математической модели.

По условию задачи машины работают заданное время *T*, поэтому данное ограничение можно представить в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = T_i,\ i = 1,\ ...,\ m. \tag{2.19}$$

Ограничение по заданному количеству продукции выглядит следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_{ij} \ge N_j,\ j = 1,\ ...,\ n. \tag{2.20}$$

Задача решается на минимум затрат на производство:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min. \tag{2.21}$$

Необходимо также учесть неотрицательность переменных $x_{ij} \ge 0$.

Задача поставлена так, чтобы израсходовать все отведенное время работы машины, т. е. обеспечить полную загрузку машины. При этом количество выпускаемой продукции каждого вида должно быть по крайней мере не менее N_j.

Однако в некоторых случаях не допускается превышение плана по номенклатуре, тогда ограничения математической модели изменяются следующим образом:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min; \tag{2.22}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le T_i, i = 1, ..., m; \tag{2.23}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_{ij} = N_j,\ j = 1,\ ...,\ n; \tag{2.24}$$

$$x_{ij} \ge 0.$$

2.3.3. Моделирование процессов перевозок и назначения

Речь идет о моделировании процесса перевозки продукции с m-пунктов производства в n-пунктов потребления так, чтобы был выполнен баланс производства и потребления и затрачены минимальные средства на транспортировку.

Обозначим:

a_i – объем запасов i-продукта на складах, $a_i \geq 0$;

b_j – объем потребления j-объекта, $b_j \geq 0$;

x_{ij} – количество продукции, перевозимое с i-склада j-потребителю;

c_{ij} – стоимость перевозки единицы груза i-склада j-потребителю.

Математически этот процесс может быть представлен следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min; \tag{2.25}$$

$$\sum x_{ij} = a_i,\ i = 1, ..., m; \tag{2.26}$$

$$\sum x_{ij} = b_j,\ j = 1, ..., n; \tag{2.27}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Замечания.

1. Задача является сбалансированной если:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{2.28}$$

2. Если первый пункт не выполняется, причем объем потребления больше объема запасов, то:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j,\ j = 1, ..., n. \tag{2.29}$$

3. Если предложение превосходит потребление, то:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i,\ i = 1, ..., m. \tag{2.30}$$

4. Возможно дополнительное требование на пропускную возможность коммуникаций:

$$x_{ij} \le d_{ij},\ i = 1,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ \ldots,\ n, \tag{2.31}$$

где d_{ij} – пропускная способность пути от i-склада j-потребителю.

Простой модификацией данной модели является ***модель процесса назначения.***

Речь идет о назначении m различных специалистов на n-мест работы при условии, что каждую работу должен выполнять лишь один специалист, и каждый специалист должен выполнять лишь одну работу.

Приоритетная возможность i-специалиста выполнять j-работу оценивается коэффициентом c_{ij} матрицы C.

При моделировании таких процессов вводится булева переменная: $x_{ij} = 0 \vee 1$.

0 – если специалист не назначен на j-работу;

1 – если специалист назначен на j-работу.

Ограничения записываются в следующем виде:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\ j = 1,\ \ldots,\ n \tag{2.32}$$

или, если $m > n$

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1,\ i = 1,\ \ldots,\ m. \tag{2.33}$$

Целевая функция:

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min. \tag{2.34}$$

2.3.4. Модели задач развития и размещения

Заключаются в одновременном вычислении объемов выпуска изделий на пунктах производства и вопроса прикрепления пунктов производства к пунктам потребления.

Обозначим:

c_j – затраты производства единицы продукции у *j*-производителя;

x_j – объем производства *j*-производителя;

$\underline{D}_j$, $\overline{D}_j$ – верхняя и нижняя границы для выпуска продукции;

$\hat{c}_{ij}$ – затраты на транспортировку единицы продукции от *j*-производителя к *i*-потребителю;

$\hat{x}_{ij}$ – количество продукции, перевозимой от *j*-производителя к *i*-потребителю;

a_i – потребности *i*-заказчика.

Тогда модель имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_i + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_{ij} \hat{x}_{ij} \to \min; \tag{2.35}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \hat{x}_{ij} = x_j, \ j = 1, ..., n \\ \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{ij} = a_i, \ i = 1, ..., m \\ \underline{D}_j \le x_j \le \overline{D}_j, \ j = 1, ..., n \\ x_{ij} \ge 0. \end{cases} \tag{2.36}$$

2.3.5. Модели распределительных процессов

Это задачи оптимального распределения взаимозаменяемых ресурсов.

Введем обозначения:

i – номер одного из взаимозаменяемых ресурсов;

p – общее число взаимозаменяемых ресурсов;

a_i – общее количество *i*-ресурса;

k – номер потребителя;

q – общее количество всех потребителей;

b_k – количество единиц потребности *k*-потребителя;

c_{ik} – оценка использования единицы *i*-ресурса на удовлетворение *k*-потребителя;

λ_{ik} – количество единиц потребности k-потребителя, которые удовлетворяются единицей i-ресурса;

x_{ik} – количество единиц i-ресурса, используемых для удовлетворения k-потребителя.

Модель имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} c_{ik} x_{ik} \to \min(\max); \tag{2.37}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{q} x_{ik} \le a_i, \; i = 1, \ldots, p \\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ik} x_{ik} \ge b_k, \; k = 1, \ldots, q \\ x_{ik} \ge 0. \end{cases} \tag{2.38}$$

Замечания.

1. λ_{ik} может выражать число единиц i-ресурса, затрачиваемых на единицу i-ресурса k-потребности. Тогда

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{x_{ik}}{\lambda_{ik}} \ge b_k, \; k = 1, \ldots, q. \tag{2.39}$$

2. Примеры:

– 4 сорта бумаги для печатания 5 книг;

– авиакомпания для перевозок между центром и 6 городами располагает тремя группами разных типов самолетов.

2.3.6. Задача о раскрое или о минимизации обрезков

Рассмотрим простейшую модель оптимального раскроя материала. Данная задача состоит в разработке таких технологических планов раскроя, при которых получается необходимый комплекс заготовок, а отходы (по длине, площади, объему, массе или стоимости) сводятся к минимуму.

Пусть на предприятие поступают однотипные рулоны материалов. Надо найти такой план раскроя материалов по ширине, при котором будут наименьшие отходы.

Введем обозначения:

i – вид заготовки;

m – число всех видов заготовок;

j – вариант раскроя рулона по ширине;

n – число всех вариантов раскроя;

d_i – необходимое число заготовок i-вида;

d_{ij} – число заготовок i-вида, которое можно получить из одного рулона материала согласно j-варианту раскроя;

c_j – отходы материала, полученные из рулона материала согласно j-му варианту раскроя;

A – общее количество рулонов, имеющихся в наличии;

x_j – искомое число рулонов, раскраиваемых согласно j-варианту раскроя.

Математическая модель имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min; \tag{2.40}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j = d_i,\ i = 1, ..., m \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \le A \\ x_j \ge 0. \end{cases} \tag{2.41}$$

Далее можно усложнить и построить модель, например, для оптимального раскроя партий материалов для изготовления комплектов.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Из каких составных частей состоит модель задачи линейного программирования?
2. Какие формы представления задачи линейного программирования вам известны?
3. При решении каких задач применяются модели линейного программирования?
4. Сформулируйте задачу планирования производства.
5. Сформулируйте задачу использования мощностей оборудования.
6. В чем состоит моделирование процессов перевозок и назначения?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.

Представить задачу линейного программирования в канонической форме:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_3 \geq 3 \\ x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 - \text{любое.} \end{cases}$$

Задача 2.

Имеется два вида сырья S_1 и S_2 в количествах 800 и 1400 единиц. Из этого сырья можно изготовить три вида продукции P_1, P_2 и P_3. Затраты сырья на изготовление одной единицы продукции приведены в таблице:

	P_1	P_2	P_3
S_1	4	2	5
S_2	2	6	5

Цена реализации готовых изделий P_1, P_2 и P_3 равна соответственно 8, 14 и 10 д. е.

Требуется найти план производства продукции, приносящий максимальный доход.

Задача 3.

Завод – производитель высокоточных элементов для станков – выпускает два различных типа деталей *A* и *B*. Фонд рабочего времени завода для производства этих деталей составляет 4000 чел/час в неделю. Для производства одной детали *A* требуется 1 чел/час, а для производства одной детали *B* – 2 чел/час. Производственные мощности завода позволяют выпускать в неделю максимум 2250 деталей *A* и 1750 деталей *B*. Каждая деталь *A* требует 2 кг металлических стержней и 5 кг листового металла, а для производства одной детали *B* необходимо 5 кг металлических стержней и 2 кг листового металла. Уровень запасов каждого вида металла составляет 10 000 кг в неделю. Кроме того, еженедельно завод поставляет 600 деталей *A* своему постоянному заказчику. Существует также соглашение, в соответствии с которым общее число производимых в течение одной недели деталей должно составлять не менее 1500 штук.

Составить математическую модель задачи, если необходимо определить, сколько деталей каждого типа следует производить, чтобы максимизировать общий доход за неделю при том, что доход от производства одной детали *A* составляет 30 д. е., а от производства одной детали *B* – 40 д. е.

Задача 4.

Компания по производству приборов изготавливает два прибора *A* и *B*. При изготовлении каждый прибор должен собираться на трех различных участках. Эти участки могут обрабатывать только один прибор в каждый момент времени.

Изготовление одного прибора *A* требует:

– 40 минут сборки на 1 участке;

– 20 минут на 2 участке;

– 10 минут на 3 участке.

Изготовление одного прибора *B* требует:

– 20 минут сборки на 1 участке;

– 30 минут на 2 участке;

– 30 минут на 3 участке.

Каждый участок может работать 40 часов в неделю.

Прибор *A* приносит 4 д. е. прибыли на единицу. Прибор *B* приносит 3 д. е. прибыли на единицу.

Построить математическую модель для определения того, сколько каждого вида приборов должна производить компания каждую неделю, чтобы максимизировать прибыль.

Задача 5.

В отделе технического контроля (ОТК) некоторой фирмы работают контролеры 1 и 2 разрядов. Норма выработки ОТК за 8 часовой рабочий день составляет не менее 1800 изделий. Контролер 1 разряда проверяет 25 изделий в час, причем не ошибается в 98 %

случаев. Контролер 2 разряда проверяет 15 изделий в час, и его точность составляет 95 %.

Заработная плата контролера 1 разряда равна 4 д. е. в час, контролер 2 разряда получает 3 д. е. в час. При каждой ошибке контролера фирма несет убыток в размере 2 д. е. Фирма может использовать 8 контролеров 1 разряда и 10 контролеров 2 разряда.

Составить экономико-математическую модель для определения оптимального состава ОТК, при котором общие затраты на контроль будут минимальными.

Задача 6.

Администрация компании «БелКом», осуществляя программу реструктуризации, приняла решение о слиянии двух своих заводов в Борисове и Жодино. Предусматривается закрытие завода в Борисове и за счет этого – расширение производственных мощностей предприятия в Жодино. На настоящий момент распределение рабочих высокой и низкой квалификации, занятых на обоих заводах, является следующим:

Квалификация рабочих	Борисов	Жодино
Высокая	200	100
Низкая	300	200
Итого	500	300

В то же время после слияния завод в Жодино должен насчитывать 240 рабочих высокой и 320 рабочих низкой квалификации.

После проведения всесторонних переговоров с привлечением руководителей профсоюзов были выработаны следующие финансовые соглашения:

1) все рабочие, которые попали под сокращение штатов, получат выходные пособия следующих размеров.

– квалифицированные рабочие – 2000 д. е.;

– неквалифицированные рабочие – 1500 д. е.;

2) рабочие завода в Борисове, которые должны будут переехать в Жодино, получат пособие по переезду в размере 2000 д. е.;

3) во избежание каких-либо преимуществ для рабочих Жодинского завода доля бывших рабочих завода в Борисове на новом предприятии должна совпадать с долей рабочих Жодинского завода.

Требуется построить модель линейного программирования, в которой определяется, как осуществить выбор работников нового предприятия из числа рабочих двух бывших заводов таким образом, чтобы минимизировать общие издержки, связанные с увольнением и переменой места жительства части рабочих.

Задача 7.

В торговом зале необходимо выставить для продажи товары Т1 и Т2. Рабочее время продавцов не превышает 340 часов, а площадь торгового зала, которую можно занять, не превышает 120 м^2.

Каждая реализованная единица товара приносит прибыль соответственно в 50 и 80 д. е. Нормы затрат ресурсов на единицу проданного товара составляют:

Ресурсы	Т1	Т2
Рабочее время, час	0,4	0,6
Площадь, м^2	0,2	0,1

Найти оптимальную структуру товарооборота (чем меньше единиц товара, тем лучше), обеспечивающую прибыль не менее 30 000 д. е.

Задача 8.

Компания имеет 4 различных сборочных линии на своем главном заводе. Менеджер имеет 5 претендентов и хочет назначить по одному в каждую сборочную линию. Каждый претендент может работать на любой линии, но с различными затратами, связанными с индивидуальным опытом и мастерством. Затраты оценены в таблице.

	Сборочная линия			
	1	2	3	4
Претендент 1	23	19	22	27
Претендент 2	18	22	20	18
Претендент 3	25	20	22	30
Претендент 4	20	24	24	28
Претендент 5	16	18	20	25

Каким образом следует менеджеру назначить претендентов на сборочные линии с тем, чтобы минимизировать общие затраты.

3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

3.1. Графический метод решения задачи линейного программирования

Графический метод эффективно применяется в случае двух переменных x_1 и x_2.

Пусть математическая формулировка задачи линейного программирования (ЗЛП) имеет вид:

$$Q = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max(\min) \tag{3.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} \{\le, \ge\} b_1 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} \{\le, \ge\} b_1 \\ \ldots \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} \{\le, \ge\} b_1 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Графический метод решения ЗЛП состоит в следующем.

1. На координатной плоскости $x_1 x_2$ строится множество *X*, которое образует область допустимых решений ЗЛП.

– Эта область представляет собой пересечение всех полуплоскостей, которые по отдельности являются решениями неравенств, входящих в систему ограничений (форм. 3.2).

– Если $X = \varnothing$, то ЗЛП не имеет решений.

– Областью решений линейного неравенства $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$ является одна из двух полуплоскостей, на которые прямая $a_{i1}x_1 + {}$ ${}+ a_{i2}x_2 = 0$, соответствующая данному неравенству, делит всю координатную плоскость. Для того, чтобы определить, какая из двух координатных полуплоскостей является областью решений, достаточно координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой, подставить в неравенство. Если оно удовлетворяется, то областью решений является полуплоскость, содержащая данную точку. В противном случае, областью решений является полуплоскость, не содержащая данную точку.

2. Строится вектор-градиент целевой функции (рис. 3.1)

$$\vec{c} = \Delta Q = \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}, \frac{\partial Q}{\partial x_2} \right) = \left(c_1, c_2 \right)$$

и ее линия уровня l, прямая, перпендикулярная вектору градиента и проходящая, например, через начало координат.

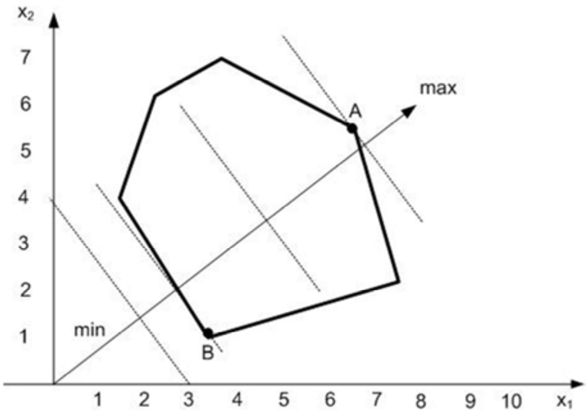

Рис. 3.1. Область допустимых значений и вектор-градиент

3. Строится семейство линий уровня целевой функции, представляющих собой прямые параллельные линии l. Значение Q постоянно на линии уровня и возрастает при перемещении линии уровня в направлении градиента $\vec{c}$ целевой функции Q.

Если при таком движении точка B (см. рис. 3.1.) является первой единственной точкой встречи линии уровня с областью допустимых решений X, то она будет точкой решения ЗЛП при $Q \to \min$, а если A – последняя общая точка при таком перемещении, то эта точка решения ЗЛП при $Q \to \max$.

Данное обстоятельство запишем в виде:

$$x^* = \left(x_{1A},\, x_{2A}\right),\ \text{если}\ Q \to \max;$$

$$x^* = \left(x_{1B},\, x_{2B}\right), \text{если}\ Q \to \min.$$

4. Если при таком перемещении окажется, что линия уровня совпадает с одной из сторон области допустимых решений, то ЗЛП имеет бесконечное множество решений.

5. Если же вдруг окажется, что первой (последней) точки не существует, то задача отыскания min (max) целевой функции Q является неразрешимой.

Задача 3.1.

Решить задачу линейного программирования графическим методом.

$$Q(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max; \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2 \ge 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 6 \le 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2 \ge 0 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Решение.

Строим область допустимых решений ЗЛП. Для этого пронумеруем ограничения задачи.

1. В прямоугольной декартовой системе координат строим прямую:

$$x_1 - x_2 + 2 = 0, \left(L_1\right),$$

соответствующую ограничению (3.4)

$$-x_1 + x_2 = 2; -\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} = 1; \left(x_1, x_2\right) = \left(-2, 2\right).$$

2. Находим, какая из двух полуплоскостей, на которые эта прямая делит всю координатную плоскость, является областью реше-

ний первого неравенства системы 3.4. Для этого достаточно координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой, подставить в первое неравенство 3.4. Так как прямая (L_1) не проходит через начало координат, подставляем координаты точки O(0,0) в первое ограничение 3.4.

$$1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 2 \geq 0$$

Получаем верное неравенство $2 \geq 0$. Следовательно, точка O лежит в полуплоскости решений. Стрелки на концах прямой (L_1) должны быть направлены в полуплоскость, содержащую точку O.

3. Аналогично строим прямые:

$$3x_1 - 2x_2 - 6 = 0, \quad (L_2);$$

$$2x_1 + x_2 - 2 = 0, \quad (L_3);$$

$$x_2 = 3, \quad (L_4)$$

и области решений трех последних ограничений форм. 3.4.

Находим общую часть полуплоскостей решений, учитывая при этом условия неотрицательности переменных.

Полученную область допустимых решений отметим на рис. 3.2.

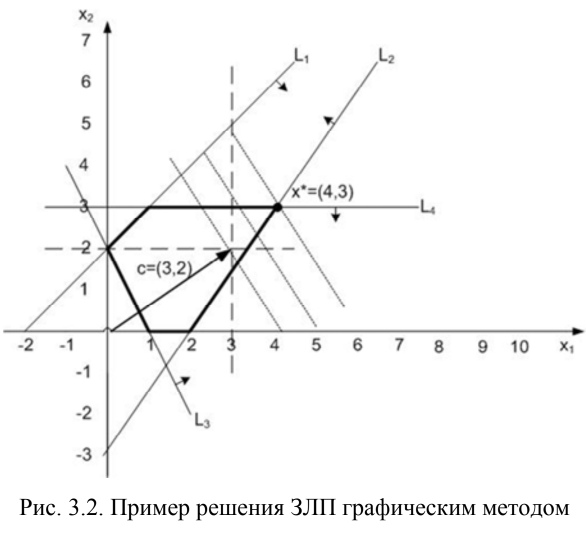

Рис. 3.2. Пример решения ЗЛП графическим методом

4. По коэффициентам целевой функции (3.3) строим вектор-градиент целевой функции $\vec{c} = (3,2)$ и одну из линий уровня, перпендикулярную градиенту.

5. Т. к. решается задача на отыскание максимума целевой функции, то линию уровня параллельно перемещаем в направлении градиента до точки выхода ее из области допустимых решений. Эта точка x^* является точкой пересечения прямых, ограничивающих область допустимых решений и соответствующих второму и третьему неравенствам формулы (3.4). Поэтому ее координаты можно найти, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 6 = 0 \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Получаем $x^* = (4,3)$. Вычисляем $Q\left(x^*\right) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18.$

6. Легко убедиться, что любая другая точка из области допустимых решений ЗЛП дает значение целевой функции Q меньшее, чем полученное значение.

Задача 3.2.

Решить задачу линейного программирования графическим методом.

$$Q(x) = 4x_1 + 2x_2 \to \min \tag{3.5}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0, \ (L_1) \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 6, \ (L_2) \\ x_1 + 2x_2 \le 16, \ (L_3) \\ x_1 \le 4, \ (L_4) \\ x_1 - x_2 \le 0, \ (L_5) \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Решение.

1. Строим область допустимых решений, градиент целевой функции $\vec{c} = (4, 2)$ и одну из линий уровня, перпендикулярную градиенту и имеющую общие точки с этой областью.

2. Перемещаем линию уровня в направлении, противоположном направлению градиента $\vec{c}$, т. к. решается задача на отыскание минимума функции.

3. Градиент $\vec{c} = (4, 2)$ и нормаль $\vec{n} = (2, 1)$ граничной прямой (L_2), в направлении которой перемещаются линии уровня, лежат на одной прямой, т. к. их координаты пропорциональны 6 : 3 = 2 : 1. Следовательно, линия уровня целевой функции параллельна граничной прямой (L_2) области допустимых решений и выходит из этой области при движении против градиента (т. е. в направлении уменьшения целевой функции) через две угловые точки этой области x_A^* и x_B^*.

4. Таким образом, задача имеет бесконечное множество решений, являющихся точками отрезка $\left[x_A^*, x_B^*\right]$. Эти точки $x_A^* = L_2 \cap L_5$; $x_B^* = L_1 \cap L_2$ находим, решая соответствующие системы уравнений:

5. Суммируем

$$2x_1 + x_2 = 6,\ (L_2);\ \ 4x_1 - x_2 = 0,\ (L_1);$$

$$x_1 - x_2 = 0,\ (L_5);\ \ 2x_1 + x_2 = 6,\ (L_2);$$

$$3x_1 = 6;\ \ 6x_1 = 6;$$

$$x_{1A}^* = 2;\ x_{2A}^* = 2;\ \ x_{1B} = 1;\ x_{2B} = 4;$$

$$x_A^* = (2, 2);\ \ x_B^* = (1, 4).$$

6. Вычисляем

$$Q\left(x_A^*\right) = Q\left(x_B^*\right) = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 12.$$

7. Ответ:

$$\min Q(x) = 12;\ x^* = (1 - t)x_A^* + tx_B^*;\ 0 \le t \le 1.$$

Пример решения представлен на рис. 3.3.

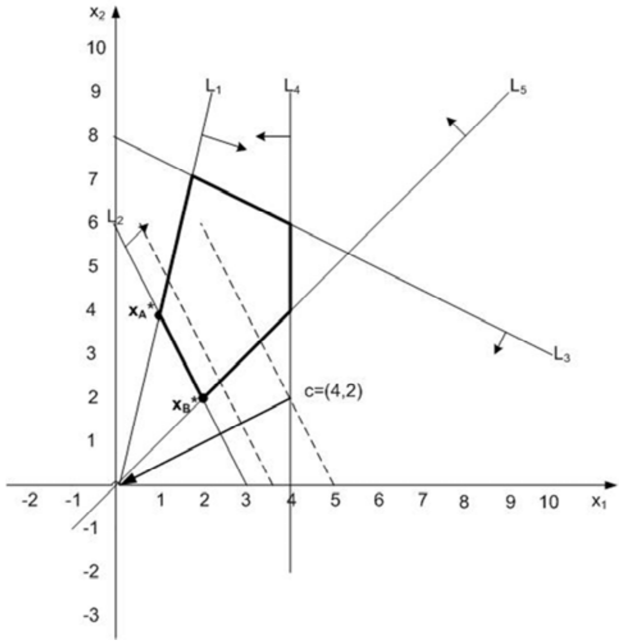

Рис. 3.3. Пример решения ЗЛП графическим методом

Задача 3.3.

Решить задачу линейного программирования графическим методом (рис. 3.4).

$$Q(x) = 3x_1 + 7x_2 \to \max \tag{3.7}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 3 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

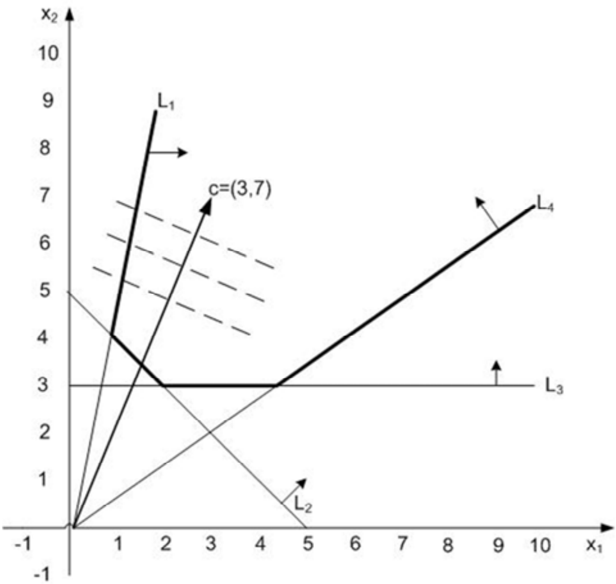

Рис. 3.4. Пример решения ЗЛП графическим методом

Решение.

1. Строим область допустимых решений, вектор-градиент целевой функции $\vec{c} = (3,7)$ и одну из линий уровня (см. рис. 3.4).

2. В данной задаче необходимо найти максимум целевой функции, поэтому линию уровня перемещаем в направлении вектора-градиента.

3. Ввиду того, что в этом направлении область допустимых решений не ограничена, линия уровня уходит в бесконечность.

4. Задача не имеет решения вследствие неограниченности целевой функции.

5. Ответ: $Q(x) \to \infty$.

Пример решения представлен на рис. 3.4.

Задача 3.4. (для самостоятельного решения)

Решить задачу линейного программирования графическим методом.

$$Q(x) = 4x_1 + 5x_2 \to \max \tag{3.9}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Решение.

1. Строим прямые линии, соответствующие неравенствам системы ограничений, и находим полуплоскости, являющиеся областями решений этих неравенств.
2. Область допустимых решений этой задачи является пустым множеством. Задача не имеет решения, ввиду несовместимости системы ограничений.
3. *Ответ:* система ограничений несовместна. Задача не имеет решений.

3.2. Анализ решения (модели) на чувствительность

Модель линейного программирования отражает фиксированное состояние реальной ситуации. Коэффициенты целевой функции и неравенств ограничений в такой модели предполагаются неизменными. Естественно изучить влияние изменения параметров модели на полученное оптимальное решение. Такое исследование называется анализом решения ЗЛП на чувствительность.

Рассмотрим анализ чувствительности для решения задачи линейного программирования, которое получено графическим методом.

Задача 3.5.

Предприятие перерабатывает ресурсы трех видов, из которых производит два вида изделий. Необходимая информация представлена в табл. 3.1.

Таблица 3.1.

Таблица исходных данных

Ресурсы, ед.	Расход ресурсов на 1 изделие		Ежедневный лимит ресурсов, ед.
	Изделие 1	Изделие 2	
Ресурс 1	8	6	48
Ресурс 2	4	6	36
Ресурс 3	–	1	5
Цена реализации 1 изделия (д. е.)	3	3	

Цель исследования:

Определить оптимальное соотношение между выпускаемыми изделиями для максимизации ежедневной выручки.

Составленная математическая модель задачи выглядит следующим образом:

$$Q(x) = 3x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 \le 48 \\ 4x_1 + 6x_2 \le 36 \\ x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

В результате применения графического метода решения ЗЛП, получим график на рис. 3.5.

Решением задачи является точка D с координатами:

$$x_1 = 3; \ x_2 = 4.$$

Целевая функция при таком решении принимает значение

$$Q = 21 \text{ д. е.}$$

Проведем для данной задачи анализ чувствительности.

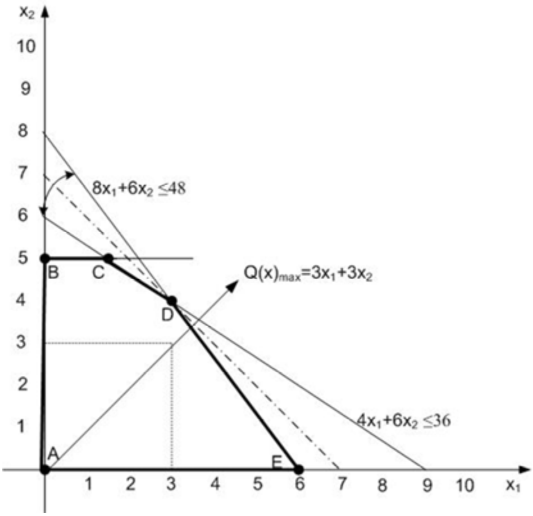

Рис. 3.5. Решение ЗЛП графическим методом

Рассмотрим два случая:

– изменение коэффициентов целевой функции;

– изменение значений констант в правой части неравенств-ограничений.

3.2.1. Изменение коэффициентов целевой функции

В общем виде целевую функцию ЗЛП можно записать следующим образом: максимизировать или минимизировать:

$$Q(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max(\min).$$

Изменение значений коэффициентов c_1 и c_2 приводит к изменению угла наклона прямой Q.

Графический способ решения показывает, что это может вызвать изменение оптимального решения, которое будет достигаться в другой угловой точке пространства решений. Однако существуют интервалы изменения коэффициентов c_1 и c_2, когда текущее оптимальное решение сохраняется. Задача анализа чувствительности и состоит в получении такой информации.

В частности, представляет интерес определение интервала оптимальности для отношения $\left(c_1 / c_2\right)$ (или, что то же самое, для $\left(c_2 / c_1\right)$). Если значение отношения $\left(c_1 / c_2\right)$ не выходит за пределы этого интервала, то оптимальное решение в данной модели сохраняется неизменным.

На рис. 3.5 видно, что функция $Q(x) = 3x_1 + 3x_2$ достигает максимального значения в угловой точке *D*.

При изменении коэффициентов целевой функции точка *D* останется точкой оптимального решения до тех пор, пока угол наклона линии уровня *Q* будет лежать между углами наклона двух прямых, пересечением которых является точка *D*. Этими прямыми являются:

$8x_1 + 6x_2 \le 48$ (ограничение на ресурс 1) и

$4x_1 + 6x_2 \le 36$ (ограничение на ресурс 2).

Алгебраически это можно записать следующим образом:

$$\frac{6}{8} \le \frac{c_2}{c_1} \le \frac{6}{4};\ c_1 \ne 0; \qquad (3.11)$$

$$\frac{4}{6} \le \frac{c_1}{c_2} \le \frac{8}{6};\ c_2 \ne 0. \qquad (3.12)$$

Зафиксируем значение коэффициента c_2 (пусть $c_2 = 3$), тогда интервал оптимальности для коэффициента c_1 получаем из неравенств (3.12) путем подстановки туда значения $c_2 = 3$. После выполнения элементарных арифметических операций получаем неравенства для коэффициента $c_1 : 2 \le c_1 \le 4$.

Это означает, что при фиксированной цене на изделие 2 цена на изделие 1 может меняться в интервале от 2 д. е. до 4 д. е. за единицу, при том, что оптимальное соотношение (решение) количества производимых изделий останется неизменным.

Аналогично, если зафиксировать значение коэффициента c_1 (пусть $c_1 = 3$), тогда из неравенства (3.11) получаем интервал оптимальности для коэффициента $c_2 : 2,5 \le c_2 \le 4,5$.

3.2.2. Изменение значений констант в правой части неравенств-ограничений

Стоимость ресурсов.

Рассмотрим на примере чувствительность оптимального решения к изменению ограничений, накладываемых на ресурсы. Такой анализ ЗЛП предлагает простую меру чувствительности решения, называемую *стоимостью единицы ресурса:* при изменении количества доступных ресурсов (на единицу) значение целевой функции в оптимальном решении изменится на стоимость единицы ресурса.

В данном примере первые два неравенства представляют собой ограничения на использование ресурса 1 и ресурса 2 соответственно. Определим стоимость единиц этих ресурсов.

В данной задаче оптимальное решение достигается в точке *D*, являющейся точкой пересечения прямых, соответствующих ограничениям на ресурс 1 и ресурс 2. При изменении уровня доступности ресурса 1 (увеличение или уменьшение лимита, равного 48 ед.) точка *D* оптимального решения перемещается вдоль отрезка *DF* (рис. 3.6).

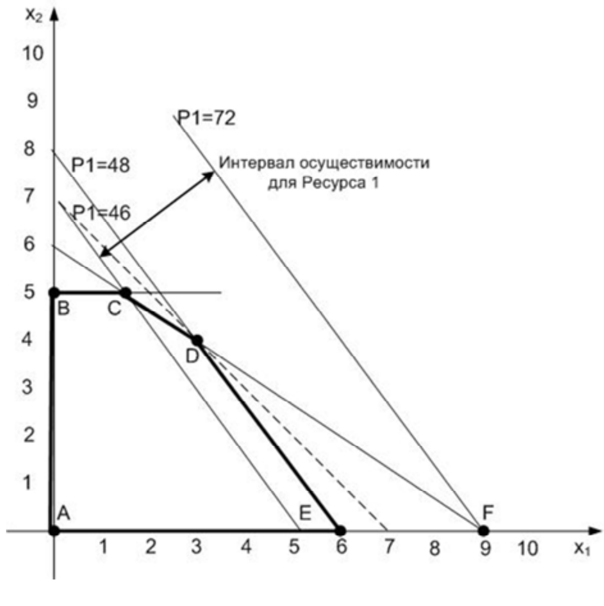

Рис. 3.6. Интервал осуществимости для ресурса 1

Любое изменение уровня доступности ресурса 1, вызывающее выход точки пересечения D из этого отрезка, ведет к неосуществимости оптимального решения в точке D.

Поэтому можно сказать, что концевые точки $C = (2{,}5)$ и $F = (9{,}0)$ отрезка CF определяют интервал осуществимости для ресурса 1.

Количество ресурса 1, соответствующего точке $C = (2{,}5)$, согласно $8x_1 + 6x_2 \le 48$, составляет 46 ед. Аналогично, количество сырья, соответствующего точке $F = (9{,}0)$, равно 72 ед.

Таким образом, интервал осуществимости для ресурса 1 составляет:

$$46 \le (\text{ресурс } 1) \le 72.$$

Если определить Р1 как Р1 = 48 + Δ_1, где Δ_1 – отклонение количества ресурса 1 от текущего уровня в 48 ед., тогда последние неравенства можно переписать как $46 \le (48 + \Delta_1) \le 72$ или $-2 \le \Delta_1 \le 24$.

Это означает, что текущий уровень ресурса 1 может быть уменьшен не более чем на 2 ед. и увеличен не более чем на 24 ед. В этом случае структура оптимального решения не изменится.

Вычислим стоимость единицы ресурса 1.

При изменении количества ресурса 1 от 46 до 72 ед., значения целевой функции Q будут соответствовать положению точки D на отрезке CF. Обозначив через y_1 стоимость единицы ресурса 1, получим следующую формулу:

$$y_1 = \frac{\text{изменение значения } Q \text{ при перемещении } D \text{ от } C \text{ до } F}{\text{изменение количества } P1 \text{ при перемещении } D \text{ от } C \text{ до } F}.$$

Если точка D совпадает с точкой $C = (2{,}5)$, то

$$Q = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 21 \text{ (д. е.)}$$

Если же точка D совпадает с точкой $F = (9{,}0)$, тогда

$$Q = 3 \cdot 9 + 3 \cdot 0 = 27 \text{ (д. е.)}.$$

Отсюда следует, что

$$y_1 = \frac{27-21}{72-46} = \frac{3}{13} \text{ (д. е. на единицу ресурса 1).}$$

Этот результат показывает, что изменение количества ресурса 1 на одну единицу приводит к изменению в оптимальном решении значения целевой функции на 0,23 д. е.

Рассмотрим ресурс 2.

На рис. 3.7 видно, что интервал осуществимости для ресурса 2 определяется концевыми точками F и E отрезка FE, где $F = (2.5,5)$ и $E = (6,0)$.

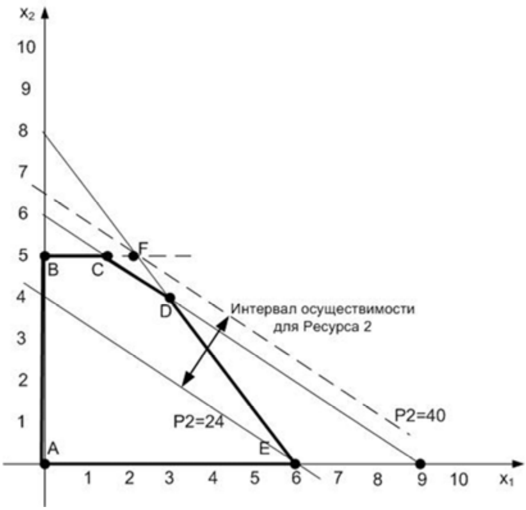

Рис. 3.7. Интервал осуществимости для ресурса 2

Точка F находится на пересечении прямых BC и DE.

Находим, что количество ресурса 2, соответствующего точке E, равно

$$4x_1 + 6x_2 = 4 \cdot 4 + 6 \cdot 0 = 24 \text{ ед.},$$

а в точке F

$$4 \cdot 2{,}5 + 6 \cdot 5 = 40 \text{ ед.}$$

Значение целевой функции в точке E равно

$$Q = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 0 = 18 \text{ д. е.}$$

а в точке F:

$$Q = 3 \cdot 2,5 + 3 \cdot 5 = 22,5 \text{ д. е.}$$

Отсюда следует, что количество ресурса 2 может изменяться от 24 до 40 ед., а стоимость единицы ресурса 2 равна $y_2 = \frac{22,5 - 18}{40 - 24} =$ $= \frac{4,5}{16} = 0,28$ (денежных единиц на единицу ресурса 2).

3.3. Аналитический метод решения задачи линейного программирования (симплекс-метод)

Двумерные задачи линейного программирования решаются *графически*. Для случая $n = 3$ можно рассмотреть трехмерное пространство, и целевая функция будет достигать своего оптимального значения в одной из вершин трехмерного многогранника.

В общем виде, когда в задаче участвуют n неизвестных, можно сказать, что область допустимых решений, задаваемая системой ограничивающих условий, представляется *выпуклым многогранником в n-мерном пространстве* и оптимальное значение целевой функции достигается в одной или нескольких вершинах. Решить данные задачи графически, когда количество переменных более 3 весьма затруднительно. Однако существует универсальный аналитический способ решения задач линейного программирования, называемый ***симплекс-методом***.

Основная идея симплекс-метода состоит в следующем.

1. Решение задачи начинается с рассмотрения одной из вершин многогранника условий.

2. Если исследуемая вершина не соответствует максимуму (минимуму), то переходят к соседней, увеличивая значение функции цели при решении задачи на максимум или уменьшая при решении задачи на минимум.

3. Таким образом, переход от одной вершины к другой улучшает значение функции цели.

4. Так как число вершин многогранника ограничено, то за конечное число шагов гарантируется нахождение оптимального значения или установление того факта, что задача неразрешима.

Этот метод является универсальным, применимым к любой задаче линейного программирования представленной в ***канонической форме***.

Система ограничений – система линейных уравнений, в которой количество неизвестных больше количества уравнений $(n \le m)$.

Если ранг системы равен n, то мы можем выбрать n неизвестных, которые выразим через остальные неизвестные.

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \qquad (3.13)$$

Приведем ЗЛП к канонической форме.

$$f(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + 0x_{n+1} + \ldots + 0x_{n+m} \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \le b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} \le b_m. \end{cases} \qquad (3.14)$$

Первое опорное решение можно представить в виде:
$x_1 = 0; x_2 = 0;\ \ldots;\ x_n = 0;\ x_{n+1} = b_1;\ \ldots;\ x_{n+m} = b_m$ или
$X_0 = (0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m)$ опорный план, при этом $f(x) = 0$.

Задача оформляется в виде симплекс таблицы (табл. 3.2).

Таблица 3.2

Первоначальный вид симплекс-таблицы

Базис	План	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}
x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{21}	…	a_{n1}	1	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	…	1
f	0	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0	…	0

Порядок работы с симплекс таблицей

Первая симплекс-таблица подвергается преобразованию, суть которого заключается в переходе к новому опорному решению.

Алгоритм перехода к следующей таблице такой:

1. Просматривается последняя строка таблицы и среди коэффициентов этой строки выбирается наименьшее отрицательное число при отыскании max, либо наибольшее положительное при задаче на min. Если такового нет, то исходное базисное решение является оптимальным и данная таблица является последней.

2. Просматривается столбец таблицы, отвечающий выбранному отрицательному (положительному) коэффициенту в последней строке – *разрешающий* столбец, и в этом столбце выбираются положительные коэффициенты. Если таковых нет, то целевая функция неограниченна на области допустимых значений переменных и задача решений не имеет.

3. Среди выбранных коэффициентов разрешающего столбца выбирается тот, для которого абсолютная величина отношения соответствующего свободного члена (находящегося в столбце План) к этому элементу минимальна. Этот коэффициент называется *разрешающим элементом*, а *строка*, в которой он находится, *разрешающей строкой*.

4. В дальнейшем базисная переменная, отвечающая строке разрешающего элемента, должна быть переведена в разряд свободных, а свободная переменная, отвечающая столбцу разрешающего элемента, вводиться в число базисных.

5. Строится новая таблица, содержащая новые названия базисных переменных. Для этого выполняем следующие действия.

6. Разделим каждый элемент разрешающей строки (исключая столбец свободных членов) на разрешающий элемент и полученные значения запишем в строку с измененной базисной переменной новой симплекс-таблицы.

7. Строка разрешающего элемента делится на этот элемент и полученная строка записывается в новую таблицу на то же место.

8. В новой таблице все элементы разрешающего столбца равны 0, кроме разрешающего элемента, он всегда равен 1.

9. В остальные клетки новой таблицы записывается результат преобразования элементов старой таблицы (рис. 3.8):

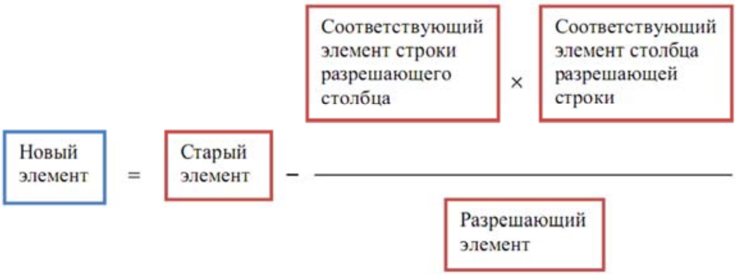

Рис. 3.8. Схема преобразования элементов симплекс-таблицы

10. В результате получают новую симплекс-таблицу, отвечающую новому базисному решению.

11. Теперь смотрим строку целевой функции (последнюю строку симплекс-таблицы). Если в ней нет отрицательных значений (в задаче на нахождение максимального значения), либо положительных (в задаче на нахождение минимального значения), то значит, что оптимальное решение получено. В противном случае, переходим к новой симплекс-таблице по выше описанному алгоритму.

Задача 3.6.

Компания производит корпуса приборов из пластика двух видов: *A* и *B*. В неделю может быть реализовано до 550 корпусов. Для производства каждого корпуса типа *A* требуется 2 кг пластика, а для корпуса типа *B* – 3 кг пластика. Компания может использовать до 1200 кг пластика в неделю. Для изготовления одного корпуса типа *A* требуется 12 мин машинного времени термопластавтомата, а для изготовления одного корпуса типа *B* – 30 мин. Машину можно использовать 160 час в неделю. Если прибыль от продажи корпусов типа *A* составляет 3 денежных единицы (д. е.), а от корпусов типа *B* – 4 д. е., то сколько корпусов каждого типа следует выпускать в неделю?

Решение.

Составим математическую модель задачи.

Пусть x_1 – количество корпусов типа *A*, x_2 – количество корпусов типа *B*, которые должны быть произведены в неделю (по смыслу задачи эти переменные неотрицательны).

Прибыль от продажи такого количества корпусов составит $f(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$ прибыль требуется максимизировать.

Выпишем ограничения задачи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 550 \text{ – в неделю на рынке может быть реализовано} \\ \text{до 550 корпусов} \\ 2x_1 + 3x_2 \le 1200 \text{ – затраты материала (пластика)} \\ 12x_1 + 30x_2 \le 9600 \text{ – затраты машинного времени} \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Таким образом, приходим к задаче линейного программирования.

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 550 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 1200 \\ 12x_1 + 30x_2 \le 9600 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решим ее симплекс-методом. Введем три дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 и придем к задаче:

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 550 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 1200 \\ 12x_1 + 30x_2 + x_5 = 9600 \\ x_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

В качестве опорного плана выберем

$$X_0 = (0,0,550,1200,9600).$$

Составим симплекс-таблицу.

Базис	План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	550	1	1	1	0	0
x_4	1200	2	3	0	1	0
x_5	9600	12	**30**	0	0	1
f	0	–3	–4	0	0	0

В последней оценочной строке есть отрицательные элементы, поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой, а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов к коэффициентам столбца. Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять жирным).

Аналогично будем повторять шаги, пока не придем к таблице с неотрицательными оценками.

Итак, разрешающий элемент: min отрицательный –4, следовательно это разрешающий столбец. Ищем min (элементы плана делим на элементы разрешающего столбца):

$$550:1 = 550;\ 1200:3 = 400;\ 9600:30 = 320;$$

$$\min\{550; 400; 320\} = 320.$$

Разрешающий элемент равен 30.

В новой таблице выполняем следующие действия:

1. Вместо x_5 ставим x_2.

2. В разрешающей строке – делим любой элемент на разрешающий, т. е. на 30.

3. Все элементы разрешающего столбца равны 0, кроме разрешающего элемента, который равен 1.

4. Остальные элементы таблицы определяем по симплексной формуле (см. рис. 3.8)

Базис	План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	550 – 1 · 9600/ /30 = 230	1–1 · 12/30 = = 3/5	0	1	0	–1/30
x_4	1200 – 3 · 9600/ /30 = 240	2–3 · 12/30 = = 4/5	0	0	1	–1/10
x_5	9600/30 = 320	12/30	**30/30**	0	0	1/30
f	0 – (–4) · 9600/ /30 = 1280	–3–(12·(–4))/ /30 = –7/5	0	0	0	2/15

Базис	План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	230	3/5	0	1	0	–1/30
x_4	240	**4/5**	0	0	1	–1/10
x_2	320	12/30	1	0	0	1/30
f	1280	–7/5	0	0	0	2/15

230 · 5/3 = 383;
240 · 5/4 = 300 min;
320 · 30/12 = 800.

Базис	План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	230–(240 · 3/5)·5/4 = 50	0	0	1	–3/4	**1/24**
x_1	240 · 5/4 = 300	1	0	0	5/4	–1/8
x_2	200	0	1	0	–1/2	1/12
f	1700	0	0	0	7/4	–1/24

50 · 24 = 1200 min;
300 · 8 = 2400;
200 · 12 = 2400.

Базис	План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	50 · 24 = 1200	0	0	24	–18	1
x_1	450	1	0	3	–1	0
x_2	100	0	1	–2	1	0
f	1750	0	0	1	1	0

В последнем плане строка f не содержит отрицательных значений, план $x_1 = 450$, $x_2 = 100$ оптимален, целевая функция принимает значение 1750.

Таким образом, чтобы получить максимальную прибыль, предприятию необходимо производить 450 корпусов вида A и 100 корпусов вида B, при этом прибыль составит 1750 д. е., а останется неиспользованными 1200 минут (20 часов) машинного времени.

3.4. Двойственность в линейном программировании

Теория линейного программирования позволяет не только получать оптимальные планы с помощью эффективных вычислительных процедур, но и делать ряд экономически содержательных выводов, основанных на свойствах задачи, которая является двойственной по отношению к исходной ЗЛП.

Пусть в качестве исходной дана задача:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, n. \end{cases} \qquad (3.15)$$

Задача линейного программирования, двойственная задаче (3.15), имеет вид:

$$g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n \\ y_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, m. \end{cases} \qquad (3.16)$$

Выпишем матрицы условий для прямой и двойственной задачи

$$A_{\text{пр}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \; A_{\text{дв}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (3.17)$$

Видим, что $A_{\text{пр}} = A_{\text{дв}}^T$ (значок T означает операцию транспонирования матрицы).

Следовательно, пара двойственных задач может быть записана в матричной форме:

Прямая задача ЛП	**Двойственная задача ЛП**
$f(x) = \langle c, x \rangle \to \max$	$g(y) = \langle b, y \rangle \to \min$
$Ax \le b$	$A^T y \ge c$
$x \ge 0$	$y \ge 0$

3.4.1. Симметричная пара двойственных задач

Пара двойственных задач, в которых прямая задача – стандартная, называется симметричной парой двойственных задач.

Правила построения двойственной задачи к стандартной ЗЛП состоят в следующем.

1. Число переменных двойственной задачи равно числу основных ограничений прямой задачи и наоборот.

2. Если прямая задача есть задача на max при ограничениях ≤, то двойственная задача – задача на min при ограничениях ≥.

3. Правые части ограничений прямой задачи – числа b_i – становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи.

4. Коэффициенты целевой функции прямой задачи – числа c_j – становятся правыми частями ограничений двойственной задачи ЛП.

5. j-столбец матрицы условий прямой задачи превращается в j-строку матрицы условий двойственной задачи.

Переменные прямой и двойственной задачи неотрицательны.

3.4.2. Экономический смысл двойственной задачи

Рассмотрим следующую производственную задачу.

Задача 3.7.

Предприятие после выпуска основной продукции имеет излишки ресурсов двух типов:

R_1 – 10 ед., R_2 – 8 ед.

Существует два способа распорядиться этими ресурсами:

организовать из них выпуск 3 новых видов продукции: P_1, P_2, P_3;

продать их.

Рассмотрим оба способа. Исходные данные приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Исходные данные задачи

Ресурсы	Расход ресурса на единицу продукции			Запас ресурсов
	P_1	P_2	P_3	
R_1	1	2	1	10
R_2	2	1	3	8
Доход (д. е.)	6	4	4	

Согласно первому способу надо составить такой план выпуска продукции, который максимизирует суммарную прибыль.

Построим математическую модель этой задачи. Пусть x_j – план выпуска продукции P_j. Тогда целевая функция будет выглядеть следующим образом:

$$f(x) = 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 \to \max.$$

Ограничения по ресурсам:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10;$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 8;$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

Получили стандартную ЗЛП.

Рассмотрим **второй способ** использования ресурсов, а именно, их продажу.

Возникает задача согласования цен, устраивающих продавца и покупателя:

– интерес предприятия состоит в том, чтобы продать ресурсы по таким ценам, при которых доход от реализации ресурсов будет не меньше прибыли, которую можно получить от реализации продукции, изготовленной из этих ресурсов;

– в свою очередь покупатель заинтересован в приобретении ресурсов по таким ценам, при которых затраты на покупку будут минимальны.

Задача согласования цен на ресурсы, устраивающих обе стороны может быть описана следующей математической моделью. Пусть:

y_1 – цена одной единицы ресурса R_1;

y_2 – цена одной единицы ресурса R_2.

Интерес покупателя будет выражаться целевой функцией, равной суммарной стоимости приобретаемых ресурсов

$$g(y) = 10y_1 + 8y_2 \to \min.$$

Интерес продавца будет описываться ограничениями:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 6 \\ 2y_1 + y_2 \ge 4 \\ y_1 + 3y_2 \ge 4 \\ y_1 \ge 0, \;\; y_2 \ge 0, \end{cases}$$

в которых левая часть означает стоимость ресурсов, затраченных на выпуск единицы соответствующей продукции, а правая – удельную прибыль от ее реализации.

Присоединяя естественные условия не отрицательности цен: y_1, $y_2 \ge 0$, получаем ***двойственную ЗЛП.*** Таким образом, симметричной паре двойственных задач можно придать определенный экономический смысл.

Прямая задача	**Двойственная задача**
Определить такой план выпуска продукции $$x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right),$$ используя ограниченные запасы ресурсов, при котором прибыль от реализации продукции будет максимальной.	Установить такой набор цен ресурсов $$y=\left(y_1,y_2,...,y_m\right),$$ при которых стоимость ресурсов, затраченных на выпуск единицы продукции будет не ниже прибыли от ее реализации, но при этом суммарная стоимость затрат будет минимальна.

Цены ресурсов $\left(y_1,y_2,...,y_m\right)$ называются теневыми, неявными или внетреннеми. Эти названия отличают их от «внешних», заранее известных цен $\left(c_1,c_2,...,c_n\right)$ на выпускаемую продукцию. Цены на ресурсы определяются из решения двойственной задачи и характеризуют стоимость затрат на выпуск конкретных видов продукции, поэтому их часто называют двойственными оценками ресурсов.

Между решениями этих задач существует тесная связь, отражаемая следующими свойствами и теоремами.

Свойство 1.

Основное неравенство теории двойственности.

Для любых допустимых планов x (прямой задачи) и y (двойственной задачи) выполняется неравенство:

$$f\left(x\right)\le g\left(y\right) \text{ или } \left\langle c,x\right\rangle \le \left\langle b,y\right\rangle. \tag{3.18}$$

Важно установить, влияет ли наличие или отсутствие решения одной из пары задач на существование решения в другой. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, известная как первая теорема двойственности.

Теорема 1.

Первая теорема двойственности

Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план, причем значения целевых функций на этих планах равны:

$$f\left(x^*\right) = g\left(y^*\right) \text{ или } \left\langle c, x^*\right\rangle \le \left\langle b, y^*\right\rangle. \qquad (3.19)$$

Если же целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена на своем множестве планов (прямая – сверху, двойственная – снизу), то множество планов другой задачи пусто. Таким образом, либо обе задачи имеют решение, либо обе неразрешимы.

Экономический смысл первой теоремы двойственности состоит в том, что при оптимальной организации выпуска продукции и оптимальных ценах на потребляемые ресурсы оба способа их использования равноценны. Однако, при неоптимальном плане производства продукции всегда прибыль от ее реализации будет меньше стоимости используемых ресурсов, что следует из основного неравенства теории двойственности.

Первая теорема двойственности позволяет проверить на оптимальность некоторый допустимый план прямой задачи, если удастся решить двойственную задачу.

Задача 3.8.

Исследовать, будет ли план $x = (2, 1, 1)$ оптимальным планом задачи:

$$f(x) = 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 8 \\ x_j \ge 0, \;\; j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Решение.

Составим двойственную задачу:

$$g(y) = 10y_1 + 8y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 6 \\ 2y_1 + y_2 \ge 4 \\ y_1 + 3y_2 \ge 4 \\ y_1 \ge 0, \; y_2 \ge 0. \end{cases}$$

Будем решать эту задачу геометрически. Построим граничные прямые (рис. 3.9):

(L_1) $y_1 + 2y_2 = 6$ проходит через точки (0, 3), (6, 0);

(L_2) $2y_1 + y_2 = 4$ проходит через точки (0, 4), (2, 0);

(L_3) $y_1 + 3y_2 = 4$ проходит через точки (0, 4/3), (4, 0); и целевой вектор $c = (10, 8) = 2(5, 4)$.

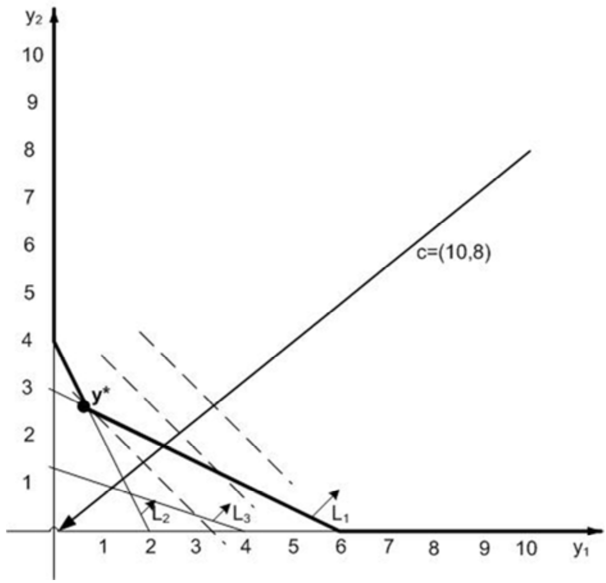

Рис. 3.9. Решение двойственной задачи

Оптимальный план y^* лежит на пересечение прямых L_1 и L_2.

Решая систему

$$y_1 + 2y_2 = 6,$$

$$2y_1 + y_2 = 4,$$

находим $y^* = (2/3, 8/3)$ и $g(y^*) = 28$.

Подсчитаем теперь значение целевой функции прямой задачи на допустимом плане выпуска $x = (2, 1, 1)$: $f(x) = 6 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 20$.

Видим, что $f(x) < g(y^*)$, следовательно, план $x = (2, 1, 1)$ не может быть оптимальным планом прямой задачи.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Каковы основные этапы решения задачи линейного программирования графическим методом?

2. Каким образом строится область допустимых решений?

3. Что такое вектор-градиент целевой функции?

4. В каком случае задача линейного программирования с двумя переменными не имеет решения.

5. Для чего производится анализ решения задачи линейного программирования на чувствительность?

6. Что позволяет определить анализ изменения коэффициентов целевой функции?

7. Как определяют уровень доступности ресурсов?

8. Что такое стоимость единицы ресурса в анализе решения задачи линейного программирования на чувствительность?

9. В чем состоит основная идея симплекс-метода?

10. В какой форме должна быть записана задача линейного программирования для применения симплекс-метода.

11. При каких условиях в симплекс-методе допустимое базисное решение является оптимальным.

12. Порядок работы с симплекс-таблицей.

13. Назовите правила построения двойственной задачи к стандартной задаче линейного программирования.

14. В чем экономический смысл двойственной задачи линейного программирования?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.

Решить задачу линейного программирования графическим методом:

$$f\left(x\right) = 3x_1 - 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 2.

Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$f\left(x\right) = x_1 - 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 0 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 3.

Для задачи:

$$z = 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 9x_4 + x_5 + 12 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_5 \le 35 \\ -3x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 8x_5 \ge -26 \\ 2x_1 + 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 48 \\ x_1 \ge 1,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0. \end{cases}$$

составить двойственную.

Задача 4.

Для задачи:

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 14 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

1) привести математическую модель задачи линейного программирования к каноническому виду;

2) решить задачу линейного программирования графическим способом;

3) составить к исходной задаче линейного программирования двойственную.

Задача 5.

Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 14 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

Задача 6.

Для производства двух видов приборов *A* и *B* предприятие использует три вида сырья: S_1, S_2, S_3. Нормы расхода, общее количество сырья, прибыль от реализации приборов, приведены в таблице

Сырье	*A*	*B*	Запасы
S_1	12	4	300
S_2	4	4	120
S_3	3	12	252
Прибыль	30	40	

Считается, что приборы *A* и *B* могут производиться в любых соотношениях (их сбыт обеспечен).

Требуется определить такой план выпуска, при котором прибыль предприятия будет максимальной.

Задача 7.

Для изготовления двух видов продукции (*A, B*) используют три вида сырья. Ресурсы сырья, норма его расхода на единицу продукции и цена продукции заданы в таблице.

Сырье	Норма расхода		Ресурсы
	A	*B*	
I	2	2	2400
II	3	5	2100
III	3	2	1200
Цена	7	5	

Решить задачу графическим методом и провести анализ на чувствительность, выполнив следующие задания:

1) определить план выпуска продукции из условия максимизации его стоимости;

2) определить интервал изменения цены на продукцию *A*, при котором структура оптимального решения останется неизменной;

3) определить интервал изменения цены на продукцию *B*, при котором структура оптимального решения останется неизменной;

4) определить статус, ценность каждого ресурса и его приоритет при решении задачи увеличения запаса ресурсов;

5) определить максимальный интервал изменения запасов каждого из ресурсов, в пределах которого структура оптимального решения, т. е. номенклатура выпускаемой продукции, остается без изменения.

4. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

4.1. Постановка транспортной задачи

Под термином *«транспортные задачи»* понимается широкий круг задач не только транспортного характера.

Общим для них является, как правило:

– распределение ресурсов, находящихся у *m*-производителей (поставщиков), по *n*-потребителям этих ресурсов;

– прикрепление потребителей ресурса к производителям;

– привязка пунктов отправления к пунктам назначения;

– взаимная привязка грузопотоков прямого и обратного направлений;

– отдельные задачи оптимальной загрузки промышленного оборудования;

– оптимальное распределение объемов выпуска промышленной продукции между заводами-изготовителями и др.

Рассмотрим экономико-математическую модель прикрепления пунктов отправления к пунктам назначения.

Имеются *m*-пунктов отправления груза и объемы отправления по каждому пункту $(a_1, a_2, ..., a_m)$ соответственно.

Известна потребность в грузах $(b_1, b_2, ..., b_n)$ по каждому из n пунктов назначения.

Задана матрица стоимостей доставки по каждому варианту $\left|c_{ij}\right|$.

Необходимо рассчитать оптимальный план перевозок, т. е. определить, сколько груза должно быть отправлено из каждого *i*-пункта отправления (от поставщика) в каждый *j*-пункт назначения (до потребителя) $\left|x_{ij}\right|$ с минимальными транспортными издержками.

В общем виде исходные данные представлены в табл. 4.1.

Все грузы из *i*-пунктов должны быть отправлены:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1, ..., m. \tag{4.1}$$

Все *j*-пункты должны быть обеспечены грузами:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, ..., n. \tag{4.2}$$

Таблица 4.1

Таблица исходных данных транспортной задачи

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_1	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность	b_1	b_2	…	b_n	

Суммарные объемы отправления должны быть равны объемам назначения:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j; \tag{4.3}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,...,m; j = 1,...,n. \tag{4.4}$$

Перевозки осуществить с min издержками

$$Z_{\min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min. \tag{4.5}$$

В модели (4.1–4.5) вместо матрицы стоимостей перевозок $\left| c_{ij} \right|$ могут задаваться матрицы расстояний. В таком случае в качестве целевой функции рассматривается минимум суммарной транспортной работы.

Как видно из выражения (4.3), уравнение баланса является обязательным условием решения транспортной задачи. Поэтому, когда в исходных условиях дана открытая задача, то ее необходимо привести к закрытой форме. В случае если:

– потребности по пунктам назначения превышают запасы пунктов отправления, то вводится фиктивный поставщик с недостающим объемом отправления;

– запасы поставщиков превышают потребности потребителей, то вводится фиктивный потребитель с необходимым объемом потребления.

Варианты, связывающие фиктивные пункты с реальными, имеют нулевые оценки.

После введения фиктивных пунктов задача решается как закрытая.

Отметим, что транспортным задачам присущи следующие особенности:

– распределению подлежат однородные ресурсы;

– условия задачи описываются только уравнениями;

– все переменные выражаются в одинаковых единицах измерения;

– во всех уравнениях коэффициенты при неизвестных равны единице;

– каждая неизвестная встречается только в двух уравнениях системы ограничений.

Транспортные задачи могут решаться симплекс-методом. Однако перечисленные особенности позволяют для транспортных задач применять специальные методы решения.

4.2. Методы составления первоначального плана перевозок

4.2.1. Метод северо-западного угла

Рассмотрим на примере, исходные данные для которого приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Исходные данные примера

Заказы		B_1	B_2	B_3	B_4
Запасы		100	40	80	60
A_1	160	4	8	10	5
A_2	30	4	6	2	3
A_3	90	4	4	6	5

Составление первоначального плана перевозок начинается с перевозки запасов поставщика A_1 (табл. 4.3).

Таблица 4.3

Первоначальный план перевозок по методу
северо-западного угла

Заказы		B_1	B_2	B_3	B_4
Запасы		100	40	80	60
A_1	160	4 100	8 40	10 20	5
A_2	30	4	6	2 30	3
A_3	90	4	4	6 30	5 60

За счет запасов A_1 максимально возможно удовлетворим заказы сначала потребителя B_1, затем B_2 и так далее. Таким образом, двигаемся вправо по строке до тех пор, пока остаток запасов поставщика A_1 не окажется меньше заказа очередного потребителя. Для удовлетворения его потребности используем остатки запаса первого поставщика, а недостающую часть добавляем из запасов поставщика A_2, т. е. перемещаемся на следующую строку таблицы.

Далее аналогичным образом распределяем запасы поставщика A_2, затем A_3 и т. д.

Распределяя запасы поставщика A_1 сначала потребителю B_1, а затем B_2, получаем: $x_{11} = 100$, $x_{12} = 40$. У поставщика A_1 остается 20 единиц груза, а потребителю B_3 нужно 80 единиц. Удовлетворим спрос потребителя B_3, отправив ему 20 единиц груза, оставшихся у поставщика A_1, 30 единиц груза от поставщика A_2 и 30 единиц груза от A_3. Следовательно, $x_{13} = 20$, $x_3 = 30$, $x_{33} = 30$ причем у поставщика A_3 остается 60 последних единиц груза. Этот груз и отправим потребителю B_4. Таким образом, $x_{34} = 60$, все запасы груза вывезены и все потребители удовлетворены.

Теперь мы можем подсчитать общую стоимость всех перевозок по данному плану: $Z = 4 \cdot 100 + 8 \cdot 40 + 10 \cdot 20 + 2 \cdot 30 + 6 \cdot 30 + 5 \cdot 60 = 1460$.

Изложенный метод северо-западного угла прост в реализации, однако он не даст экономичный первоначальный план, поскольку при распределении перевозок мы совершенно не учитывали их стоимость.

4.2.2. Метод наименьшей стоимости

Построение первоначального плана начинается с клетки с наименьшим тарифом перевозок. При наличии нескольких клеток с одинаковыми тарифами выбирают любую из них.

Пусть это будет клетка (i, j).

1. Запишем в эту клетку элемент $x_{ij} = \min\left(a_i, b_j\right)$.

2. Если $a_i < b_j$, то запасы i поставщика A_i исчерпаны, а потребителю B_j требуется еще $\hat{b}_j = b_j - a_i$ единиц груза. Поэтому, не принимая более во внимание i-строку, снова ищем клетку с наименьшей стоимостью перевозок и заполняем ее с учетом изменившихся потребностей.

3. В случае $a_i > b_j$ из рассмотрения исключается j-столбец, а запасы A_i полагаются равными $\hat{a}_i = a_i - b_j$. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока все запасы не будут исчерпаны, а все потребности удовлетворены.

Поскольку наименьший тариф в нашем примере (число 2) стоит в клетке (2,3), то запишем в эту клетку элемент $x_{23} = 30$. Тогда $\hat{b}_3 = 50$, а 2-ю строку таблицы можно больше не учитывать (табл. 4.4).

Среди оставшихся клеток имеются три клетки с наименьшим тарифом перевозок, равным 4: ((1,1); (3,1); (3,2)). Выберем, например, клетку (1,1) и запишем в нее число $x_{11} = 100$. Получаем, что $\hat{a}_1 = 60$, и 1-й столбец таблицы больше не рассматриваем. Теперь наименьший тариф, равный 4, проставлен в клетке (3,2), поэтому $x_{32} = 40$, $\hat{b}_3 = 50$ и 2-й столбец больше не нужен. Далее выбираем клетку (1,4) с тарифом 5 и ставим в нее $x_{14} = 60$. Исключим из рассмотрения 1-ю строку и 4-й столбец (поскольку $\hat{a}_1 = b_4 = 60$). Переходим к последней клетке (3,3), в которую записываем перевозку $x_{33} = 50$. Найдем суммарную стоимость перевозок по этому плану:

$$Z = 4 \cdot 100 + 5 \cdot 60 + 2 \cdot 30 + 4 \cdot 40 + 6 \cdot 50 = 1220.$$

Таблица 4.4

Первоначальный план перевозок
по методу наименьшей стоимости

Заказы		B_1	B_2	B_3	B_4
Запасы		100	40	80	60
A_1	160	4 100	8	10	5 60
A_2	30	4	6	2 30	3 0
A_3	90	4	4 40	6 50	5

Сравнивая это значение со стоимостью плана, полученного по методу северо-западного угла, видим, что $1220 < 1460$, т. е. мы получили более выгодный план перевозок.

4.3. Вырожденные планы. Циклы и пополнение плана

Прежде, чем перейти к анализу оптимальности планов и способам их улучшения, выясним, каким требованиям они должны удовлетворять. Для этого введем несколько определений. Ячейки таблицы, в которых записаны отличные от нуля перевозки, называются *базисными*, а остальные (пустые) – *свободными*. План называется *вырожденным*, если количество базисных клеток в нем меньше, чем $(m + n - 1)$.

Циклом в транспортной таблице называется несколько ячеек, соединенных замкнутой ломаной линией так, чтобы две соседние вершины ломаной были расположены либо в одной строке, либо в одном столбце. Ломаная линия может иметь точки самопересечения, но не в клетках цикла.

План называется *ациклическим*, если его базисные ячейки не содержат циклов. Доказано, что оптимальные планы являются ациклическими, поэтому и первоначальный план также должен удовлетворять этому требованию.

Заметим, что планы, полученные с помощью метода северо-западного угла и метода наименьшей стоимости, ациклические. Однако если план оказался вырожденным, то при его пополнении требование ацикличности необходимо учитывать.

Возвращаясь к рассматриваемому примеру (табл. 4.5), видим, что первоначальный план, полученный по методу наименьшей стоимости, имеет 5 базисных клеток, однако $m+n-1=3+4-1=6.$ Значит, план нужно пополнить еще одной базисной клеткой. Попробуем выбрать для этого клетку (2, 2). Соединив базисные клетки горизонтальными и вертикальными отрезками, видим, что пополненный таким образом план содержит цикл из ячеек $(2,\,2)\to(2,\,3)\to(3,\,3)\to(3,\,2)$ следовательно, клетка (2, 2) была выбрана неудачно.

Таблица 4.5

Пример пополнения базисных клеток

заказы		B_1	B_2	B_3	B_4
запасы		100	40	80	60
A_1	160	4 100	8	10	5 60
A_2	30	4	6	2 30	3 0
A_3	90	4	4 40	6 50	5

Взяв вместо нее клетку (2, 4), получим ациклический план (табл. 4.5). Поэтому можно заполнить эту ячейку, положив $x_{24}=0$.

4.4. Алгоритм метода потенциалов

Наиболее распространенным методом решения транспортных задач является метод потенциалов.

Для анализа полученных планов и их последующего улучшения удобно ввести дополнительные характеристики пунктов отправления и назначения, называемые *потенциалами*.

Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов состоит из нескольких этапов:

1) разработка начального плана (опорного решения);
2) расчет потенциалов;
3) проверка плана на оптимальность;
4) поиск максимального звена неоптимальности (если условие III не было достигнуто);
5) составление контура перераспределения ресурсов;
6) определение минимального элемента в контуре перераспределения и перераспределение ресурсов по контуру;
7) получение нового плана.

Описанная процедура повторяется несколько раз (итераций), пока не будет найдено оптимальное решение. Вычислительный алгоритм для каждой итерации не меняется.

4.4.1. Вычисление потенциалов

Сопоставим каждому поставщику A_i и каждому потребителю B_j величины u_i и v_j соответственно так, чтобы для всех базисных клеток плана были выполнены соотношения:

$$u_i + v_j = c_{ij},\ i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n. \tag{4.6}$$

Поскольку число базисных клеток в плане равно $(m+n-1)$ (вырожденные планы должны быть предварительно пополнены), то для определения потенциалов получается система из $(m+n-1)$ уравнений с $(m+n)$ неизвестными. Такая система имеет бесконечное множество решений. Нам требуется любое ее решение. Обычно для простоты полагают один из потенциалов равным нулю и затем вычисляют остальные. В транспортной таблице для потенциалов $v_1, v_2, ..., v_n$ заводится дополнительные строка, а для потенциалов $u_1, u_2, ..., u_m$ – дополнительный столбец, куда проставляются найденные значения.

4.4.2. Проверка оптимальности плана

Для каждой свободной клетки плана вычислим разности:

$$\Delta c_{ij} = c_{ij} - \left(u_i - v_j\right) \tag{4.7}$$

и запишем полученные значения в левых верхних углах соответствующих клеток. Заметим, что для базисных клеток выполнено соотношение $\Delta c_{ij} = 0,$ и этим фактом можно пользоваться для контроля правильности нахождения потенциалов. План является оптимальным, если все разности $\Delta c_{ij} \geq 0.$

В противном случае план можно улучшить следующим способом.

4.4.3. Перераспределение поставок

Найдем клетку с наибольшей по абсолютной величине отрицательной разностью Δc_{ij} и построим цикл, в котором кроме этой клетки все остальные являются базисными. Такой цикл является единственным и всегда существует. Заметим, что в новом плане суммы элементов по строкам и столбцам должны остаться прежними, поэтому изменение значения в одной клетке цикла повлечет за собой соответствующие изменения значений во всех остальных клетках этого цикла. Так как в свободной клетке значение будет увеличено, то проставим в ее правом нижнем углу знак $(+)$. Теперь пройдем по всей ломаной цикла, проставляя в правых нижних углах клеток поочередно знаки $(+)$ и $(-)$. Груз будет перераспределен по клеткам цикла на величину $\Delta x = \min x_{ij}$ следующим образом. В клетках со знаком $(+)$ значение перевозки нужно увеличить на величину $\Delta x,$ а в клетках со знаком $(-)$ уменьшить на величину $\Delta x.$ Так как после пересчета у нас добавилась лишняя базисная клетка, то их количество необходимо сократить, убрав нуль в одной из клеток цикла. Если таких клеток получилось несколько, то свободной делаем ту из них, в которой тариф перевозок максимален. После этого полученный план проверяется на оптимальность описанным выше способом. Перераспределение груза производится до тех пор, пока очередной план не станет оптимальным. На этом действие алгоритма завершается.

Покажем, как нужно пользоваться методом потенциалов, на примере первоначального плана, полученного выше по методу северо-западного угла (см. табл. 4.3).

1. Вначале проверим, не является ли этот план вырожденным. Так как $m+n-1=3+4-1=6$ и число базисных клеток в плане также равно 6, то план в пополнении не нуждается.

2. Найдем потенциалы по базисным клеткам таблицы с помощью формул (4.6), положив $u_1=0$,

$$\begin{cases} u_1+v_1=4 \\ u_1+v_2=8 \\ u_1+v_3=10 \\ u_2+v_3=2 \\ u_3+v_3=6 \\ u_3+v_4=5 \\ u_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=0 \\ u_2=-8 \\ u_3=-4 \\ v_1=4 \\ v_2=8 \\ v_3=10 \\ v_4=9 \end{cases}$$

Занесем полученные значения в табл. 4.6.

Таблица 4.6

Значения потенциалов по базисным клеткам

Заказы		B_1	B_2	B_3	B_4	u
Запасы		100	40	80	60	
A_1	160	4 100	8 40	10 20	5	0
A_2	30	4	6	2 30	3	–8

Окончание табл. 4.6

Заказы		B_1	B_2	B_3	B_4	u
Запасы		100	40	80	60	
A_3	90	4	4	6 30	5 60	–4
v		4	8	10	9	

3. Вычислим теперь разности $\Delta c_{ij} = c_{ij} - \left(u_i - v_j\right)$ для свободных клеток и также проставим эти данные в левых нижних углах соответствующих клеток. В итоге получим табл. 4.7.

Таблица 4.7

Разности потенциалов для свободных клеток

Заказы		B_1	B_2	B_3	B_4	u
Запасы		100	40	80	60	
A_1	160	4 100	8 40	10 20 –	–4 5 +	0
A_2	30	8 4	6 6	2 30	2 3	–8
A_3	90	4 4	0 4	6 30 +	5 60 –	–4
v		4	8	10	9	

$$\Delta c_{14} = c_{14} - \left(u_1 + v_4\right) = 5 - \left(0 + 9\right) = –4.$$

4. Поскольку $\Delta c_{14} = -4 < 0,$ то этот план не является оптимальным.

5. Перераспределим груз по циклу, обозначенному в табл. 4.7 стрелками, на величину $\Delta x = \min\{20, 60\} = 20.$ Для этого в клетках со знаком $(+)$ увеличим поставки на 20 единиц, а клетках со знаком $(-)$ поставки на столько же уменьшим. Для сохранения количества базисных клеток число 0 в клетке (1, 3) не записываем, и она становится свободной.

6. Вычислив потенциалы и разности Δc_{ij} для нового плана в табл. 4.8, видим, что снова есть отрицательная разность $\Delta c_{32} = -4$. Поэтому придется еще раз улучшать план (табл. 4.8).

Таблица 4.8

Таблица потенциалов

Заказы		B_1	B_2	B_3	B_4	u
Запасы		100	40	80	60	
A_1	160	4 100	8 40 –	4 10	5 20 +	0
A_2	30	8 4	6 6	2 30	2 3	–4
A_3	90	4 4	–4 4 +	6 50	5 40 –	0
v		4	8	6	5	

7. С этой целью перераспределим груз по циклу, отмеченному в таблице 5 стрелками, на величину $\Delta x = \min\{40, 40\} = 40$. Так как в результате в цикле получаются две клетки с нулевыми перевозками: (1, 3) и (3, 4), то сделаем свободной клетку (1, 3), поскольку ее тариф перевозок больше. После перераспределения груза по циклу вычислим все необходимые разности Δc_{ij} (табл. 4.9).

Таблица 4.9

Таблица потенциалов

Заказы		B_1	B_2	B_3	B_4	u
Запасы		100	40	80	60	
A_1	160	4 100	4 8	4 10	5 60	0
A_2	30	4 4	6 6	2 30	2 3	–4

Окончание табл. 4.9

Заказы		B_1	B_2	B_3	B_4	u
Запасы		100	40	80	60	
A_3	90	0 4	4 40	6 50	0 5	0
v		4	4	6	5	

8. Как видим, все Δc_{ij} неотрицательны, значит план оптимален.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Каковы общие черты транспортной задачи? Содержание транспортной таблицы.
2. Метод северо-западного угла составления первоначального плана перевозок.
3. Метод наименьшей стоимости составления первоначального плана перевозок.
4. Что такое вырожденный план транспортной задачи?
5. Назовите основные этапы решения транспортной задачи методом потенциалов.
6. Как осуществляется перераспределение поставок при решении транспортной задачи методом потенциалов?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.

Решить транспортную задачу методом потенциалов:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	10	8	8	160
A_2	11	28	14	18	80
A_3	11	26	16	25	70
b_j	100	70	30	110	

Задача 2.

Выпуск продукции на трех заводах составляет 500, 700 и 600, причем затраты на производство единицы равны 9, 8 и 2 соответственно. Потребности четырех потребителей на эту продукцию составляют 350, 200, 450 и 100. Матрица C транспортных расходов на доставку единицы продукции с i-завода j-потребителю:

$$C = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{vmatrix}.$$

Определить оптимальный план прикрепления потребителей к заводам при условии минимизации суммарных затрат на производство и транспортировку.

Задача 3.

Имеется 3 поставщика П1, П2, П3 полиэтилена для термопластавтоматов. У них на складах находится 60, 45, 130 т полиэтилена соответственно.

В городе имеется 4 потребителя полиэтилена $M1$, $M2$, $M3$, $M4$ с потребностями 50, 70, 60, 80 т соответственно.

Известна матрица транспортных расходов (д. е.) на доставку 1 т полиэтилена.

$$C = \begin{vmatrix} 14 & 16 & 13 & 11 \\ 15 & 11 & 9 & 8 \\ 12 & 17 & 10 & 14 \end{vmatrix}.$$

Составить математическую модель задачи и привести ее к стандартной транспортной задаче с балансом.

Запланировать перевозку полиэтилена с минимальными затратами при условии, что запросы $M3$ должны быть удовлетворены полностью.

потребители / поставщики	$M1$	$M2$	$M3$	$M4$	Запасы на складах, т
П1	14	16	13	11	60
П2	15	11	9	8	45
П3	12	17	10	14	130
Потребности, т	50	70	60		$\sum = 235$ / $\sum = 260$

Задача 4.

Решить транспортную задачу методом потенциалов. Известна матрица транспортных расходов:

$$C = \begin{vmatrix} 3 & 12 & 7 & 15 \\ 4 & 6 & 8 & 9 \\ 5 & 10 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

Вектор запасов $A = (120,\ 85,\ 75)$;

Вектор заявок $B = (90,\ 70,\ 60,\ 80)$.

5. ТЕОРИЯ ИГР И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

5.1. Основные понятия теории игр

Задачами теории игр в экономике являются задачи о выборе решений в условиях экономической неопределенности и риска.

Неопределенность может носить различный характер:

– осознанные действия противоборствующей стороны (конкурентов);

– ситуации риска для оценки результатов принятых решений;

– вероятность появления различных условий, влияющих на принятие решений (курсы валют, инфляция, постановления правительства и т. д.);

– известны последствия принимаемых решений, но неизвестны вероятности различных состояний внешней среды. Решение принимается в условиях полной неопределенности;

– цель решаемой задачи не достаточно точно определена. Показатель эффективности не отражает полную картину.

Решения необходимо принимать при выполнении маркетинговых исследований, задач менеджмента, размещении инвестиций в проекты, задач логистики и т. д.

Игра – это упрощенная формализованная модель реальной конфликтной ситуации.

Формализация – выработка определенных правил действия сторон в процессе игры:

– варианты действия сторон;

– исход игры при каждом варианте;

– степень информированности сторон о действиях всех других сторон.

Игрок – заинтересованная играющая сторона (лицо, группа, коллектив).

Стратегия игрока – любое возможное для игрока действие в рамках правил игры.

Ситуация – набор выбранных игроками стратегий.

Выигрыш в ситуации – каждому игроку в каждой ситуации приписывается число, выражающее степень удовлетворения его интересов (качественные выигрыши не рассматриваются).

5.2. Классификация игр

Игры можно *классифицировать* по следующим основаниям:

1. Количество игроков.

– 2 стороны – *игра двух лиц*;

– *множественная игра* – игра *n*-лиц;

2. Количество стратегий игры.

– *конечные* – каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий;

– *бесконечные* – если хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий.

3. Взаимоотношения сторон.

– *бескоалиционные* – игроки не имеют права вступать в коалиции;

– *коалиционные* – игроки могут вступать в соглашения;

– *кооперативные* – если коалиции определены заранее.

4. Характер выигрышей.

– *игры с нулевой суммой*. Сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю. Два игрока с нулевой суммой – антагонистическая игра (выигрыш одного равен проигрышу другого);

– *игры с ненулевой суммой*. За право участия в игре нужно вносить взнос.

5. Вид функции выигрыша.

– *матричные;*

– *биматричные;*

– *непрерывные;*

– *выпуклые;*

– *сепарабельные* и т. д.

6. Количество ходов.

– *одношаговые,* заканчиваются после одного хода каждого игрока. Далее происходит распределение выигрышей;

– *многошаговые* (позиционные, стохастические, дифференциальные).

7. Информированность сторон.

– *игра с полной информацией.* Каждый игрок на каждом ходу игры знает все стратегии, примененные ранее другими игроками на предыдущих ходах (ситуацию);

– игра *с неполной информацией*. Игроку известны не все стратегии предыдущих ходов других игроков.

8. Степень неполноты информации.

– *стратегические,* проводятся в условиях полной неопределенности;

– *статистические,* проводятся в условиях частичной неопределенности. Информацию получают на основе статистического эксперимента, по результатам которого оценивается распределение вероятностей стратегий игроков. Тесно связаны с теорией принятия экономических решений.

Основная цель теории игр – выработка рекомендаций для удовлетворительного поведения игроков в конфликте, т. е. выявление для каждого из них оптимальной стратегии.

5.3. Матричные игры

Для того, чтобы построить экономико-математическую модель конфликтной ситуации в виде матричной игры, необходимо определить матрицу выигрышей. Для игр большой размерности это не просто.

В общем виде *матрица игры (платежная матрица)* строится следующим образом:

– перечисляем все возможные чистые стратегии A_i и B_j игроков;

– формализуем правила, по которым развивается конфликт в виде функции выигрышей $f(i, j) = a_{ij}$.

Матричная игра – конечная игра двух игроков с нулевой суммой.

Предположим, что первый игрок имеет m-стратегий A_i, $i = 1, ..., m$, а второй игрок имеет n-стратегий B_j, $j = 1, ..., n$.

Тогда игра называется $m \times n$ игрой.

Обозначим:

a_{ij} – значения выигрышей игрока A (соответственно проигрышей игрока B), если первый игрок выбрал стратегию A_i, а второй игрок стратегию B_j, имеем ситуацию $\{A_i, B_j\}$.

Значения выигрышей a_{ij} можно представить в виде платежной таблицы (табл. 5.1), называемой *матрицей игры* или *платежной матрицей*.

Таблица 5.1

Платежная таблица

		Игрок 2			
		B_1	B_2	…	B_n
Игрок 1	A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
	A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
	…	…	…	…	…
	A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Или в виде матрицы:

$$Q = \left\{ a_{ij} \right\} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим несколько примеров построения платежных матриц.

Задача 5.1.

Игрок A может записать одно из чисел: 0 или 1.

Игрок B называет число, которое по его мнению записал игрок A.

Если угадывает, то получает от A одну денежную единицу, а если не угадывает, то платит игроку A столько же.

Составить матрицу игры.

Решение.

Обозначим стратегии игроков:

A_1 – игрок A записал 0;

A_2 – игрок A записал 1;

B_1 – игрок B назвал 0;

B_2 – игрок B назвал 1.

Тогда матрица игры имеет вид:

$$Q = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

5.4. Цена игры. Решение игры

Рассмотрим матричную игру с матрицей:

$$Q = \left\{a_{ij}\right\} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Обозначим: α_i – наименьший выигрыш игрока *A* при выборе им стратегии A_i при всех возможных стратегиях игрока *B*. Другими словами, α_i – наименьшее число в *i*-строке матрицы игры, т. е.

$$\alpha_i = \min_{j=1,\ldots,n} \left\{a_{ij}\right\}. \tag{5.2}$$

Среди всех наименьших чисел α_i в строках выберем наибольшее число α и назовем его *нижней ценой игры* или ***максимином:***

$$\alpha = \max_{i=1,\ldots,m} \left\{\alpha_i\right\} = \max_{i=1,\ldots,n} \min_{j=1,\ldots,n} \left\{a_{ij}\right\}. \tag{5.3}$$

Это гарантированный наименьший выигрыш игрока *A* при выборе им стратегии, соответствующей α, при любой стратегии игрока *B*.

Стратегия игрока *A*, соответствующая максимину, называется ***максиминной стратегией*.**

Обозначим: β_j – наибольший проигрыш игрока *B*, при выборе им стратегии B_j при всех возможных стратегиях игрока *A*. Другими словами, β_j – наибольшее число в *j*-столбце матрицы игры, т. е.

$$\beta_j = \max_{i=1,\ldots,m} \left\{a_{ij}\right\}. \tag{5.4}$$

Среди всех чисел β_j в столбцах выберем наименьшее число β и назовем его *верхней ценой игры* или ***минимаксом:***

$$\beta = \min_{j=1,\ldots,n} \left\{\beta_j\right\} = \min_{j=1,\ldots,n} \max_{i=1,\ldots,m} \left\{a_{ij}\right\}. \tag{5.5}$$

Это гарантированный наибольший проигрыш игрока B при выборе им стратегии, соответствующей β, и при любой стратегии игрока A.

Стратегия игрока B, соответствующая минимаксу, называется ***минимаксной стратегией***.

Доказано, что нижняя цена игры не превосходит верхней цены игры, т. е.

$$\alpha \le \beta \tag{5.6}$$

Очевидно, что максиминная и минимаксная стратегии – наиболее *осторожные стратегии* игроков. Это принцип минимакса.

Если $\alpha = \beta$, то число $c = \alpha = \beta$ называется *чистой ценой игры*, или ***ценой игры***.

Миксиминная и минимаксная стратегии в этом случае являются оптимальными стратегиями, а их совокупность – ***решением игры***.

Пара стратегий A_i и B_j дает решение игры тогда и только тогда, когда соответствующий ей элемент a_{ij} является одновременно наименьшим в своей строке и наибольшим в своем столбце. Если в игре существует такая ситуация, то такой элемент a_{ij} называется ***седловой точкой***, а сама игра – *игрой с седловой точкой.* Игра с седловой точкой имеет цену игры $c = a_{ij}$.

Игра с седловой точкой называется *справедливой*, если $c = 0$ и *несправедливой* в противном случае.

Задача 5.2.

Определить нижнюю α и верхнюю β цену игры, заданной матрицей:

$$Q = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 6 \end{vmatrix}.$$

Имеет ли игра седловую точку? Если да, то найти ее.

Решение.

	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	5	6	8	5
A_2	9	7	8	7
A_3	7	6	6	6
β_j	9	7	8	$\alpha = \beta = 7$

Пара стратегий (A_2, B_2) составляет решение игры, т. к. при $\alpha = \beta$ максиминная и минимаксная стратегии являются оптимальными.

Цена игры равна 7.

Если $\alpha \neq \beta$, то игра не имеет седловой точки. Это вызывает затруднения в определении цены игры и оптимальных стратегий игроков. Рассмотрим в качестве примера такую игру.

Задача 5.3.

Игроки *A* и *B* одновременно независимо записывают число:

– игрок *A* записывает 1 или 2;

– игрок *B* записывает 0 или 3;

– если сумма записанных чисел нечетна, то эту сумму платит игрок *B* игроку *A*;

– если четна, то эту сумму игрок *A* платит игроку *B*.

Найти решение игры.

Решение.

Обозначим стратегии:

A_1 – игрок *A* записал 1;

A_2 – игрок *A* записал 2;

B_1 – игрок *B* записал 0;

B_2 – игрок *B* записал 3.

Матрица игры имеет вид:

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Найдем α и βдля чего заполним таблицу

	B_1	B_2	α_i
A_1	1	–4	–4
A_2	–2	5	–2
β_j	1	5	$\alpha = -2;\ \beta = 1$

$\alpha \neq \beta$ седловая точка в этой игре отсутствует:

– игроку *A* выгодно отказаться от своей максиминной стратегии A_2 если игрок *B* придерживается минимаксной стратегии, и применить стратегию A_1;

– тогда игрок *A* вместо выигрыша (–2) получит выигрыш 1. Правда тогда игроку *B* будет выгодно отказаться от стратегии B_1, чтобы игрок *A* получил выигрыш 4 и т. д.

Ответ: пары оптимальных стратегий нет, решения игры в таких стратегиях не существует.

В такой игре каждый игрок должен хранить в секрете ту стратегию, которую он собирается применить. Секретность можно сохранить, если каждый раз выбирать стратегию случайным образом, т. е. применять *смешанную стратегию***.**

5.5. Решение игры в смешанных стратегиях

Смешанная стратегия S_A игрока *A* – это применение чистых стратегий $A_1, A_2, ..., A_m$ случайным образом с вероятностями соответственно $p_1, p_2, ..., p_m$, причем $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Смешанную стратегию S_A обычно записывают в виде вектора вероятностей $S_A = \left(p_1, p_2, ..., p_m\right)$.

Аналогично смешанная стратегия игрока *B* имеет вид $S_B = \left(q_1, q_2, ..., q_n\right)$.

Игра имеет случайный характер, случайный выигрыш игрока *A* или проигрыш игрока *B*.

Среднее значение выигрыша игрока A определяется по формуле математического ожидания двумерной случайной величины:

$$f\left(S_A, S_B\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j. \qquad (5.7)$$

Эту функцию часто называют *функцией потерь* или ***платежной функцией.***

Решением игры в этом случае является пара оптимальных смешанных стратегий $S_A^* = \left(p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*\right)$ и $S_B^* = \left(q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*\right)$,

обладающих тем же свойством, что и для чистых стратегий: каждому игроку невыгодно отступать от своей оптимальной смешанной стратегии, если другой игрок придерживается своей оптимальной смешанной стратегии.

Ценой игры c в такой игре называется средний выигрыш игрока A при оптимальных смешанных стратегиях

$$c = f\left(S_A^*, S_B^*\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j^*. \qquad (5.8)$$

Цена игры c удовлетворяет неравенству

$$\alpha \le c \le \beta, \qquad (5.9)$$

где α и β – соответственно нижняя и верхняя цена игры.

Теорема Неймана – основная теорема теории игр.

Каждая конечная игра имеет по крайней мере одно решение среди смешанных стратегий.

Рассмотрим игру с матрицей $\left(a_{ij}\right)_{2\times2}$:

– если она имеет седловую точку, то решение игры – пара оптимальных чистых стратегий игроков;

– если не имеет седловую точку, то согласно теореме Неймана решение существует и определяется парой оптимальных смешанных стратегий:

$$S_A^* = \left(p_1^*, p_2^*\right) \text{ и } S_B^* = \left(q_1^*, q_2^*\right).$$

Здесь вероятности $\left(p_1^*,\, p_2^*\right)$ соответствуют стратегиям A_1, A_2, а вероятности $\left(q_1^*,\, q_2^*\right)$ соответствуют стратегиям B_1, B_2.

Пусть матрица игры имеет вид:

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим функцию потерь $f\left(S_A^*,\, S_B^*\right)$ при применении смешанных стратегий. Отсюда можно получить систему уравнений для нахождения оптимальных смешанных стратегий, решение которых имеет вид:

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \tag{5.10}$$

$$p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \tag{5.11}$$

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \tag{5.12}$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{5.13}$$

Задача 5.4.

Найти решение и цену игры для задачи 5.3 (с записью чисел).

Решение.

Матрица игры имеет вид:

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение игры определяется следующими вероятностями (см. 5.10–5.13):

$$p_1^* = \frac{5-(-2)}{1+5-(-4)-(-2)} = \frac{7}{12} = 0,58;$$

$$p_2^* = \frac{1-(-4)}{1+5-(-4)-(-2)} = \frac{5}{12} = 0,42;$$

$$q_1^* = \frac{5-(-4)}{1+5-(-4)-(-2)} = \frac{9}{12} = 0,75;$$

$$q_2^* = \frac{1-(-2)}{1+5-(-4)-(-2)} = \frac{3}{12} = 0,25.$$

Таким образом, $S_A^* = (0,58; 0,42)$; $S_B^* = (0,75; 0,25)$.

Полученный результат означает, что оптимальная смешанная стратегия игрока A состоит в том, чтобы применять чистые стратегии A_1 и A_2 случайным образом с вероятностями соответственно 0,58 и 0,42.

При правильной игре обоих игроков наиболее часто будет выбираться пара стратегий (A_1, B_1), т. е. чаще игрок A будет записывать 1, чем 2, а игрок B – 0, чем 3.

Найдем цену игры с , т. е. средний выигрыш игрока A при оптимальных смешанных стратегиях:

$$c = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} p_i^* q_j^* = a_{11} p_1^* q_1^* + a_{12} p_1^* q_2^* + a_{21} p_2^* q_1^* + a_{22} p_2^* q_2^* =$$
$$= 1 \cdot 0,58 \cdot 0,75 + (-4) \cdot 0,58 \cdot 0,25 + (-2) \cdot 0,42 \cdot 0,75 +$$
$$+ 5 \cdot 0,42 \cdot 0,25 = -0,25.$$

Это средний выигрыш игрока A в одной игре. Он отрицательный, следовательно эта игра для игрока A невыгодна, а выгодна для игрока B.

5.6. Биматричные игры

Рассмотрим игры с ненулевой суммой, в которых интересы игроков хотя и не совпадают, но уже не обязательно являются противоположными.

Пусть в распоряжении игрока *A* имеются стратегии $A_1, A_2, ..., A_m$.

Пусть в распоряжении игрока *B* имеются стратегии $B_1, B_2, ..., B_n$.

При этом, если игрок *A* выбрал стратегию A_i, а игрок *B* стратегию B_j, то выигрыш игрока *A* равен некоторому числу a_{ij}, а выигрыш игрока *B* – некоторому числу b_{ij}.

Тогда выигрыши каждого игрока можно свести в отдельные матрицы:

$$A = \left|a_{ij}\right|_{m\times n};\ B = \left|b_{ij}\right|_{m\times n}. \tag{5.14}$$

Игры с ненулевой суммой называют ***биматричными играми***.

Игры с нулевой суммой – частный случай биматричных игр, где матрица выигрышей игрока *A* противоположна матрице выигрышей игрока *B*, т. е.

$$\left|b_{ij}\right| = -\left|a_{ij}\right|. \tag{5.15}$$

Задача 5.5.

Классический пример игры с ненулевой суммой – дилемма узников.

Два узника находятся под обвинением в совместном совершении преступления при отсутствии прямых улик.

Каждый узник (игроки *A* и *B*) имеет две стратегии поведения:

не сознаваться в совершении преступления или сознаться. Тогда:

– (A_1, B_1) – узники не сознаются в совместном совершении преступления, получают по 1 году тюрьмы;

– (A_2, B_2) – узники сознаются в совместном совершении преступления, получают по 6 лет тюрьмы;

– (A_1, B_2) – один сознается, а другой нет, сознавшийся получит 9 лет, а не сознавшийся будет отпущен на свободу;

– $\left(A_2,\, B_1\right)$ – соответственно.

Составить матрицы выигрышей для игроков.

Решение.

Если считать 1 год тюрьмы за выигрыш, равный (–1), то матрицы выигрышей A и B такой биматричной игры имеют вид:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & -9 \\ 0 & -6 \end{vmatrix};\ B = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -9 & -6 \end{vmatrix}.$$

Вопрос. Что понимать под решением биматричной игры?

Компромисс, приемлемый для обоих игроков.

5.7. Решение биматричной игры в смешанных стратегиях

Пусть, смешанные стратегии игроков:

$$S_A = \left(p_1,\, p_2,\, ...,\, p_m\right);\ S_B = \left(q_1,\, q_2,\, ...,\, q_n\right). \qquad (5.16)$$

Тогда средние выигрыши игроков определяются по формулам:

$$C_A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i q_j;\ C_B = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, p_i q_j. \qquad (5.17)$$

Ограничимся случаем рассмотрения биматричной игры, когда у каждого игрока имеется по две стратегии:

$$S_A = \left(p_1,\, p_2\right);\ S_B = \left(q_1,\, q_2\right). \qquad (5.18)$$

Обозначим вероятности:

$$p_1 = p;\ p_2 = \left(1 - p\right);\ q_1 = q;\ q_2 = \left(1 - q\right). \qquad (5.19)$$

Тогда совместная смешанная стратегия обоих игроков:

$$S_{AB} = \left(p,\, q\right), \qquad (5.20)$$

а средний выигрыш определяется по формуле:

$$c_A(p,q) = a_{11}pq + a_{12}p(1-q) + a_{21}(1-p)q + \\ + a_{22}(1-p)(1-q); \tag{5.21}$$

$$c_B(p,q) = b_{11}pq + b_{12}p(1-q) + b_{21}(1-p)q + \\ + b_{22}(1-p)(1-q). \tag{5.22}$$

Сформулируем основное определение в смешанных стратегиях.

Смешанная стратегия $S_{AB} = \left(p^*, q^*\right)$ определяет равновесную ситуацию, если для $\forall p, q$ удовлетворяющих условиям:

$$0 \le p \le 1;\ 0 \le q \le 1,$$

одновременно выполняются неравенства:

$$c_A\left(p, q^*\right) \le c_A\left(p^*, q^*\right);\ c_B\left(p^*, q\right) \le c_B\left(p^*, q^*\right). \tag{5.23}$$

Эти неравенства означают, что ситуация, определяемая смешанной стратегией $S_{AB} = \left(p^*, q^*\right)$, является равновесной: отклонение от нее одного из игроков не приводит к увеличению выигрыша, если другой игрок сохраняет свой выбор стратегии.

Отсюда следует, что если существует равновесная ситуация (точка равновесия), то отклонение от нее каждому игроку в отдельности невыгодно.

Теорема Нэша.

Всякая биматричная игра имеет хотя бы одну точку равновесия в смешанных стратегиях.

Из теоремы следует: для того чтобы в биматричной игре 2 × 2, в которой

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

смешанная стратегия $S_{AB} = \left(p^*, q^*\right)$ определяла точку равновесия, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих неравенств:

$$\begin{cases} \left(p^* - 1\right)\left(Cq^* - E\right) \geq 0 \\ p^*\left(Cq^* - E\right) \geq 0 \\ \left(q^* - 1\right)\left(Dp^* - F\right) \geq 0 \\ q^*\left(Dp^* - F\right) \geq 0 \\ 0 \leq p^* \leq 1;\ 0 \leq q^* \leq 1, \end{cases} \tag{5.25}$$

где

$$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22};\ E = a_{22} - a_{12};$$

$$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22};\ F = b_{22} - b_{21}.$$

Возвратимся к задаче о дилемме узников.

Задача 5.6.

Найти в задаче 5.5 оптимальные стратегии игроков и равновесную точку игры без согласования действия игроков.

Решение.

В соответствии с матрицами выигрышей A и B,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$$

приведенными ранее, вычислим:

$$C = -1 - (-9) - 0 + (-6) = 2;\ D = -1 - 0 - (-9) + (-6) = 2;$$

$$E = -6 - (-9) = 3;\ F = -6 - (-9) = 3.$$

Подставляя эти значения в систему (5.24), получим систему неравенств, определяющую точку равновесия:

$$\begin{cases} \left(p^*-1\right)\left(2q^*-3\right)\geq 0 \\ p^*\left(2q^*-3\right)\geq 0 \\ \left(q^*-1\right)\left(2p^*-3\right)\geq 0 \\ q^*\left(2p^*-3\right)\geq 0 \\ 0\leq p^*\leq 1;\ 0\leq q^*\leq 1. \end{cases} \tag{5.26}$$

Путем подстановки $p^*=0,\ \ q^*=0$ в полученную систему неравенств вычисляем получаем, что стратегия $S_{AB}^*=\left(0,0\right)$ является решением системы неравенств (5.27), следовательно, она будет равновесной точкой рассматриваемой биматричной игры.

Других решений (5.26) нет, поскольку при $0<p^*\leq 1$ и $0\leq q^*\leq 1$ часть второго неравенства отрицательна, а при $0<q^*\leq 1$ и $0\leq p^*\leq 1$ левая часть четвертого неравенства отрицательна.

Т. к. $p_1^*=p^*=0;\quad p_2^*=1-p^*=1;\quad q_1^*=q^*=0;\quad q_2^*=1-q^*=1,$ то оптимальными смешанными стратегиями игроков являются $S_A^*=\left(0,1\right);\ \ S_B^*=\left(0,1\right).$

Решением игры является выбор с вероятностью 1 каждым узником второй чистой стратегии A_2 и B_2, сознаться в совместном совершении преступления. При этом выигрыш каждого узника в точке равновесия равен $c_A^*=c_B^*=-6.$

Если один из узников решит изменить свою стратегию и выберет первую чистую стратегию, то он получит (–9), т. е. проиграет больше, чем в точке равновесия, когда другой узник будет придерживаться равновесной стратегии.

5.8. Кооперативные игры

Иногда в игре с ненулевой суммой игрокам разрешается обсуждать перед игрой свои стратегии и договариваться о совместных действиях. Такая биматричная игра называется *кооперативной игрой.*

Пусть S – множество точек на координатной плоскости c_A, c_B, которое определяет возможные выигрыши игроков. При этом S является выпуклым, замкнутым и ограниченным множеством (рис. 5.1).

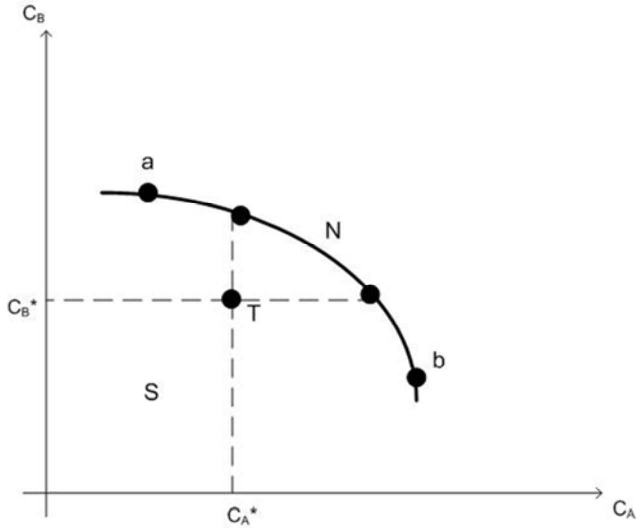

Рис. 5.1. Область возможных выигрышей игроков

Нанесем на эту координатную плоскость точку T *(точка угрозы),* координаты которой равны максимальным выигрышам игроков, обеспеченным им без вступления в переговоры друг с другом.

Отрезок (a, b) называют парето-оптимальным множеством, а каждую точку на нем – парето-оптимальной ситуацией. В любой такой ситуации игроки, даже действуя совместно, не могут увеличить выигрыш одного, не уменьшая выигрыш другого. Поэтому цель вступления в переговоры – достижение парето-оптимальной ситуации.

Улучшающая часть парето-оптимального множества называется *переговорным множеством*, оно содержит точку решения N.

Точкой решения Нэша называется точка N, в которой достигается максимум произведения:

$$N(p, q) = \left(c_A - c_A^*\right)\left(c_B - c_B^*\right) \to \max. \qquad (5.27)$$

Произведение (5.27) показывает превышения выигрышей в результате переговоров. Доказано, что если множество S выпукло, замкнуто и ограничено, то точка решения Нэша существует и является единственной.

Решая задачу предыдущего примера, можно показать, что обоим игрокам следует применять стратегии A_1 и B_1, т. е. не сознаваться в совместном совершении преступления. Тогда выигрыш каждого будет равен (–1), т. е. больше чем (–6) в точке равновесия биматричной игры без согласования стратегий игроков.

5.9. Статистические игры

5.9.1. Принятие решений в условиях полной неопределенности

На практике оба игрока не всегда бывают активны и противодействуют друг другу, например:

– окружающая среда, природа не активны в отношении троп;

– совокупность внешних обстоятельств, в которых приходится принимать решения.

Неопределенность – это когда противник не имеет противоположных интересов, но выигрыш действующего игрока во многом зависит от неизвестного заранее состояния противника. Неопределенность зависит от недостатка информации о внешних условиях, в которых будет приниматься решение и не зависит от действий игрока.

Причины неопределенности:

– колебание спроса;

– нестабильность экономической ситуации;

– изменение курса валют;

– колебание уровня инфляции;

– неустойчивая биржевая ситуация;

– погода, как природное явление и т. д.

В таких задачах выбор решения зависит от состояния объективной действительности, «природы», а их математические модели называются *играми с природой*.

Игры, в которых одним из противников является природа, а другим человек, получили название *статистических игр*.

Человека, участвующего в игре против природы, называют *статистиком.* Будем считать природу первым игроком П, а статистика – вторым игроком В.

Пусть имеется некоторое множество возможных состояний природы $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_n$. Возможные решения (стратегии) статистика $A_1, A_2, ..., A_m$. При выборе стратегии A_i статистик может потерпеть убыток a_{ij}, зависящий от состояния природы Π_j.

Матрица последствий или *матрица потерь* имеет вид:

– в табличном виде:

	П			
	Π_1	Π_2	…	Π_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

– в матричном виде:

$$Q = \left| a_{ij} \right|_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (5.28)$$

Иногда при решении статистической игры используется *матрица рисков:*

$$r_{ij} = a_{ij} - \min_j a_{ij} \qquad (5.29)$$

разность между убытком статистика выбравшего стратегию A_i и минимально возможным убытком при том же состоянии природы Π_j.

Решение принимается в *состоянии полной неопределенности*, если неизвестно, с какими вероятностями природа принимает состояния $П_1, П_2, ..., П_n$.

Для выбора оптимальной стратегии статистик может использовать несколько правил.

Предположим, что лицо, принимающее решение, может выбрать одну из альтернатив, обозначенных номерами: $i = 1, ..., m$.

Ситуация является полностью неопределенной, т. е. известен лишь набор возможных состояний внешней среды (по отношению к лицу, принимающему решение), обозначенных номерами $j = 1, ..., n$.

Если будет принято i-решение, а состояние внешней среды соответствует j-ситуации, то лицо, принимающее решение, получит доход, представленный в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Таблица последствий

Товар	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

При решении задачи о принятии решений в условиях неопределенности для отбора вариантов стратегии применяют так называемые критерии оптимальности (альтернативные критерии оптимальности):

– *критерий Вальда;*

– *критерий оптимизма;*

– *критерий пессимизма;*

– *критерий Сэвиджа;*

– *критерий Гурвица.*

Для выбора наиболее эффективного варианта стратегии ко всем возможным вариантам развития применяются все критерии оптимальности одновременно: каждый из критериев позволяет отобрать только один вариант, оптимальным же будет являться тот из них, на который указало большинство критериев.

Критерий Вальда (критерий гарантированного результата, максиминный критерий) позволяет выбрать наибольший элемент матрицы доходности из ее минимально возможных элементов:

$$W = \max_i \min_j \left\{a_{ij}\right\}, \tag{5.30}$$

где a_{ij} – элемент матрицы доходности.

Данный критерий обеспечивает максимизацию минимального выигрыша, который может быть получен при реализации каждого из вариантов стратегий. Критерий ориентирует лицо, принимающее решение, на осторожную линию поведения, направленную на получение дохода и минимизацию возможных рисков одновременно.

Применение критерия Вальда оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

– о вероятности наступления того или иного состояния природы ничего неизвестно;

– не допускается никакой риск;

– реализуется лишь малое количество решений.

Задача 5.6.

Найти оптимальную стратегию по критерию Вальда из предыдущей таблицы 5.2.

Решение.

$$W = \max_i \min_j \left\{a_{ij}\right\} = \max\left\{10;12;13\right\} = 13.$$

Ответ. Полученный результат соответствует стратегии A_3.

Критерий оптимизма (критерий максимакса) предназначен для выбора наибольшего элемента матрицы доходности из ее максимально возможных элементов:

$$M = \max_i \max_j \left\{a_{ij}\right\}. \tag{5.31}$$

Критерий оптимизма используется, когда игрок оказывается в безвыходном положении, любой его шаг может стать как абсолютным выигрышем, так и полным провалом. Данный критерий предполагает, что развитие ситуации будет благоприятным для лица, принимающего решение. Вследствие этого оптимальным выбором будет вариант с наибольшим значением показателя эффективности в матрице доходности.

Ценой игры в чистых стратегиях по критерию оптимизма (*M*) является наибольший из показателей эффективности чистых стратегий.

Задача 5.7.

Найти оптимальную стратегию по критерию оптимизма (из предыдущей таблицы 5.2).

Решение.

$$W = \max_i \min_j \left\{a_{ij}\right\} = \max\left\{20;16;18\right\} = 20.$$

Ответ. Полученный результат соответствует стратегии A_1.

Критерий пессимизма предназначен для выбора наименьшего элемента матрицы доходности из ее минимально возможных элементов:

$$P = \min_i \min_j \left\{a_{ij}\right\}. \tag{5.32}$$

Критерий пессимизма предполагает, что развитие ситуации будет неблагоприятным для лица, принимающего решение.

При использовании этого критерия лицо, принимающее решение, ориентируется на возможную потерю контроля над ситуацией и поэтому старается исключить все потенциальные риски и выбрать вариант с минимальной доходностью.

Задача 5.8.

Найти оптимальную стратегию по критерию пессимизма (из предыдущей таблицы 5.2.

Решение.

$$P = \min_i \min_j \left\{a_{ij}\right\} = \min\left\{10;12;13\right\} = 10.$$

Ответ. Полученный результат соответствует стратегии A_1.

Критерий Сэвиджа (критерий минимаксного риска Сэвиджа) предназначен для выбора максимального элемента матрицы рисков из ее минимально возможных элементов:

$$S = \min_i \max_j \left\{ r_{ij} \right\}. \tag{5.33}$$

Необходимо провести оценку риска в условиях, когда реальная ситуация неизвестна. Если игрок знает, что осуществляется j-состояние природы, то выбрал бы наилучшее решение, т. е. то, которое принесет наибольший выигрыш:

$$b_j = \max_{j=1,\ldots,n} \left\{ a_{ij} \right\}. \tag{5.34}$$

Принимая i-решение, игрок A рискует получить не b_j, а только a_{ij}, т. е., если игрок примет i-решение, а в природе реализуется j-состояние, то произойдет недополучение дохода в размере:

$$r_{ij} = b_j - a_{ij} = a_{\max j} - a_{ij} \tag{5.35}$$

(по сравнению с тем, как если бы игрок знал точно, что реализуется j-состояние природы, и выбрал бы решение, приносящее наибольший доход):

$$b_j = \max_j \left\{ a_{ij} \right\}, \tag{5.36}$$

где a_{ij} – показатель доходности варианта стратегии с максимальной доходностью из имеющихся i-вариантов при наступлении j-сценария развития событий;

$a_{\max j}$ – показатель доходности i-варианта стратегии при наступлении j-сценария развития событий (элемент платежной матрицы).

Матрица рисков (сожалений) отражает риск реализации вариантов стратегии для каждого альтернативного развития событий (характеризует риск выбора определенного варианта стратегии), который будет зависеть от уровня риска варианта стратегии при наступлении различных сценариев. Среди элементов матрицы рисков сначала выбирается максимальный риск при каждой стратегии, а затем из них выбирается минимальный. То есть в данном случае пессимистично настроенный игрок предполагает, что состояние природы будет таким, что для любой его стратегии риск будет наибольшим, поэтому выбирает такую, чтобы этот риск минимизировать.

Критерий Сэвиджа позволяет выбрать вариант стратегии с меньшей величиной риска по сравнению с более высоким, первоначально ожидаемым уровнем риска. Данный критерий ориентирует лицо, принимающее решение, на более благоприятное развитие ситуации по сравнению с наихудшим состоянием, на которое можно было рассчитывать.

Ценой игры в чистых стратегиях по критерию Сэвиджа называется минимальный показатель неэффективности среди показателей неэффективности всех чистых стратегий.

Задача 5.9.

Найти оптимальную стратегию по критерию Сэвиджа (из табл. 5.2).

Решение: Применим формулу (5.35), построим матрицу рисков:

Таблица 5.3

Матрица рисков

Товар	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	0	3	5
A_2	4	6	1
A_3	7	0	0

$$b_j = \max_{j=1,\ldots,n}\left\{a_{ij}\right\} = \min\left\{5;6;7\right\} = 5.$$

Ответ. Полученный результат соответствует стратегии A_1.

Критерий Гурвица взвешивает пессимистический и оптимистический подходы к анализу неопределенной ситуации. Данный критерий предназначен для выбора среднего элемента матрицы доходности, отличающегося от крайних состояний – от минимального и максимального элементов:

$$H = \max_i\left\{\lambda\cdot\max_j\left\{a_{ij}\right\} + \left(1-\lambda\right)\cdot\min_j\left\{a_{ij}\right\}\right\}, \qquad (5.37)$$

где λ – коэффициент оптимизма $0\le\lambda\le 1$.

Коэффициент λ выражает количественно «меру оптимизма» игрока A при выборе стратегии и определяется им из субъективных соображений на основе статистических исследований результатов принятия решений или личного опыта лица, принимающего решения в схожих ситуациях. Если λ – коэффициент оптимизма, то (1 – λ) коэффициент пессимизма.

Критерий Гурвица позволяет избежать пограничных состояний при принятии решения (неоправданного оптимизма и крайнего пессимизма относительно ожидаемой доходности) и выбрать наиболее вероятный вариант стратегии, обеспечивающий наилучшую эффективность. Критерий Гурвица ориентирован на установление баланса между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма при выборе стратегии путем взвешивания обоих исходов с помощью коэффициента оптимизма.

Задача 5.10.

Найти оптимальную стратегию по критерию Гурвица (из предыдущей таблицы 5.2) $\lambda = 0,5$.

Решение:

Воспользуемся формулой 5.37.

$$H_1 = (0,5 \cdot 20) + (1 - 0,5) \cdot 10 = 15;$$

$$H_2 = (0,5 \cdot 16) + (1 - 0,5) \cdot 12 = 14;$$

$$H_1 = (0,5 \cdot 18) + (1 - 0,5) \cdot 13 = 15,5;$$

$$H = \max_i \{15;14;15,5\} = 15,5.$$

Ответ. Полученный результат соответствует стратегии A_3.

Итак, задача о принятии решений в условиях неопределенности:

W (Вальда) → A_3;

M (оптимизма) → A_1;

P (пессимизма) → A_1;

S (Сэвиджа) → A_1;

H (Гурвица) → A_3.

Оптимальной является стратегия A_1.

5.9.2. Принятие решения в условиях частичной неопределенности

Критерий Байеса.

В статистической игре из прошлого опыта становится известно, как часто природа может находиться в состоянии Π_i. То есть известно распределение вероятностей:

$$p(\Pi_i) = (p_1, p_2, ..., p_m). \tag{5.38}$$

Природа принимает состояние Π_i с вероятностью p_i. В этом случае говорят, что решение принимается в условиях *частичной неопределенности.*

Если статистик использует чистую стратегию B_j, то средние потери определяются по обычной формуле математического ожидания:

$$R_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i. \tag{5.39}$$

По критерию Байеса наилучшей стратегией для статистика будет стратегия B_j^*, при которой средние потери R_j минимальны, т. е.

$$R^* = \min_{j=1,...,n} \left\{R_j\right\} = \min_{j=1,...,n} a_{ij} p_i. \tag{5.40}$$

5.10. Принятие решений в условиях риска

При решении задачи о принятии решений в условиях риска различным состояниям природы поставлены в соответствие вероятности.

Игрок *A* принимает решение на основе критерия максимального ожидаемого среднего выигрыша или минимального ожидаемого среднего риска.

Критерии оптимальности в условиях риска:

– *критерий Байеса;*

– *критерий Лапласа;*

Критерий Байеса относительно выигрышей.

Предположим, что игроку *A* известны не только состояния $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_n$ в которых случайным образом может находиться природа, но и вероятности $q_1, q_2, ..., q_n$ наступления этих состояний, при этом $\sum q_i = 1$.

Это говорит о том, что лицо, принимающее решение, находится в условиях риска.

Матрицу выигрышей игрока *A* и вероятности состояний природы *П* можно представить в виде общей матрицы:

$$A = \begin{vmatrix} A & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ q_j & q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{vmatrix}. \quad (5.41)$$

Чистую стратегию A_i можно определить как случайную величину со следующим законом распределения:

A_i	a_{i1}	a_{i2}	$\dots$	a_{in}
q	q_1	q_2	$\dots$	q_n

Математическое ожидание данной случайной величины

$$B_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j, \; i = 1, ..., m. \quad (5.42)$$

Оно означает средне взвешенное выигрышей *i* строки матрицы *A* с весами $q_1, q_2, ..., q_n$.

Критерий Байеса относительно выигрышей позволяет выбрать максимальный из ожидаемых элементов матрицы доходности при известной вероятности возможных состояний природы:

$$B = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right\}. \quad (5.43)$$

Задача 5.11.

Магазин может завести в различных пропорциях товары трех типов A_1, A_2, A_3.

Их реализация и прибыль зависит от вида товара и спроса.

Спрос имеет три состояния $(П_1, П_2, П_3)$ и не прогнозируется.

Матрица доходности представлена в таблице 5.2.

Необходимо найти оптимальную стратегию по критерию Байеса при вероятностях состояний природы $q_1 = 0,2;\ q_2 = 0,3;\ q_3 = 0,5.$

Решение.

Вычислим средние выигрыши.

Товар	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15
q_j	0,2	0,3	0,5

$$B_1 = (20 \cdot 0,2) + (15 \cdot 0,3) + (10 \cdot 0,5) = 13,5;$$

$$B_2 = (16 \cdot 0,2) + (12 \cdot 0,3) + (14 \cdot 0,5) = 13,8;$$

$$B_3 = (13 \cdot 0,2) + (18 \cdot 0,3) + (15 \cdot 0,5) = 15,5;$$

$$B = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right\} = \max\{13,5; 13,8; 15,5\} = 15,5.$$

Ответ. Оптимальной стратегией по критерию Байеса является стратегия A_3.

Критерий Байеса относительно рисков.

Матрицу рисков игрока A и вероятности состояний природы П можно представить матрицей:

$$R = \begin{vmatrix} A & П_1 & П_2 & \dots & П_n \\ A_1 & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ A_2 & r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \\ q_j & q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{vmatrix}. \tag{5.44}$$

Показателем эффективности стратегии A_i по критерию Байеса относительно рисков является математическое ожидание рисков, расположенных в *i* строке матрицы *R*:

$$B_i^r = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j,\ i = 1, ..., m. \tag{5.45}$$

Критерий Байеса относительно рисков позволяет выбрать минимальное значение из средних рисков при известной вероятности возможных состояний природы:

$$B^r = \min_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j \right\}. \tag{5.46}$$

Критерии Байеса относительно выигрышей и относительно рисков эквивалентны, т. е. по обоим критериям оптимальной будет одна и та же стратегия.

Критерий Лапласа относительно выигрышей.

Вероятность состояний природы оценивается субъективно как равнозначные:

$$q_j = n^{-1}; \tag{5.47}$$

$$\sum q_j = \sum n^{-1} = 1. \tag{5.48}$$

Этот принцип называется – принципом недостаточного основания Лапласа.

В игре с природой, в которой игрок *A* обладает *m* чистыми стратегиями A_i, природа П может случайным образом находиться в одном из *n* своих состояний Π_j, а матрица выигрышей игрока *A* задается следующим образом:

$$A = \begin{vmatrix} A & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ q_j & q_1 = n^{-1} & q_2 = n^{-1} & \dots & q_n = n^{-1} \end{vmatrix}. \tag{5.49}$$

Показателем эффективности чистой стратегии A_i по критерию Лапласа относительно выигрышей является среднеарифметическое выигрышей при этой стратегии:

$$L_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij},\ i = 1,\ldots,m. \tag{5.50}$$

Критерий Лапласа относительно выигрышей предполагает выбор варианта стратегии с максимальной ожидаемой доходностью при равной вероятности наступления возможных стратегий природы.

$$L = \max\frac{1}{n}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right\},\ i = 1,\ldots,m. \tag{5.51}$$

Задача 5.12.

Необходимо найти оптимальную стратегию по критерию Лапласа для (из табл. 5.2).

Решение.

Вычислим средние выигрыши.

Товар	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15
q_j	1/3	1/3	1/3

$$L_1 = \frac{20+15+10}{3} = 15;\ L_2 = \frac{16+12+14}{3} = 14;\ L_3 = \frac{13+18+15}{3} = 15{,}3.$$

$$L = \max\frac{1}{n}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right\} = \max\{15;14;15{,}3\} = 15{,}3.$$

Ответ: оптимальной стратегией по критерию Лапласа относительно выигрышей является стратегия A_3.

Критерий Лапласа относительно рисков.

Матрицу рисков игрока A и вероятности состояний природы П при критерии Лапласа относительно рисков можно представить матрицей:

$$R=\begin{vmatrix} A & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ A_1 & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ A_2 & r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \\ q_j & q_1=n^{-1} & q_2=n^{-1} & \dots & q_n=n^{-1} \end{vmatrix}. \qquad (5.52)$$

Показателем неэффективности чистой стратегии A_i по критерию Лапласа относительно рисков является среднеарифметическое рисков при этой стратегии.

$$L_i^r=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij},\ i=1,\ ...,\ m. \qquad (5.53)$$

Критерий Лапласа относительно рисков предполагает выбор варианта стратегии с минимальным риском при равной вероятности наступления возможных состояний природы.

$$L^r=\min\frac{1}{n}\left\{\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\right\},\ i=1,\ ...,\ m. \qquad (5.54)$$

Задача 5.13.

Пусть в предыдущей задаче известны вероятности p_i состояний Π_i.

Определить, какую стратегию выберет статистик.

П	p_i	B		
		B_1	B_2	B_3
Π_1	0,2	1	3	5
Π_2	0,5	5	2	4
Π_3	0,3	7	6	3

Решение.

Вычислим средние потери статистика:

$$R_1 = 1 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,5 + 7 \cdot 0,3 = 4,8;$$

$$R_2 = 3 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,3 = 3,4;$$

$$R_3 = 5 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,3 = 3,9.$$

Ответ. По критерию Байеса статистик должен выбрать стратегию B_2.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Классифицируйте игровые задачи в экономике.
2. Как построить математическую модель антагонистической игры двух лиц?
3. Что дают максиминная и минимаксная стратегии игроков?
4. Что является решением игры в чистых стратегиях?
5. Как найти решение игры в смешанных стратегиях?
6. Как построить математическую модель биматричной игры?
7. Что является решением биматричной игры?
8. Что является переговорным множеством в кооперативной игре?
9. Как построить математическую модель игры с природой?
10. Как найти решение игры в условиях полной неопределенности?
11. Как найти решение игры в условиях частичной неопределенности?
12. Как найти решение игры в условиях рисков?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.

Найти верхнюю цену игры:

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & -3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Задача 2.

Найти нижнюю цену игры:

$$Q = \begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Задача 3.

Найти цену матричной игры:

$$Q = \begin{vmatrix} 24 & -11 \\ -10 & 5 \end{vmatrix}.$$

Задача 4.

Найти оптимальную смешанную стратегию S_A^* игрока A в матричной игре:

$$Q = \begin{vmatrix} -7 & 9 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}.$$

Задача 5.

Предприятие, выпускающее банковское оборудование (счетчики банкнот и детекторы подлинности валют), реализует свою продукцию через фирменный магазин. Сбыт продукции зависит от стабильности курсов валют. По данным прошлых наблюдений предприятие в течение 1 квартала в условиях колебания курсов валют может реализовать 600 счетчиков купюр и 1975 детекторов подлинности купюр, а при стабильных курсах валют – 1000 счетчиков купюр 625 детекторов. Известно, что затраты на единицу продукции в течение указанных месяцев составили для счетчиков купюр 270 руб., для детекторов подлинности купюр – 80 руб., а цена реализации равна соответственно 480 руб. и 160 руб. (цифры условные).

Задача заключается в максимизации средней величины прибыли от реализации выпущенной продукции с учетом неопределенности в колебаниях курсов валют в рассматриваемый квартал. Таким образом, служба маркетинга предприятия должна в этих условиях определить оптимальную стратегию предприятия, обеспечивающую при любом состоянии валютного рынка определенный средний доход.

Задача 6.

Два человека одновременно показывают один или два пальца и называют число 1 или 2, означающее, по мнению говорящего, количество пальцев, показанное другим. После того, как пальцы показаны и числа названы, происходит распределение выигрыша по следующим правилам:

– если оба угадали или оба не угадали, сколько пальцев показал их соперник, выигрыш каждого равен нулю;

– если угадал только один, то противник платит угадавшему сумму денег, пропорциональную общему числу показанных пальцев.

Составить матрицу игры.

Задача 7.

Пусть дана платежная матрица. Найти решение игры, т. е. определить нижнюю и верхнюю цены игры и минимаксные стратегии.

I/II	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	5	3	8	2	2
A_2	1	6	4	3	1
A_3	9	5	4	7	4
β_j	9	6	8	7	

Задача 8.

Дана платежная матрица:

$$A = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Найти решение игры в смешанных стратегиях.

Задача 9.

Два банка A и B осуществляют капитальные вложения в пять строительных объектов. С учетом особенностей вкладов и местных условий прибыль банка A в зависимости от объемов финансирования выражается элементами платежной матрицы A.

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & -2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для упрощения задачи принять, что убыток банка B равен прибыли банка A.

1. Найти решение матричной игры в чистых стратегиях, если оно существует.
2. Упростить платежную матрицу.
3. Найти решение игры в смешанных стратегиях.

6. ТЕОРИЯ ГРАФОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

6.1. Основные понятия теории графов

Теория графов разработана для решения задач о геометрических конфигурациях, состоящих из точек и линий. В таких задачах несущественна форма соединяющих точки линий. Важно только то, что некоторая линия соединяет две точки из некоторого множества.

Иными словами, теория графов ограничивается исследованием совокупности двух конечных множеств: V-точек (вершин) и E-линий (ребер или дуг).

Определение графа.

Граф G представляет собой пару (V, E), где:

$V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ – множество вершин;

$E = \{(u, v) | u \in V, v \in V\}$ – множество ребер графа.

Неориентированный граф – множество ребер E состоит из неупорядоченных пар, $(u, v) = (v, u)$.

Ориентированный граф (орграф $\vec{G}$) – ребра являются упорядоченными парами, $(u, v) \neq (v, u)$.

С помощью языка графов удобно описывать физические, технические, экономические, социальные и другие системы. Рассмотрим ряд примеров приложений теории графов.

1. Транспортные задачи, в которых вершинами графа являются географические пункты, ребрами – дороги (автомобильные, железные и др.) и/или другие транспортные (например, авиационные) маршруты.

Сети снабжения (энергоснабжения, газоснабжения, снабжения товарами и т. д.), в которых вершинами являются пункты производства и потребления, а ребрами – возможные маршруты перемещения (линии электропередач, газопроводы, дороги и т. д.).

Соответствующий класс задач оптимизации потоков грузов, размещения пунктов производства и потребления и т. д., иногда называется *задачами обеспечения* или *задачами о размещении*. Их подклассом являются *задачи о грузоперевозках*.

2. *Технологические задачи*, в которых производственные элементы (заводы, цеха, станки и т. д.) отражеются в вершинах, а потоки сырья, материалов и продукции между ними – в дугах.

заключаются в определении оптимальной загрузки производственных элементов и обеспечивающих эту загрузку потоков.

3. *Обменные схемы* – модели таких явлений как бартер, взаимозачеты и т. д. Вершины графа являются участниками обменной схемы (цепочки), а дуги – потоками материальных и финансовых ресурсов между ними. Задача заключается в определении цепочки обменов, оптимальной с точки зрения, например, организатора обмена и согласованной с интересами участников цепочки и существующими ограничениями.

4. *Управление проектами.* С точки зрения теории графов проект – совокупность операций и зависимостей между ними (сетевой график). Хрестоматийным примером является проект строительства некоторого объекта.

Совокупность моделей и методов, использующих язык и результаты теории графов и ориентированных на решение задач управления проектами, получила название *календарно-сетевого планирования и управления (КСПУ).* В рамках КСПУ решаются задачи определения последовательности операций и распределения ресурсов между ними, оптимальных с точки зрения тех или иных критериев: времени выполнения проекта, затрат, риска и др.

5. *Модели коллективов и групп,* используемые в социологии, основываются на представлении людей или их групп в виде вершин, а отношений между ними (например, отношений знакомства, доверия, симпатии и т. д.) – в виде ребер или дуг. В рамках подобного описания решаются задачи исследования структуры социальных групп, их сравнения, определения агрегированных показателей, отражающих степень напряженности, согласованности взаимодействия и др.

6. *Модели организационных структур,* в которых вершинами являются элементы организационной системы, а ребрами или дугами – связи (информационные, управляющие, технологические и др. между ними).

Завершив краткое описание прикладных областей, вернемся к введению ***основных понятий*** теории графов.

Граф можно представить рисунком, на котором вершины изображаются точками (или кружочками), а ребра – линиями, не обязательно прямыми.

Форма и размеры изображения значения не имеют. Важно только, чтобы оно соответствовало множествам V и E.

На рис. 6.1 показано полное соответствие графов.

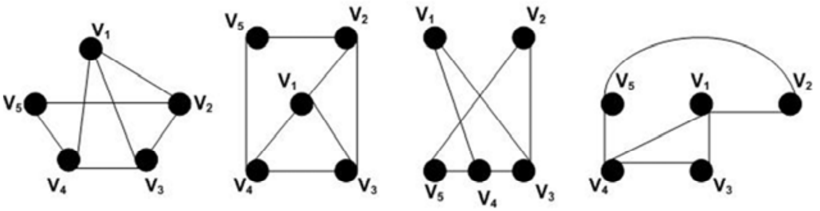

Рис. 6.1. Соответствие графов

Вершины графа связаны *отношением смежности*. Вершины u и v называются ***смежными***, если они соединены ребром, т. е. $\exists(u, v) \in E$.

Вершины и ребра графа связаны *отношением инцидентности*. Говорят, что вершина u или v и ребро (u, v) ***инцидентны***.

Если граф ориентированный, то вершину u называют началом (исходом), а v – концом (заходом) дуги (u, v).

$\deg(v)$ – *степень вершины* – число инцидентных ей ребер.

$\deg_{+}(v)$ – *полустепень исхода* – число исходящих из v ребер.

$\deg_{-}(v)$ – *полустепень захода* – число заходящих в v ребер.

Вершина, степень которой равна 1, называется *висячей или листом*.

Вершина, степень которой равна 0, называется *изолированной.*

Отношения инцидентности связывают не только вершины с ребрами, но и некоторые пары ребер.

Инцидентные ребра – это ребра, инцидентные одной и той же вершине.

Если множество ребер содержит несколько одинаковых элементов (u, v), то такие ребра называются *кратными*.

Ребра вида (u, u), ведущие из вершины в нее же, называют *петлей.*

В зависимости от наличия или отсутствия петель и кратных ребер, различают следующие типы графов (см. рис. 6.2):

– *простой граф* – граф, множество ребер которого не содержит петель и кратных ребер;

– *мультиграф* – граф, множество ребер которого содержит кратные ребра, но не содержит петель;

– *псевдограф* – граф, множество ребер которого содержит петли и кратные ребра.

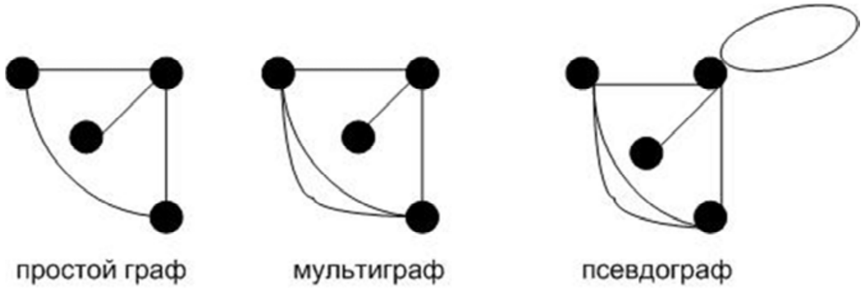

Рис. 6.2. Типы графов

Частью графа называется граф, все вершины и ребра которого содержатся среди вершин и ребер исходного графа. Если при этом сохранено отношение инцидентности (вершины смежные в исходном графе, смежны и в части графа), то данная часть является *подграфом*.

Суграф – это часть графа, содержащая все его вершины (см. рис. 6.3).

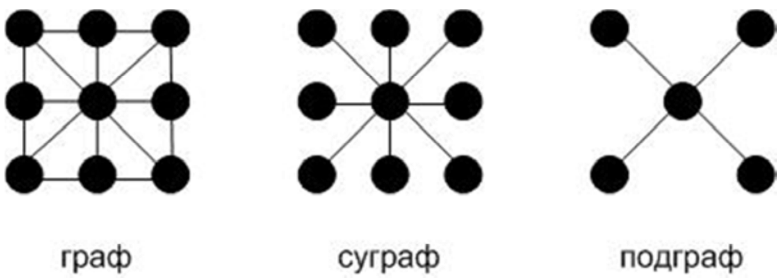

Рис. 6.3. Части графа

6.2. Способы задания графов

6.2.1. Матрица инцидентности неориентированного графа

Задать граф – значит описать множество его вершин и ребер, а также отношение инцидентности.

Если граф конечный, для описания его вершин и ребер достаточно их занумеровать. Пусть

$v_1, v_2, ..., v_n$ – вершины графа G;

$e_1, e_2, ..., e_m$ – его ребра.

Отношение инцидентности можно определить матрицей I_{ij}, имеющей m-строк и n-столбцов. Столбцы соответствуют вершинам графа, строки – ребрам. Матрица заполняется по следующему правилу:

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если ребро } e_i \text{ инцидентно вершине } v_j; \\ 0, \text{ если ребро } e_i \text{ не инцидентно вершине } v_j. \end{cases} \tag{6.1}$$

Такая матрица называется *матрицей инцидентности неориентированного графа.*

Задача 6.1.

Исходный граф представлен на рис. 6.4.

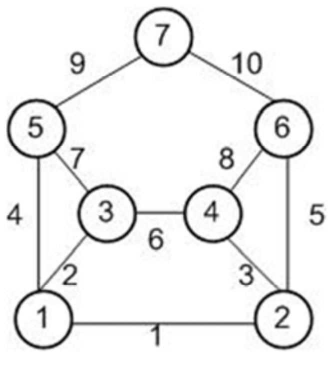

Рис. 6.4. Исходный граф для матрицы инцидентности

Необходимо задать его в виде матрицы инцидентности.

Решение. Содержится в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Матрица инцидентности неориентированного графа

		вершины						
		1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***
ребра	***1***	1	1	0	0	0	0	0
	2	1	0	1	0	0	0	0
	3	0	1	0	1	0	0	0
	4	1	0	0	0	1	0	0
	5	0	1	0	0	0	1	0
	…							

6.2.2. Матрица инцидентности ориентированного графа

Принцип построения остается прежним, отличие заключается только в следующем:

$$I_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ если вершина } v_j \text{ является началом ребра } i; \\ 1, \text{ если вершина } v_j \text{ является концом ребра } i; \\ k, \text{ если } i\text{-ребро является петлей на } j\text{-вершине }; \\ 0, \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases} \qquad (6.2)$$

Задача 6.2.

Исходный граф представлен на рис. 6.5.

Необходимо задать его в виде матрицы инцидентности.

Решение. Содержится в табл. 6.2.

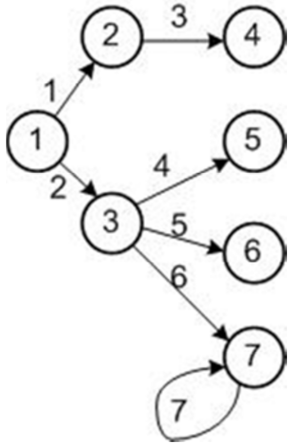

Рис. 6.5. Исходный ориентированный граф для матрицы инцидентности

Таблица 6.2

Матрица инцидентности ориентированного графа

		вершины						
		1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***
ребра	***1***	–1	1	0	0	0	0	0
	2	–1	0	1	0	0	0	0
	3	0	–1	0	1	0	0	0
	4	0	0	–1	0	1	0	0
	5	0	0	–1	0	0	1	0
	6	0	0	–1	0	0	0	1
	7	0	0	0	0	0	0	2

6.2.3. Матрица смежности неориентированного графа

Для графа $G(V, E)$ – это квадратная матрица $A(G)$ порядка $n(n = |V|)$, элементы которой определяются следующим образом:

a_{ij} – равен числу ребер, соединяющих вершины v_i и v_j (при этом петли считаем дважды).

Задача 6.3.
Исходный граф представлен на рис. 6.6.
Необходимо задать его в виде матрицы инцидентности.

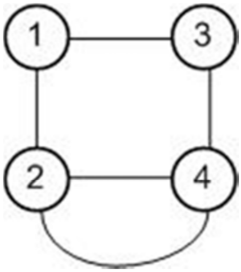

Рис. 6.6. Исходный граф для матрицы смежности

Решение. Представим исходный граф в виде матрицы:

$$A(G) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

6.2.4. Матрица смежности ориентированного графа

Для графа $\vec{G}(V, \vec{E})$ – это квадратная матрица $A(\vec{G})$ порядка $n(n = |V|)$, элементы которой определяются следующим образом:

a_{ij} – равен числу дуг, ведущих из вершины v_i в вершину v_j (т. е. исходящих из v_i и заходящих в v_j). Матрица смежности неориентированного графа симметрична, сумма элементов в *j*-строке равна сумме элементов в *i*-столбце и, соответственно, степени *i*-вершины.

Задача 6.4.
Исходный граф представлен на рис. 6.7.

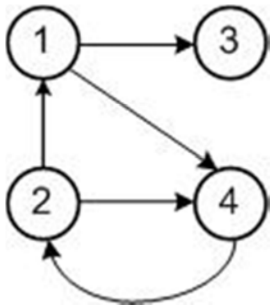

Рис. 6.7. Исходный ориентированный граф для матрицы смежности

Необходимо задать его в виде матрицы инцидентности.

Решение. Представим исходный граф в виде матрицы

$$A\left(\vec{G}\right)=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

6.3. Некоторые задачи теории графов

Над графами могут выполняться специальные *операции*, основные из которых следующие: *удаление ребра; удаление вершины; добавление вершины; добавление ребра; отождествление вершин; стягивание ребра; размножение вершины; расщепление вершины; дублирование вершины; объединение графов; пересечение графов; соединение графов; декартово произведение графов.*

6.3.1. Задача о минимальном остове

Дерево – это связный граф без циклов.

Остов или *остóвное дерево* графа – любой его подграф, содержащий все вершины графа и являющийся деревом.

Вес остова равен сумме весов всех ребер, составляющих остов.

Минимальным остовом графа будем называть остов минимального веса.

Если веса ребер графа различны, то минимальный остов выявляется однозначно. В противном случае может быть несколько решений (но вес будет один и тот же).

Рассмотрим задачу построения остовного дерева, имеющего наименьшую сумму длин ребер.

На рис. 6.8 изображены населенные пункты (вершины графа) и связывающие их грунтовые дороги (ребра графа).

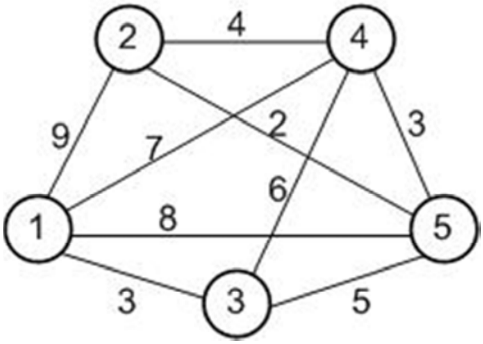

Рис. 6.8. Исходный граф

Здесь также отмечены расстояния между населенными пунктами, выраженные в условных единицах. Требуется спланировать наиболее экономичную сеть дорог с твердым покрытием, заменяющих часть грунтовых дорог и связывающую все населенные пункты.

Решение.

Рассмотрим какую-нибудь из вершин графа, например, вершину 3. Из всех ребер, соединяющих вершину 3 с остальными вершинами графа, самым коротким является ребро, соединяющее вершины 3 и 1.

Теперь рассмотрим множество всех ребер, соединяющих вершины 3 и 1 с остальными вершинами графа. Самым коротким из них является ребро, соединяющее вершины 3 и 5.

Действуя по аналогии, рассмотрим множество всех ребер, соединяющих вершины 3, 1 и 5 с остальными вершинами графа. Самым коротким из них является ребро, соединяющее вершины 5 и 2.

Наконец, рассмотрим множество всех ребер, соединяющих вершины 3, 1, 5 и 2 с остальными вершинами графа. Самым коротким из них является ребро, соединяющее вершины 5 и 4.

В результате мы получаем граф (рис. 6.9).

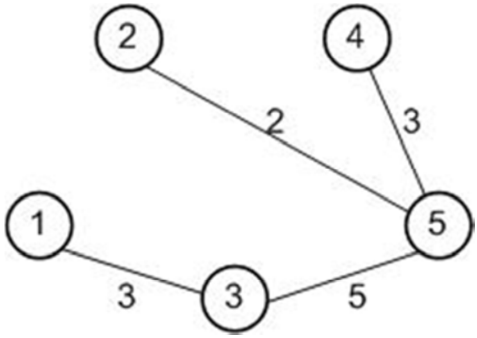

Рис. 6.9. Остовное дерево

Этот граф является остовным деревом для графа, изображенного на предыдущем рисунке, причем таким остовным деревом, которое обладает наименьшей суммой длин ребер, а дорожная сеть, изображенная на рис. 6.9, является решением рассматриваемой задачи. Длина этой дорожной сети равна 13 условным единицам.

Замечание. Если в качестве первого шага расчетного алгоритма, использованного при решении данной задачи, избрать не вершину 3, а любую другую вершину графа, то полученное в результате работы алгоритма минимальное остовное дерево будет тем же самым.

6.3.2. Задача о кратчайшем пути

Задачи поиска кратчайших и длиннейших путей на графах возникают в различных областях управления.

Пусть задана сеть из $(n+1)$ вершины, т. е. ориентированный граф, в котором выделены две вершины: вход (нулевая вершина) и выход (вершина с номером n). Для каждой дуги заданы числа, называемые длинами дуг.

Длиной пути (контура) называется сумма длин входящих в него дуг. Если длины дуг не заданы, то длина пути (контура) определяется как число входящих в него дуг.

Задача заключается в поиске кратчайшего пути (пути минимальной длины) от входа до выхода сети.

Аналогично задаче о кратчайшем пути формулируется и решается ***задача о максимальном (длиннейшем) пути*** – достаточно изменить знаки дуг на противоположные и решить задачу о кратчайшем пути.

Для существования решения задачи о максимальном пути необходимо и достаточно отсутствие контуров положительной длины.

В ***задаче поиска пути максимальной надежности*** длины дуг интерпретируются, как вероятности того, что существует связь между соответствующими двумя пунктами. Заменяя длины дуг их логарифмами, взятыми с обратными знаками, получаем, что путь максимальной надежности в исходном графе будет соответствовать кратчайшему пути в новом графе.

Гораздо более сложными (*NP*-полными) являются ***задачи поиска элементарных путей кратчайшей (максимальной) длины*** в случае, когда в сети имеются контуры отрицательной (соответственно, положительной) длины. Эффективных (не сводящихся к полному перебору) точных алгоритмов для них не существует.

К таким же сложным задачам относятся и ***задачи поиска кратчайших или длиннейших путей или контуров, проходящих через все вершины графа.***

Элементарный путь (контур), проходящий через все вершины графа, называется *гамильтоновым путем* (контуром).

Классическим примером задачи поиска гамильтонова контура является ***задача коммивояжера***, заключающаяся в следующем.

Коммивояжер (бродячий торговец) должен посетить n-городов, побывав в каждом ровно один раз, и вернуться в исходный пункт своего путешествия. Заданы неотрицательные длины дуг, интерпретируемые как расстояние между городами или стоимость проезда. Требуется найти гамильтонов контур минимальной длины. В графе из n вершин существует $n!$ гамильтоновых контуров. Решается задача коммивояжера методом ветвей и границ.

Алгоритмы решения задачи о кратчайшем пути позволяют разбирать широкий класс задач дискретной оптимизации.

В качестве примера приведем задачу целочисленного линейного программирования – *задачу о ранце* (о рюкзаке), к которой сводятся многие практически важные задачи определения оптимальной комбинации факторов при ограничениях на общий вес, площадь, объем, финансирование и т. д.

6.3.3. Задача о ранце

Пусть имеется n-предметов, которые могут быть полезны в походе. Полезность i-предмета оценивается числом a_i, а вес предмета (или его объем) – b_i. Суммарный вес, который может нести турист (объем рюкзака), ограничен величиной R.

Требуется найти набор предметов, обладающий максимальной суммарной полезностью и удовлетворяющий ограничению.

Обозначим

$$x_i = \begin{cases} 0, \text{ если предмет } i \text{ не кладется в ранец;} \\ 1, \text{ если предмет } i \text{ кладется в ранец.} \end{cases}$$

Тогда задача о ранце имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \to \max_x; \tag{6.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i \le R. \tag{6.4}$$

Верхняя оценка числа возможных комбинаций – 2^n. Однако для решения задачи о ранце существует эффективный алгоритм – *метод динамического программирования*.

При его использовании строится сеть по следующим правилам. По оси абсцисс последовательно откладывают номера предметов, по оси ординат – их вес. Из каждой точки (начиная с точки (0; 0)) выходят две дуги – горизонтальная (соответствующая альтернативе «не брать предмет») и наклонная (соответствующая альтернативе «взять предмет»), вертикальная проекция которой равна весу предмета. Длины наклонных дуг полагают равными ценности предметов, длины горизонтальных дуг – нулю. Полученная сеть (конечная вершина является фиктивной, и вес любой дуги, соединяющей ее с другими вершинами, равен нулю) обладает следующими свойствами: любому решению задачи соответствует некоторый путь в этой сети; любому пути соответствует некоторое решение задачи. Таким образом, задача свелась к нахождению пути максимальной длины.

6.3.4. Задача поиска контура минимальной длины

Задачи этого типа решаются следующим образом. Если известно, что искомый контур содержит некоторую вершину, то нужно определить кратчайшей путь от этой вершины до нее же.

Так как в общем случае контур минимальной длины может проходить через любую вершину графа, то находятся контуры минимальной длины, проходящие через каждую вершину, и среди них выбирается кратчайший.

Путь максимальной эффективности. Пусть задана сеть, в которой для каждой дуги (i, j) определены два числа (E_{ij}, S_{ij}), интерпретируемые как эффект при осуществлении соответствующей операции E_{ij}, и затраты на эту операцию S_{ij}.

Эффективность $K(\mu)$ пути μ определяется как отношение его эффекта $E(\mu)=\sum_{\mu} E_{ij}$ к затратам $S(\mu)=\sum_{\mu} S_{ij}$.

Задача заключается в поиске пути μ^* максимальной эффективности: $K(\mu)\to \max$.

Путь максимальной эффективности с учетом штрафов. Пусть для каждой дуги $(n+1)$ – вершинной сети заданы два числа: эффект E_{ij} и время t_{ij}. Каждый путь μ из начальной вершины в конечную вершину характеризует некоторый процесс (например, проект). Под продолжительностью пути будем понимать сумму времен его дуг. Если продолжительность процесса отличается от заданного времени *T*, то налагаются штрафы $\delta(\mu)$, пропорциональные отклонению, то есть:

$$\delta(\mu)=\begin{cases}\alpha\left(T-T(\mu)\right), T(\mu)\le T\\ \beta\left(T(\mu)-T\right), T\le T(\mu),\end{cases} \tag{6.5}$$

где коэффициенты α и β могут быть как положительными, так и отрицательными.

Задача заключается в том, чтобы найти путь μ^*, максимизирующий разность между эффектом и штрафами, т. е.

$$\mu^* = \arg\max_\mu \left[E(\mu) - \delta(\mu)\right]. \tag{6.6}$$

6.3.5. Задачи о максимальном потоке

Рассмотрим сеть из $(n+1)$ вершины.

Пусть каждой дуге поставлено в соответствие число c_{ij}, называемое *пропускной способностью дуги* (i, j).

Потоком x в сети называется совокупность чисел $\{x_{ij}\}$, где x_{ij} – поток по дуге (i, j), удовлетворяющий условиям:

$$0 \le x_{ij} \le c_{ij};\ i,\ j = 0, 1, ..., n;\ \sum_j x_{ij} = \sum_k x_{ki},\ i \ne 0, n. \tag{6.7}$$

Величиной потока x называется

$$\Phi(x) = \sum_i x_{0i} = \sum_i x_{in}. \tag{6.8}$$

Задача о максимальном потоке заключается в определении потока максимальной величины.

Поток минимальной стоимости. Предположим, что задана сеть с пропускными способностями дуг c_{ij}. Пусть также для каждой дуги (i, j) заданы число s_{ij}, интерпретируемое как затраты (например, затраты на перевозку единицы груза из вершины i в вершину j).

Задача поиска потока минимальной стоимости заключается в нахождении для заданной величины φ суммарного потока ее распределения по дугам, минимизирующего сумму затрат.

Частным случаем задачи о потоке минимальной стоимости является транспортная задача, в которой имеется двудольный граф (двудольным называется граф, множество вершин которого может быть разбито на два непересекающихся подмножества, причем ребра (дуги) графа соединяют вершины только из разных подмножеств), вершины сети разбиты на две группы – m-поставщиков и n-потребителей.

Для поставщиков заданы имеющиеся у них количества единиц товара (груза и т. д.) a_i, $i = 1, ..., m$, для потребителей – требуемые им количества единиц товара b_j, $j = 1, ..., n$. Также известны затраты s_{ij} перевозки единицы товара от i-поставщика j-потребителю.

Пусть задача является замкнутой, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ – суммарное предложение равно суммарному спросу (вводя фиктивного поставщика или фиктивного потребителя, любую незамкнутую задачу можно свести к замкнутой). Требуется определить потоки товаров от потребителей к поставщикам, минимизирующие суммарные затраты.

Транспортная задача. Добавляя к двудольному графу вход «0» и выход «z» и соединяя вход и выход с остальными вершинами дугами с потоком $x_{0i} = a_i$, $i = 1, ..., m$; $x_{jz} = b_j$, $j = 1, ..., n$, получаем задачу о потоке минимальной стоимости.

Частным случаем транспортной задачи является ***задача о назначении***, заключающаяся в следующем.

Имеются n человек (работников), которые могут выполнять различные работы (занимать различные должности); число работ равно числу работников (введя фиктивные должности и/или фиктивные работы, всегда можно незамкнутую задачу привести к рассматриваемой замкнутой форме).

Известны затраты s_{ij} на назначение i-работника на j-должность (например, минимальная зарплата, за которую он согласится работать на этой должности).

Требуется найти назначение работников на должности (каждого работника на одну и только одну должность), минимизирующее суммарные затраты (если s_{ij} интерпретируется как эффективность от работы i-работника на j-должности, то оптимальное назначение должно максимизировать суммарную эффективность).

6.4. Методы сетевого планирования и управления

Методы сетевого планирования и управления были разработаны в конце 50-х годов в США. В 1956 г. М. Уолкер и Д. Келли стали использовать ЭВМ для составления планов-графиков крупных комплексов работ по модернизации заводов фирмы «Дюпон». В результате был создан простой и эффективный метод планирования, получивший название метода Уолкера-Келли, а позже – ***метода критического пути CPM*** (*Critical Path Method*).

Параллельно и независимо в военно-морских силах США был создан ***метод оценки и пересмотра программ PERT*** (*Program Evaluation and Review Technique*). Данный метод был создан для реализации проекта разработки ракетной системы *Polaris*, объединяющего около 3800 основных подрядчиков и состоящего из 60 тыс. операций. Использование метода *PERT* позволило руководству программы точно знать, что требуется делать в каждый момент времени и кто именно должен это делать, а также вероятность своевременного завершения отдельных операций. Руководство программой оказалось настолько успешным, что проект удалось завершить на два года раньше запланированного срока. Методика отлично себя зарекомендовала при координации работ, выполняемых различными подрядчиками в рамках крупных проектов по разработке новых видов вооружения.

Назначение методов было одинаковым – планирование комплекса работ. Различие между методами *CPM* и *PERT* заключается в том, что в первом из них длительности работ полагались известными, а во втором рассчитывались как вероятностная оценка длительности работ. Впоследствии оба метода были объединены под общим названием *PERT-CPM* (наиболее распространенный русскоязычный вариант – ***метод сетевого планирования и управления***).

В настоящее время технология сетевого планирования и управления достаточно хорошо отлажена, она зарекомендовала себя в таких областях деятельности как:

– разработка и подготовка к производству новых видов изделий;
– строительство и реконструкция объектов;
– планирование выполнения НИОКР;
– разработка программных продуктов и т. д.

6.4.1. Основные понятия сетевого планирования и управления

Метод сетевого планирования и управления предполагает графическое изображение комплекса работ в виде сетевой модели или сетевого графика.

Основными элементами сетевой модели являются:

– работа (обозначается $\rightarrow$);

– событие (обозначается $\otimes$).

Работа – это действие, приводящее к определенному результату. Работы бывают трех видов:

– *действительная работа*, требует затрат времени и ресурсов;

– *работа – ожидание*, требует только затрат времени;

– *фиктивная работа*, как логическая зависимость, определяющая взаимосвязь событий в сетевой модели.

На сетевом графике работа изображается в виде стрелочки, над которой указывается продолжительность выполнения работы.

Например, работа $(i-j)$, продолжительность выполнения которой составляет 3 дня (рис. 6.10).

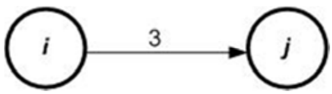

Рис. 6.10. Изображение работ на сетевом графике

Фиктивная работа изображается пунктиром (рис. 6.11).

Рис. 6.11. Изображение фиктивной работы

Событие – это результат выполнения одной или нескольких работ. Событие указывает на возможность перехода к началам следующих работ. События бывают трех видов:

– *исходное событие*, у которого нет предшествующих работ;

– *завершающее событие*, нет последующих работ;

– *промежуточное событие*, у которого есть и предшествующие и последующие работы.

На сетевом графике событие изображается в виде кружочка.

Любая непрерывная последовательность работ и событий образуют ***путь***. Путь также бывает трех видов:

– *полный путь*, непрерывная последовательность работ от исходного события до завершающего. На сетевом графике полных путей может быть несколько;

– *укороченный путь*, непрерывная последовательность работ от исходного события до одного из промежуточных (или от одного из промежуточных до завершающего);

– *критический путь* – это полный путь максимальной продолжительности.

Сетевая модель отражает логическую последовательность работ, существующую взаимосвязь и планируемую продолжительность. Приступая к построению сетевого графика, прежде всего следует установить, какие работы:

– должны быть завершены раньше, чем начнется данная работа;

– могут быть начаты после завершения данной работы;

– могут выполняться одновременно с данной работой.

6.4.2. Правила построения сетевого графика

При построении сетевых графиков необходимо придерживаться следующих правил.

1. Сетевой график строится слева направо.

2. При построении сетевого графика необходимо избегать многочисленных пересечений стрелок.

3. Нумерация событий проводится после построения графика в целом.

4. На сетевом графике не должно быть:

– событий или работ, имеющих одинаковые номера;

– тупиковых событий (т. е. событий из которых не выходит ни одна работа, при этом событие не является завершающим) (рис. 6.12). Наличие тупикового события указывает либо на неточность построения сетевого графика, либо на невозможность использования результатов предшествующей работы;

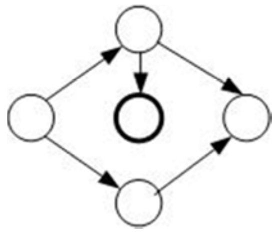

Рис. 6.12. Тупиковое событие

– хвостовых событий (т. е. событий у которых нет предшествующих работ, при этом событие не является исходным) (рис. 6.13);

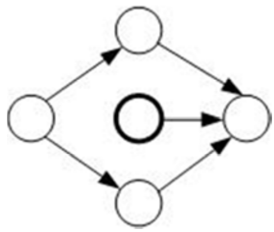

Рис. 6.13. Хвостовое событие

– не должно быть параллельных работ, как это изображено на рис. 6.14. Если обнаружены параллельные работы, то необходимо ввести фиктивную работу и фиктивное событие (рис. 6.15.);

Рис. 6.14. Параллельные работы

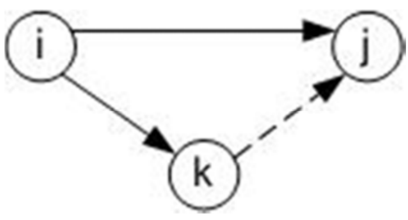

Рис. 6.15. Графическое изображение параллельных работ

– на сетевом графике не должно быть замкнутых контуров и петель (рис. 6.16).

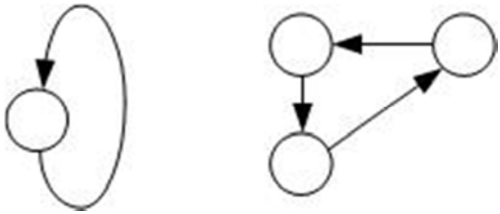

Рис. 6.16. Графическое изображение замкнутого «контура» и «петли»

Правила нумерации событий на сетевом графике.

1. Исходному событию присваивается либо 0 либо 1 (чаще нумеруют начиная с 1).
2. Вычеркиваются все работы, выходящие из этого события.
3. Следующий номер присваивается событию, у которого все входящие работы вычеркнуты. Если таких событий несколько, то нумерация произвольная (обычно слева направо и сверху вниз).

Рассмотрим построение сетевого графика на примере.

Задача 6.5.

Комплекс работ по реконструкции действующего объекта состоит из 6-ти работ. Работу 4 можно начинать после окончания работ 1 и 2, работу 5 – после окончания работ 3 и 4, работу 6 – после окончания работы 2. Необходимо построить сетевой график и провести нумерацию событий (рис. 6.17).

Решение.

Приступая к построению сетевого графика, рекомендуется нарисовать краткую запись условия задачи.

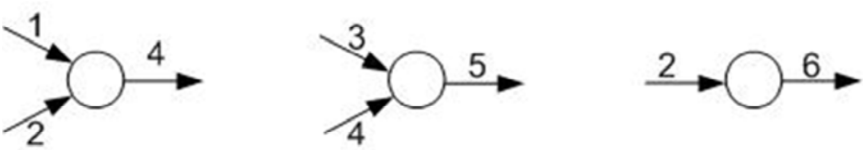

Рис. 6.17. Краткая запись условия задачи

Построение сетевого графика начинается с исходного события (рис. 6.18).

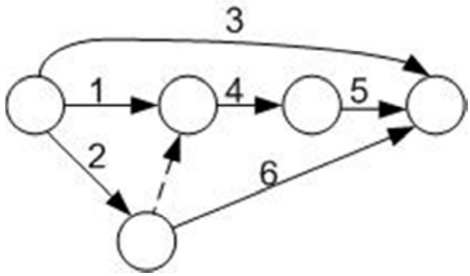

Рис. 6.18. Сетевой график без нумерации событий

Следующий этап – нумерация событий. Нумеровать рекомендуется только те события, у которых все входящие работы вычеркнуты (рис. 6.19). Это правило следует выполнять с тем, чтобы избежать появления работ с кодами, где первая цифра, означающая начало работы больше, чем последняя (окончание работы).

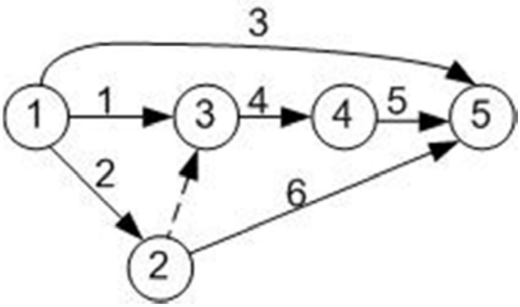

Рис. 6.19. Сетевой график

Задача 6.6.

Комплекс работ по разработке новой техники состоит из 6-ти работ. Известно, что 5-ую работу можно начинать после окончания 1, 2 и 3; 6-ую работу – после окончания 3 и 4. Необходимо построить сетевой график и провести нумерацию событий. Краткая запись условия задачи (рис. 6.20–6.22):

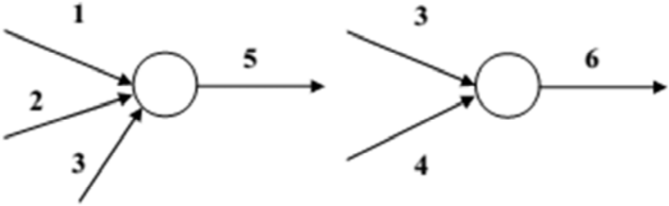

Рис. 6.20. Условия задачи 6.6

Решение.

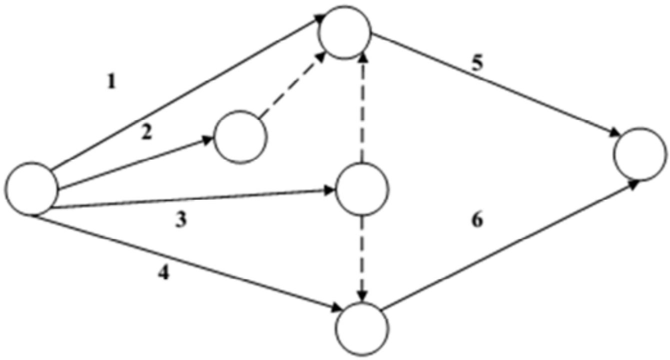

Рис. 6.21. Построение составного графика

Нумерация событий:

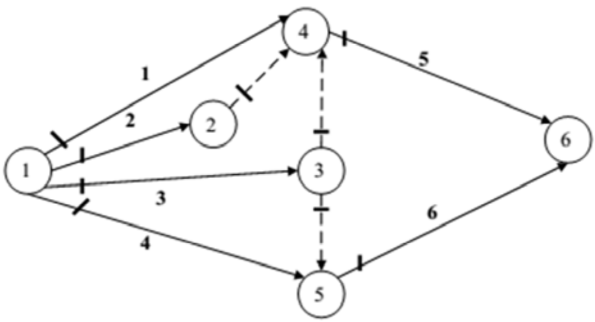

Рис. 6.22. Нумерация событий

Задача 6.7.

Комплекс работ по ремонту оборудования состоит из 6 работ. Работа 4 может быть выполнена после окончания работы 3, работа 5 – после окончания работ 1 и 3, а работа 6 – после 1, 2, 3. Необходимо построить сетевой график и провести нумерацию событий.

Краткая запись условия задачи (рис. 6.23–6.25)

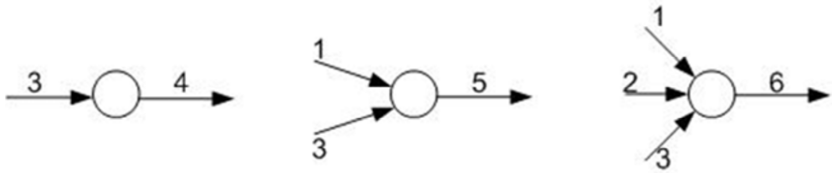

Рис. 6.23. Краткая запись условия задачи

Решение.

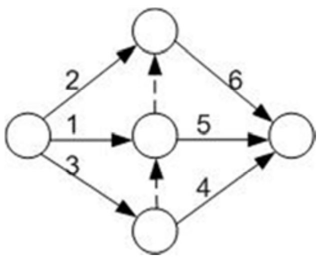

Рис. 6.24. Сетевой график без нумерации событий

Нумерация событий:

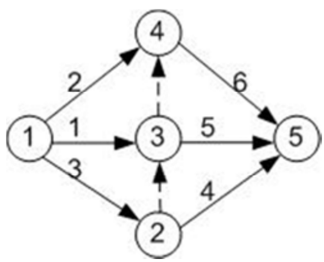

Рис. 6.25. Сетевой график

6.4.3. Правила расчета параметров сетевых графиков

Основными параметрами сетевого графика являются:

t_{ij} – продолжительность выполнения работы *ij*;

$t_{ij}^{\text{рн}}$, $t_{ij}^{\text{ро}}$ – возможно ранние сроки начала и окончания работы *ij*;

$t_{ij}^{\text{пн}}$, $t_{ij}^{\text{по}}$ – допустимо поздние сроки начала и окончания работы *ij*;

$S_{\text{кр}}$ – длина критического пути;

R_{ij} – полный резерв времени работы *ij*;

r_{ij} – частный резерв времени.

Для расчета параметров сетевых графиков необходимо знать время выполнения каждой из работ. В зависимости от подхода к определению времени выполнения работ различают детерминированные и стохастические сетевые графики.

Детерминированным называется сетевой график, продолжительность выполнения работ у которого установлена на основе действующих норм и нормативов. Если нормы и нормативы отсутствуют, то продолжительность выполнения работы определяется экспертным путем. Такие графики называются *стохастическими.*

В зависимости от степени известности работы, новизны разработки могут быть использованы двухзначные и трехзначные оценки.

При двухзначной оценке эксперты определяют минимальное $t_{ij}^{\min}$ и максимальное время выполнения работ $t_{ij}^{\max}$.

Средняя продолжительность выполнения работы определяется по формуле:

$$\overline{t_{ij}} = \frac{3t_{ij}^{\min} + 2t_{ij}^{\max}}{5}. \tag{6.9}$$

При трехзначной оценке добавляется еще наиболее вероятное время выполнения работы $(t_{\text{нв}})$. Расчетная формула выглядит следующим образом:

$$\overline{t_{ij}} = \frac{t_{ij}^{\min} + 4t_{ij} + t_{ij}^{\max}}{6}. \tag{6.10}$$

Располагая указанными экспертными оценками времени выполнения работы можно определить меру неопределенности – дисперсию σ^2:

$$\sigma^2 = \left(\frac{t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}}{6} \right)^2 . \qquad (6.11)$$

У детерминированных сетевых графиков время выполнения работ известно точно, соответственно, дисперсия равна нулю.

При достаточно большом количестве работ можно утверждать, а при малом лишь предполагать, что общая продолжительность любого, в том числе и критического, пути имеет нормальный закон распределения. Среднее значение длины критического пути равно сумме средних значений продолжительности составляющих его работ

$$\overline{T}_{\text{кр}} = \overline{t}_{1-2} + \overline{t}_{2-3} + \overline{t}_{3-5} + \overline{t}_{5-7} + \overline{t}_{7-9} + \ldots + \overline{t}_{n-z} . \qquad (6.12)$$

Дисперсия времени выполнения проекта равна сумме дисперсий времени выполнения критических работ:

$$\sigma_{\text{проекта}} = \sigma_{1-2} + \sigma_{2-3} + \sigma_{3-5} + \sigma_{5-7} + \sigma_{7-9} + \ldots + \sigma_{n-z} . \qquad (6.13)$$

Существует три способа расчета параметров сетевых графиков:
– *аналитический,*
– *табличный,*
– *графический* способ.

6.4.4. Аналитический метод расчета параметров сетевых графиков

Расчет параметров сетевых графиков аналитическим методом выполняется в три этапа.

Этап 1.

На первом этапе рассчитываются ранние начала работ, ранние окончания работ, а также длина критического пути.

Расчет ранних сроков ведется в направлении слева направо. Для работ, выходящих из исходного события время раннего начала принимается равным нулю:

$$t^{\text{рн}}_{\text{исх. события}} = 0. \qquad (6.14)$$

Зная продолжительность выполнения работы и возможно раннее начало этой работы, можно определить время раннего его окончания:

$$t_{ij}^{\text{ро}} = t_{ij}^{\text{рн}} + t_{ij}. \qquad (6.15)$$

Если у данной работы ij только одна предшествующая работа, то ее раннее начало совпадает с ранним окончанием предшествующей (рис. 6.26):

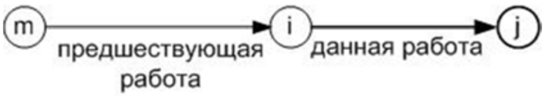

Рис. 6.26. Вычисление раннего начала работ

$$t_{ij}^{\text{рн}} = t_{ij}^{\text{ро}}. \qquad (6.16)$$

Если у данной работы ij две и более предшествующих работы, то ее раннее начало определяется как максимальное раннее окончание предшествующих (рис. 6.27).

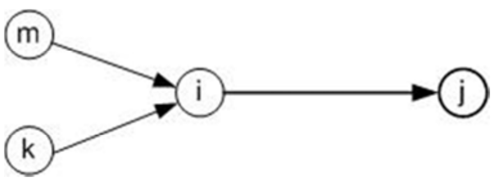

Рис. 6.27. Вычисление раннего начала работы, имеющие две предшествующие работы

$$t_{ij}^{\text{рн}} = \max\left\{t_{mi}^{\text{ро}};\, t_{ki}^{\text{ро}}\right\}. \qquad (6.17)$$

Если работы выходят из одного события, то время ранних начал у них одинаковые. Длина критического пути определяется как максимальное раннее окончание работ, входящих в завершающее событие, и одновременно длина критического пути определяет допустимо позднее окончание всех завершающих работ.

$$S_{\text{кр}} = \max\left\{t^{\text{ро}}_{\text{зав.событие}}, t^{\text{по}}_{\text{зав.работа}}\right\}. \tag{6.18}$$

Этап 2.

На втором этапе рассчитываются поздние сроки начала и окончания работ, причем расчет ведется в направлении от завершающего события к исходному. Допустимо позднее начало работы *ij* определяется по формуле:

$$t^{\text{пн}}_{ij} = t^{\text{по}}_{ij} - t_{ij}. \tag{6.19}$$

Если у данной работы *ij* только одна последующая работа, то ее позднее окончание совпадает с поздним началом последующей (рис. 6.28).

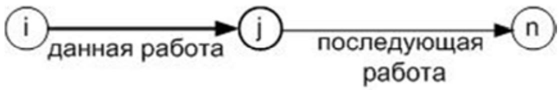

Рис. 6.28. Вычесление позднего окончания работ

$$t^{\text{по}}_{ij} = t^{\text{пн}}_{ij}. \tag{6.20}$$

Если у данной работы *ij* несколько последующих работ, то ее позднее окончание определяется как минимальное из поздних начал последующих работ (рис. 6.29).

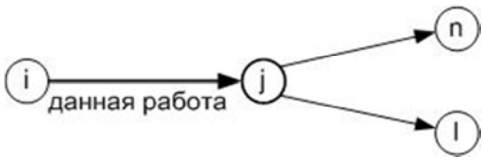

Рис. 6.29. Вычесление позднего окончания работ,
имеющей две последующие работы

$$t_{ij}^{\text{по}} = \left\{ t_{in}^{\text{пн}}; t_{jl}^{\text{пн}} \right\}. \qquad (6.21)$$

Если у работы ij раннее начало совпадает с поздним началом $\left(t_{ij}^{\text{рн}} = t_{ij}^{\text{пн}}\right)$ и ранее окончание совпадает с поздним окончанием $\left(t_{ij}^{\text{ро}}, t_{ij}^{\text{по}}\right)$, то такая работа относится к критическому пути. Критический путь показывает минимально необходимое время для выполнения комплекса работ.

Этап 3.

На третьем этапе определяются частные и полные резервы.

Полный резерв времени работы ij $\left(R_{ij}\right)$ – это запас времени, на который можно сдвинуть начало выполнения работы или увеличить продолжительность ее выполнения Δ, при этом длина критического пути останется неизменной.

Полный резерв времени работы ij определяется как разность между началами работы либо окончаниями работы:

$$R_{ij} = t_{ij}^{\text{пн}} - t_{ij}^{\text{рн}} = t_{ij}^{\text{по}} - t_{ij}^{\text{ро}}. \qquad (6.22)$$

Частный резерв времени $\left(r_{ij}\right)$ – запас времени, на который можно сдвинуть начало выполнения работы или увеличить ее продолжительность, при этом раннее начало последующей работы останется неизменным. Частный резерв времени определяется как разность между ранним начало последующей работы и ранним окончанием данной работы (рис. 6.30):

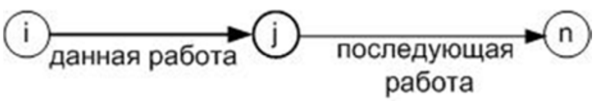

Рис. 6.30. Вычисление частичного резерва времени

$$r_{ij} = t_{ij}^{\text{рн}} = t_{ij}^{\text{ро}}. \qquad (6.23)$$

Если у данной работы нет ни частного, ни полного резерва, то она относится к критическому пути. Рассмотрим расчет параметров сетевого графика на примере.

Задача 6.8.

Комплекс работ по проведению маркетингового исследования состоит из 6 работ. Логическая связь между работами и их продолжительность представлены на рис. 6.31.

Необходимо рассчитать параметры сетевого графика аналитическим методом.

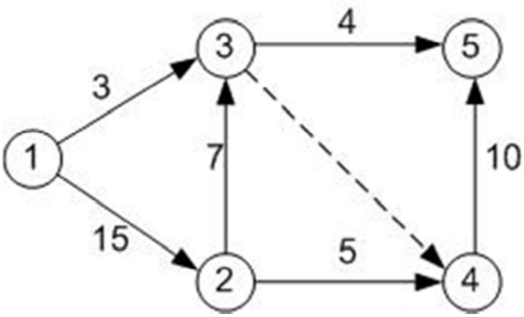

Рис. 6.31. Исходные данные

Этап 1.

Расчет ранних сроков начала и окончания работ

Работы 1–3 и 1–2 выходят из исходного события (рис. 6.32), следовательно, ранние начала этих работ равны нулю:

$$\left(PH_{1-3} = 0;\ PH_{1-2} = 0\right).$$

Зная ранние начала работ и продолжительность их выполнения можем определить время окончания работ:

$$PO_{1-3} = 0 + t_{ij} = 0 + 3 = 3 \text{ дня;}$$

$$PO1 - 2 = 0 + t_{ij} = 0 + 15 = 15 \text{ дней.}$$

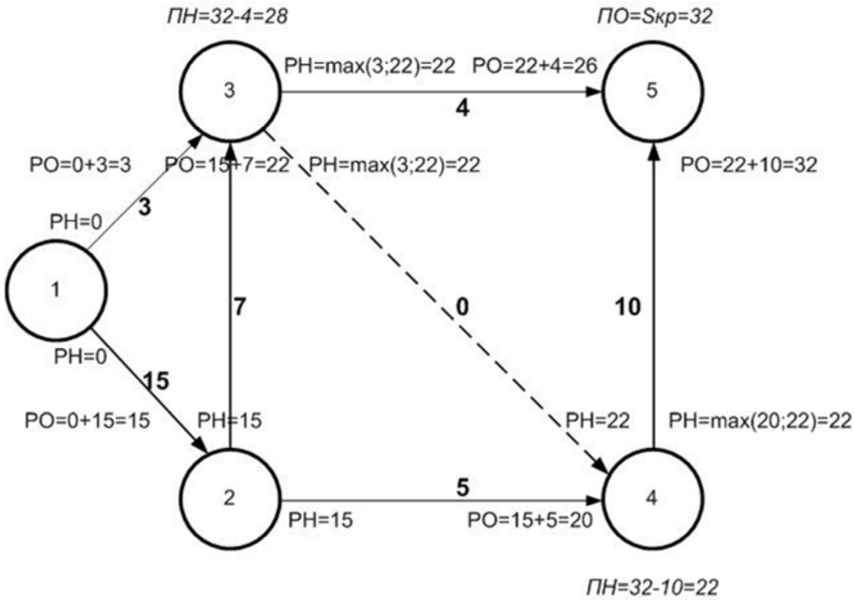

Рис. 6.32. Расчет параметров сетевого графика

Работы 2–3, 2–4 имеют только одну предшествующую работу, следовательно, ранние начала у этих работ будут одинаковые и равны раннему окончанию предыдущей работы (т. е. работы 1–2):

$$PH_{2-3} = PH_{2-4} = PO_{1-2} = 15 \text{ дней;}$$

$$PO_{2-3} = PH_{2-3} + t_{2-3} = 15 + 7 = 22 \text{ дня;}$$

$$PO_{2-4} = PH_{2-4} + t_{2-4} = 15 + 5 = 20 \text{ дней.}$$

Работы 3–4, 3–5 имеют две предшествующие работы, следовательно, ранние начала у этих работ определяются как максимальное из ранних окончаний предыдущих работ:

$$PH_{3-4} = PH_{3-5} = \max\{PO_{1-3};\ PO_{2-3}\} = \max\{3;22\} = 22 \text{ дня;}$$

$$PO_{3-4} = PH_{3-4} + t_{3-4} = 22 + 0 = 22 \text{ дня;}$$

$$PO_{3-5} = PH_{4-5} + t_{4-5} = 22 + 4 = 26 \text{ дней.}$$

Работа 4–5 имеет две предшествующие работы, следовательно,

$$PH_{4-5} = \max\{PO_{2-4};\ PO_{3-4}\} = \max\{20; 22\} = 22 \text{ дня;}$$

$$PO_{4-5} = PH_{4-5} + t_{4-5} = 22 + 10 = 32 \text{ дня.}$$

Определение длины критического пути:

$$S_{\text{кр}} = \max\{PO_{3-5};\ PO_{3-4}\} = \max\{26; 32\} = 32 \text{ дня.}$$

Этап 2.

Расчет поздних сроков начала и окончания работ

Расчет производится в обратном направлении, т. е. начинается от завершающих работ. Длина критического пути равна позднему окончанию работ, входящих в завершающее событие:

$$\text{П}O_{3-5} = \text{П}O_{4-5} = S_{\text{кр}} = 32;$$

$$\text{П}H_{3-5} = \text{П}O_{3-5} - t_{3-5} = 32 - 4 = 28 \text{ дней.}$$

Работа 2–4 имеет только 1 последующую работу, следовательно:

$$\text{П}O_{2-4} = \text{П}H_{\text{последующей}} = \text{П}H_{4-5} = 22.$$

Аналогично для работы 3–4:

$$\text{П}O_{2-4} = \text{П}H_{\text{последующей}} = \text{П}H_{4-5} = 22 \text{ дня.}$$

Работа 1–3 имеет две последующие работы, следовательно:

$$\text{П}O_{1-3} = \min\{\text{П}H_{3-5};\ \text{П}H_{3-4}\} = \min\{28; 22\} = 22 \text{ дня;}$$

$$\text{П}H_{1-3} = \text{П}O_{1-3} - t_{1-3} = 22 - 3 = 19 \text{ дней.}$$

Аналогично для работы 2–3:

$$\text{П}O_{2-3} = \min\{28;\ 22\} = 22 \text{ дня;}$$

$$\text{П}H_{2-3} = 22 - 7 = 15 \text{ дней.}$$

Работы 1–2:

$$\text{П}O_{1-2} = \min\{15;17\} = 15 \text{ дней;}$$

$$\text{П}H_{1-2} = \text{П}O_{1-2} - t_{1-2} = 15 - 15 = 0 \text{ дней.}$$

Этап 3.

Расчет резервов

Полный резерв времени работы ij определяется как разность между началами либо окончаниями работ:

$$R_{ij} = t_{ij}^{\text{пн}} - t_{ij}^{\text{рн}} = t_{ij}^{\text{по}} - t_{ij}^{\text{ро}};$$

$$R_{1-2} = \text{П}H - PH = 0 - 0 = 0 \text{ дней;}$$

$$R_{1-3} = 19 - 0 = 19 \text{ дней;}$$

$$R_{2-3} = 15 - 5 = 0 \text{ дней;}$$

$$R_{2-4} = 17 - 15 = 2 \text{ дня;}$$

$$R_{3-4} = 22 - 22 = 0 \text{ дней;}$$

$$R_{3-5} = 28 - 22 = 6 \text{ дней;}$$

$$R_{4-5} = 22 - 22 = 0 \text{ дней.}$$

Частный резерв времени определяется как разность между ранним началом последующей работы и ранним окончанием данной работы:

$$r_{ij} = PH_{\text{последующей}} - PO_{\text{данной работы}};$$

$$r_{1-2} = 15 - 15 = 0 \text{ дней;}$$

$$r_{1-3} = 22 - 3 = 19 \text{ дней;}$$

$$r_{2-3} = 22 - 22 = 0 \text{ дней;}$$

$$r_{2-4} = 22 - 22 = 0 \text{ дней;}$$

$$r_{3-5} = 32\left(= S_{\text{кр}}\right) - 26 = 6 \text{ дней;}$$

$$r_{3-4} = 22 - 22 = 0 \text{ дней;}$$

$$r_{4-5} = 32 - 32 = 0 \text{ дней.}$$

На основании выполненных расчетов можно сделать вывод, что к критическому пути относятся работы 1–2, 2–3, 3–4, 4–5. Просуммировав время их выполнения, можно проверить правильности расчетов:

$$S_{\text{кр}} = 15 + 7 + 0 + 0 + 10 = 32 \text{ дня.}$$

Таким образом, можно сделать вывод, что параметры сетевого графика определены верно.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Дайте определение графа.
2. Назовите области применения теории графов.
3. Как задать неориентированный граф?
4. Как задать ориентированный граф?
5. Сформулируйте задачу о минимальном основе графа.
6. Сформулируйте задачи поиска экстремальных путей на графах.
7. Каковы правила составления сетевых графиков?
8. Каковы правила расчета сетевых графиков?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.

Граф задан множеством вершин $V=(a, b, c, d, e, f)$ и множеством ребер $E=[(a,c),(a,f),(d,c),(c,d),(d,f)]$.

Нарисовать этот граф, построить для него матрицы смежности и инцидентности.

Задача 2.

Задан ориентированный мультиграф (рис. 6.33):

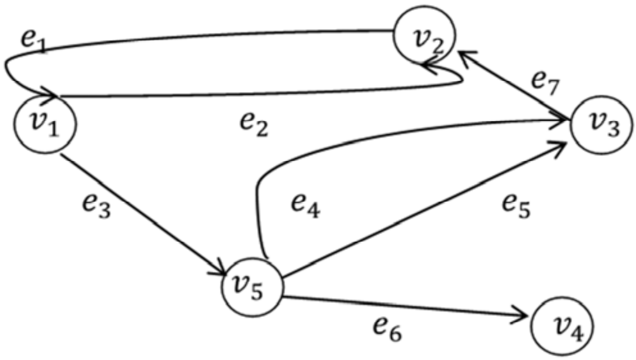

Рис. 6.33. Ориентированный мультиграф

Построить матрицу смежности.

Задача 3.

Компания СТАНКОПРОМ заключила контракт о производстве партии станков для использования приборостроительным заводом при массовом производстве оптико-волоконных приборов.

В таблице указаны задачи (работы), которые необходимо выполнить в процессе разработки и производства таких станков.

Требуется построить сетевой график выполнения задач.

	Задачи (работы, операции)	Непосредственно предшествующая работа
A	Составление сметы затрат	–
B	Согласование проекта и оценки	A
C	Покупка собственного оборудования	B
D	Подготовка конструкторских проектов	B
E	Строительство основного цеха	D
F	Монтаж оборудования	C, E
G	Испытания оборудования	F
H	Разработка технологической оснастки	D
I	Подготовка производства	D
J	Производство комплектующих станков	H, I
K	Конечная сборка станков	G, J
L	Контрольная проверка и отгрузка	K

Задача 4.

Компания СТАНКОПРОМ является участником другого проекта, детали которого приведены ниже.

Задача	Предшествующая задача
A	–
B	–
C	–
D	A, B
E	B, C
F	C
G	D, E
H	F, G

Требуется построить сетевой график выполнения задач.

Задача 5.

Построить сетевой график, определить общую продолжительность проекта. Найти критический путь.

Задача	Предшествующая задача	Время, дней
A	–	8
B	–	10
C	–	6
D	A,B	8
E	B,C	9
F	C	14
G	D,E	14
H	F,G	6

Задача 6.

В таблице приведены данные о стоимости задач и возможном уменьшении времени их выполнения.

Данные проекта		Стандартное значение		Критическое значение	
Задача	Предшествующая задача	Время, дней	Стоимость д. е.	Время, дней	Стоимость д. е.
A	–	8	7500	4	9000
B	–	10	8500	8	11000
C	–	6	6000	5	7000
D	A, B	8	13000	5	16000
E	B, C	9	14000	6	16500
F	C	14	14500	11	18000
G	D, E	14	13500	10	18750
H	F, G	6	5500	4	6500
Общие издержки выполнения задач			82500		102750

Помимо стоимости каждой операции необходимо учесть стоимость строительной площадки 1000 д. е. в день.

Необходимо сделать выбор между стандартными значениями времени и издержек и их критическими значениями.

1. Каково минимальное время, в течение которого можно завершить проект?

2. Какова соответствующая минимальная дополнительная стоимость?

7. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

7.1. Предмет, цель и задачи теории массового обслуживания

Во многих областях производства, бытового обслуживания, экономики и финансов важную роль играют системы специального вида, реализующие многократное выполнение однотипных задач. Подобные системы называют *системами массового обслуживания* (СМО).

Каждая СМО предназначена для обслуживания (выполнения) некоторого потока заявок (или требований), поступающих на вход системы большей частью не регулярно, а в случайные моменты времени. Обслуживание заявок обычно также длится не постоянное, заранее известное, а случайное время. После обслуживания заявки канал освобождается. Он готов к приему следующей заявки.

Из рис. 7.1 видно, что случайный характер потока заявок и времени их обслуживания приводит к неравномерной загруженности СМО: в некоторые промежутки времени на входе СМО могут скапливаться необслуженные заявки (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными); в другие же периоды при свободных каналах на входе СМО заявок не будет, что приводит к недогрузке СМО, т. е. к простаиванию каналов.

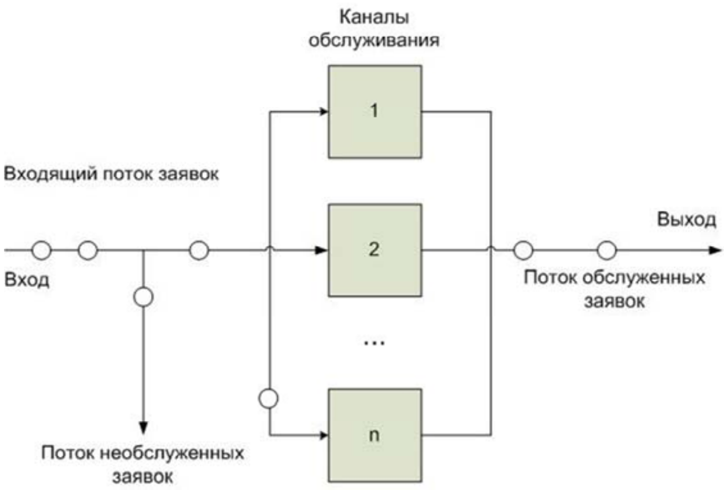

Рис. 7.1. Общая схема СМО

В качестве примеров СМО приведем следующие.

1. В *финансово-экономической сфере* системы, представляющие собой:

– банки;

– страховые организации;

– налоговые инспекции;

– аудиторские службы.

2. В *сфере производства и обслуживания*:

– различные системы связи (в том числе телефонные станции);

– погрузочно-разгрузочные комплексы (порты, товарные станции);

– автозаправочные станции;

– магазины, парикмахерские, билетные кассы;

– пункты обмена валюты;

– ремонтные мастерские;

– больницы и т. д.

3. В *сфере коммуникаций и автоматизации*:

– системы сбора, хранения и обработки информации;

– транспортные системы;

– компьютерные сети;

– автоматизированные производственные участки.

4. В *военной области*:

– системы противовоздушной или противоракетной обороны также могут рассматриваться как своеобразные СМО.

Каждая СМО включает в свою структуру некоторое число обслуживающих устройств (единиц, приборов, линий), которые называют *каналами обслуживания.*

Роль каналов могут играть:

– лица, выполняющие те или иные операции (кассиры, операторы, продавцы, парикмахеры и т. д.);

– линии связи,

– автомашины, краны;

– ремонтные бригады;

– железнодорожные пути;

– бензоколонки и т. д.

Основными компонентами системы массового обслуживания любого вида являются:

1) *входной поток* поступающих требований или заявок на обслуживание;

2) *дисциплина очереди*;

3) *механизм обслуживания*.

Раскроем содержание каждого из указанных выше компонентов.

Для описания ***входного потока требований*** нужно задать вероятностный закон, определяющий последовательность моментов поступления требований на обслуживание и указать количество таких требований в каждом очередном поступлении.

При этом, как правило, оперируют понятием «вероятностное распределение моментов поступления требований».

Дисциплина очереди – это важный компонент системы массового обслуживания, он определяет принцип, в соответствии с которым поступающие на вход обслуживающей системы требования подключаются из очереди к процедуре обслуживания. Чаще всего используются дисциплины очереди, определяемые следующими правилами:

– первым пришел – первым обслуживаешься;

– пришел последним – обслуживаешься первым;

– случайный отбор заявок;

– отбор заявок по критерию приоритетности;

– ограничение времени ожидания момента наступления обслуживания (имеет место очередь с ограниченным временем ожидания обслуживания, что ассоциируется с понятием «допустимая длина очереди»).

Таким образом, во всякой СМО можно выделить следующие основные элементы:

1) входящий поток заявок;

2) очередь;

3) каналы обслуживания;

4) выходящий поток обслуженных заявок.

Каждая СМО в зависимости от своих параметров: характера потока заявок, числа каналов обслуживания и их производительности, а также от правил организации работы, обладает определенной ***эффективностью*** функционирования (пропускной способностью), позволяющей ей более или менее успешно справляться с потоком заявок.

Основные показатели СМО следующие:

– *абсолютная пропускная способность* СМО – среднее число заявок, которое сможет обслужить СМО в единицу времени;

– *относительная пропускная способность* СМО – отношение среднего числа заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени, к среднему числу поступивших за это же время заявок;

– *средняя продолжительность периода занятости* СМО;

– *коэффициент использования* СМО – средняя доля времени, в течение которого СМО занята обслуживанием заявок;

– *вероятность немедленного обслуживания* поступившей заявки;

– *вероятность отказа* в обслуживании поступившей заявки;

– *средний процент заявок, получивших отказ* в обслуживании;

– *среднее время ожидания в очереди*;

– *средняя длина очереди;*

– *средний доход* от функционирования системы в единицу времени и т. п.

Предметом теории массового обслуживания является установление зависимости между факторами, определяющими функциональные возможности системы массового обслуживания, и эффективностью ее функционирования.

В большинстве случаев все параметры, описывающие системы массового обслуживания, являются случайными величинами или функциями, поэтому эти системы относятся к *стохастическим*.

Цель теории массового обслуживания – выработка рекомендаций по рациональному построению СМО, рациональной организации их работы и регулированию потока заявок для обеспечения высокой эффективности функционирования СМО.

Для достижения этой цели ставятся *задачи* теории массового обслуживания, которые устанавливают зависимость эффективности функционирования СМО от ее организации (параметров):

– характера потока заявок;

– числа каналов и их производительности;

– правил работы СМО.

7.2. Классификация систем массового обслуживания

Системы массового обслуживания делятся на типы (или классы) по ряду признаков.

1. ***По числу каналов***:

– *одноканальные* (когда имеется один канал обслуживания);

– *многоканальные,* точнее n-канальные, когда количество каналов $(n \geq 2)$.

Здесь и далее будем полагать, что каждый канал одновременно может обслуживать только одну заявку и, если не оговорено специально, каждая находящаяся под обслуживанием заявка обслуживается только одним каналом.

– *однородные* каналы;

– *разнородные*, отличаются длительностью обслуживания одной заявки.

Практически время обслуживания каналом одной заявки $T_{\text{об}}$ является непрерывной случайной величиной. Однако при условии абсолютной однородности поступающих заявок и каналов время обслуживания может быть и величиной постоянной $(T_{\text{об}} = \text{const})$.

2. ***По дисциплине обслуживания***:

– СМО *с отказами*, в которых заявка, поступившая на вход СМО в момент, когда все каналы заняты, получает «отказ» и покидает СМО («пропадает»). Чтобы эта заявка все же была обслужена, она должна снова поступить на вход СМО и рассматриваться при этом как заявка, поступившая впервые.

Примером СМО с отказами может служить работа АТС: если набранный телефонный номер (заявка, поступившая на вход) занят, то заявка получает отказ, и, чтобы дозвониться по этому номеру, следует его набрать еще раз (заявка поступает на вход как новая);

– СМО *с ожиданием* (неограниченным ожиданием или очередью). В таких системах заявка, поступившая в момент занятости всех каналов, становится в очередь и ожидает освобождения канала, который примет ее к обслуживанию. Каждая заявка, поступившая на вход, в конце концов будет обслужена.

Такие СМО часто встречаются в торговле, в сфере бытового и медицинского обслуживания, на предприятиях (например, обслуживание станков бригадой наладчиков);

– СМО *смешанного типа* (с ограниченным ожиданием). Это такие системы, в которых на пребывание заявки в очереди накладываются некоторые ограничения. Эти ограничения могут накладываться на длину очереди, т. е. максимально возможное число заявок, которые одновременно могут находиться в очереди.

В качестве примера такой системы можно привести мастерскую по ремонту автомобилей, имеющую ограниченную по размерам стоянку для неисправных машин, ожидающих ремонта.

Ограничения ожидания могут касаться времени пребывания заявки в очереди, по истечению которого она выходит из очереди и покидает систему, либо касаться общего времени пребывания заявки в СМО (т. е. суммарного времени пребывания заявки в очереди и под обслуживанием).

В СМО с ожиданием и в СМО смешанного типа применяются различные схемы обслуживания заявок из очереди.

Обслуживание может быть упорядоченным, когда заявки из очереди обслуживаются в порядке их поступления в систему, и неупорядоченным, при котором заявки из очереди обслуживаются в случайном порядке.

Иногда применяется обслуживание с приоритетом, когда некоторые заявки из очереди считаются важнейшими и поэтому обслуживаются первыми.

3. ***По ограничению потока заявок***:

– *замкнутые*. Если поток заявок ограничен и заявки, покинувшие систему, могут в нее возвращаться, то СМО является *замкнутой.*

Классическим примером замкнутой СМО служит работа бригады наладчиков в цеху. Станки являются источниками заявок на обслуживание, и их количество ограничено, наладчики – каналы обслуживания. После проведения ремонтных работ вышедший из строя станок снова становится источником заявок на обслуживание;

– *открытые* – в противном случае. В открытой СМО характеристики потока заявок не зависят от того, в каком состоянии сама СМО (сколько каналов занято). В замкнутой СМО – зависят.

Так, в рассмотренном выше примере, интенсивность потока «заявок» со стороны станков (т. е. количество заявок в единицу времени) зависит от того, сколько их неисправно и ждет наладки.

4. ***По количеству этапов обслуживания***:

– *однофазные системы*. Если каналы СМО однородны, т. е. выполняют одну и ту же операцию обслуживания;

– *многофазные системы*. Если каналы обслуживания расположены последовательно и они неоднородны, так как выполняют различные операции обслуживания (т. е. обслуживание состоит из нескольких последовательных этапов или фаз). Примером работы многофазной СМО является обслуживание автомобилей на станции технического обслуживания (мойка, диагностирование и т. д.). Далее будем рассматривать только однофазные СМО.

Случайный характер потока заявок и длительности их обслуживания порождает в СМО случайный процесс.

Случайным процессом (или случайной функцией) называется соответствие, при котором каждое значение аргумента (в данном случае – момент из промежутка времени проводимого опыта) приравнивают к случайной величине (в данном случае – состояние СМО).

Поэтому для решения задач теории массового обслуживания необходимо изучить случайный процесс, протекающий в СМО, т. е. нужно построить и проанализировать его математическую модель. Математический анализ работы СМО существенно упрощается, если этот случайный процесс удовлетворяет определенным условиям, которые будут рассмотрены ниже.

7.3. Случайные процессы с дискретными состояниями

Случайный процесс, протекающий в СМО, состоит в том, что система в произвольные моменты времени переходит из одного состояния в другое: меняется число занятых каналов, число заявок, стоящих в очереди и т. п.

Это означает, что СМО представляет собой систему дискретного типа с конечным (или счетным) множеством состояний, а переход системы из одного состояния в другое происходит скачком в момент, когда осуществляется какое-то событие (приход новой заявки, освобождение канала, уход заявки из очереди и т. п.).

Рассмотрим систему X, которая может принимать счетное множеством состояний $\left(x_1, x_2, ..., x_n, ...\right)$. В любой момент времени t система X может быть в одном из этих состояний.

Обозначим $p_k\left(t\right),\ k=1, 2, ..., n, ...$ вероятность того, что в момент t система будет находиться в состоянии x_k..

Очевидно, для $\forall t, \sum_k p_k\left(t\right)=1$..

Различают следующие типы случайных процессов с дискретными состояниями:

– *с дискретным временем;*

– *с непрерывным временем.*

Первые отличаются тем, что переходы из состояния в состояние могут происходить только в строго определенные, разделенные конечными интервалами моменты времени $t_1, t_2, ...$

Случайные процессы с непрерывным временем отличаются тем, что переход системы из состояния в состояние возможен в любой момент времени t.

Задача 7.1.

В качестве *примера дискретной системы* X, в которой протекает случайный процесс с непрерывным временем, рассмотрим группу из n самолетов, совершающих налет на территорию противника, обороняемую системой ПВО. Ни момент обнаружения группы, ни момент начала работы пусковых установок системы ПВО заранее не известны. Различные состояния системы соответствуют различному числу пораженных самолетов в составе группы:

x_0 – не уничтожено ни одного самолета,

x_1 – уничтожен ровно один самолет,

……………………………………….

x_n – уничтожены все n самолетов.

Схема возможных состояний системы и возможных переходов из состояния в состояние показана на рис. 7.2 (такая схема называется графом состояний).

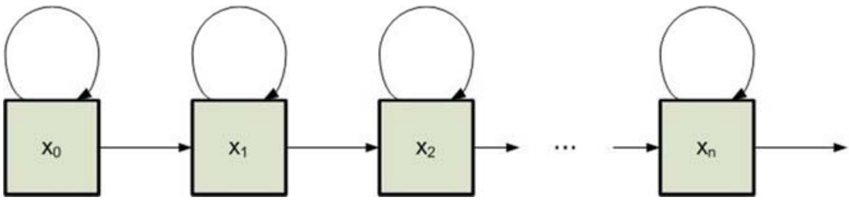

Рис. 7.2. Граф состояний СМО

Стрелками показаны возможные переходы системы из состояния в состояние. Закругленная стрелка, направленная из состояния x_k в него же, означает, что система может не только перейти в соседнее состояние x_{k+1}, но и остаться в прежнем. Для данной системы характерны необратимые переходы (уничтоженные самолеты не восстанавливаются). В связи с этим из состояния x_k никакие переходы в другие состояния уже невозможны.

Отметим, что граф состояний на рис. 7.2 показывает только переходы из состояния в соседнее состояние и не показывает «перескоки» через состояние: эти перескоки отброшены как практически невозможные. Действительно, для того чтобы система «перескочила» через состояние, нужно, чтобы строго одновременно были поражены два или более самолета, а вероятность такого события равна нулю.

В противоположность системе с необратимыми переходами, рассмотренной в предыдущем примере, для СМО характерны обратимые переходы: занятый канал может освободиться. В качестве примера рассмотрим ***одноканальную СМО*** (например, одну телефонную линию), в которой заявка, заставшая канал занятым, не становится в очередь, а покидает систему (получает «отказ»).

Это дискретная система с непрерывным временем и двумя возможными состояниями:

x_0 – канал свободен,

x_1 – канал занят.

Переходы из состояния в состояние обратимы. Граф состояний показан на рис. 7.3.

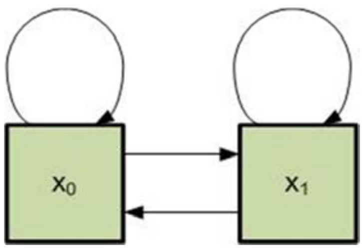

Рис. 7.3. Граф состояний одноканальной СМО с отказами

Для того чтобы описать случайный процесс, протекающий в дискретной системе с непрерывным временем, прежде всего нужно проанализировать причины, вызывающие переход системы из состояния в состояние.

Для СМО основным фактором, обусловливающим протекающие в ней процессы, является поток заявок. Поэтому математическое описание любой СМО начинается *с потока событий*.

7.4. Потоки событий

Под ***потоком событий*** понимается последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени (поток вызовов на телефонной станции, поток покупателей, поток заказных писем, поступающих в почтовое отделение и т. п.).

Поток характеризуется *интенсивностью* λ – частотой появления событий или средним числом событий, поступающих в СМО в единицу времени.

Поток событий называется *регулярным,* если события следуют одно за другим через определенные равные промежутки времени. Например, поток изделий на конвейере сборочного цеха (с постоянной скоростью движения) является регулярным. Такой поток сравнительно редко встречается в реальных системах, но представляет интерес как предельный случай.

Типичным для системы массового обслуживания является ***случайный*** поток заявок.

Рассмотрим потоки событий, обладающие некоторыми особенно простыми свойствами. Для этого введем ряд определений.

1. Поток событий называется *стационарным*, если его вероятностные характеристики не зависят от времени.

В частности, интенсивность стационарного потока есть величина постоянная: $\lambda(t)=\lambda.$ Это не значит, что фактическое число событий, появляющееся в единицу времени, постоянно. Если поток не регулярный, то он имеет какие-то случайные сгущения и разрежения. Важно, что для стационарного потока эти сгущения и разрежения не носят закономерного характера: на один участок длины (1) может попасть больше, на другой – меньше событий, но среднее число событий, приходящееся на единицу времени, постоянно и от времени не зависит.

2. Поток событий называется потоком *без последействия,* если для любых двух непересекающихся участков времени τ_1 и τ_2 число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попавших на другой.

Это означает, что события, образующие поток, появляются в те или иные моменты времени независимо друг от друга, вызванные каждое своими собственными причинами. Например, поток пассажиров, входящих в метро, практически не имеет последействия. А вот поток покупателей, отходящих с покупками от прилавка, уже имеет последействие (хотя бы потому, что интервал времени между отдельными покупателями не может быть меньше, чем минимальное время обслуживания каждого из них).

3. Поток событий называется *ординарным*, если вероятность попадания на малый (элементарный) участок времени Δt двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Другими словами, поток событий ординарен, если события появляются в нем поодиночке, а не группами. Например, поток поездов, подходящих к станции, ординарен, а поток вагонов – неординарен.

4. Поток событий называется *простейшим* (или *стационарным пуассоновским*), если он одновременно стационарен, ординарен и не имеет последействия.

Название «простейший» объясняется тем, что СМО с простейшими потоками имеет наиболее простое математическое описание.

При достаточно большом числе n независимых, стационарных и ординарных потоков (сравнимых между собой по интенсивностям λ_i, $(i = 1, ..., n)$ получается поток, близкий к простейшему с интенсивностью λ, равной сумме интенсивностей входящих потоков, т. е.

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i. \tag{7.1}$$

Название «пуассоновский» связано с тем, что при соблюдении п. п. 1–3 число событий, попадающих на любой фиксированный интервал времени, будет распределено по закону Пуассона.

Рассмотрим на оси времени $0t$ простейший поток событий как неограниченную последовательность случайных точек (рис. 7.4).

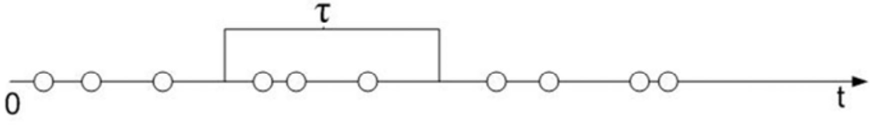

Рис. 7.4. Простейший (пуассоновский) поток событий

Пусть случайная величина X выражает число событий (точек), попадающих на произвольный промежуток времени τ. Тогда случайная величина X распределена по закону Пуассона.

В частности, вероятность того, что за время τ не произойдет ни одного события $(m=0)$, равна $P_0(\tau)=e^{-\lambda\tau}$.

7.5. Основные понятия марковских процессов

Функция $X(t)$ называется *случайной*, если ее значение при любом аргументе t является случайной величиной.

Случайная функция $X(t)$, аргументом которой является время, называется *случайным процессом*.

Марковские процессы являются частным видом случайных процессов. Особое место марковских процессов среди других классов случайных процессов обусловлено следующими обстоятельствами:

– для марковских процессов хорошо разработан математический аппарат, позволяющий решать многие практические задачи;

– с помощью марковских процессов можно описать (точно или приближенно) поведение достаточно сложных систем.

Случайный процесс, протекающий в какой-либо системе S, называется *марковским* (или *процессом без последействия*), если он обладает следующим свойством: для любого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем (при $t>t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t=t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система S пришла в это состояние.

Классификация марковских случайных процессов производится в зависимости от непрерывности или дискретности множества значений функции $X(t)$ и параметра t. Различают следующие *основные виды* марковских случайных процессов:

– с дискретными состояниями и дискретным временем (цепь Маркова);

– с непрерывными состояниями и дискретным временем (марковские последовательности);

– с дискретными состояниями и непрерывным временем (непрерывная цепь Маркова);

– с непрерывным состоянием и непрерывным временем.

Рассмотрим марковские процессы с дискретными состояниями $S_1, S_2, ..., S_n$.

7.5.1. Граф состояний

Марковские процессы с дискретными состояниями удобно иллюстрировать с помощью так называемого графа состояний, где кружками обозначены состояния $S_1, S_2, ...$ системы S, а стрелками – возможные переходы из состояния в состояние. На графе отмечаются только непосредственные переходы, а не переходы через другие состояния. Возможные задержки в прежнем состоянии изображают «петлей», т. е. стрелкой, направленной из данного состояния в него же. Число состояний системы может быть как конечным, так и бесконечным (но счетным). Пример графа состояний системы S представлен на рис. 7.5.

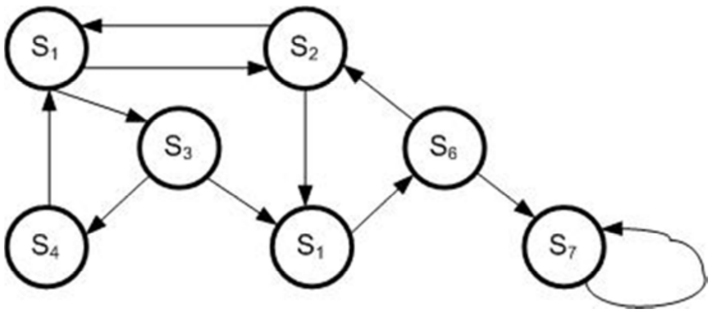

Рис. 7.5. Граф состояний системы

7.5.2. Марковские цепи

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем называют *марковской цепью*.

Для такого процесса моменты $t_1, t_2, ...,$ когда система S может менять свое состояние, рассматривают как последовательные шаги процесса, а в качестве аргумента, от которого зависит процесс, выступает не время t, а номер шага 1, 2, ..., k, ...

Случайный процесс в этом случае характеризуется последовательностью состояний:

$$S(0), S(1), S(2), ..., S(k), ... \tag{7.2}$$

где $S(0)$ – начальное состояние системы (перед первым шагом);

$S(1)$ – состояние системы после первого шага;

$S(k)$ – состояние системы после k шага.

Событие $S_i = S(k)$, состоящее в том, что сразу после k шага система находится в состоянии S_i, $(i = 1, 2, ...)$, является случайным событием.

Последовательность состояний $S(0), S(1), S(2), ..., S(k), ...$ можно рассматривать как последовательность случайных событий. Такая случайная последовательность событий называется *марковской цепью*, если для каждого шага вероятность перехода из любого состояния S_i в любое S_j не зависит от того, когда и как система пришла в состояние S_i.

Начальное состояние $S(0)$ может быть заданным заранее или случайным.

Вероятностями состояний цепи Маркова называются вероятности $p_i(k)$ того, что после k шага (и до $(k+1)$) система S будет находиться в состоянии $S_i(i = 1, ..., n)$..

Очевидно, для $\forall k, \sum_{i=1}^{n} p_i(k) = 1.$

Начальным распределением вероятностей марковской цепи называется распределение вероятностей состояний в начале процесса

$$p_1(0), p_2(0), ..., p_i(0), ..., p_n(0). \tag{7.3}$$

В частном случае, если начальное состояние системы S в точности известно $S(0) = S_i$, то начальная вероятность $p_i(0) = 1$, а все остальные равны нулю.

Вероятностью перехода (переходной вероятностью) на k-шаге из состояния S_i в состояние S_j называется условная вероятность того, что система S после k-го шага окажется в состоянии S_j при условии, что непосредственно перед этим (после $(k-1)$ шага) она находилась в состоянии S_j.

Поскольку система может пребывать в одном из n-состояний, то для каждого момента времени t необходимо задать n^2-вероятностей перехода p_{ij}, которые удобно представить в виде следующей матрицы:

p_{ij} – вероятность перехода за один шаг из состояния S_i в состояние S_j;

p_{ii} – вероятность задержки системы в состоянии S_i.

Матрица (7.4) называется переходной или матрицей переходных вероятностей.

$$\left\| p_{ij} \right\| = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}, \tag{7.4}$$

где p_{ij} – вероятность перехода за один шаг из состояния S_i в состояние S_j.

Если переходные вероятности не зависят от номера шага (от времени), а зависят только от того, из какого состояния в какое осуществляется переход, то соответствующая цепь Маркова называется *однородной*.

Переходные вероятности однородной марковской цепи p_{ij} образуют квадратную матрицу размера $(n \times m)$.

Отметим некоторые ее особенности:

1. Каждая строка характеризует выбранное состояние системы, а ее элементы представляют собой вероятности всех возможных переходов за один шаг из выбранного (из i) состояния, в том числе и переход в самое себя.

2. Элементы столбцов показывают вероятности всех возможных переходов системы за один шаг в заданное j-состояние (иначе говоря, строка характеризует вероятность перехода системы из состояния, столбец – в состояние).

3. Сумма вероятностей каждой строки равна единице, так как переходы образуют полную группу не совместных событий:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1,\ i = 1,\ ...,\ n. \qquad (7.5)$$

4. По главной диагонали матрицы переходных вероятностей стоят вероятности p_{ij} того, что система не выйдет из состояния S_i, а останется в нем.

5. Если для однородной марковской цепи заданы начальное распределение вероятностей $p_1(0),\ p_2(0),\ ...,\ p_i(0),\ ...,\ p_n(0)$ и матрица переходных вероятностей $\|p_{ij}\|$, то вероятности состояний системы определяются по рекуррентной формуле:

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^{n} p_j(k-1) \cdot p_{ij},\ (i = 1,\ ...,\ n;\ j = 1,\ ...,\ n). \qquad (7.6)$$

Задача 7.2.

Рассмотрим процесс функционирования системы автомобиля. Пусть автомобиль (система) в течение одной смены (суток) может находиться в одном из двух состояний: исправном S_1 и неисправном S_2.

Граф состояний системы представлен на рис. 7.6.

В результате проведения массовых наблюдений за работой автомобиля составлена следующая матрица вероятностей перехода:

$$\|p_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,9 & 0,1 \end{vmatrix},$$

где $p_{11} = 0,8$ – вероятность того, что автомобиль останется в исправном состоянии;

$p_{12} = 0,2$ – вероятность перехода автомобиля из состояния *исправен* в состояние *неисправен*;

$p_{21} = 0,9$ – вероятность перехода автомобиля из состояния *неисправен* в состояние *исправен*;

$p_{22} = 0,1$ – вероятность того, что автомобиль останется в состоянии *неисправен*.

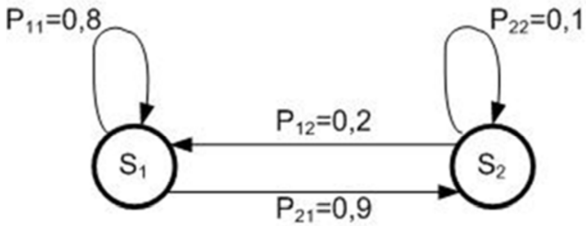

Рис. 7.6. Граф состояний автомобиля

Вектор начальных вероятностей состояний автомобиля задан $p(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, т. е. $p_1(0) = 0$; $p_2(0) = 1$.

Требуется определить вероятности состояний автомобиля через трое суток.

Решение.

Используя матрицу переходных вероятностей, определим вероятности состояний $p_i(k)$ после первого шага (после первых суток):

Вероятности состояний $p_i(k)$ после первого шага:

$$p_1(1) = p_1(0) \cdot p_{11} + p_2(0) \cdot p_{21} = 0 \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,9 = 0,9;$$

$$p_2(1) = p_1(0) \cdot p_{21} + p_2(0) \cdot p_{22} = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,1 = 0,1.$$

Вероятности состояний после второго шага (после вторых суток):

$$p_1(2) = p_1(1) \cdot p_{11} + p_2(1) \cdot p_{21} = 0,9 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,9 = 0,81;$$

$$p_2(2) = p_1(1) \cdot p_{21} + p_2(1) \cdot p_{22} = 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}19.$$

Вероятности состояний после третьего шага (после третьих суток):

$$p_1(3) = p_1(2) \cdot p_{11} + p_2(2) \cdot p_{21} = 0{,}81 \cdot 0{,}8 + 0{,}19 \cdot 0{,}9 = 0{,}819;$$

$$p_2(3) = p_1(2) \cdot p_{21} + p_2(2) \cdot p_{22} = 0{,}81 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}19 = 0{,}181.$$

Таким образом, после третьих суток автомобиль будет находиться в *исправном* состоянии с вероятностью 0,819 и в состоянии *неисправен* с вероятностью 0,181.

7.6. Простейшая одноканальная модель СМО

Такой моделью с вероятностными входным потоком и процедурой обслуживания является модель, характеризуемая показательным распределением как длительностей интервалов между поступлениями требований, так и длительностей обслуживания.

При этом плотность распределения длительностей интервалов между поступлениями требований имеет вид:

$$f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \tag{7.7}$$

где λ – интенсивность поступления заявок в систему.

Плотность распределения длительностей обслуживания:

$$f_2(t) = \mu e^{-\mu t}, \tag{7.8}$$

где μ – интенсивность обслуживания.

Потоки заявок и обслуживаний простейшие. Пусть система работает *с отказами*. Необходимо определить абсолютную и относительную пропускную способность системы.

Представим данную систему массового обслуживания в виде графа (рис. 7.7), у которого имеются два состояния:

S_0 – канал свободен (ожидание);

S_1 – канал занят (идет обслуживание заявки).

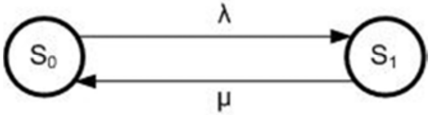

Рис. 7.7. Граф состояний

Обозначим вероятности состояний:

$p_0(t)$ – вероятность состояния *канал свободен*;

$p_1(t)$ – вероятность состояния *канал занят*.

По размеченному графу состояний составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda p_1(t) + \mu p_0(t). \end{cases} \tag{7.9}$$

Система линейных дифференциальных уравнений (7.9) имеет решение с учетом нормировочного условия $p_0(t) + p_1(t) = 1$. Решение данной системы называется не установившимся, поскольку оно непосредственно зависит от *t* и выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} p_0(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} \\ p_1(t) = 1 - p_0(t). \end{cases} \tag{7.10}$$

Для одноканальной СМО с отказами вероятность $p_0(t)$ есть не что иное, как относительная пропускная способность системы *q*.

Действительно, $p_0(t)$ – вероятность того, что в момент *t* канал свободен и заявка, пришедшая к моменту *t*, будет обслужена, а следовательно, для данного момента времени *t* среднее отношение числа обслуженных заявок к числу поступивших также равно $p_0(t)$, т. е.:

$$q = p_0(t). \tag{7.11}$$

По истечении большого интервала времени (при $t \to \infty$) достигается стационарный (установившийся) режим:

$$q = p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \tag{7.12}$$

Зная относительную пропускную способность, легко найти абсолютную. *Абсолютная пропускная способность* (A) – среднее число заявок, которое может обслужить система массового обслуживания в единицу времени:

$$A = \lambda q = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}. \tag{7.13}$$

Вероятность отказа в обслуживании заявки будет равна вероятности состояния «канал занят»:

$$p_{отк} = p_1 = 1 - p_0 = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \tag{7.14}$$

Данная величина $p_{\text{отк}}$ может быть интерпретирована как средняя доля необслуженных заявок среди поданных.

Задача 7.3.

Простейшая одноканальная модель СМО.

Пусть одноканальная СМО с отказами представляет собой один пост ежедневного обслуживания для мойки автомобилей:

– заявка – автомобиль, прибывший в момент, когда пост занят, получает отказ в обслуживании;

– интенсивность потока автомобилей $\lambda = 1{,}0$ (автомобиль в час);

– средняя продолжительность обслуживания 1,8 часа;

– поток автомобилей и поток обслуживания являются простейшими.

Требуется определить в установившемся режиме предельные значения:

– относительной пропускной способности q;

– абсолютной пропускной способности A;

– вероятности отказа $p_{\text{отк}}$;

– сравнить фактическую пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждый автомобиль обслуживался точно 1,8 часа и автомобили следовали один за другим без перерыва.

Решение.

1. Определим интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{t_{\text{обс}}} = \frac{1}{1,8} = 0,555.$$

2. Вычислим относительную пропускную способность:

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0,555}{1 + 0,555} = 0,356.$$

Величина q означает, что в установившемся режиме система будет обслуживать примерно 35 % прибывающих на пост ежедневного обслуживания автомобилей.

3. Абсолютную пропускную способность определим по формуле:

$$A = \lambda \cdot q = 1 \cdot 0,356 = 0,356.$$

Это означает, что система (пост) способна осуществить в среднем 0,356 обслуживания автомобилей в час.

4. Вероятность отказа в обслуживании:

$$p_{\text{отк}} = 1 - q = 1 - 0,356 = 0,644.$$

Это означает, что около 65 % прибывших автомобилей на пост получат отказ в обслуживании.

5. Определим номинальную пропускную способность системы:

$$A_{\text{ном}} = \frac{1}{t_{\text{обсл}}} = \frac{1}{1,8} = 0,555 \text{ автомобилей в час.}$$

Оказывается, что $A_{\text{ном}}$ в 1,5 раза $\left(\frac{0,555}{0,356} = 1,5\right)$ больше, чем фактическая пропускная способность, вычисленная с учетом случайного характера потока заявок и времени обслуживания.

7.7. Одноканальная СМО с ожиданием

Система массового обслуживания имеет один канал.

Входящий поток заявок на обслуживание – простейший поток с интенсивностью λ. Интенсивность потока обслуживания равна μ (т. е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать μ обслуженных заявок).

Длительность обслуживания – случайная величина, подчиненная показательному закону распределения. Поток обслуживаний является простейшим пуассоновским потоком событий. Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания.

Предположим, что независимо от того, сколько требований поступает на вход обслуживающей системы, данная система (очередь + обслуживаемые клиенты) не может вместить более N-требований (заявок), т. е. клиенты, не попавшие в ожидание, вынуждены обслуживаться в другом месте. Наконец, источник, порождающий заявки на обслуживание, имеет неограниченную (бесконечно большую) емкость.

Граф состояний СМО в этом случае имеет вид, показанный на рис. 7.8.

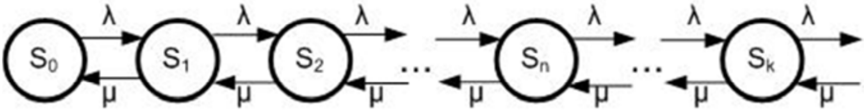

Рис. 7.8. Граф состояний одноканальной СМО с ожиданием *(схема гибели и размножения)*

Состояния СМО имеют следующую интерпретацию:

S_0 – канал свободен;

S_1 – канал занят (очереди нет);

S_2 – канал занят (одна заявка стоит в очереди);

…………

S_n – канал занят ($n-1$ заявок стоит в очереди);

…………

S_N – канал занят ($N-1$ заявок стоит в очереди).

Стационарный процесс в данной системе будет описываться следующей системой алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\rho p_0 + p_1 = 0, \ n = 0 \\ \ldots \\ -(1-\rho)\, p_n + p_{n+1} + \rho p_{n-1}, \ 0 < n < N \\ \ldots \\ p_N + \rho p_{n-1} = 0, \ n = N, \end{cases} \tag{7.15}$$

где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$; n – номер состояния.

Решение приведенной выше системы уравнений для нашей модели СМО имеет вид:

$$p_n = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right)\rho^{N+1}, \ \rho \neq 1, \ n = 0, 1, \ldots, N \\ \dfrac{1}{(N+1)}, \ \rho = 1, \end{cases} \tag{7.16}$$

тогда,

$$p_n = \begin{cases} p_0 \rho^n, \ \rho \neq 1, \ n = 0, 1, \ldots, N \\ \dfrac{1}{(N+1)}, \ \rho = 1. \end{cases} \tag{7.17}$$

Следует отметить, что выполнение условия стационарности $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$ для данной СМО не обязательно, поскольку число допускаемых в обслуживающую систему заявок контролируется путем введения ограничения на длину очереди (которая не может превышать $N-1$), а не соотношением между интенсивностями входного потока, т. е. не отношением $\rho = \lambda / \mu$.

Определим характеристики одноканальной СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди, равной $(N-1)$:

1) вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$p_{\text{отк}} = p_N = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right)\rho^N, \ \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{(N+1)}, \ \rho = 1; \end{cases} \tag{7.18}$$

2) относительная пропускная способность системы:

$$q = 1 - p_{\text{отк}} = \begin{cases} 1-\left(\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right)\rho^N, \ \rho \neq 1 \\ 1-\dfrac{1}{(N+1)}, \ \rho = 1; \end{cases} \tag{7.19}$$

3) абсолютная пропускная способность:

$$A = q \cdot \lambda; \tag{7.20}$$

4) среднее число находящихся в системе заявок:

$$L_S = \sum\nolimits_{n=0}^{N} n p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho\left[1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}\right]}{(1-\rho)\left(1-\rho^{N+1}\right)}, \ \rho \neq 1 \\ \dfrac{N}{2}, \ \rho = 1; \end{cases} \tag{7.21}$$

5) среднее время пребывания заявки в системе:

$$W_S = \frac{L_s}{\lambda\left(1-p_N\right)}; \tag{7.22}$$

6) средняя продолжительность пребывания клиента (заявки) в очереди:

$$W_q = W_S - \frac{1}{\mu}; \tag{7.23}$$

7) среднее число заявок (клиентов) в очереди (длина очереди):

$$L_q = \lambda(1 - p_N)W_q. \tag{7.24}$$

Задача 7.5.

Одноканальная СМО с ожиданием.

Специализированный пост диагностики автомобилей представляет собой одноканальную СМО. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограничено и равно $[(N-1)=3]$. Если все стоянки заняты, т. е. в очереди уже находится три автомобиля, то очередной автомобиль, прибывший на диагностику, в очередь на обслуживание не становится.

Поток автомобилей, прибывающих на диагностику, распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность $\lambda = 0,85$ (автомобиля в час). Время диагностики автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно 1,05 час.

Требуется определить вероятностные характеристики поста диагностики, работающего в стационарном режиме.

Решение.

1. Параметр потока обслуживании автомобилей:

$$\mu = \frac{1}{t} = \frac{1}{1,05} = 0,952.$$

2. Приведенная интенсивность потока автомобилей определяется как отношение интенсивностей λ и μ, т. е.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,85}{0,952} = 0,893.$$

3. Вычислим финальные вероятности системы:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+!}} = \frac{1-0,893}{1-0,893^5} = 0,248;$$

$$p_1 = \rho p_0 = 0,893 \cdot 0,248 = 0,221;$$

$$p_2 = \rho^2 p_0 = 0,893^2 \cdot 0,248 = 0,198;$$

$$p_3 = \rho^3 p_0 = 0,893^3 \cdot 0,248 = 0,177;$$

$$p_4 = \rho^4 p_0 = 0,893^4 \cdot 0,248 = 0,158.$$

4. Вероятность отказа в обслуживании автомобиля:

$$p_{\text{отк}} = p_4 = 0,158.$$

5. Относительная пропускная способность поста диагностики:

$$q = 1 - p_{\text{отк}} = 1 - 0,158 = 0,842.$$

6. Абсолютная пропускная способность поста диагностики:

$$A = \lambda \cdot q = 0,85 \cdot 0,842 = 0,716 \text{ (автомобиля в час).}$$

7. Среднее число автомобилей, находящихся на обслуживании и в очереди (т. е. в системе массового обслуживания):

$$L_S = \frac{0,893\left[1-(4+1)\cdot 0,893^4 + 4\cdot 0,893^5\right]}{(1-0,893)\left(1-0,893^5\right)} = 1,77.$$

8. Среднее время пребывания автомобиля в системе:

$$W_S = \frac{1,77}{0,85(1-0,158)} = 2,473 \text{ часа.}$$

9. Средняя продолжительность пребывания заявки в очереди на обслуживание:

$$W_q = 2,473 - \frac{1}{0,952} = 1,423 \text{ часа.}$$

10. Среднее число заявок в очереди (длина очереди):

$$L_q = 0,85 \cdot (1 - 0,158) \cdot 1,423 = 1,02.$$

Работу рассмотренного поста диагностики можно считать удовлетворительной, так как пост диагностики не обслуживает автомобили в среднем в 15,8 % случаев $(p_{\text{отк}} = 0,158)$.

7.8. Одноканальная СМО с ожиданием без ограничения на вместимость блока ожидания

$N \to \infty$. Остальные условия функционирования СМО остаются без изменений.

Стационарный режим функционирования данной СМО существует при $t \to \infty$ для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ и когда $\lambda < \mu$.

Система алгебраических уравнений, описывающих работу СМО при $t \to \infty$ для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеет вид:

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \ n = 0 \\ \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} - (\lambda + \mu) p_n = 0, \ n > 0. \end{cases} \quad (7.25)$$

Решение данной системы уравнений имеет вид:

$$p_n = (1 - \rho)\rho^n, \ n = 0, 1, 2, \ldots \quad (7.26)$$

где $\rho = \lambda / \mu < 1$.

Характеристики одноканальной СМО с ожиданием без ограничения на длину очереди следующие:

1) среднее число находящихся в системе клиентов (заявок) на обслуживание:

$$L_S = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \frac{\rho}{1-\rho}; \tag{7.27}$$

2) средняя продолжительность пребывания клиента в системе:

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}; \tag{7.28}$$

3) среднее число клиентов в очереди на обслуживании:

$$L_q = L_S - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}; \tag{7.29}$$

4) средняя продолжительность пребывания клиента в очереди:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}. \tag{7.30}$$

Задача 7.6.

Одноканальная СМО с ожиданием без ограничения на вместимость блока ожидания.

Вспомним о ситуации, рассмотренной в задаче 7.5, где речь идет о функционировании поста диагностики.

Пусть рассматриваемый пост диагностики располагает неограниченным количеством площадок для стоянки прибывающих на обслуживание автомобилей, т. е. длина очереди не ограничена.

Требуется определить финальные значения следующих вероятностных характеристик:

– вероятности состояний системы (поста диагностики);

– среднее число автомобилей, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди);

– среднюю продолжительность пребывания автомобиля в системе (на обслуживании и в очереди);

– среднее число автомобилей в очереди на обслуживании;

– среднюю продолжительность пребывания автомобиля в очереди.

Решение.

1. Параметр потока обслуживания μ и приведенная интенсивность потока автомобилей ρ определены в предыдущем примере: $\mu = 0{,}952$; $\rho = 0{,}893$.

2. Вычислим предельные вероятности системы по формулам:

$$p_0 = (1-\rho) = 1 - 0{,}893 = 0{,}107;$$

$$p_1 = (1-\rho)\rho = (1-0{,}893)\cdot 0{,}893 = 0{,}096;$$

$$p_2 = (1-\rho)\rho^2 = (1-0{,}893)\cdot 0{,}893^2 = 0{,}085;$$

$$p_3 = (1-\rho)\rho^3 = (1-0{,}893)\cdot 0{,}893^3 = 0{,}076;$$

$$p_4 = (1-\rho)\rho^4 = (1-0{,}893)\cdot 0{,}893^4 = 0{,}068;$$

$$p_5 = (1-\rho)\rho^5 = (1-0{,}893)\cdot 0{,}893^5 = 0{,}061 \text{ и т. д.}$$

p_0 определяет долю времени, в течение которого пост диагностики вынужденно бездействует (простаивает).

В нашем примере она составляет 10,7 %, так как $p_0 = 0{,}107$.

3. Среднее число автомобилей, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди:

$$L_S = \frac{0{,}893}{1-0{,}893} = 8{,}346.$$

4. Средняя продолжительность пребывания клиента в системе:

$$W_S = \frac{1}{0{,}952(1-0{,}893)} = 9{,}817.$$

5. Среднее число автомобилей в очереди на обслуживание:

$$L_q = L_S = \frac{0,893^2}{1-0893} = 7,453.$$

6. Средняя продолжительность пребывания автомобиля в очереди:

$$W_q = \frac{0,893}{0,952(1-0,893)} = 8,766.$$

7. Относительная пропускная способность системы: $(q=1)$ т. е. каждая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена.

8. Абсолютная пропускная способность $A = 0,85 \cdot 1 = 0,85$, $m = \lambda p_N$. В нашем примере при $N = 3+1 = 4$ и $\rho = 0,893$, $m = \lambda p_0 \rho^4 = 0,85 \times$ $\times 0,248 \cdot 0,893^4 = 0,134$ автомобиля в час.

Следует отметить, что предприятие, осуществляющее диагностику автомобилей, прежде всего интересует количество клиентов, которое посетит пост диагностики при снятии ограничения на длину очереди.

При 12-часовом режиме работы поста диагностики это эквивалентно тому, что пост диагностики в среднем за смену (день) будет терять $(12 \cdot 0,134 = 1,6)$ автомобиля.

Снятие ограничения на длину очереди позволяет увеличить количество обслуженных клиентов в нашем примере в среднем на 1,6 автомобиля за смену (12 часов работы) поста диагностики. Решение относительно расширения площади для стоянки автомобилей, прибывающих на пост диагностики, должно основываться на оценке экономического ущерба, который обусловлен потерей клиентов при наличии всего трех мест для стоянки этих автомобилей.

7.9. Имитационное моделирование

Имитационная модель – универсальное средство исследования сложных систем, представляющее собой логико-алгоритмическое описание поведения отдельных элементов системы и правил их взаимодействия, отображающих последовательность событий, возникающих в моделируемой системе.

Наиболее широкое применение имитационное моделирование получило при исследовании сложных систем с дискретным характером функционирования, в том числе моделей массового обслуживания. Для описания процессов функционирования таких систем обычно используются временные диаграммы.

Временная диаграмма – графическое представление последовательности событий, происходящих в системе. Для построения временных диаграмм необходимо достаточно четко представлять взаимосвязь событий внутри системы. Степень детализации при составлении диаграмм зависит от свойств моделируемой системы и от целей моделирования.

Поскольку функционирование любой системы достаточно полно отображается в виде временной диаграммы, имитационное моделирование можно рассматривать как процесс реализации диаграммы функционирования исследуемой системы на основе сведений о характере функционирования отдельных элементов и их взаимосвязи.

Имитационное моделирование дискретных систем со стохастическим характером функционирования, таких как системы и сети массового обслуживания, предполагает использование ряда типовых процедур, обеспечивающих реализацию соответствующих имитационных моделей.

К таким процедурам в первую очередь относятся:

– выработка (генерирование) случайных величин (равномерно распределенных или с заданным законом распределения);

– формирование потоков заявок и имитация обслуживания;

– организация очередей заявок;

– организация службы времени;

– сбор и статистическая обработка результатов моделирования.

GPSS *(General Purpose Simulation System)* – общецелевая система имитационного моделирования (СИМ), предназначенная для разработки моделей сложных систем с дискретным и непрерывным характером функционирования и проведения экспериментов с целью изучения свойств и закономерностей процессов, протекающих в них, а также выбора наилучшего проектного решения среди нескольких возможных вариантов.

GPSS-*модель* представляет собой программу, написанную на языке GPSS в виде последовательности операторов, описывающих логику работы моделируемой системы.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Приведите примеры систем массового обслуживания.
2. Назовите основные компоненты СМО.
3. Назовите основные показатели СМО.
4. Классифицируйте СМО.
5. Что такое граф состояний СМО?
6. Какой поток событий называется простейшим?
7. Какой поток событий называется марковским?
8. Как построить модель простейшей одноканальной СМО?
9. Каковы характеристики одноканальной СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди?
10. Каковы характеристики одноканальной СМО с ожиданием, без ограничения на длину очереди?
11. Что такое имитационное моделирование?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.

На АЗС имеются две колонки для заправки автомобилей. Автомобили подъезжают на АЗС в соответствии с пуассоновским распределением со средней частотой два автомобиля за 5 мин. Заправка автомобиля в среднем длится 3 мин, и продолжительность заправки распределена по экспоненциальному закону.

Требуется определить:

1) вероятность того, что у АЗС не окажется ни одного автомобиля;
2) вероятность того, что обе колонки будут заняты;
3) среднюю длину очереди в ожидании заправки;
4) среднее время ожидания автомобиля в очереди.

Задача 2.

Секретарю директора завода поступает в среднем 1,2 телефонных вызовов в минуту. Средняя продолжительность разговора составляет 2 мин.

Найти основные характеристики СМО и оценить эффективность ее работы.

Задача 3.

В ОТК цеха работают три контролера. Если деталь поступает в ОТК, когда все контролеры заняты обслуживанием ранее поступивших деталей, то она проходит непроверенной. Среднее число деталей, поступающих в ОТК в течение часа, равно 24, среднее время, которое затрачивает один контролер на обслуживание одной детали, равно 5 мин.

Определить:

1) вероятность того, что деталь пройдет ОТК необслуженной;
2) насколько загружены контролеры;
3) сколько их необходимо поставить, чтобы $p^*_{\text{обсл}} \geq 0,95$

(* – заданное значение $p_{\text{обсл}}$).

Задача 4.

Магазин посещает в среднем 90 чел./час. Имеющийся один кассир обслуживает одного покупателя в мин. Очередь в зал обслуживания ограничена 5 покупателями. Оценить эффективность работы СМО.

Задача 5.

Вычислительный центр имеет три суперкомпьютера. В центр поступает на решение в среднем четыре задачи в час. Среднее время решения одной задачи-полчаса. Вычислительный центр принимает и ставит в очередь на решение не более трех задач.

Необходимо оценить эффективность центра.

Задача 6.

Сберкасса имеет трех контролеров-кассиров $(n=3)$ для обслуживания вкладчиков. Поток вкладчиков поступает в сберкассу с интенсивностью $\lambda=30$ чел./час.

Средняя продолжительность обслуживания контролером-кассиром одного вкладчика $t_{\text{обсл}}=3$ мин.

Определить характеристики сберкассы как объекта СМО.

Задача 7.

Магазин получает ранние овощи из пригородных теплиц. Автомобили с грузом прибывают в разное время с интенсивностью $\lambda=6$ машин в день. Подсобные помещения и оборудование для подготовки овощей к продаже позволяют обрабатывать и хранить товар, привезенный двумя автомашинами $(m=2)$. В магазине работают три фасовщика $(n=3)$, каждый из которых в среднем может обрабатывать товар с одной машины в течение $\overline{t}_{\text{обсл}}=4$ часа. Продолжительность рабочего дня при сменной работе составляет 12 часов.

Определить, какова должна быть емкость подсобных помещений, чтобы вероятность полной обработки товаров была $p^{*}_{\text{обсл}} \geq 0,97$.

8. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

8.1. Особенности моделей управления запасами

В реальных ситуациях требуется решать вопросы организации запаса и пополнения соответствующего продукта (товара). В частности, это выбор моментов подачи заказов на пополнение запаса, выбор объема партии заказа для пополнения запаса и т. д.

Соответствующие модели задач называют моделями управления запасами. Основные понятия применительно к таким моделям схематично представлены на рис. 8.1.

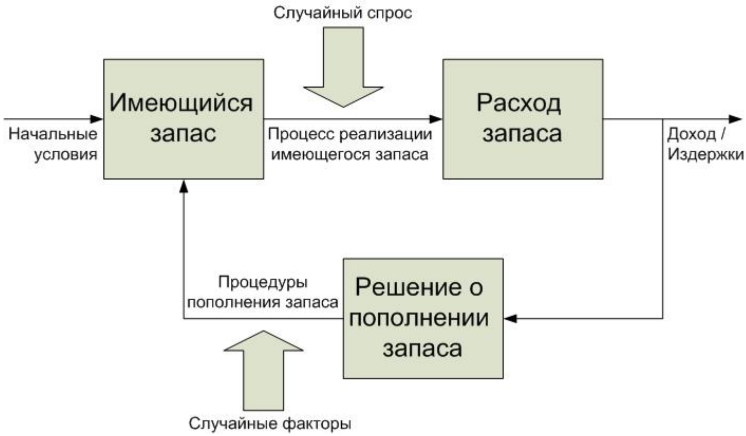

Рис. 8.1. Схема управления запасами

Особенности моделей обусловливаются, в частности, следующими факторами:

– *характером спроса* (процесс реализации запаса в общем случае представляет собой случайный процесс);

– спецификой требований учета *длительностей* промежутков времени для процедур пополнения запасов (которые также являются, случайными величинами);

– выбором возможного подхода к принятию решений о пополнении запасов, в рамках которого будут предопределяться:

– объемы приращения запасов;

– моменты подачи заказов на такое пополнение (включая и моменты поступления заказов);

– выбором *критерия* оптимизации работы системы управления запасами (минимизация суммарных годовых затрат или издержек; максимизация показателя экономической рентабельности системы; максимизация суммарного чистого приведенного дохода; максимизация интенсивности потока доходов и т. д.);

– желаниями или требованиями *учета временной стоимости денег* в рамках таких моделей (учет временной структуры действующих на рынке процентных ставок);

– спецификой дополнительных атрибутов, которые требуется учитывать в рамках соответствующей структуризации системы управления запасами.

8.1.1. Особенности стратегий управления запасами

Решения о пополнении запасов в соответствующей экономической системе могут быть формализованы различным образом. Выделяют две стратегии управления моментами подачи заказов: по календарному времени или по значению уровня запасов.

По *календарному времени* моменты подачи заказов t_i определяются по запланированным значениям текущего (или, так называемого, календарного) времени. Таким образом, t_i – *задаваемые величины* в рамках соответствующего алгоритма управления.

По *значению уровня запасов* моменты подачи заказов t_i определяются «точками» заказов, как моменты достижения процессом $\xi(t)$ запланированных уровней состояния запасов (таким образом, $\{t_i\}$ – *случайные величины*).

8.1.2. Основные типы моделей управления запасами

1. *Однокомпонентные* (однономенклатурные) – это модели, в которых рассматривается только один вид товара или продукта. Альтернативой им являются соответственно *многокомпонентные* (многономенклатурные) модели.

2. *Детерминированные* – это модели, в которых все атрибуты или параметры системы определяются как постоянные (без учета факторов случайности). В противном случае, модели – *стохастические* или *вероятностные*.

3. *Дискретные* (по времени) – это модели, в которых все изменения состояний системы (расход запаса, его пополнение) происходят в случайные моменты времени, являющиеся целочисленными случайными величинами.

4. *Статические* (одноразовой закупки) – это модели, в которых возможен только одноразовый заказ на создание запаса. Альтернативой им являются соответственно *динамические* модели.

5. *Периодические* (по стратегии управления) – это модели, в которых заказ пополнения запаса производится в конце каждого периода времени длительности T. Если управление пополнения запасов реализуется по состоянию текущих запасов, то такое управление относят к стратегиям с критическими уровнями.

6. *Планирования дефицита* – это модели, в которых заранее планируется дефицит, что обусловлено, например, экономическими или другими соображениями.

Замечание. В общей классификации необходимо учитывать:

– варианты построения соответствующих систем снабжения;
– особенности представления спроса в модели;
– характер задержек при поставках заказов на пополнение запаса;
– специфику формализации функций затрат на поставки;
– специфику формализации функций издержек хранения;
– возможные ограничения, возможные скидки;
– особенности организации управления моментами подачи заказов на пополнение запаса и способы определения объема заказа;
– дополнительные особенности, обуславливаемые априорной возможностью отсутствия запасов (например, так называемые стратегии планирования дефицита).

8.2. Простейшие оптимизационные модели одноразовой закупки

Фирмы часто делают различные запасы. Хранятся сырье, заготовки, готовая продукция, предназначенная для продажи. Запасов не должно быть ни слишком много, ни слишком мало. В первом случае возникает необходимость неоправданных затрат на хранение и амортизацию товара. Во втором случае может оказаться так, что на складе не будет нужного товара. Кроме того, малое количество запасов подразумевает их частое пополнение, что также требует затрат.

Задача управления запасами состоит в том, чтобы избежать обеих крайностей и сделать общие затраты по возможности меньше. Отметим, что в целом эта область науки управления развита довольно хорошо, разработаны многочисленные модели с применением различных математических методов. Мы рассмотрим несколько простейших детерминированных моделей управления запасами.

8.2.1. Основная модель

Важнейшую роль в наших примерах будет играть функция изменения запаса. Это связь между количеством единиц товара на складе Q и временем t. Будем считать, что имеется один вид товара. Если на товар есть спрос, то функция изменения запаса $Q = Q(t)$ убывает. Если товар, наоборот, завозят на склад, то эта функция возрастает. Мы будем считать возможным мгновенное пополнение запаса.

Затраты, связанные с запасами, можно разделить на три части.

1. *Стоимость товара*.

2. *Организационные издержки*. Это расходы, связанные с оформлением товара, его доставкой, разгрузкой и т. д.

3. *Издержки на хранение товара*. Это затраты на аренду склада, амортизацию в процессе хранения и т. д.

Рассмотрим основные величины и предположения относительно них, принятые в рамках основной модели. Мы будем использовать в качестве единицы измерения денежных средств условные денежные единицы (д. е.) и в качестве единицы измерения времени – год, хотя можно было бы взять месяц, квартал и т. п.

Введем обозначения, пусть:

c – цена единицы товара (у. е.). Цена постоянна, рассматривается один вид товара;

d – интенсивность спроса (d единиц товара в год). Будем считать, что спрос постоянный и непрерывный;

s – организационные издержки (s д. е. за одну партию товара). Будем считать, что организационные издержки не зависят от размера поставки, т. е. от количества единиц товара в одной партии;

h – издержки на хранение запаса (д. е. на единицу товара в год). Будем считать эти издержки постоянными;

q – размер одной партии товара постоянен и равен q единиц. Партия поступает мгновенно в тот момент, когда возникает дефицит, т. е. когда запас на складе становится равным нулю.

При сделанных предположениях график функции изменения запаса будет таким, как показано на рис. 8.2. Он состоит из повторяющихся циклов запаса между двумя соседними дефицитами. Вертикальные отрезки отвечают мгновенному пополнению запаса.

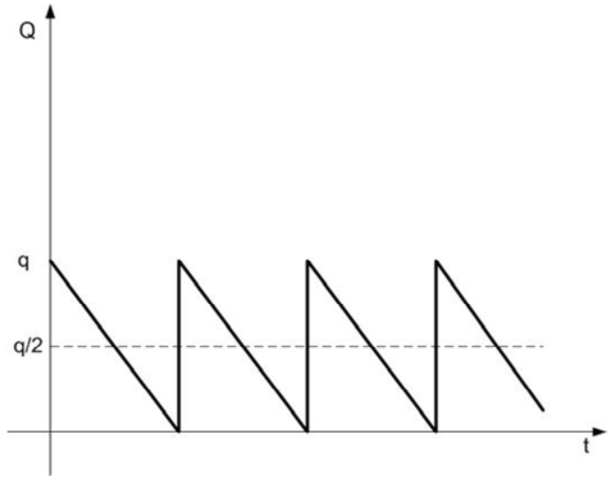

Рис. 8.2. График функции изменения запаса основной модели

Параметры c, d, s, h считаются заданными.

Задача управления запасами состоит в выборе параметра q таким образом, чтобы минимизировать годовые затраты.

Для решения сформулированной задачи надо прежде всего выразить эти затраты через параметры c, d, s, h, q.

1. Поскольку годовая интенсивность спроса равна d, а цена единицы товара – c, то общая стоимость товара в год равна $(c \cdot d)$.

2. Поскольку в одной партии q единиц товара, а годовой спрос равен d, то число поставок равно $\left(\frac{d}{q}\right)$. В течение года организационные издержки равны: $\left(\frac{d}{q} \cdot s\right)$.

3. Средний уровень запаса равен отношению площади под графиком за цикл к продолжительности цикла. Этот средний уровень равен $q/2$ (на рис. 8.2 обозначен пунктиром). Поскольку годовые издержки на хранение единицы товара равны h, то общие издержки на хранение составляют: $\left(\frac{q}{2} \cdot h\right)$.

Таким образом, общие издержки C вычисляются по формуле:

$$C = cd + \frac{sd}{q} + \frac{gh}{2}. \tag{8.1}$$

Еще раз напомним, что в рамках модели параметры c, d, s, h считаются заданными и требуется найти такое число q^*, чтобы функция $C = C(q)$ принимала наименьшее значение на множестве $q > 0$ именно в точке q^*.

График функции $C = C(q)$ показан на рис. 8.3.

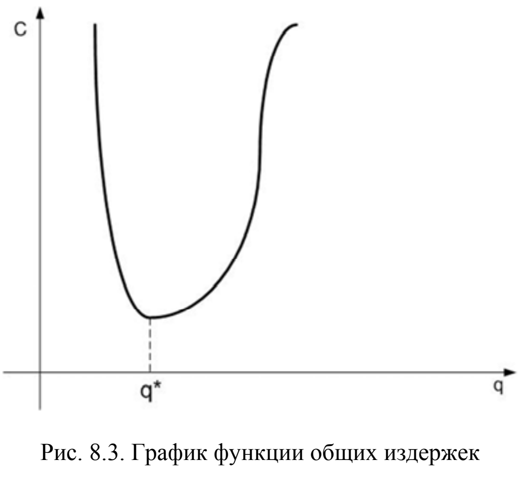

Рис. 8.3. График функции общих издержек

Для нахождения точки q^* минимума функции $C = C(q)$ найдем ее производную (c, d, s, h – фиксированные числа):

$$C'(q) = (cd)' + \left(\frac{sd}{q}\right)' + \left(\frac{gh}{2}\right)' = \frac{sd}{q^2} + \frac{h}{2}. \qquad (8.2)$$

Приравнивая $C'(q)$ к нулю, получаем: $-\frac{sd}{q^2} + \frac{h}{2} = 0.$

Отсюда можно найти:

$$q^* = \sqrt{\frac{2sd}{h}}. \qquad (8.3)$$

Полученная формула называется формулой оптимального запаса, или формулой Харриса (*Harris*).

Задача 8.1

Пусть интенсивность равномерного спроса составляет 1000 единиц товара в год. Организационные издержки равны 10 д. е., издержки на хранение – 4 д. е. на единицу товара в год, цена товара – 5 д. е.

Определить оптимальный размер партии в предположении, что система подчиняется основной модели.

Решение.

Имеем $d = 1000,\ s = 10,\ h = 4,\ c = 5.$.

Общие затраты равны:

$$C = cd + \frac{sd}{q} + \frac{gh}{2} = 5000 + \frac{10000}{q} + 2q.$$

Тогда $C'(q) = -\frac{10000}{q^2} + 2,$ а оптимальный размер поставки q^* является решением уравнения $-\frac{10000}{q^2} + 2 = 0,$ т. е. $q^* = \sqrt{5000} \approx 71.$

Замечание. Найдя оптимальный размер заказа, можно определить оптимальное число поставок за год n^* и соответствующую продолжительность цикла изменения запаса t^*:

$$n^* = \frac{d}{q^*} = \frac{1000}{71} \approx 14; t^* = \frac{365}{n^*} \approx 26 \text{ дней.}$$

8.2.2. Модель производственных поставок

В основной модели предполагалось, что поступление товаров на склад происходит мгновенно. Это предположение достаточно хорошо отражает ситуацию, когда товар поставляется в течение одного дня (или ночи).

Если товары поставляются с работающей производственной линии, необходимо модифицировать основную модель. В этом случае к параметрам c, d, s, h добавляется еще один, p – производительность производственной линии (количество единиц товара в год). Будем считать ее заданной и постоянной.

Эта новая модель называется *моделью производственных поставок*. Величина q по-прежнему обозначает размер партии. В начале каждого цикла происходит «подключение» к производственной линии, которое продолжается до накопления q-единиц товара. После этого пополнения запасов не происходит до тех пор, пока не возникнет дефицит. График функции изменения запаса имеет вид, изображенный на рис. 8.4.

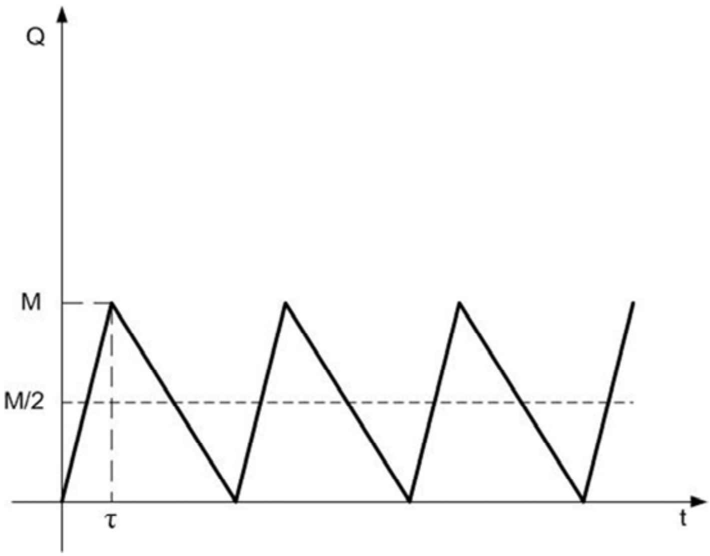

Рис. 8.4. График функции изменения запаса

Общие издержки $C(q)$ как и в основной модели, состоят из трех частей.

1. Общая стоимость товара в год равна: $(c \cdot d)$.

2. Годовые организационные издержки равны: $\left(\frac{sd}{q}\right)$.

3. Издержки на хранение вычисляются следующим образом. Пусть τ – время поставки (рис. 8.4). В течение этого времени происходит как пополнение (с интенсивностью p), так и расходование (с интенсивностью d) запаса. Увеличение запаса происходит со скоростью $(p-d)$.

Поэтому достигнутый к концу периода пополнения запаса максимальный его уровень M вычисляется по формуле:

$$M = (p-d) \cdot \tau \tag{8.4}$$

(заметим, что $M < q$).

Однако, $p\tau = q$ (за время τ при интенсивности производства p произведено q-единиц товара). Из последних двух равенств следует, что

$$M = (p-d) \cdot \frac{q}{p}. \tag{8.5}$$

Средний уровень запаса, как и в основной модели, равен половине максимального, т. е. $M/2$. Таким образом, издержки на хранение запаса равны:

$$\frac{(p-d)}{2p} \cdot gh. \tag{8.6}$$

Общие издержки вычисляются по формуле:

$$C = cd + \frac{sd}{q} + \frac{(p-d)gh}{2p}. \tag{8.7}$$

Оптимальный размер поставок q^* получаем из уравнения:

$$C'(q) = -\frac{sd}{q^2} + \frac{(p-d)}{2p} \cdot gh = 0. \qquad (8.8)$$

Имеем:

$$q^* = \sqrt{\frac{2psd}{(p-d)h}}. \qquad (8.9)$$

Задача 8.2.

Интенсивность равномерного спроса составляет 1 тыс. единиц товара в год. Товар поставляется с конвейера, производительность которого составляет 5 тыс. единиц в год. Организационные издержки равны 10 д. е., издержки на хранение – 2 д. е., цена единицы товара – 5 д. е.

Чему равен оптимальный размер партии?

Решение.

Имеем: $d = 1000,\ p = 5000, s = 10, h = 2, c = 5.$.

$$C = cd + \frac{sd}{q} + \frac{(p-d)gh}{2p} = 5000 + \frac{10000}{q} + \frac{4}{5}q$$

$$C'(q) = -\frac{10000}{q^2} + \frac{4}{5}$$

В итоге получаем: $q^* = \sqrt{10000 \cdot \frac{4}{5}} \approx 112.$

Замечание. Найдя оптимальный размер заказа, можно определить оптимальное число поставок за год n^* и соответствующие продолжительность поставки τ^* и продолжительность цикла пополнения запаса t^*:

$$n^* = \frac{d}{q^*} = \frac{1000}{112} \approx 9;\ \tau^* = \frac{q^*}{p} = \frac{112}{5000} \cdot 356 \approx 10;$$

$$t^* = \frac{365}{n^*} = \frac{365}{9} \approx 41 \text{ день.}$$

8.2.3. Модель поставок со скидкой

Рассмотрим ситуацию, описываемую в целом основной моделью, но с одной особенностью – товар можно поставлять по льготной цене (со скидкой), если размер партии достаточно велик.

Иными словами, если размер партии q не менее заданного числа q_0, товар поставляется по цене c_0, где $c_0 < c$.

Функция общих издержек $C(q)$ задается в таком случае следующим образом:

$$C(q) = \begin{cases} cd + \frac{sd}{q} + \frac{gh}{2}, \ q < q_0 \\ c_0 d + \frac{sd}{q} + \frac{gh}{2}, \ q \geq q_0. \end{cases} \quad (8.10)$$

Нетрудно видеть, что функция в точке $q = q_0$ разрывна.

Обе функции $f(q) = cd + \frac{sd}{q} + \frac{gh}{2}$ и $f_0(q) = c_0 d + \frac{sd}{q} + \frac{gh}{2}$ имеют минимум в точке, где $f'(q) = f_0'(q) = 0$, т. е. в точке $\overline{q} = \sqrt{\frac{2ps}{h}}$. Для выяснения вопроса о том, какой размер партии оптимален, следует сравнить значения функции $C(q)$ в точках q; q_0 и та точка, где функция $C(q)$ принимает меньшее значение, будет оптимальным размером партии q^* в модели поставок со скидкой (рис. 8.5).

Замечание. Может случиться так, что $C(q) = C(q_0)$, тогда, разумеется, $q^* = q = q_0$.

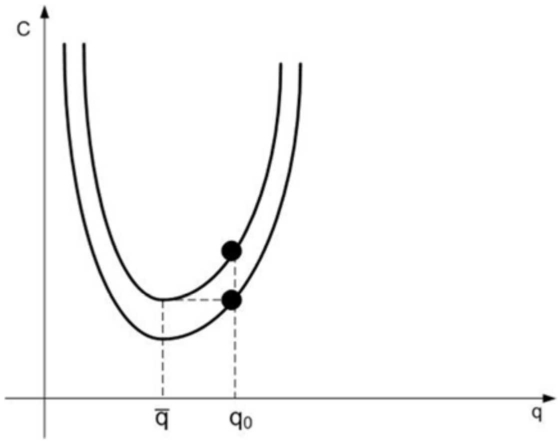

Рис. 8.5. График функции общих издержек модели поставок со скидкой.

Задача 8.3.

Предположим, что интенсивность равномерного спроса составляет 1000 единиц товара в год. Организационные издержки равны 10 д. е., издержки на хранение – 4 д. е. Цена единицы товара равна 5 д. е., однако, если размер партии не менее 500 единиц, цена снижается до 4 д. е.

Найти оптимальный размер партии.

Решение.

Здесь: $d = 1000$, $s = 10$, $h = 4$, $c = 5$, $q_0 = 500$, $c_0 = 4$.

Общие издержки определяются функцией $C(q)$:

$$C(q) = \begin{cases} f(q) = 5000 + \dfrac{10000}{q} + 2q; \; q < 500 \\ f_0(q) = 4000 + \dfrac{10000}{q} + 2q; \; q \geq 500. \end{cases}$$

Найдем точку локального минимума. Имеем:

$$f'(q) = f_0'(q) = -\frac{10000}{q^2} + 2, \text{ откуда } \bar{q} = \sqrt{5000} \approx 71.$$

Поскольку $q < 500$, то $C(\overline{q}) = f(\overline{q}) = f(71) \approx 5000 + \frac{10000}{71} +$
$+ 2 \cdot 71 \approx 5283.$

В точке $q = q_0$ получаем:

$$C(q_0) = f_0(q_0) = f_0(500) = 4000 + \frac{10000}{500} + 2 \cdot 500 \approx 5020.$$

Таким образом, $q^* = 500$.

8.3. Представление модели управления запасами случайным процессом

Пусть $\xi(t)$ – случайный процесс, значения которого соответствуют объему имеющегося запаса в момент времени *t*.

Если начальный запас $q_0 \left(q_0 = \xi(0) \right)$ задан, то развитие траектории $\xi(t)$ во времени определяется случайным спросом и соответствующими решениями о пополнении запаса.

Иллюстрация основных понятий моделей УЗ представлена схематически на рис. 8.6 на основе конкретной реализации траектории процесса $\xi(t)$.

Здесь

t_i – моменты подачи заказов пополнения запасов;

$\xi(t_i)$ – «точки» заказов;

T_i – моменты пополнения запасов;

$l_i = (T_i - t_i)$ – случайные длительности поставки заказов;

q_i – объемы запаса в моменты T_i, причем $\xi(T_i) = \xi(T_i + 0)$;

$\left(q_i - \xi(T_i - 0) \right)$ – объемы поставок при пополнении запасов.

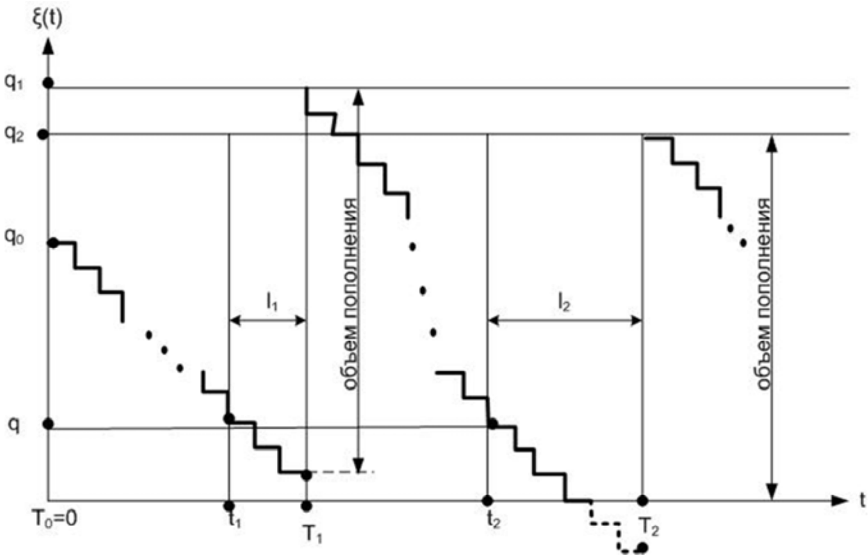

Рис. 8.6. График функции изменения запаса

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. В чем заключаются особенности моделей управления запасами?
2. Назовите основные типы моделей управления запасами.
3. Как построить основную модель одноразовой закупки?
4. Как построить модель поставки с производственной линии?
5. Как построить модель поставок со скидкой?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.

Магазин ежедневно продает 100 телевизоров. Накладные расходы на поставку партии телевизоров в магазин оцениваются в 300 руб. Стоимость хранения одного телевизора на складе магазина составляет 6 руб.

Определить оптимальный объем партии телевизоров, оптимальные среднесуточные издержки на хранение и пополнение запасов телевизоров на складе. Чему будут равны эти издержки при объемах партий 50 и 300 телевизоров?

Задача 2.

Интенсивность равномерного спроса составляет 2000 приборов в год. Организационные издержки для одной партии составляют 20 д. е. Цена единицы товара равна 3 д. е., а издержки содержания приборов составляют 0,1 д. е. за один прибор в год.

Найти оптимальный размер партии и продолжительность цикла.

Задача 3.

Система управления запасами некоторого товара подчиняется основной модели. Каждый год с постоянной интенсивностью спрос составляет 15000 единиц товара, издержки на организацию поставки составляют 10 д. е. на партию, цена единицы товара – 30 д. е., а издержки на ее хранение – 7,5 д. е. в год. Найти оптимальный размер партии, число поставок, продолжительность цикла.

9. МОДЕЛИ ИЗУЧЕНИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СПРОСА

9.1. Целевая функция потребления и моделирование поведения потребителей

В условиях рыночной системы управления экономическими объектами в основе принятия хозяйственных решений лежит рыночная информация, а обоснованность решений проверяется рынком в ходе реализации товаров и услуг. При таком подходе начальным пунктом всего цикла предпринимательской деятельности становится изучение потребительского спроса.

Рассмотрим некоторые вопросы моделирования спроса и потребления.

Уровень удовлетворения материальных потребностей общества (уровень потребления) можно выразить целевой функцией потребления:

$$U = U(Y), \tag{9.1}$$

где вектор переменных $Y \geq 0$ включает разнообразные виды товаров и услуг.

Ряд свойств этой функции удобно изучать, используя геометрическую интерпретацию уравнений:

$$U(Y) = C, \tag{9.2}$$

где C – меняющийся параметр, характеризующий значение (уровень) целевой функции потребления.

В качестве величины C может выступать, например, доход или уровень материального благосостояния. В пространстве потребительских благ каждому уравнению (9.2) соответствует определенная поверхность равноценных, или безразличных, наборов благ, которая называется поверхностью безразличия.

Для наглядности рассмотрим пространство двух благ, например, в виде двух агрегированных групп товаров:

– продукты питания y_1;

– и непродовольственные товары, включая услуги y_2.

Тогда уровни целевой функции потребления можно изобразить на плоскости в виде кривых безразличия, соответствующих различным значениям C (рис. 9.1, где $C_1 < C_2 < C_3$).

Будем далее пользоваться термином «кривые безразличия» вне зависимости от размерности пространства потребительских благ (количества групп товаров).

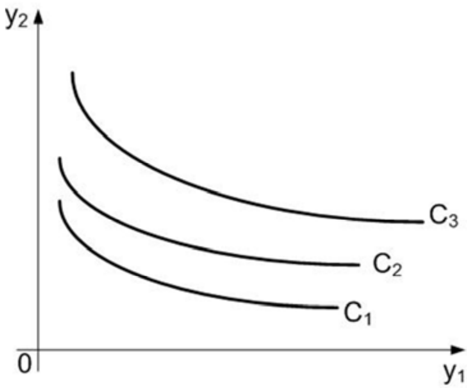

Рис. 9.1. Кривые безразличия

Из основных свойств целевой функции потребления отметим следующие:

1) функция $U(Y)$ является возрастающей функцией всех своих аргументов, т. е. увеличение потребления любого блага при неизменном уровне потребления всех других благ увеличивает значение данной функции. Поэтому более удаленная от начала координат кривая безразличия соответствует большему значению целевой функции потребления, а сам процесс максимизации этой функции на некотором ограниченном множестве допустимых векторов Y можно интерпретировать как нахождение допустимой точки, принадлежащей кривой безразличия, максимально удаленной от начала координат;

2) кривые безразличия не могут пересекаться, т. е. через одну точку пространства благ (товаров, услуг) можно провести только одну поверхность безразличия. В противном случае один и тот же набор благ одновременно соответствовал бы нескольким разным уровням материального благосостояния;

3) кривые безразличия имеют отрицательный наклон к каждой оси координат, при этом абсолютный наклон кривых уменьшается при движении в положительном направлении по каждой оси, т. е. кривые безразличия являются выпуклыми кривыми.

Методы построения целевой функции потребления основаны на обобщении опыта поведения потребителей и тенденций покупательского спроса в зависимости от уровня благосостояния.

В качестве примера приведем квадратичную целевую функцию потребления для трех агрегированных групп товаров, построенную на основе обработки данных бюджетной статистики:

$$\begin{aligned}U(Y) = {} & (1-1{,}841a)y_1 + (1-2{,}054a)y_2 + (1-2{,}116a)y_3 + \\ & +0{,}668\cdot 10^{-4} y_1^2 + 1{,}230\cdot 10^{-4} y_1 y_2 + 1{,}234\cdot 10^{-4} y_1 y_3 + \\ & +0{,}506\cdot 10^{-4} y_2^2 + 1{,}104\cdot 10^{-4} y_2 y_3 + 0{,}492\cdot 10^{-4} y_3^2\end{aligned} \qquad (9.3)$$

где a – число детей в семье;

y_1 – потребление продуктов питания;

y_2 – потребление промышленных товаров;

y_3 – потребление платных услуг (в стоимостном выражении).

Перейдем к вопросу моделирования поведения потребителей в условиях товарно-денежных отношений на базе целевой функции потребления. В основе модели поведения потребителей лежит гипотеза, что потребители, осуществляя выбор товаров при установленных ценах и имеющемся доходе, стремятся максимизировать уровень удовлетворения своих потребностей.

Пусть в пространстве n-видов товаров исследуется поведение совокупности потребителей.

Обозначим спрос потребителей через вектор:

$$Y = (y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n),$$

а цены на различные товары – через вектор:

$$P = (p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_n).$$

При величине дохода D потребители могут выбирать только такие комбинации товаров, которые удовлетворяют *бюджетному ограничению:*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i y_i \le D. \tag{9.4}$$

Предположим, что предпочтение потребителей на множестве товаров выражается целевой функцией потребления $U(Y)$. Тогда простейшая модель поведения потребителей в векторной форме записи будет иметь вид:

$$\begin{gathered} U(Y) \to \max \\ PY \le D \\ Y \ge 0. \end{gathered} \tag{9.5}$$

Геометрическая интерпретация модели для двух агрегированных групп товаров представлена на рис. 9.2.

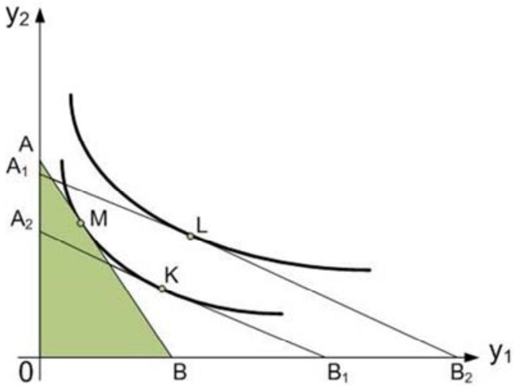

Рис. 9.2. Кривые безразличия для двух групп товаров

Линия AB (в других вариантах A_1B_1, A_2, B_2) соответствует бюджетному ограничению и называется *бюджетной линией*. Выбор потребителей ограничен треугольником $A0B$ $(A_10B_1,\ A_20B_2)$. Набор товаров *M*, соответствующий точке касания прямой *AB* с наиболее отдаленной кривой безразличия, является оптимальным решением (в других вариантах это точки *K* и *L*). Легко заметить, что линии *AB* и A_1B соответствуют одному и тому же размеру дохода и разным ценам на товары y_1, y_2; линия A_2, B_2 соответствует большему размеру дохода.

Опираясь на некоторые выводы теории нелинейного программирования, можно определить математические условия оптимальности решений для модели.

С задачей нелинейного программирования связывается так называемая функция Лагранжа, которая имеет вид:

$$L(Y,\lambda) = U(Y) + \lambda(D - PY), \tag{9.6.}$$

где множитель Лагранжа λ является оптимальной оценкой дохода.

Обозначим частные производные функции *U*(*Y*) через U_i:

$$U_i = \frac{\partial U(Y)}{\partial y_i}. \tag{9.7}$$

Эти производные интерпретируются как предельные полезные эффекты (предельные полезности) соответствующих потребительских благ и характеризуют прирост целевой функции потребления при увеличении использования *i*-блага (товара) на некоторую условную «малую единицу».

Необходимыми условиями того, что вектор Y^0 будет оптимальным решением, являются условия Куна-Таккера:

$$U_i\left(Y^0\right) \le \lambda^0 p_i;\ i = 1, ..., n, \tag{9.8}$$

при этом:

$U_i\left(Y^0\right) = \lambda^0 p_i,\ y_i^0 > 0$ (товар приобретается),

$U_i\left(Y^0\right) = \lambda^0 p_i,\ y_i^0 > 0$ (товар не приобретается),

$PY^0 = D.$

Последнее из соотношений соответствует полному использованию дохода, и для этого случая очевидно неравенство $\lambda^0 > 0$.

Из условий оптимальности следует, что:

$$\frac{U_i\left(Y^0\right)}{p_i} = \lambda^0,\ y_i^0 > 0. \tag{9.9}$$

Это означает, что потребители должны выбирать товары таким образом, чтобы отношение предельной полезности к цене товара было одинаковым для всех приобретаемых товаров. Другими словами, в оптимальном наборе предельные полезности выбираемых товаров должны быть пропорциональны ценам.

9.2. Функции покупательского спроса

Функциями покупательского спроса (далее будем называть их просто функциями спроса) называются функции, отражающие зависимость объема спроса на отдельные товары и услуги от комплекса факторов, влияющих на него. Такие функции применяются в аналитических моделях спроса и потребления и строятся на основе информации о структуре доходов населения, ценах на товары, составе семей и других факторах.

Рассмотрим построение функций спроса в зависимости от двух факторов – дохода и цен. Пусть в модели цены и доход рассматриваются как меняющиеся параметры. Переменную дохода обозначим Z. Тогда решением оптимизационной задачи будет векторная функция:

$$Y^0 = Y^0\left(P, Z\right) \tag{9.10}$$

компонентами которой являются функции спроса на определенный товар от цен и дохода:

$$y_i^0 = f_i\left(P, Z\right). \tag{9.11}$$

Рассмотрим частный случай, когда вектор цен остается неизменным, а изменяется только доход. Для двух товаров этот случай представлен на рис. 9.3.

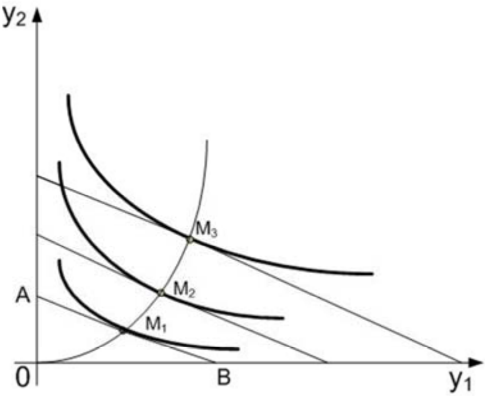

Рис. 9.3. Бюджетная линия для двух товаров

Если по оси абсцисс отложить количество единиц товара y_1, которое можно приобрести на имеющийся доход Z (точка B), а по оси ординат – то же самое для товара y_2 (точка A), то прямая линия AB, называемая бюджетной линией, показывает любую комбинацию количеств этих двух товаров, которую можно купить за сумму денег Z. При увеличении дохода бюджетные линии перемещаются параллельно самим себе, удаляясь от начала координат. Вместе с ними перемещаются соответствующие кривые безразличия. Точками оптимума спроса потребителей для соответствующих размеров дохода будут в данном случае точки M_1, M_2, M_3. При нулевом доходе спрос на оба товара нулевой. Кривая, соединяющая точки 0, M_1, M_2, M_3 является графическим отображением векторной функции спроса от дохода при заданном векторе цен.

Однофакторные функции спроса от дохода широко применяются при анализе покупательского спроса. Соответствующие этим функциям кривые называются кривыми Энгеля (по имени изучавшего их немецкого экономиста). Формы этих кривых для различных товаров могут быть различны. Если спрос на данный товар возрастает примерно пропорционально доходу, то функция будет линейной.

Такой характер имеет, например, спрос на одежду, фрукты и др. Кривая Энгеля для этого случая представлена на рис. 9.4 *а*).

Если по мере роста дохода спрос на данную группу товаров возрастает все более высокими темпами, то кривая Энгеля будет выпуклой рис. 9.4, *б*). Так ведет себя спрос на предметы роскоши.

Если рост значений спроса, начиная с определенного момента, по мере насыщения спроса отстает от роста дохода, то кривая Энгеля имеет вид вогнутой кривой рис. 9.4, *в*). Например, такой характер имеет спрос на товары первой необходимости.

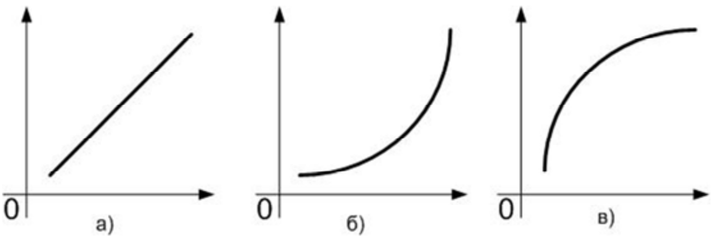

Рис. 9.4. Кривые Энгеля

Важную роль в анализе изменения спроса в зависимости от дохода играют коэффициенты эластичности.

Коэффициент эластичности спроса от дохода показывает относительное изменение спроса при изменении дохода (при прочих неизменяющихся факторах). Вычисляется по формуле:

$$E_i^Z = \frac{dy_i}{dZ} \cdot \frac{Z}{y_i}, \tag{9.12}$$

где E_i^Z – коэффициент эластичности для i-товара (группы товаров) по доходу Z;

y_i – спрос на этот товар, являющийся функцией дохода: $y_i = f(Z)$.

Например, если спрос на товар описывается функцией Торнквиста для товаров первой необходимости, то формула дает следующее выражение для коэффициента эластичности спроса от дохода:

$$E_i^Z = \frac{C_1}{Z + C_1}. \tag{9.13}$$

Во многих экономико-математических моделях эластичность функций относят к проценту прироста независимой переменной. Таким образом, коэффициент эластичности спроса от дохода показывает, на сколько процентов изменится спрос на товар при изменении дохода на 1 %.

Перейдем к рассмотрению и анализу функций покупательского спроса от цен на товары. Из модели поведения потребителей (9.10) следует, что спрос на каждый товар в общем случае зависит от цен на все товары (вектора *P*), однако построить функции общего вида $Y = \varphi(P)$ очень сложно.

Поэтому в практических исследованиях ограничиваются построением и анализом функций спроса для отдельных товаров в зависимости от изменения цен на этот же товар или группу взаимозаменяемых товаров:

$$y_i = \varphi_i(y_i). \tag{9.14}$$

Для большинства товаров действует зависимость: чем выше цена, тем ниже спрос, и наоборот. Здесь также возможны разные типы зависимости и, следовательно, разные формы кривых. В практических задачах изучения спроса важно различать действительное увеличение спроса, когда сама кривая сдвигается вверх и вправо (происходит переход с кривой *I* на кривую *II* на рис. 9.5, и увеличение объема приобретаемых товаров в результате снижения цен при неизменной сумме затрат (переход от точки *A* к точке *B* по одной и той же кривой *I* на рис.9.5. Как уже отмечено выше, в общем случае спрос на отдельный товар при прочих равных условиях зависит от уровня цен всех товаров.

Относительное изменение объема спроса при изменении цены данного товара или цен других связанных с ним товаров характеризует коэффициент эластичности спроса от цен.

Этот коэффициент эластичности удобно трактовать как величину изменения спроса в процентах при изменении цены на 1 % .

Для спроса y_i на *i*-товар относительно его собственной цены p_i коэффициент эластичности исчисляется по формуле:

$$E_i^p = \frac{\partial y_i}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{y_i}. \tag{9.15}$$

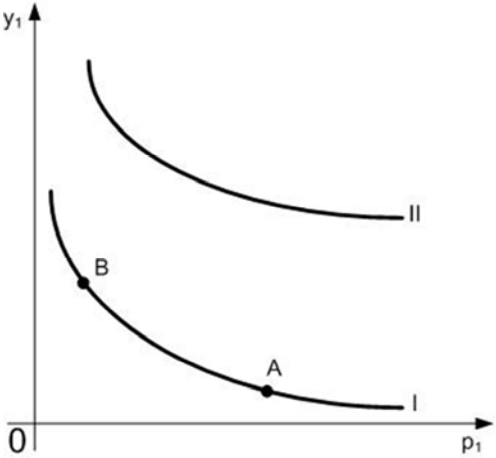

Рис. 9.5. Кривые спроса

Значения коэффициентов эластичности спроса от цен практически всегда отрицательны. Однако по абсолютным значениям этих коэффициентов товары могут существенно различаться друг от друга. Их можно разделить на три группы:

– товары с неэластичным спросом в отношении цены $\left(E_i^p < -1\right)$;

– товары со средней эластичностью спроса от цены (E_i^p близки к (–1));

– товар с высокой эластичностью спроса $\left(E_i^p > -1\right)$.

В товарах эластичного спроса повышение цены на 1 % приводит к снижению спроса более чем на 1 % и, наоборот, понижение цены на 1 % приводит к росту покупок больше чем на 1 %. Если повышение цены на 1 % влечет за собой понижение спроса менее чем на 1 %, то говорят, что этот товар неэластичного спроса.

Рассмотрим влияние на спрос на какой-либо товар изменения цен на другие. Коэффициент, показывающий, насколько процентов изменится спрос на данный товар при изменении на 1 % цены на другой товар при условии, что другие цены и доходы покупателей остаются прежними, называется *перекрестным коэффициентом эластичности*.

Для спроса y_i на i-товар относительно цены p_j на j-товар $(i \neq j)$ перекрестный коэффициент эластичности рассчитывается по формуле:

$$E_{ij}^{p} = \frac{\partial y_i}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{y_i}. \qquad (9.16)$$

По знаку перекрестных коэффициентов эластичности товары можно разделить на взаимозаменяемые и взаимодополняемые. Если $E_{ij}^{p} > 0,$ это означает, что i-товар заменяет в потреблении товар j, т. е. на товар i переключается спрос при увеличении цены на товар j. Примером взаимозаменяемых товаров могут служить многие продукты питания.

Если $E_{ij}^{p} < 0,$ это служит признаком того, что i-товар в процессе потребления дополняет товар j, т. е. увеличение цены на товар j приводит к уменьшению спроса на товар i. В качестве примера можно привести такие взаимодополняемые товары, как автомобили и бензин.

9.3. Моделирование и прогнозирование покупательского спроса

Очевидно, что спрос во многом определяет стратегию и тактику организации производства и сбыта товаров и услуг. Учет спроса, обоснованное прогнозирование его на краткосрочную и долгосрочную перспективу – одна из важнейших задач служб маркетинга различных организаций и фирм.

Состав и уровень спроса на тот или иной товар зависят от многих факторов, как экономических, так и естественных.

К *экономическим факторам* относятся:

– уровень производства (предложения) товаров и услуг (обозначим этот фактор в общем виде П);

– уровень денежных доходов отдельных групп населения (D);

– уровень и соотношение цен (P).

К *естественным факторам* относятся

– демографический состав населения, в первую очередь размер и состав семьи (S);

– а также привычки и традиции, уровень культуры, природно-климатические условия и т. д.

Экономические факторы очень мобильны, особенно распределение населения по уровню денежных доходов. Естественные же факторы меняются сравнительно медленно и в течение небольшого периода (до 3–5 лет) не оказывают заметного влияния на спрос. Исключение составляет демографический состав населения. Поэтому в текущих и перспективных прогнозах спроса все естественные факторы, кроме демографических, целесообразно учитывать сообща, введя фактор под названием «время» (t).

Таким образом, в общем виде *спрос* определяется как функции перечисленных выше факторов:

$$y = f\left(\Pi, D, P, S, t\right). \tag{9.17}$$

Поскольку наибольшее влияние на спрос оказывает фактор дохода (известно выражение: «спрос всегда платежеспособен»), многие расчеты спроса и потребления осуществляются в виде функции от душевого денежного дохода:

$$y = f\left(D\right). \tag{9.18}$$

Наиболее простой подход к прогнозированию спроса на небольшой период времени связан с использованием так называемых структурных моделей спроса. При построении модели исходят из того, что для каждой экономической группы населения по статистическим бюджетным данным может быть рассчитана присущая ей структура потребления. При этом предполагается, что на изучаемом отрезке времени заметные изменения претерпевает лишь доход, а цены, размер семьи и прочие факторы принимаются неизменными. Изменение дохода, например его рост, можно рассматривать как перемещение определенного количества семей из низших доходных групп в высшие. Другими словами, изменяются частоты в различных интервалах дохода: они уменьшаются в нижних и увеличиваются в верхних интервалах. Семьи, которые попадают в новый интервал, будут иметь ту же структуру потребления и спроса, какая сложилась у семей с таким же доходом к настоящему времени.

Таким образом, структурные модели рассматривают спрос как функцию только распределения потребителей по уровню дохода. Имея соответствующие структуры спроса, рассчитанные по данным статистики бюджетов, и частоты распределения потребителей по уровню дохода, можно рассчитать общую структуру спроса.

Если обозначить структуру спроса в группе семей со средним доходом D_i через $r(D_i)$, а частоты семей с доходом D_i через $w(D_i)$, то общая структура спроса R может быть рассчитана по формуле:

$$R = \sum_{i=1}^{n} r(D_i) \cdot w(D_i), \tag{9.19}$$

где n – количество интервалов дохода семей.

Структурные модели спроса – один из основных видов экономико-математических моделей планирования и прогнозирования спроса и потребления. В частности, широко распространены так называемые компаративные (сравнительные) структурные модели, в которых сопоставляются структуры спроса данного исследуемого объекта и некоторого аналогового объекта. Аналогом обычно считаются регион или группа населения с оптимальными потребительскими характеристиками.

Наряду со структурными моделями в планировании и прогнозировании спроса используются конструктивные модели спроса. В основе их лежат уравнения бюджета населения, т. е. такие уравнения, которые выражают очевидное равенство общего денежного расхода (другими словами, объема потребления) и суммы произведений количества каждого потребленного товара на его цену. Если обозначить:

Z – объем потребления;

m – количество разных видов благ;

q_i – размер потребления i-блага;

p_i – цена i-блага, то конструктивная модель спроса может быть записана следующим образом:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} q_i p_i. \tag{9.20}$$

Эти модели, называемые также *моделями бюджетов потребителей*, играют важную роль в планировании потребления.

Одной из таких моделей является, например, всем известный прожиточный минимум. К таким моделям относятся также рациональные бюджеты, основанные на научных нормах потребления, прежде всего продуктов питания, перспективные бюджеты (например, так называемый бюджет достатка) и др.

В практике планирования и прогнозирования спроса кроме структурных и конструктивных моделей применяются также аналитические модели спроса и потребления, которые строятся в виде уравнений, характеризующих зависимость потребления товаров и услуг от тех или иных факторов. В аналитических моделях функциональная зависимость принимает вполне определенный вид. Такие модели могут быть однофакторными и многофакторными.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Назовите основные свойства функции потребления.
2. Назовите основные свойства функции спроса.
3. Какие факторы влияют на спрос?
4. Как осуществляется прогнозирование спроса?

10. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

10.1. Предмет динамического программирования

Динамическое программирование представляет собой процесс управления в виде цепочки последовательных действий, или шагов, развернутых во времени и ведущих к цели.

Это позволяет спланировать последовательность будущих действий. Поскольку вариантов возможных планов программ множество, то необходимо из них выбрать лучший, оптимальный по какому-либо критерию в соответствии с поставленной целью.

Динамическое программирование представляет собой оптимальное управление процессом, посредством изменения управляемых параметров на каждом шаге.

В целом динамическое программирование представляет собой стройную теорию для восприятия и достаточно простую для применения в коммерческой деятельности при решении как линейных, так и нелинейных задач.

Динамическое программирование применяется для решения задач, в которых поиск оптимума возможен при поэтапном подходе, например:

– распределение дефицитных капитальных вложений между новыми направлениями их использования;

– разработка правил управления спросом или запасами, устанавливающими момент пополнения запаса и размер пополняющего заказа;

– разработка принципов календарного планирования производства и выравнивания занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию;

– составление календарных планов текущего и капитального ремонтов оборудования и его замены;

– поиск кратчайших расстояний на транспортной сети;

– формирование последовательности развития коммерческой операции и т. д.

10.2. Постановка задачи динамического программирования

Постановку задачи динамического программирования рассмотрим на примере инвестирования, связанного с распределением средств между предприятиями.

В результате управления инвестициями система последовательно переводится из начального состояния S_0 в конечное S_n. Предположим, что управление можно разбить на n-шагов и решение принимается последовательно на каждом шаге, а управление представляет собой совокупность n пошаговых управлений.

На каждом шаге необходимо определить два типа переменных:

– переменную состояния системы S_k;

– и переменную управления x_k.

Переменная S_k определяет, в каких состояниях может оказаться система на рассматриваемом k-шаге. В зависимости от состояния S на этом шаге можно применить некоторые управления, которые характеризуются переменной x_k, которые удовлетворяют определенным ограничениям и называются допустимыми.

Допустим $X=\left(x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n\right)$ – управление, переводящее систему из состояния S_0 в состояние S_n, а S_k – есть состояние системы на k шаге управления. Тогда последовательность состояний системы можно представить в виде графа, изображенного на рис. 10.1.

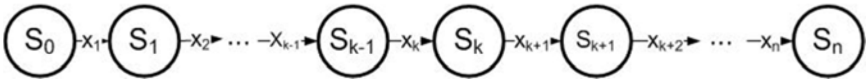

Рис. 10.1. Граф состояний системы

Применение управляющего воздействия x_k на каждом шаге переводит систему в новое состояние $S^1\left(S, x_k\right)$ и приносит некоторый результат $W_k\left(S, x_k\right)$. Для каждого возможного состояния на каждом шаге среди всех возможных управлений выбирается оптимальное управление x_k^*, такое, чтобы результат, который достигается за шаги с k по последний n, оказался бы оптимальным.

Числовая характеристика этого результата называется *функцией Беллмана* $F_k(S)$ и зависит от номера шага k и состояния системы S.

Задача динамического программирования формулируется следующим образом.

Требуется определить такое управление X^*, переводящее систему из начального состояния S_0 в конечное состояние S_n, при котором целевая функция принимает наибольшее (наименьшее) значение:

$$F\left(S_0, X^*\right) \to \text{extr}. \tag{10.1}$$

Особенности математической модели динамического программирования заключаются в следующем:

1. Задача оптимизации формулируется как конечный многошаговый процесс управления.

2. Целевая функция (выигрыш) является аддитивной и равна сумме целевых функций каждого шага:

$$F = \sum_{k=1}^{n} F_k\left(S_{k-1}, x_k\right) \to \text{extr}. \tag{10.2}$$

3. Выбор управления x_k на каждом шаге зависит только от состояния системы к этому шагу S_k, и не влияет на предшествующие шаги (нет обратной связи).

4. Состояние системы S_k после каждого шага управления зависит только от предшествующего состояния системы S_{k-1} и этого управляющего воздействия x_k (отсутствие последействия) и может быть записано в виде уравнения состояния:

$$S_k = f\left(S_{k-1}, x_k\right),\ k = 1, ..., n. \tag{10.3}$$

5. На каждом шаге управление x_k зависит от конечного числа управляющих переменных, а состояние системы S_k зависит от конечного числа параметров.

6. Оптимальное управление представляет собой вектор X^*, определяемый последовательностью оптимальных пошаговых управлений:

$X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*, ..., x_n^*\right)$, число которых и определяет количество шагов задачи.

10.3. Принцип оптимальности и математическое описание динамического процесса управления

В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности, впервые сформулированный в 1953 г. американским математиком *Р. Э. Беллманом*.

Каково бы ни было состояние системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так,

чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая выигрыш на данном шаге.

При решении задачи на каждом шаге выбирается управление, которое должно привести к оптимальному выигрышу. Если считать все шаги независимыми, тогда оптимальным управлением будет то управление, которое обеспечит максимальный выигрыш именно на данном шаге.

Однако, например, при покупке новой техники взамен устаревшей на ее приобретение затрачиваются определенные средства, поэтому доход от ее эксплуатации в начале может быть небольшой, а в следующие годы новая техника будет приносить больше. И наоборот, если принято решение оставить старую технику для получения дохода в текущем году, то в дальнейшем это приведет к значительным убыткам.

Этот пример демонстрирует следующий факт: в многошаговых процессах управление на каждом конкретном шаге надо выбирать с учетом его будущих воздействий на весь процесс.

Кроме того, при выборе управления на данном шаге следует учитывать возможные варианты состояния предыдущего шага.

Например, при определении количества средств, вкладываемых в предприятие в i-году, необходимо знать, сколько средств осталось в наличии к этому году и какой доход получен в предыдущем $(i-1)$ году. Таким образом, при выборе шагового управления нужно учитывать следующие требования:

– возможные исходы предыдущего шага S_{k-1};

– влияние управления x_k на все оставшиеся до конца процесса шаги $(n-k)$.

В задачах динамического программирования первое требование учитывают, делая на каждом шаге условные предположения о возможных вариантах окончания предыдущего шага и проводя для каждого из вариантов условную оптимизацию. Выполнение второго требования обеспечивается тем, что в этих задачах условная оптимизация проводится от конца процесса к началу.

10.4. Условная оптимизация

На первом этапе решения задачи, называемом условной оптимизацией, определяются функция Беллмана и оптимальные управления для всех возможных состояний на каждом шаге, начиная с последнего в соответствии с алгоритмом обратной прогонки. На последнем, *n*-шаге, оптимальное управление x_n^* определяется функцией Беллмана:

$$F(S) = \max\left\{W_n(S,\, x_n)\right\}, \tag{10.4}$$

в соответствии с которой максимум выбирается из всех возможных значений x_n, причем $x_n \in X$.

Дальнейшие вычисления производятся согласно рекуррентному соотношению, связывающему функцию Беллмана на каждом шаге с этой же функцией, но вычисленной на предыдущем шаге.

В общем виде это уравнение имеет вид:

$$F_n(S) = \max\left\{W_n(S,\, x_n) + F_{k+1}\left[S^1(S,\, x_k)\right]\right\},\ x_k \in X. \tag{10.5}$$

Этот максимум (или минимум) определяется по всем возможным для k и S значениям переменной управления X.

10.5. Безусловная оптимизация

После того, как функция Беллмана и соответствующие оптимальные управления найдены для всех шагов с n по первый, осуществляется второй этап решения задачи, называемый безусловной оптимизацией.

Пользуясь тем, что на первом шаге $(k=1)$ состояние системы известно – это ее начальное состояние S_0, можно найти оптимальный результат за все n-шагов и оптимальное управление на первом шаге x_1, которое этот результат доставляет. После применения этого управления система перейдет в другое состояние $S_1\left(S, x_1^*\right)$, зная которое, можно, пользуясь результатами условной оптимизации, найти оптимальное управление на втором шаге x_1^*, и так далее до последнего n-шага.

Вычислительную схему динамического программирования можно строить на сетевых моделях, а также по алгоритмам прямой прогонки (от начала) и обратной прогонки (от конца к началу).

Рассмотрим примеры решения различных по своей природе задач, содержание которых требует выбора переменных состояния и управления.

10.6. Оптимальное распределение инвестиций

Требуется распределить имеющиеся B единиц средств среди n предприятий, доход $g_i(x_i)$ от которых, в зависимости от количества вложенных средств x_i, определяется матрицей $(n \times n)$ приведенной в табл. 10.1.

Таблица 10.1

Таблица распределения инвестиций

x / g_i	g_1	g_2	…	g_i	…	g_n
x_1	$g_1(x_1)$	$g_2(x_1)$		$g_i(x_1)$		$g_n(x_1)$
x_2	$g_1(x_2)$	$g_2(x_2)$		$g_i(x_2)$		$g_n(x_2)$
…						
x_i	$g_1(x_i)$	$g_2(x_i)$		$g_i(x_i)$		$g_n(x_i)$
…						
x_n	$g_1(x_n)$	$g_2(x_n)$		$g_i(x_n)$		$g_n(x_n)$

Суммарный доход со всех предприятий должен быть максимальным.

Запишем математическую модель задачи.

Определить $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*, ..., x_n^*\right)$, удовлетворяющий условиям:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i = B \\ x_i \geq 0,\ i = 1, ..., n \end{aligned} \qquad (10.6.)$$

и обеспечивающий максимум целевой функции:

$$F(x) = \sum x_i g_i(x_i) \to \max. \qquad (10.7)$$

Очевидно, эта задача может быть решена простым перебором всех возможных вариантов распределения *B*-единиц средств по *n*-предприятиям, например на сетевой модели.

Однако решим ее более эффективным методом, который заключается в замене сложной многовариантной задачи многократным решением простых задач с малым количеством вариантов.

С этой целью разобьем процесс оптимизации на *n*-шагов и будем на каждом *k*-шаге оптимизировать инвестирование не всех предприятий, а только предприятий с *k* по *n*. При этом естественно считать, что в остальные предприятия (с первого по $(k-1)$ тоже вкладываются средства, и поэтому на инвестирование предприятий с *k* по *n* остаются не все средства, а некоторая меньшая сумма $(C_k \leq B)$. Эта величина и будет являться переменной состояния системы. Переменной управления на *k*-шаге назовем величину x_k средств, вкладываемых в *k*-предприятие.

В качестве функции Беллмана $F_k(C_k)$ на *k*-шаге можно выбрать максимально возможный доход, который можно получить с предприятий с *k* по *n* при условии, что на их инвестирование осталось C_k средств. Очевидно, что при вложении в *k*-предприятие x_k средств будет получена прибыль $g_k(x_k)$, а система к $(k+1)$ шагу перейдет в состояние S_{k+1} и, следовательно, на инвестирование предприятий с $(k+1)$ до *n* останется $C_{k+1} = (C_k - x_k)$ средств.

Таким образом, на первом шаге условной оптимизации при $(k = n)$ функция Беллмана представляет собой прибыль только с n предприятия. При этом на его инвестирование может остаться количество средств C_n, $0 \le C_n \le B$. Чтобы получить максимум прибыли с этого предприятия, можно вложить в него все эти средства, т. е. $F_n(C_n) = g_n(C_n)$; $x_n = C_n$.

На каждом последующем шаге для вычисления функции Беллмана необходимо использовать результаты предыдущего шага.

Пусть на k-шаге для инвестирования предприятий с k по k осталось C_k средств $(0 \le C_n \le B)$. Тогда от вложения в k-предприятие x_k средств будет получена прибыль $g_k(C_k)$, а на инвестирование остальных предприятий (с k по n) останется $C_{k+1} = (C_k - x_k)$ средств. Максимально возможный доход, который может быть получен с предприятий (с k по n), будет равен:

$$F_k(C_k) = \max_{x_k \le C_k} \{g_k(x_k) + F_{k+1}(C_k = x_k)\}, \quad k = 1, ..., n. \tag{10.8}$$

Максимум выражения достигается на некотором значении x_k^*, которое является оптимальным управлением на k-шаге для состояния системы S_k. Действуя таким образом, можно определить функции Беллмана и оптимальные управления до шага $(k = 1)$.

Значение функции Беллмана $F_1(C_1)$ представляет собой максимально возможный доход со всех предприятий, а значение x_1^*, на котором достигается максимум дохода, является оптимальным количеством средств, вложенных в первое предприятие. Далее на этапе безусловной оптимизации для всех последующих шагов вычисляется величина $C_k = (C_{k-1} - x_{k-1})$. Оптимальным управлением на k-шаге является то значение x_k^*, которое обеспечивает максимум дохода при соответствующем состоянии системы S_k.

Задача 10.1.

На развитие трех предприятий выделено 5 млн. руб. Известна эффективность капитальных вложений в каждое предприятие, заданная значением нелинейной функции $g_i\left(x_i\right)$, представленной в табл. 10.2.

Необходимо распределить выделенные средства между предприятиями таким образом, чтобы получить максимальный суммарный доход.

Для упрощения расчетов предполагаем, что распределение средств осуществляется в целых числах $x_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ млн. руб.

Таблица 10.2

Таблица функций эффективности капитальных вложений

x	g_1	g_2	g_3
0	0	0	0
1	2,2	2	2,8
2	3	3,2	5,4
3	4,1	4,8	6,4
4	5,2	6,2	6,6
5	5,9	6,4	6,9

Решение.

I этап. *Условная оптимизация.*

1-й шаг: $k = 3$. Предположим, что все средства в количестве $x_3 = 5$ млн. руб. отданы третьему предприятию. В этом случае максимальный доход, как это видно из табл. 10.3, составит $g_3 = \left(x_3\right) = $ $= 6{,}9$ млн. руб., следовательно: $F_3\left(C_3\right) = g_3\left(x_3\right)$.

Таблица 10.3

Промежуточная таблица инвестиций *(все считаем на третьего)*

x_3 / C_3	0	1	2	3	4	5	$F_3\left(C_3\right)$	x_3^*
0	0						0	0
1		2,8					2,8	1

Окончание табл. 10.3

x_3 / C_3	0	1	2	3	4	5	$F_3(C_3)$	x_3^*
2			5,4				5,4	2
3				6,4			6,4	3
4					6,6		6,6	4
5						6,9	6,9	5

2-й шаг: $k=2$. Определяем оптимальную стратегию при распределении денежных средств между вторым и третьим предприятиями. При этом рекуррентное соотношение Беллмана имеет вид:

$$F_2(C_2)=\max_{x_2\le C_2}\left\{g_2(x_2)+F_3(C_2-x_2)\right\}.$$

на основе которого составлена табл. 10.4.

Таблица 10.4

Промежуточная таблица инвестиций

x_2 / C_2	0	1	2	3	4	5	$F_2(C_2)$	x_2^*
0	0 + 0						0	0
1	0 + 2,8	2 + 0					2,8	0
2	0 + 5,4	2 + 2,8	3,2 + 0				5,4	0
3	0 + 6,4	2 + 5,4	3,2 + 2,8	4,8 + 0			7,4	1
4	0 + 6,6	2 + 6,4	3,2 + 5,4	4,8 + 2,8	6,2 + 0		8,6	2
5	0 + 6,9	2 + 6,6	3,2 + 6,4	4,8 + 5,4	6,2 + 2,8	6,4 + 0	10,2	3

3-й шаг: $k=1$. Определяем оптимальную стратегию при распределении денежных средств между первым и двумя другими предприятиями, используя следующую формулу для расчета суммарного дохода:

$$F_1(C_1)=\max_{x_1\le C_1}\left\{g_1(x_1)+F_2(C_1-x_1)\right\}.$$

На основе которого составлена табл. 10.5.

Таблица 10.5

Промежуточная таблица инвестиций

x_1 / C_1	0	1	2	3	4	5	$F_1(C_1)$	x_1^*
0	0 + 0						0	0
1	0 + 2,8	2,2 + 0					2,8	0
2	0 + 5,4	2,2 + 2,8	3 + 0				5,4	0
3	0 + 7,4	2,2 + 5,4	3 + 2,8	4,1 + 0			7,6	1
4	0 + 8,6	2,2 + 7,4	3 + 5,4	4,1 + 2,8	5,2 + 0		9,6	1
5	0 + 10,2	2,2 + 8,6	3 + 7,4	4,1 + 5,4	5,2 + 2,8	5,9 + 0	10,8	1

II этап. *Безусловная оптимизация.*

Определяем компоненты оптимальной стратегии.

1-й шаг. По данным из табл. 10.5 максимальный доход при распределении 5 млн. руб. между тремя предприятиями составляет:

$$C_1 = 5;\ F_1(5) = 10{,}8.$$

При этом первому предприятию нужно выделить $x_1^* = 1$ млн. руб.

2-й шаг. Определяем величину оставшихся денежных средств, приходящуюся на долю второго и третьего предприятий:

$$C_2 = C_1 - x_1^* = 5 - 1 = 4 \text{ млн. руб.}$$

По данным табл. 10.4 находим, что оптимальный вариант распределения денежных средств размером 4 млн. руб. между вторым и третьим предприятиями составляет: $F_2(4) = 8{,}6$ при выделении второму предприятию $x_2^* = 2$ млн. руб.

3-й шаг. Определяем величину оставшихся денежных средств, приходящуюся на долю третьего предприятия:

$$C_3 = C_2 - x_2^* = 4 - 2 = 2 \text{ млн. руб.}$$

По данным табл. 10.3 находим: $F_3(2)=5,4;$ $x_3^*=2$ млн. руб.

Таким образом, оптимальный план инвестирования предприятий: $X^*=(1,\ 2,\ 2),$ который обеспечит максимальный доход, равный

$$F(5)=g_1(1)+g_2(2)+g_3(2)=2,2+3,2+5,5=10,8 \text{ млн. руб.}$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. В чем состоит главная идея динамического программирования?
2. Назовите задачи, решаемые с помощью динамического программирования.
3. Сформулируйте задачу динамического программирования.
4. В чем состоит принцип условной оптимизации?
5. В чем состоит принцип безусловной оптимизации?
6. Сформулируйте задачу оптимального распределения инвестиций.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.

Производственное объединение состоит из четырех предприятий $(n=4)$. Общая сумма капитальных вложений равна 700 млн. руб. $(b=700)$, выделяемые предприятиям суммы кратны 100 млн. руб.

Если j предприятие получает инвестиции в объеме ξ млн. руб., то прирост годовой прибыли на этом предприятии составит $f_j(\xi)$ млн. руб. в год. Значения функций $f_j(\xi)$ приведены в табл.

ξ	0	100	200	300	400	500	600	700
$f_1(\xi)$	0	20	34	46	53	55	60	60
$f_1(\xi)$	0	18	29	45	62	78	90	98
$f_1(\xi)$	0	25	41	52	74	82	88	90
$f_1(\xi)$	0	30	52	76	90	104	116	125

Требуется найти такое распределение:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

инвестиций между предприятиями, которое максимизирует суммарный прирост прибыли на всех предприятиях вместе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акинин, П. В. Математические и инструментальные методы экономики: учеб. пособие / П. В. Акинин, В. А. Королев, С. Г. Кочергин. – М.: КноРус, 2012. – 232 с.

2. Арасланов, Ш. Ф. Теория графов. Лекции и практические занятия: учеб. пособие / Ш. Ф. Арасланов. – Казань: Изд-во «Казанск», 2013. – 86 с.

3. Балдин, К. В. Математические методы и модели в экономике: учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. – М.: Флинта, МПСИ, 2012. – 328 с.

4. Белолипецкий, А. А. Экономико-математические методы: учебник для студентов высших учебных заведений / А. А. Белолипецкий. – М.: ИЦ Академия, 2010. – 368 с.

5. Бережная, Е. В. Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 432 с.: ил.

6. Бродецкий, Г. Л. Экономико-математические методы и модели в логистике: процедуры оптимизации: учебник для студентов учреждений высшего профессионального образования / Г. Л. Бродецкий. – М.: ИЦ Академия, 2012. – 288 с.

7. Воронин, А. А. Математические модели организаций: учеб. пособие / А. А. Воронин [и др.]. – М.: ЛЕНАНД, 2008. – 360 с.

8. Гармаш, А. Н. Математические методы в управлении: учеб. пособие / А. Н. Гармаш, И. В. Орлова. – М.: Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2013. – 272 с.

9. Гетманчук, А. В. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / А. В. Гетманчук, М. М. Ермилов. – М.: Дашков и К, 2015. – 188 с.

10. Грицюк, С. Н. Математические методы и модели в экономике: учебник / С. Н. Грицюк, Е. В. Мирзоев, В. В. Лысенко. – Ростов н/Д: Феникс, 2007. – 348 с.

11. Замков, О. О. Математические методы в экономике / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных. – М.: ДиС, 2009. – 384 с.

12. Зубарев, Ю. М. Математические методы коллективного принятия решений: учеб. пособие / Ю. М. Зубарев. – СПб.: Лань, 2015. – 256 с.

13. Клозе, Г. Математические методы экономической динамики: учеб. пособие / Г. Клозе. – СПб.: Лань, 2015. – 352 с.

14. Красс, М. С. Математика в экономике: математические методы и модели: учебник для бакалавров / М. С. Красс. – Люберцы: Юрайт, 2016. – 541 с.

15. Кудрявцев, Е. М. Microsoft Project. Методы сетевого планирования и управления проектом. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 240 с., ил.

16. Кундышева, Е. С. Математическое моделирование в экономике: учеб. пособие / под науч. ред. Проф. Суслакова Б. А. – М.: Издательско – торговая корпорация «Дашков и К», 2014. – 352 с.

17. Курбанов, В. Г. Математические методы в теории управления: учеб. пособие / В. Г. Курбатов, В. И. Математические методы социальных технологий / В. И. Курбатов, Г. А. Угольницкий. – М.: Вузовская книга, 2011. – 256 с.

18. Минюк, Е. А. Математические методы и модели в экономике: учеб. пособие / Е. А. Минюк, Е. А. Ровба, К. К. Кузьмич. – Мн.: ТетраСистемс , 2012. – 432 с.

19. Набатова, Д. С. Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений: учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / Д. С. Набатова. – Люберцы: Юрайт, 2016. – 292 с.

20. Набиев, Р. А. Введение в состоятельные методы моделирования систем: учеб. пособие: в 2 ч. / Р. А. Набиев. – М.: Финансы и статистика, 2006. – Ч. 1: Математические основы моделирования систем. – 328 с.

21. Орлова, И. В. Экономико-математические методы и прикладные модели: учебник для бакалавров / И. В. Орлова. – М.: Юрайт, 2013. – 328 с.

22. Орлова, И. В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: учеб. пособие / И. В. Орлова. – М.: Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2013. – 389 с.

23. Партыка, Т. Л. Математические методы: учебник / Т. Л. Партыка, И. И. Попов. – М.: Форум, НИЦ ИНФРА-М, 2013. – 464 с.

24. Писарук, Н. Н. Введение в теорию игр / Н. Н. Писарук. – Мн.: БГУ, 2013. – 233 с.

25. Попов, А. М. Экономико-математические методы и модели: учебник для бакалавров / А. М. Попов. – М.: Юрайт, 2013. – 479 с.

26. Просветов, Г. И. Математические методы и модели в экономике: учебно-практическое пособие. – М.: Альфа-Пресс , 2014. – 344 с.

27. Салмина, Н. Ю. Теория игр: учеб. пособие / Н. Ю. Салмина. – Томск: Эль Контент, 2012. – 92 с.

28. Смагин, Б. И. Экономико-математические методы / Б. И. Смагин. – М.: КолосС, 2012. – 271 с.

29. Фомин, Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: учебник. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 616 с: ил.

30. Хуснутдинов, Р. Ш. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / Р. Ш. Хуснутдинов. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. – 224 с.

31. Черник, Д. Г. Математические методы и модели в коммерческой деятельности, перераб. и доп: учебник / Д. Г. Черник. – М.: Финансы и статистика, 2009. – 640 с.

32. Чупрынов, Б. П. Математика в экономике: математические методы и модели: учебник для бакалавров / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов; Под ред. М. С. Красс. – М.: Юрайт, 2013. – 541 с.

33. Шапкин, А. С. Математические методы и модели исследования операций: учебник / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. – М.: Дашков и К, 2013. – 400 с.

34. Шикин, Е. В. Математические методы и модели в управлении: учеб. пособие / Е. В. Шикин, А. Г. Чхартишвили. – М.: КДУ, 2009. – 440 с.

35. Шурыгин, А. М. Математические методы прогнозирования: учеб. пособие для вузов. / А. М. Шурыгин. – М.: Горячая линия – Телеком , 2009. – 180 с.

36. Юдин, Д. Б. Задачи и методы линейного программирования: Математические основы и практические задачи / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. – М.: КД Либроком, 2010. – 320 с.

Учебное издание

ГУРКО Александр Иванович

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Пособие
для студентов и магистрантов, обучающихся по специальности
направления образования «Экономика и организация производства»

Редактор *А. Д. Спичёнок*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 19.10.2020. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 13,78. Уч.-изд. л. 10,77. Тираж 100. Заказ 826.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.