ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2016, том 52, № 1, с. 94–111

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

НАЗНАЧЕНИЕ КОНЕЧНОГО СПЕКТРА И ПОЛНОЕ УСПОКОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА ОДНИМ РЕГУЛЯТОРОМ

© 2016 г. **А. В. Метельский**

Для линейной автономной системы нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями построена динамическая обратная связь, обеспечивающая полное успокоение исходной системы и асимптотически устойчивый конечный спектр замкнутой системы. Результаты проиллюстрированы примерами.

DOI: 10.1134/S0374064116010088

1. Введение. Рассмотрим линейную автономную дифференциальную систему нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t)=A_0x(t)+\sum_{j=1}^{m}(A_jx(t-jh)+B_j\dot{x}(t-jh))+bu(t),\quad t>0, \tag{1}$$

$$x(t)=\eta(t),\quad t\in[-mh,0]. \tag{2}$$

Здесь $x=[x_1,\ldots,x_n]'$ – n-вектор-столбец непрерывного кусочно-гладкого решения системы (1) $(n\geq 2)$; $0<h$ – постоянное запаздывание; A_0, A_j, B_j – постоянные $n\times n$-матрицы ($j=\overline{1,m}$); b – постоянный n-вектор-столбец; начальная функция η из пространства гладких n-вектор-функций; u – скалярное кусочно-непрерывное управление. Векторные величины полагаем записанными в столбец, штрих обозначает операцию транспонирования. Считаем, что в уравнении (1) $b=e_n=[0,\ldots,0,1]'$. Этого всегда можно достичь невырожденным преобразованием переменных $\breve{x}=Tx$. Кроме того, выбрав управление

$$u(t)=-e_n'\Big(A_0x(t)+\sum_{j=1}^{m}(A_jx(t-jh)+B_j\dot{x}(t-jh))\Big)+\tilde{u}(t)$$

($\tilde{u}(t)$ – новое управление), получим, что последняя строка матрицы

$$A(p,\lambda)=A_0+\sum_{j=1}^{m}(A_j+pB_j)\lambda^j$$

нулевая ($p,\lambda\in\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел).

Пусть $W(p,e^{-ph})=pE_n-A(p,e^{-ph})$ – характеристическая матрица ($p\in\mathbb{C}$, E_n – единичная матрица n-го порядка), $w(p,e^{-ph})=|W(p,e^{-ph})|$ – характеристический квазиполином системы (1). Здесь и далее $|W|$ – определитель произвольной квадратной матрицы W.

Множество корней $\sigma=\{p\in\mathbb{C}|w(p,e^{-ph})=0\}$ характеристического уравнения называют спектром системы (1). Поскольку коэффициенты характеристического квазиполинома $w(p,e^{-ph})$ действительны, то комплексные числа входят в σ сопряженными парами: σ – самосопряженный спектр.

Задача полного успокоения системы с последействием [1, с. 358] поставлена Н.Н. Красовским. Эту задачу называют [2] также задачей полной управляемости. Начальное состояние

(2) называется полностью управляемым, если существуют момент времени $t_1 > 0$ и кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, такие, что

$$x(t) \equiv 0, \quad t > t_1, \quad \text{если} \quad u(t) \equiv 0, \quad t > t_1. \tag{3}$$

Если равенство (3) при достаточно большом, но фиксированном моменте времени $t_1 > 0$ возможно для любого начального состояния (2), то систему (1) называют полностью управляемой.

В работах [2, 3] доказано, что система (1) полностью управляема, если и только если выполняются два условия:

$$\operatorname{rank}\Big[pE_n - A_0 - \sum_{j=1}^{m}(A_j + pB_j)e^{-pjh}, b\Big] = n, \quad p \in \mathbb{C}, \tag{4}$$

$$\operatorname{rank}\Big[E_n - \sum_{j=1}^{m} B_j\lambda^j, b\Big] = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Заметим, что в общем случае условия (4), (5) не следуют [2] одно из другого. Проверку условий (4), (5), естественно, следует начинать с более простого условия (5). Схема проверки условия (4) указана в работе [4].

Термин "полное успокоение" точнее выражает суть сформулированной задачи и поэтому используется в данной работе. В работе [4] установлено, что условия (4), (5), будучи критерием возможности полного успокоения системы (1), необходимы и достаточны для разрешимости задачи назначения произвольного конечного спектра (FSA-задачи [5]), там же обоснована схема получения коэффициентов FSA-регулятора для системы (1). Поэтому логичен вопрос: нельзя ли одним регулятором обеспечить полное успокоение исходной системы (см. тождества (3)) и асимптотическую устойчивость замкнутой системы сразу для всех начальных состояний (2)? Ниже предлагается схема построения такого регулятора для системы (1), удовлетворяющей условиям (4), (5). При этом совместно с задачей полного успокоения решается не просто задача стабилизации системы, а практически решается задача модального управления (поскольку на спектр замкнутой системы налагаются ограничения п. 6).

Историческую справку по задаче полного успокоения и FSA-задаче для системы (1) можно найти в работах [2–4, 6], специально посвященных этим задачам, и в приведенной в них библиографии.

2. Постановка задачи. Пусть в операторной записи $\lambda^j\varphi(t) = \varphi(t - jh)$ (φ – функция, $j = 0, 1, \ldots$), т.е. λ – оператор сдвига. Выберем двухконтурную схему замыкания: внутренний контур (два первых уравнения из (6)) приводит систему к конечному спектру, внешний контур (два последних уравнения из (6)) обеспечивает замкнутой системе полное успокоение и определенный асимптотически устойчивый спектр. Для этого рассмотрим динамический регулятор по типу обратной связи ($N = n + r$, $r \geq 0$)

$$\begin{gathered} u(t) = \breve{c}'(\lambda)\dot{x}(t) + x_{n+1}(t), \\ x_{n+1}^{(r)}(t) = \breve{v}'(\lambda)x(t) + \tilde{v}'(\lambda)\hat{x}(t) + x_{N+1}(t), \\ \dot{x}_{N+1}(t) = q_{N+1}(\lambda)x_{N+1}(t) + \sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{L_1}\int_0^h \hat{q}_{ki}(\lambda)x_{N+1}(t-s)e^{p_k s}\frac{s^i}{i!}\,ds + a_1(\lambda)x_{N+2}(t), \\ \dot{x}_{N+2}(t) = \breve{g}'(\lambda)x(t) + \hat{g}'(\lambda)\hat{x}(t) + g_{N+1}(\lambda)x_{N+1}(t) + a_2(\lambda)x_{N+2}(t), \quad t > 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $\breve{c}(\lambda) = [\breve{c}_1(\lambda), \ldots, \breve{c}_n(\lambda)]'$, $\breve{v}(\lambda) = [\breve{v}_1(\lambda), \ldots, \breve{v}_n(\lambda)]'$, $\tilde{v}(\lambda) = [v_{n+1}(\lambda), \ldots, v_N(\lambda)]'$, $\breve{g}'(\lambda) = [\breve{g}_1(\lambda), \ldots, \breve{g}_n(\lambda)]$, $\hat{g}(\lambda) = [g_{n+1}(\lambda), \ldots, g_N(\lambda)]'$ – векторные полиномы с действительными коэффициентами; $\hat{x}(t) = [x_{n+1}(t), \dot{x}_{n+1}(t), \ldots, x_{n+1}^{(r-1)}(t)]'$, $x_{N+1}(t)$, $x_{N+2}(t)$ – вспомогательные переменные; $q_{N+1}(\lambda)$, $g_{N+1}(\lambda)$, $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$ – полиномы с действительными коэффициентами;

$\hat{q}_{ki}(\lambda)$ – полиномы, возможно, с комплексными коэффициентами; $P^* = \{p_k \in \mathbb{C},\ k = \overline{1, L}\}$ – набор действительных и комплексно-сопряженных чисел. Если $r = 0$, то полагаем $\tilde{v}'(\lambda) = \hat{g}'(\lambda) = 0$. Для отрицательных значений аргумента переменные $x_i(t)$, если они не заданы, считаем произвольными кусочно-гладкими функциями.

Параметры регулятора (6) подбираются так, чтобы после применения формулы Эйлера к выражению

$$\sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{L_1}\int_0^h \hat{q}'_{ki}(\lambda)x_{N+1}(t-s)e^{p_k s}\frac{s^i}{i!}\,ds = \sum_{j=0}^{N_1}\int_0^h R_j(s)\lambda^j x_{N+1}(t-s)\,ds,$$

$$R_j(s) = \sum_{l=1}^{\tilde{L}} e^{\alpha_l s}(\cos(\beta_l s)U_{jl}(s) + \sin(\beta_l s)V_{jl}(s))$$

($\alpha_l, \beta_l \in \mathbb{R}$, $U_{jl}(s)$, $V_{jl}(s)$ – n-векторные полиномы), все коэффициенты регулятора (6) были действительными величинами.

Пусть

$$d(p) = \prod_{i=1}^{s_1}(p-\tilde{p}_i)^{k_i} = \sum_{i=0}^{N+2}\gamma_i p^{N+2-i}, \quad \tilde{p}_i \in \tilde{P}, \tag{7}$$

– заданный характеристический полином замкнутой системы, $\tilde{P} = \{\tilde{p}_i \in \mathbb{C},\ i = \overline{0, s_1}\}$ – его различные действительные или комплексно-сопряженные корни с алгебраическими кратностями k_i. Множество $\tilde{P}$ должно удовлетворять дополнительным ограничениям (см. п. 6), возможно, исключающим изолированные значения $\tilde{p}$.

Задача: подобрать множество P^*, векторные полиномы $\breve{c}(\lambda)$, $\breve{v}(\lambda)$, $\tilde{v}(\lambda)$, $\breve{g}(\lambda)$, $\hat{g}(\lambda)$ и полиномы $\hat{q}_{ki}(\lambda)$, $q_{N+1}(\lambda)$, $g_{N+1}(\lambda)$, $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$ регулятора (6) так, чтобы характеристическая матрица $pE_{N+2} - \breve{A}(p, e^{-ph})$ замкнутой системы (1), (6) имела действительные коэффициенты и одновременно выполнялись равенство

$$|pE_{N+2} - \breve{A}(p, e^{-ph})| = d(p)$$

и тождества (3) для произвольного начального состояния (2) исходной системы (1). Такой регулятор назовем FSD-регулятором (Finite Spectrum, Damping).

3. Приведение системы (1) к конечному спектру. Условия (4), (5), как необходимые условия существования FSD-регулятора (см. п. 1), далее считаем выполненными. Укажем схему вычисления коэффициентов FSD-регулятора и тем самым докажем, что эти условия и достаточны для существования FSD-регулятора.

Получим коэффициенты $\breve{c}(\lambda)$, $\breve{v}(\lambda)$, $\tilde{v}(\lambda)$ внутреннего контура

$$u(t) = \breve{c}'(\lambda)\dot{x}(t) + x_{n+1}(t), \quad x_{n+1}^{(r)}(t) = \breve{v}'(\lambda)x(t) + \tilde{v}'(\lambda)\hat{x}(t), \quad t > 0, \tag{8}$$

регулятора (6), обеспечивающего замкнутой системе (1), (8) конечный спектр.

Обозначим миноры

$$m_i(p,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(\lambda)p^{j-1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad m_n(p,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} m_{n,j}(\lambda)p^{j-1} + p^{n-1},$$

полученные вычеркиванием i-го столбца из первых $n-1$ строк матрицы

$$W(p,\lambda) = pE_n - A(p,\lambda)$$

($m_{i,j}(\lambda)$ – полиномы), и алгебраические дополнения

$$M(p,\lambda) = [M_1(p,\lambda), \ldots, M_n(p,\lambda)]', \quad M_j(p,\lambda) = (-1)^{n+j}m_j(p,\lambda), \quad j = \overline{1, n},$$

к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы $W(p,\lambda)$.

Пусть $P_1^* = \{p_k^* \in \mathbb{C},\ k = \overline{1,\mu}\}$ – множество различных чисел таких, что при некотором $\lambda_k \in \mathbb{C}$ пара чисел (p_k^*, λ_k) является решением системы

$$M_i(p,\lambda) = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{9}$$

В силу условия (4) полиномы $M_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, не имеют [4] общего множителя, зависящего от λ, поэтому множество P_1^* конечно.

Замечание 1. Набор P_1^*, если он не пуст, содержит FSA-инвариантные [4] спектральные значения, которые не "убираются" дифференциально-разностным регулятором. Всякое значение $p_k^* \in P_1^*$ входит в спектр замкнутой системы при любых коэффициентах дифференциально-разностного регулятора. Это следует из разложения характеристического определителя замкнутой системы по $n-1$ первым строкам на основании теоремы Лапласа. Убрать из спектра замкнутой системы FSA-инвариантные значения можно, лишь введя в регулятор распределенные запаздывания. Этим и определяется вид регулятора (6).

Согласно теореме Гильберта о нулях, найдется векторный полином

$$\tilde\varphi(p,\lambda) = [\tilde\varphi_1(p,\lambda),\ldots,\tilde\varphi_n(p,\lambda)]'$$

такой, что справедливо разложение

$$\tilde\varphi'(p,\lambda)M(p,\lambda) = \tilde d_1(p). \tag{10}$$

Полином

$$\tilde d_1(p) = \prod_{k=1}^{\mu}(p - p_k^*)^{l_k},$$

имеющий корнями только FSA-инвариантные значения $p_k^* \in P_1^*$, может быть получен с помощью алгоритма вычисления базиса Гребнера для системы полиномов $M_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1,n}$. Разложение (10) можно получить также по алгоритму Евклида, рассматривая полиномы $M_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, как полиномы от λ с дробно-рациональными коэффициентами, зависящими от p. В таком случае полином $\tilde d_1(p)$, кроме FSA-инвариантных спектральных значений $p_k^* \in P_1^*$, может иметь и другие корни.

Пусть $N_0 = \max\{2n-3, n\}$. Если степень полинома $\widetilde\mu = \deg(\tilde d_1(p))$ меньше N_0, то обе части равенства (10) умножим на полином $d_2(p)$ с действительными коэффициентами степени $N_0 - \widetilde\mu$. Обозначим $d_1(p) = d_2(p)\tilde d_1(p)$, $N = \deg(d_1(p))$, тогда $N = N_0$. В частности, можно в разложении полинома $\tilde d_1(p)$ на множители увеличить кратности FSA-инвариантных значений p_k^* за счет выбора $d_2(p)$ так, чтобы $\deg(d_1(p)) = N_0$. Если $\deg(\tilde d_1(p)) \ge N_0$, то полагаем $d_2(p) = 1$. В этом случае $N = \deg(\tilde d_1(p)) \ge N_0$.

Пусть $\deg_p(\varphi(p,\lambda))$ – наибольшая степень p в компонентах $\varphi_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, векторного полинома $\varphi(p,\lambda) = [\varphi_1(p,\lambda),\ldots,\varphi_n(p,\lambda)]'$. Для того чтобы замкнутая система (1), (8) имела нейтральный тип, выражение $d_2(p)\tilde\varphi'(p,\lambda)M(p,\lambda)$ преобразуем так, чтобы в разложении

$$\varphi_1(p,\lambda)M_1(p,\lambda) + \ldots + \varphi_n(p,\lambda)M_n(p,\lambda) = d_1(p), \tag{11}$$

где $N = \deg(d_1(p)) \ge N_0$, выполнялось неравенство ($r = N - n$)

$$\deg_p(\varphi_i(p,\lambda)) \le r + 1, \quad i = \overline{1,n}. \tag{12}$$

Неравенство (12) можно обеспечить следующим образом. Полином $M_n(p,\lambda)$ имеет вид

$$M_n(p,\lambda) = p^{n-1} + \lambda\alpha_0(\lambda)p^{n-1} + d_{n-2}(p,\lambda),$$

где полином $d_{n-2}(p,\lambda)$ относительно p имеет степень не выше $n-2$. Выделим два случая.

1) В случае $\alpha_0(\lambda) = 0$ полином $M_n(p,\lambda)$ имеет вид

$$M_n(p,\lambda) = p^{n-1} + d_{n-2}(p,\lambda). \tag{13}$$

Компоненты $M_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n-1}$, векторного полинома $M(p,\lambda)$ относительно p имеют степень не выше $n-1$. Причем во всяком члене полинома $M_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n-1}$, степень p^{n-1} может присутствовать только вместе со множителем λ^k, $k\geq 1$.

Степени полиномов $d_2(p)\tilde{\varphi}_1(p,\lambda),\ldots,d_2(p)\tilde{\varphi}_{n-1}(p,\lambda)$ относительно p сделаем меньше степени $n-1$ переменной p в полиноме $M_n(p,\lambda)$. Если степень переменной p полинома $d_2(p)\tilde{\varphi}_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n-1}$, не меньше $n-1$, то представим его в виде

$$d_2(p)\tilde{\varphi}_i(p,\lambda)=\xi_i(p,\lambda)M_n(p,\lambda)+\varphi_i(p,\lambda),$$

где $\xi_i(p,\lambda)$, $\varphi_i(p,\lambda)$ – полиномы. Это возможно, так как полином $M_n(p,\lambda)$ имеет вид (13). После указанных преобразований степени полиномов $\varphi_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n-1}$, в разложении (11) относительно p будут не больше $n-2\leq r+1$, так как $N=n+r\geq N_0$. Поскольку $N\geq N_0$ и в полиномах $M_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n-1}$, множитель p^{n-1} может присутствовать только вместе со множителем λ^k, $k\geq 1$, то полином $\varphi_n(p,\lambda)$ относительно p имеет степень $r+1$ и содержит член p^{r+1}, что следует из разложения (11).

2) Пусть $\alpha_0(\lambda)\neq 0$ и $k_i(\lambda)$ – набор коэффициентов при p^{n-1} в полиномах $M_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n}$. Набор коэффициентов $k_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, можно получить, найдя алгебраические дополнения к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы $E-\sum_{j=1}^{m}B_j\lambda^j$. Справедлива [4]

Лемма 1. *Условие (5) необходимо и достаточно, для того чтобы при любом $\lambda\in\mathbb{C}$ хотя бы один из полиномов $k_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, был отличен от нуля.*

В силу условия (5) и леммы 1 полиномы $k_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, взаимно просты, поэтому найдутся полиномы $\beta_1(\lambda),\ldots,\beta_n(\lambda)$ такие, что

$$\beta_1(\lambda)M_1(p,\lambda)+\ldots+\beta_n(\lambda)M_n(p,\lambda)=p^{n-1}+\tilde{d}_{n-2}(p,\lambda),$$

где полином $\tilde{d}_{n-2}(p,\lambda)$ относительно p имеет степень не выше $n-2$. Для того чтобы получить полиномы $\beta_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, достаточно применить алгоритм Евклида к системе полиномов $k_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$:

$$\beta_1(\lambda)k_1(\lambda)+\ldots+\beta_n(\lambda)k_n(\lambda)=1. \tag{14}$$

Введем полиномы $\tilde{\beta}_{n,i}(\lambda)=\lambda\alpha_0(\lambda)\beta_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, а также полином

$$\tilde{m}(p,\lambda)=-\tilde{\beta}_{n,1}(\lambda)M_1(p,\lambda)-\ldots-(\tilde{\beta}_{n,n}(\lambda)-1)M_n(p,\lambda)=$$
$$=-\lambda\alpha_0(\lambda)(p^{n-1}+\tilde{d}_{n-2}(p,\lambda))+M_n(p,\lambda)=p^{n-1}+\hat{d}_{n-2}(p,\lambda). \tag{15}$$

Из разложения (10) следует, что

$$(d_2(p)\tilde{\varphi}_1(p,\lambda)+\tilde{\beta}_{n,1}(\lambda))M_1(p,\lambda)+\ldots+(d_2(p)\tilde{\varphi}_{n-1}(p,\lambda)+\tilde{\beta}_{n,n-1}(\lambda))M_{n-1}(p,\lambda)+$$
$$+(d_2(p)\tilde{\varphi}_n(p,\lambda)+\tilde{\beta}_{n,n}(\lambda)-1)M_n(p,\lambda)+\tilde{m}(p,\lambda)=d_1(p). \tag{16}$$

В разложении (16) степени полиномов, множителей при $M_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, относительно p сделаем меньше степени $n-1$ переменной p в полиноме $\tilde{m}(p,\lambda)$, как указано выше перед леммой 1. В результате получим

$$\hat{\varphi}_1(p,\lambda)M_1(p,\lambda)+\ldots+\hat{\varphi}_n(p,\lambda)M_n(p,\lambda)+\hat{\varphi}_{n+1}(p,\lambda)\tilde{m}(p,\lambda)=d_1(p),$$

где $\deg_p(\hat{\varphi}_i(p,\lambda))\leq n-2$ $(i=\overline{1,n})$, $\deg_p(\hat{\varphi}_{n+1}(p,\lambda))=r+1$, причем полином $\hat{\varphi}_{n+1}(p,\lambda)$ содержит член p^{r+1}, что следует из последнего равенства. Заменяя $\tilde{m}(p,\lambda)$ согласно первому из равенств (15), имеем

$$(\hat{\varphi}_1(p,\lambda)-\hat{\varphi}_{n+1}(p,\lambda)\tilde{\beta}_{n,1}(\lambda))M_1(p,\lambda)+\ldots+(\hat{\varphi}_{n-1}(p,\lambda)-\hat{\varphi}_{n+1}(p,\lambda)\tilde{\beta}_{n,n-1}(\lambda))M_{n-1}(p,\lambda)+$$
$$+(\hat{\varphi}_n(p,\lambda)-\hat{\varphi}_{n+1}(p,\lambda)(\tilde{\beta}_{n,n}(\lambda)-1))M_n(p,\lambda)=d_1(p).$$

Таким образом, пришли к выражению (11), где

$$\varphi_i(p,\lambda) = \hat{\varphi}_i(p,\lambda) - \hat{\varphi}_{n+1}(p,\lambda)\tilde{\beta}_{n,i}(\lambda), \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\varphi_n(p,\lambda) = \hat{\varphi}_n(p,\lambda) - \hat{\varphi}_{n+1}(p,\lambda)(\tilde{\beta}_{n,n}(\lambda) - 1).$$

Степени всех полиномов $\varphi_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, относительно p не выше $r+1$, и полином $\varphi_n(p,\lambda)$ содержит член p^{r+1}, что видно из предыдущего равенства, поскольку $N = \deg(d_1(p)) = n+r$.

Выбрав управление вида

$$u(t) = -\varphi_1(p,\lambda)x_1(t) - \ldots - (\varphi_n(p,\lambda) - p)x_n(t) + u_1(t), \tag{17}$$

где $p^i x(t) = x^{(i)}(t)$ – i-я производная, $u_1(t)$ – новое управление, получим замкнутую систему

$$F(p,\lambda)x(t) = e_n u_1(t), \quad F(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(p,\lambda) & \ldots & -a_{1n-1}(p,\lambda) & -a_{1n}(p,\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n-1,1}(p,\lambda) & \ldots & p - a_{n-1,n-1}(p,\lambda) & -a_{n-1,n}(p,\lambda) \\ \varphi_1(p,\lambda) & \ldots & \varphi_{n-1}(p,\lambda) & \varphi_n(p,\lambda) \end{bmatrix} \tag{18}$$

с характеристическим полиномом ($L \geq \mu$, μ – число корней полинома $\tilde{d}_1(p)$)

$$d_1(p) = \det F(p,\lambda) = p^N + \alpha_1 p^{N-1} + \ldots + \alpha_N = \prod_{k=1}^{L}(p - p_k)^{l_k}. \tag{19}$$

Полином $d_1(p)$ имеет корнями все числа $p_k^* \in P_1^*$, найденные из системы (9), и корни полинома $d_2(p)$, если $d_2(p) \neq 1$.

4. Структура FSD-регулятора для системы (1). Рассмотрим $n \times n$-матрицу $C(\lambda)$, первые $n-1$ строк которой образованы коэффициентами матрицы $F(p,\lambda)$ при степенях p, а последняя строка $C_n(\lambda)$ – коэффициентами при степенях p^{r+1} ($r = N - n$):

$$C_n(\lambda) = [c_1(\lambda), \ldots, c_{n-1}(\lambda), 1 + c_n(\lambda)]. \tag{20}$$

Из проведенного анализа случаев 1), 2) следует, что полином $\varphi_n(p,\lambda)$ относительно p имеет старший член $p^{r+1}(1 + c_n(\lambda))$, где $c_n(0) = 0$.

В силу равенства (19) и основных свойств определителей получаем, что определитель $\det C(\lambda)$ равен коэффициенту при p^N, т.е. равен единице при любом λ. Заменой переменных $x = C^{-1}(\lambda)y$, $y = [y_1, \ldots, y_n]'$ систему (18) приведем к виду

$$\begin{bmatrix} p - \tilde{a}_{11}(\lambda) & \ldots & -\tilde{a}_{1n-1}(\lambda) & -\tilde{a}_{1n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\tilde{a}_{n-1,1}(\lambda) & \ldots & p - \tilde{a}_{n-1,n-1}(\lambda) & -\tilde{a}_{n-1,n}(\lambda) \\ \psi_1(p,\lambda) & \ldots & \psi_{n-1}(p,\lambda) & p^{r+1} + \psi_n(p,\lambda) \end{bmatrix} y(t) = e_n u_1(t). \tag{21}$$

Степени полиномов $\psi_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1, n-1}$, относительно p не выше r в силу структуры матрицы $C(\lambda)$.

Запишем первые $n-1$ уравнений системы (21)

$$\dot{\bar{y}}(t) = \bar{F}(\lambda)\bar{y}(t) + \bar{b}(\lambda)y_n(t),$$

вид матриц $\bar{F}(\lambda)$, $\bar{b}(\lambda)$ очевиден из (21), $\bar{y} = [y_1, \ldots, y_{n-1}]'$. В силу этой системы

$$\bar{y}^{(k)}(t) = \bar{F}^k(\lambda)\bar{y}(t) + \bar{F}^{k-1}(\lambda)\bar{b}(\lambda)y_n(t) + \bar{F}^{k-2}(\lambda)\bar{b}(\lambda)y_n^{(1)}(t) + \ldots + \bar{b}(\lambda)y_n^{(k-1)}(t). \tag{22}$$

Заменяя производные функций $y_1,\ldots,y_{n-1}$ в последнем уравнении системы (21) согласно (22), запишем его в виде

$$y_n^{(r+1)}(t)=\left[v_1(\lambda),\ldots,v_{n-1}(\lambda),\sum_{j=0}^{r}v_{n+j}(\lambda)p^j\right]y(t)+u_1(t),$$

где $v_i(\lambda)$, $i=\overline{1,N}$, – некоторые полиномы.

Если $r\geq 1$, то, введя вспомогательные переменные $x_{n+1}(t),\ldots,x_N(t)$, представим систему (21) в нормальной форме ($\tilde{y}(t)=[y_1(t),\ldots,y_n(t),x_{n+1}(t),\ldots,x_N(t)]'$)

$$\dot{\tilde{y}}(t)=A_D(\lambda)\tilde{y}(t)+e_Nu_1(t), \tag{23}$$

$$A_D(\lambda)=\begin{bmatrix}\tilde{a}_{11}(\lambda) & \ldots & \tilde{a}_{1n}(\lambda) & 0 & \ldots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \tilde{a}_{n-1,1}(\lambda) & \ldots & \tilde{a}_{n-1,n}(\lambda) & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1\\ v_1(\lambda) & \ldots & v_n(\lambda) & v_{n+1}(\lambda) & \ldots & v_N(\lambda)\end{bmatrix}.$$

Система (23) получена с помощью преобразований, равносильных элементарным операциям над строками характеристической матрицы системы (21), поэтому имеет тот же характеристический полином $d_1(p)$. Заметим, что матрица $A_D(\lambda)$ идентична матрице $A_{(4.1)}(\lambda)$ из работы [8], поэтому для построения FSD-регулятора для системы (23) применим методику работы [8].

К системе конечного спектра (23) с матрицей $A_D(\lambda)$ добавим еще одно уравнение $\dot{x}_{N+1}(t)=\tilde{u}(t)$, где $\tilde{u}(t)$ – новое управление. Матрица $\tilde{F}(\lambda)$ (порядка $N+1$) замкнутой таким образом системы получается из матрицы $A_D(\lambda)$ добавлением снизу нулевой строки и справа столбца $[0,0,\ldots,1,0]'$ размера $N+1$:

$$\tilde{F}(\lambda)=\begin{bmatrix}\tilde{a}_{11}(\lambda) & \ldots & \tilde{a}_{1N}(\lambda) & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \tilde{a}_{N-1,1}(\lambda) & \ldots & \tilde{a}_{N-1,N}(\lambda) & 0\\ v_1(\lambda) & \ldots & v_N(\lambda) & 1\\ 0 & \ldots & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Система запаздывающего типа с матрицей $\tilde{F}(\lambda)$ спектрально управляема:

$$\operatorname{rank}[pE_{N+1}-\tilde{F}(e^{-ph}),e_{N+1}]=N+1,\quad p\in\mathbb{C}, \tag{24}$$

поскольку записанное условие равносильно равенству

$$\operatorname{rank}[(pE_n-A(p,e^{-ph}))C^{-1}(e^{-ph}),e_n]=n,\quad p\in\mathbb{C}.$$

Последнее равенство справедливо в силу условия (4) и унимодулярности матрицы $C(\lambda)$.

Следуя разд. 5 из работы [8], для системы с матрицей $\tilde{F}(\lambda)$ имеем

$$\dot{\tilde{y}}(t)=A_D(\lambda)\tilde{y}(t)+e_Nx_{N+1}(t),\quad \dot{x}_{N+1}(t)=\tilde{u}(t),\quad t>0, \tag{25}$$

FSD-регулятор будем искать в виде динамической обратной связи

$$\begin{gathered}\tilde{u}(t)=q_{N+1}(\lambda)x_{N+1}(t)+\sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{L_1}\int_0^h\hat{q}_{ki}(\lambda)x_{N+1}(t-s)e^{p_ks}\frac{s^i}{i!}\,ds+a_1(\lambda)x_{N+2}(t),\\ \dot{x}_{N+2}(t)=\bar{g}'(\lambda)y(t)+\hat{g}'(\lambda)\hat{x}(t)+g_{N+1}(\lambda)x_{N+1}(t)+a_2(\lambda)x_{N+2}(t),\quad t>0,\end{gathered} \tag{26}$$

содержащей распределенное запаздывание только по переменной x_{N+1}. Здесь

$$\hat{x}(t) = [x_{n+1}(t), \ldots, x_N(t)]',$$

$x_{N+1}(t)$, $x_{N+2}(t)$ – вспомогательные переменные;

$$\bar{g}(\lambda) = [g_1(\lambda), \ldots, g_n(\lambda)]', \quad \hat{g}(\lambda) = [g_{n+1}(\lambda), \ldots, g_N(\lambda)]',$$

$g_{N+1}(\lambda)$, $q_{N+1}(\lambda)$, $\hat{q}_{ki}(\lambda)$, $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$ – полиномы, подлежащие определению.

Соответственно для системы (1) с учетом преобразования переменных $y = C(\lambda)x$ FSD-регулятор будет иметь вид

$$u(t) = -c_1(\lambda)\dot{x}_1(t) - \ldots - c_{n-1}(\lambda)\dot{x}_{n-1}(t) - c_n(\lambda)\dot{x}_n(t) + x_{n+1}(t),$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = x_{n+2}(t), \quad \ldots,$$

$$\dot{x}_{N-1}(t) = x_N(t),$$

$$\dot{x}_N(t) = v'(\lambda)C(\lambda)x(t) + \tilde{v}'(\lambda)\hat{x}(t) + x_{N+1}(t), \tag{27}$$

$$\dot{x}_{N+1}(t) = q_{N+1}(\lambda)x_{N+1}(t) + \sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{L_1}\int_0^h \hat{q}_{ki}(\lambda)x_{N+1}(t-s)e^{p_k s}\frac{s^i}{i!}\,ds + a_1(\lambda)x_{N+2}(t),$$

$$\dot{x}_{N+2}(t) = \bar{g}'(\lambda)C(\lambda)x(t) + \hat{g}'(\lambda)\hat{x}(t) + g_{N+1}(\lambda)x_{N+1}(t) + a_2(\lambda)x_{N+2}(t), \quad t > 0.$$

Здесь $v(\lambda) = [v_1(\lambda), \ldots, v_n(\lambda)]'$, $\tilde{v}(\lambda) = [v_{n+1}(\lambda), \ldots, v_N(\lambda)]'$ – векторные полиномы.

Если $r = 0$ $(N = n)$, то уравнения регулятора (27) примут вид

$$u(t) = -c_1(\lambda)\dot{x}_1(t) - \ldots - c_{n-1}(\lambda)\dot{x}_{n-1}(t) - c_n(\lambda)\dot{x}_n(t) + v'(\lambda)C(\lambda)x(t) + x_{n+1}(t),$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = q_{n+1}(\lambda)x_{n+1}(t) + \sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{L_1}\int_0^h \hat{q}_{ki}(\lambda)x_{n+1}(t-s)e^{p_k s}\frac{s^i}{i!}\,ds + a_1(\lambda)x_{n+2}(t), \tag{28}$$

$$\dot{x}_{n+2}(t) = \bar{g}'(\lambda)C(\lambda)x(t) + g_{n+1}(\lambda)x_{n+1}(t) + a_2(\lambda)x_{n+2}(t), \quad t > 0.$$

В регуляторе (27) (или (28)) в выражении для $u(t)$ при $c_i(0) \neq 0$ производные $c_i(0)\dot{x}_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, не содержащие запаздывания, заменяем в силу первых $n-1$ уравнений системы (1).

Замечание 2. Первые $r+1$ уравнений регулятора (27) (без $x_{N+1}(t)$) при $r \neq 0$ или первое уравнение регулятора (28) (без $x_{n+1}(t)$) при $r = 0$ приводят систему нейтрального типа (1) к системе конечного спектра с характеристическим полиномом $d_1(p)$.

Лемма 2. *Регулятор (27) (или (28)) является FSD-регулятором для системы (1), если и только если регулятор (26) – FSD-регулятор для системы (25).*

Доказательство. Фазовые переменные системы (25), (26) и системы (1), (27) (или (28)) связаны соотношением $y = C(\lambda)x$, где $C(\lambda)$ – унимодулярная матрица. Поэтому если регулятор (27) (или (28)) обеспечивает тождество (3), то, начиная с некоторого момента времени $t_2 \geq t_1 > 0$, выполняется аналогичное тождество для системы (25), (26). Соответственно характеристическая матрица системы (25), (26) получается умножением характеристической матрицы системы (1), (27) (или (28)) слева на унимодулярную матрицу $\mathrm{diag}[C(\lambda), E_{r+2}]$, поэтому характеристические определители (полиномы) замкнутых систем (1), (27) (или (1), (28)) и (25), (26) одинаковы. Лемма доказана.

5. Достаточные условия FSD-регулятора. Матрица замкнутой системы (25), (26) в операторной форме имеет вид $(\lambda = e^{-ph})$

$$\breve{F}(p,\lambda) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11}(\lambda) & \ldots & \tilde{a}_{1N}(\lambda) & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{a}_{N-1,1}(\lambda) & \ldots & \tilde{a}_{N-1,N}(\lambda) & 0 & 0 \\ v_1(\lambda) & \ldots & v_N(\lambda) & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & f_{N+1}(p,\lambda) & a_1(\lambda) \\ g_1(\lambda) & \ldots & g_N(\lambda) & g_{N+1}(\lambda) & a_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

где

$$f_{N+1}(p,\lambda) = q_{N+1}(\lambda) + \sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{L_1}\int_0^h \hat{q}_{ki}(\lambda)e^{(p_k-p)s}\frac{s^i}{i!}\,ds$$

в силу регулятора (26).

Согласно работе [8], условия спектральной управляемости (24) системы с матрицей $\tilde{F}(\lambda)$ достаточно для вычисления коэффициентов FSD-регулятора (26), а значит, и для вычисления коэффициентов FSD-регулятора (27) (или (28)).

Пусть столбец алгебраических дополнений к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы $pE_{N+1} - \tilde{F}(\lambda)$ имеет вид

$$\tilde{M}(p,\lambda) = [\tilde{M}_1(p,\lambda),\ldots,\tilde{M}_n(p,\lambda),\tilde{M}_n(p,\lambda)p,\ldots,\tilde{M}_n(p,\lambda)p^r,d_1(p)]',$$

где $d_1(p)$ – характеристический полином системы с матрицей $A_D(\lambda)$.

Замечание 3. В силу формулы Бине–Коши множество решений системы полиномиальных уравнений

$$\tilde{M}_i(p,\lambda) = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

или, что равносильно, $\tilde{M}(p,\lambda) = 0$ такое же, как и у системы (9), т.е. набор FSA-инвариантных значений P_1^* при переходе от системы (1) к системе (25) сохраняется.

Построение FSD-регулятора, обеспечивающего полное успокоение исходной системы и заданный конечный спектр замкнутой системы, предполагает [8] одновременное осуществление ряда взаимосвязанных условий на параметры регулятора (6). Для того чтобы алгоритмизировать процедуру построения FSD-регулятора (26) для системы (25), введем функцию

$$K(p,\lambda) = (a_1(\lambda)g'(\lambda)\tilde{M}(p,\lambda) + d(p))/(a_2(\lambda) - p) + pd_1(p), \tag{29}$$

$g(\lambda) = [g_1(\lambda),\ldots,g_{N+1}(\lambda)]'$ – векторный полином.

Из равенства (29) видно, что степень полинома $K(p,\lambda)$ относительно p не больше $N = \deg(d_1(p))$. Для построения FSD-регулятора следует полиномы $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, $g_i(\lambda)$, $i = \overline{1,N+1}$, выбрать такими, чтобы [8, теорема 1]

A) функции $a_1(e^{-ph})/d(p)$, $(a_2(e^{-ph}) - p)/d(p)$ были целыми;

B) функция

$$\bar{K}(p,\lambda) = (a_1(\lambda)g'(\lambda)\tilde{M}(p,\lambda) + d(p))/(a_2(\lambda) - p)$$

была полиномом;

C) функция $K(p,e^{-ph})/d_1(p)$ была целой, поэтому (см. представление (29)) функция $\bar{K}(p,\lambda)$ должна удовлетворять равенствам

$$\bar{K}^{(i)}(p_k^*,e^{-p_k^*h}) = 0, \quad p_k^* \in P_1^*, \quad k = \overline{1,L}, \quad i = \overline{0,l_k-1}; \tag{30}$$

и положить $f_{N+1}(p,\lambda) = K(p,\lambda)/d_1(p)$ (см. матрицу $\breve{F}(p,\lambda)$).

Условие А) обеспечивается за счет выбора полиномов $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, условия В), С) – за счет выбора векторного полинома $g(\lambda)$, затем вычисляется функция $f_{N+1}(p,\lambda)$.

Для системы (1) запаздывающего типа ($B_j = 0$, $j=\overline{1,m}$) спектрального условия (4) достаточно [8] для разрешимости FSA-задачи – назначения произвольного конечного спектра. Для системы (1) нейтрального типа наличия только этого условия недостаточно, что показано в работе [4] на примере.

Покажем, как реализовать условия А)–С), и тем самым регулятор (26) будет построен.

6. Выбор полинома $d(p)$, нахождение полиномов $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$. Характеристический полином $d(p)$ замкнутой системы имеет вид (7). Пусть $P^* = \{p_i^* \in \mathbb{C},\ i=\overline{1,L}\}$ – множество различных корней полинома $d_1(p)$ (см. равенство (19)). При выборе множества $\tilde P$ корней полинома $d(p)$ потребуем, чтобы множества

$$\tilde\Lambda = \{e^{-p_ih} |\ p_i \in \tilde P,\ i=\overline{0,s_1}\}, \quad \Lambda^* = \{e^{-p_i^*h} |\ p_i^* \in P^*,\ i=\overline{1,L}\}$$

не пересекались: $\tilde\Lambda \cap \Lambda^* = \emptyset$. Для этого необходимо, чтобы множества $\tilde P$, P^* также не пересекались: $\tilde P \cap P^* = \emptyset$.

Для обеспечения условия А) нужно, чтобы корни полинома $d(p)$ (см. (7)) были нулями функций $a_1(e^{-ph})$, $a_2(e^{-ph}) - p$ не меньшей кратности. Поэтому возьмем [6]

$$a_1(\lambda) = \prod_{i=1}^{s_1} (\lambda-\lambda_i)^{k_i}, \quad \lambda_i = e^{-p_ih} \in \tilde\Lambda. \tag{31}$$

Заметим, что

$$a_1(e^{-p_i^*h}) \neq 0, \quad p_i^* \in P^*, \quad i=\overline{1,L}.$$

Укажем вид полинома $a_2(\lambda)$, обеспечивающего условие А). Необходимо, чтобы для всех $p_i \in \tilde P$ производные по переменной p обращались в нуль

$$(a_2(e^{-ph}) - p)^{(k)}|_{p=p_i} = 0, \quad i=\overline{0,s_1}, \quad k=\overline{0,k_i-1}.$$

Поэтому для всех $\lambda_i = e^{-p_ih} \in \tilde\Lambda$ должны выполняться [6] равенства

$$a_2(\lambda_i) = p_i, \quad a_2^{(k)}(\lambda_i) = \frac{(-1)^k(k-1)!}{h\lambda_i^k}, \quad k=\overline{1,k_i-1}, \quad \text{если} \quad k_i>1, \quad i=\overline{0,s_1}. \tag{32}$$

Замечание 4. Набор $\tilde P$ корней полинома $d(p)$ не должен содержать комплексно-сопряженные пары $p_{k_{1,2}} = \alpha \pm i\beta$ такие, что $\sin(\beta h) = 0$. В этом случае $\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = e^{-p_{k_{1,2}}h}$ и первое равенство в (32) нарушается в силу того, что $a_2(\lambda_{k_1}) = a_2(\lambda_{k_2})$, а $p_{k_1} \neq p_{k_2}$.

Рассмотрим характеристический полином (см. (19))

$$|pE_{N+1} - \tilde F(\lambda)| = pd_1(p) = p^{N+1} + \alpha_1p^N + \ldots + p\alpha_N.$$

Обозначим

$$\tilde G(\lambda) = [e_{N+1}, A_\alpha(\lambda)e_{N+1}, \ldots, A_\alpha^N(\lambda)e_{N+1}],$$

где

$$A_\alpha(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\alpha_{N+1} & -\alpha_N & \ldots & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_{N+1} = 0.$$

Рассмотрим матрицу

$$G(\lambda) = [e_{N+1}, \tilde F(\lambda)e_{N+1}, \ldots, \tilde F^N(\lambda)e_{N+1}].$$

В силу равенства (24) существует $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что $\delta(\lambda) = |G(\lambda)| \neq 0$. Множество корней полинома $\delta(\lambda)$ обозначим через $\Lambda_\delta = \{\lambda_i \in \mathbb{C},\ i = \overline{1,\mu}|\ \delta(\lambda_i) = 0\}$, ν_i – их алгебраические кратности.

Потребуем, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$\begin{gathered} a_2(e^{-p_i^* h}) - p_i^* \neq 0, \quad p_i^* \in P^*, \quad M(a_2(\lambda_i), \lambda_i) \neq 0, \quad \lambda_i \in \Lambda_\delta, \\ d_1(a_2(\lambda_j^*)) \neq 0, \quad \lambda_j^* \in \Lambda_\delta \cap \Lambda^*. \end{gathered} \tag{33}$$

Эти неравенства понадобятся нам при построении векторного полинома $g(\lambda)$. Согласно работе [8], в условиях (33) следует потребовать, чтобы $\tilde{M}(a_2(\lambda_i), \lambda_i) \neq 0$, $\lambda_i \in \Lambda_\delta$, но в силу замечания 3 это равносильно неравенству $M(a_2(\lambda_i), \lambda_i) \neq 0$, $\lambda_i \in \Lambda_\delta$. Для того чтобы обеспечить неравенства (33), достаточно [7, лемма 2] к интерполяционным условиям (32) добавить равенства (если они не следуют из (32))

$$a_2(\lambda_j^*) = a_2(\lambda_i) = p_0, \quad \lambda_j^* \in \Lambda^*, \quad \lambda_i \in \Lambda_\delta, \quad \forall p_0 \in \{p_0 \in \mathbb{R}|\ p_0 \notin P^*,\ d_1(p_0) \neq 0\}. \tag{34}$$

Таким образом, полином $a_2(\lambda)$ найдем как решение известной [9, с. 104] в теории полиномов интерполяционной задачи (32), (34).

7. Нахождение векторного полинома $g(\lambda)$. Покажем, как выбрать векторный полином $g(\lambda)$ таким, чтобы функция $\bar{K}(p, \lambda)$ была полиномом, а функция $\bar{K}(p, e^{-ph})$ удовлетворяла равенствам (30), т.е. чтобы обеспечить условия B), C).

Рассмотрим матрицу

$$S(\lambda) = G(\lambda)\tilde{G}^{-1}(\lambda). \tag{35}$$

В силу леммы 3 из работы [7] справедливо равенство

$$\tilde{M}(p, \lambda) = S(\lambda)[1, p, \ldots, p^N]'.$$

Обозначим

$$\tilde{g}'(\lambda) = [\tilde{g}_1(\lambda), \tilde{g}_2(\lambda), \ldots, \tilde{g}_{N+1}(\lambda)] = g'(\lambda)S(\lambda).$$

Пусть

$$\psi(\lambda) = \frac{-1}{a_1(\lambda)} \sum_{i=0}^{N+2} a_2(\lambda)^{N+2-i}\gamma_i. \tag{36}$$

В силу равенств (31), (32) в выражении для функции $\psi(\lambda)$ все нули знаменателя являются нулями числителя не меньшей кратности, поэтому $\psi(\lambda)$ – полином.

Пусть $\tilde{S}_i(\lambda)$, $i = \overline{1, N+1}$, – i-я строка матрицы $\tilde{S}(\lambda)$, присоединенной к $S(\lambda)$:

$$\tilde{S}(\lambda)S(\lambda) = S(\lambda)\tilde{S}(\lambda) = |S(\lambda)|E_{N+1}.$$

Система интерполяционных условий на полиномы $\tilde{g}_i(\lambda)$, $i = \overline{2, N+1}$, обеспечивающих условие B) для функции $\bar{K}(p, e^{-ph})$, имеет [8] вид

$$\begin{gathered} ((\tilde{S}_2(\lambda) - a_2(\lambda)\tilde{S}_1(\lambda))\tilde{g}_2(\lambda) + \ldots + (\tilde{S}_{N+1}(\lambda) - a_2^N(\lambda)\tilde{S}_1(\lambda))\tilde{g}_{N+1}(\lambda))^{(i)}|_{\lambda=\lambda_k} = \\ = (-\psi(\lambda)\tilde{S}_1(\lambda))^{(i)}|_{\lambda=\lambda_k}, \quad \lambda_k \in \Lambda_\delta, \quad i = \overline{0, \nu_k - 1}, \quad k = \overline{1, \mu}. \end{gathered} \tag{37}$$

Согласно [8], система равенств (30), обеспечивающих условие C), имеет вид

$$\begin{gathered} ((p - a_2(e^{-ph}))\tilde{g}_2(e^{-ph}) + \ldots + (p^N - a_2^N(e^{-ph}))\tilde{g}_{N+1}(e^{-ph}))^{(i)}|_{p=p_k^*} = \\ = K_1^{(i)}(p_k^*, e^{-p_k^* h}), \quad i = \overline{0, l_k - 1}, \quad p_k^* \in P^*, \quad k = \overline{1, L}. \end{gathered} \tag{38}$$

Здесь

$$K_1(p,\lambda) = \frac{-1}{a_1(\lambda)} \sum_{i=0}^{N+1} (p^{N+2-i} - a_2^{N+2-i}(\lambda))\gamma_i,$$

$\tilde{g}_j^{(i)}(e^{-p_k^* h}) = \tilde{g}_j^{(i)}(\lambda_k^*)$ – неизвестные величины $(j = \overline{2, N+1},\ i = \overline{0, l_k - 1},\ k = \overline{1, L})$.

Итак, значения полиномов $\tilde{g}_2^{(i)}(\lambda), \ldots, \tilde{g}_{N+1}^{(i)}(\lambda)$ и их производных $(\,i = \overline{0, \nu_k - 1}\,)$ в точках $\lambda = \lambda_k \in \Lambda_\delta$, $k = \overline{1, \mu}$, и значения этих же полиномов и их производных $(\,i = \overline{0, l_k - 1}\,)$ в точках $\lambda = \lambda_k^* \in \Lambda^*$, $k = \overline{1, L}$, находим из систем уравнений (37), (38).

Замечание 5. Системы (37), (38) порознь всегда совместны [8]. Затруднение может возникнуть, когда для $p_k^* \in P^*$ значение $\lambda_k^* = e^{-p_k^* h}$ принадлежит Λ_δ, $k = \overline{1, n_1}$ (считаем, что такие значения (p_k^*, λ_k^*) имеют номера $k = \overline{1, n_1}$). В работе [8] доказано, что для каждой пары значений (p_k^*, λ_k^*), $k = \overline{1, n_1}$, совокупная система (37), (38) также совместна.

Окончательно полиномы $\tilde{g}_2(\lambda), \ldots, \tilde{g}_{N+1}(\lambda)$ получаем как интерполяционные полиномы по значениям, найденным из решения систем (37), (38):

$$\begin{gathered} \tilde{g}_j(\lambda_k), \tilde{g}_j^{(1)}(\lambda_k), \ldots, \tilde{g}_j^{(\nu_k - 1)}(\lambda_k), \quad \lambda_k \in \Lambda_\delta, \quad k = \overline{1, \mu}, \quad j = \overline{2, N+1}, \\ \tilde{g}_j(\lambda_k^*), \tilde{g}_j^{(1)}(\lambda_k^*), \ldots, \tilde{g}_j^{(l_k - 1)}(\lambda_k^*), \quad \lambda_k^* \in \Lambda^*, \quad k = \overline{1, L}, \quad j = \overline{2, N+1}. \end{gathered} \tag{39}$$

Пусть черта сверху обозначает переход к комплексно-сопряженному числу или полиному. Для комплексно-сопряженных чисел p^*, $\bar{p}^*$ числа $\lambda^* = e^{-p^* h}$, $\bar{\lambda}^* = e^{-\bar{p}^* h}$ также комплексно-сопряжены. Поэтому системы (37), (38) для комплексно-сопряженных пар (p^*, λ^*), $(\bar{p}^*, \bar{\lambda}^*)$ имеют комплексно-сопряженные решения

$$\tilde{g}_j^{(i)}(\bar{\lambda}^*) = \bar{\tilde{g}}_j^{(i)}(\lambda^*), \quad i = \overline{0, \nu^* - 1}, \quad j = \overline{2, N+1}.$$

Согласно [9, с. 110], полиномы $\tilde{g}_2(\lambda), \ldots, \tilde{g}_{N+1}(\lambda)$, полученные по интерполяционным значениям (39), будут иметь действительные коэффициенты. Полином $\tilde{g}_1(\lambda)$ вычисляем по формуле

$$\tilde{g}_1(\lambda) = \psi(\lambda) - a_2(\lambda) \sum_{j=1}^{N} a_2(\lambda)^{N-j} \tilde{g}_{N+2-j}(\lambda), \tag{40}$$

затем находим векторный полином

$$g'(\lambda) = \tilde{g}'(\lambda) S^{-1}(\lambda). \tag{41}$$

Замечание 6. Полиномы $g_i(\lambda)$, $i = \overline{1, N+1}$, можно также находить [8] методом неопределенных коэффициентов как решение системы

$$\begin{gathered} a_1(\lambda) g'(\lambda) \tilde{M}(a_2(\lambda), \lambda) + d(a_2(\lambda)) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \\ (a_1(e^{-ph}) g'(e^{-ph}) \tilde{M}(p, e^{-ph}) + d(p))^{(i)}|_{p = p_k^*} = 0, \quad i = \overline{0, l_k - 1}, \quad k = \overline{1, L}. \end{gathered} \tag{42}$$

8. Случай отсутствия FSA-инвариантных значений. Если система (9) не имеет решений или, что то же самое, $\delta(\lambda) = \mathrm{const} \neq 0$ (см. п. 6), то [7, лемма 2] $P_1^* = \emptyset$, т.е. FSA-инвариантных значений нет. В этом случае конечный спектр замкнутой системы с заданным характеристическим полиномом $d(p)$ (с учетом замечания 4) может быть обеспечен посредством дифференциально-разностного FSD-регулятора

$$\begin{gathered} u(t) = -c_1(\lambda)\dot{x}_1(t) - \ldots - c_{n-1}(\lambda)\dot{x}_{n-1}(t) - c_n(\lambda)\dot{x}_n(t) + v'(\lambda) C(\lambda) x(t) + a_1(\lambda) x_{n+1}(t), \\ \dot{x}_{n+1}(t) = \bar{g}'(\lambda) C(\lambda) x(t) + a_2(\lambda) x_{n+1}(t), \quad t > 0, \end{gathered} \tag{43}$$

где $v'(\lambda) = [v_1(\lambda), \ldots, v_n(\lambda)]$, $\bar{g}'(\lambda) = [g_1(\lambda), \ldots, g_n(\lambda)]$, $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$ – полиномы, подлежащие определению. Сделать это можно, используя работу [8], по следующей схеме.

1) Находим $w(p, e^{-ph})$ – характеристический квазиполином исходной системы (1). Если он нейтрального типа, т.е. старший член имеет вид $(1+\lambda\alpha_0(\lambda))p^n$, то, согласно равенству (14), находим полиномы $\beta_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$. Поскольку $k_i(0)=0$, $i=\overline{1,n-1}$, и $k_n(0)=1$, то $\beta_n(\lambda)=1+\breve\beta_n(\lambda)$, $\breve\beta_n(0)=0$. Выбрав управление вида (17), где $\varphi_i(p,\lambda)=p\beta_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n-1}$, $\varphi_n(p,\lambda)=p(1+\breve\beta_n(\lambda))$, получим замкнутую систему с матрицей (18) с характеристическим квазиполиномом $\breve w(p,e^{-ph})$ запаздывающего типа со старшим членом p^n.

2) Запишем $n\times n$-матрицу $C(\lambda)$, образованную элементами матрицы (18) при степенях p, последняя строка $C_n(\lambda)$ которой имеет вид (20), где

$$c_i(\lambda)=\beta_i(\lambda),\quad i=\overline{1,n-1},\quad c_n(\lambda)=\breve\beta_n(\lambda).$$

Поскольку определитель $\det C(\lambda)$ равен коэффициенту при p^n, т.е. равен единице, то матрица $C(\lambda)$ унимодулярная. Выполнив замену переменных $x=C^{-1}(\lambda)y$, $y=[y_1,\ldots,y_n]'$, получим систему запаздывающего типа

$$\begin{bmatrix} p-\tilde a_{11}(\lambda) & \ldots & -\tilde a_{1n-1}(\lambda) & -\tilde a_{1n}(\lambda)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -\tilde a_{n-1,1}(\lambda) & \ldots & p-\tilde a_{n-1,n-1}(\lambda) & -\tilde a_{n-1,n}(\lambda)\\ -\tilde\beta_1(\lambda) & \ldots & -\tilde\beta_{n-1}(\lambda) & p-\tilde\beta_n(\lambda)\end{bmatrix} y(t)=e_nu_1(t), \tag{44}$$

где $\tilde\beta_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, – некоторые полиномы. Так как $\det C(\lambda)=1$, то характеристический квазиполином полученной системы прежний: $\breve w(p,e^{-ph})$.

3) С учетом замечания 4 выбираем характеристический полином $d(p)$ замкнутой системы (1), (43). По формулам (31), (32) находим полиномы $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$. Согласно равенству (36) ($N=n-1$), запишем полином

$$\psi(\lambda)=-\frac{1}{a_1(\lambda)}\sum_{i=0}^{n+1}a_2(\lambda)^{n+1-i}\gamma_i,$$

где γ_i, $i=\overline{0,n+1}$, – коэффициенты полинома $d(p)$ (см. (7)). Построим (см. равенство (35)) матрицу

$$S(\lambda)=G(\lambda)\tilde G^{-1}(\lambda),$$

где матрицы $G(\lambda)$, $\tilde G(\lambda)$ получаются согласно п. 6 при $N=n-1$. Матрицу $\tilde F(\lambda)$ берем из системы (44)

$$\tilde F(\lambda)=\begin{bmatrix} \tilde a_{11}(\lambda) & \ldots & \tilde a_{1n-1}(\lambda) & \tilde a_{1n}(\lambda)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \tilde a_{n-1,1}(\lambda) & \ldots & \tilde a_{n-1,n-1}(\lambda) & \tilde a_{n-1,n}(\lambda)\\ \tilde\beta_1(\lambda) & \ldots & \tilde\beta_{n-1}(\lambda) & \tilde\beta_n(\lambda)\end{bmatrix}.$$

Находим векторный полином $\bar g(\lambda)=[g_1(\lambda),\ldots,g_n(\lambda)]'$ как решение уравнения

$$\psi(\lambda)=\bar g'(\lambda)S(\lambda)[1,a_2(\lambda),\ldots,a_2(\lambda)^{n-1}]'. \tag{45}$$

В силу условия (4) система (44) спектрально управляема (см. равенство (24)), поэтому [8] компоненты векторного полинома $S(\lambda)[1,a_2(\lambda),\ldots,a_2(\lambda)^{n-1}]'$ взаимно просты и уравнение (45) имеет решение, которое можно найти по алгоритму Евклида. Здесь функция $K(p,\lambda)$ имеет вид

$$K(p,\lambda)=(a_1(\lambda)\bar g'(\lambda)S(\lambda)[1,p,\ldots,p^{n-1}]'+d(p))/(a_2(\lambda)-p)+\breve w(p,\lambda).$$

Заметим, что [8]

$$S(\lambda)[1,p,\ldots,p^{n-1}]'=[\tilde M_1(p,\lambda),\ldots,\tilde M_n(p,\lambda)]'$$

– столбец алгебраических дополнений к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы $pE_n-\tilde F(\lambda)$.

4) В силу замечания 3 набор FSA-инвариантных значений P_1^* при переходе от системы (1) к системе (44) сохраняется, т.е. $P_1^* = \emptyset$, и, значит, полиномы $\tilde{M}_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, взаимно просты. Поэтому найдется векторный полином $\varphi(p,\lambda) = [\varphi_1(p,\lambda),\ldots,\varphi_n(p,\lambda)]'$ такой, что

$$\varphi_1(p,\lambda)\tilde{M}_1(p,\lambda) + \ldots + \varphi_n(p,\lambda)\tilde{M}_n(p,\lambda) = d_1(p) = 1. \tag{46}$$

Для системы (44), согласно [8], FSD-регулятор имеет вид

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -\tilde{\beta}'(\lambda)y(t) + \varphi'(p,\lambda)K(p,\lambda)y(t) + a_1(\lambda)x_{n+1}(t),\\ \dot{x}_{n+1}(t) &= \bar{g}'(\lambda)y(t) + a_2(\lambda)x_{n+1}(t), \quad t > 0, \end{aligned} \tag{47}$$

где $\tilde{\beta}'(\lambda) = [\tilde{\beta}_1(\lambda),\ldots,\tilde{\beta}_n(\lambda)]$.

Заменяя производные функций $y_1,\ldots,y_{n-1}$ в выражении $\varphi'(p,\lambda)K(p,\lambda)y(t)$ согласно представлению (22), получаем предпоследнее уравнение замкнутой системы (44), (47) в виде

$$\dot{y}_n(t) = \left[v_1(\lambda),\ldots,v_{n-1}(\lambda),\sum_{j=0}^{r} v_{n+j}(\lambda)p^j\right]y(t) + a_1(\lambda)x_{n+1}(t),$$

где $v_i(\lambda)$, $i = \overline{1,n+r}$, – некоторые полиномы. Поскольку старшим членом характеристического полинома $d(p)$ замкнутой системы (44), (47) является p^{n+1}, то $\sum_{j=0}^{r} v_{n+j}(\lambda)p^j = v_n(\lambda)$, поэтому

$$\dot{y}_n(t) = [v_1(\lambda),\ldots,v_{n-1}(\lambda),v_n(\lambda)]y(t) + a_1(\lambda)x_{n+1}(t). \tag{48}$$

Возвращаясь к старым переменным $y = C(\lambda)x$, с учетом леммы 2 заключаем, что регулятор (43) обеспечивает исходной системе (1) полное успокоение и заданный характеристический полином $d(p)$.

9. Заключение. Предложенный выше алгоритм нахождения коэффициентов FSD-регулятора (6) обосновывает достаточность условий (4), (5). Необходимость этих условий для существования FSD-регулятора следует из работ [2, 3], в которых исследовалась задача полного успокоения системы (1). Таким образом, справедливо

Утверждение. *Условия (4), (5) необходимы и достаточны для существования FSD-регулятора (6).*

Процедуру построения FSD-регулятора поясним на примерах.

Пример 1. Рассмотрим систему второго порядка нейтрального типа с матрицами

$$A(p,\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda - p\lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h = \ln 2. \tag{49}$$

Это система с бесконечным спектром – ее характеристический полином имеет вид $w(p,\lambda) = p(p-\lambda)$.

Запишем алгебраические дополнения $M_1(p,\lambda) = \lambda - p\lambda$, $M_2(p,\lambda) = p - \lambda$ к элементам последней строки матрицы $pE - A(p,\lambda)$. Решаем систему $M_i(p,\lambda) = 0$, $i = \overline{1,2}$: $(p,\lambda)_{1,2} = \{(0;0);(1;1)\}$. Таким образом, система (9) при $\lambda = e^{-ph}$ решений не имеет, значит, спектральное условие (4) выполнено. Выполнено и ранговое условие (5), поэтому FSD-регулятор (6) для данной системы существует.

Следуя алгоритму Евклида, получаем разложение (11) в виде

$$[-1,-1+p]M(p,\lambda) = p^2 - p.$$

Таким образом, в разложении (11)

$$[\varphi_1(p,\lambda),\varphi_2(p,\lambda)] = [-1,-1+p], \quad N = \deg(d_1(p)) = N_0 = 2, \quad r = N - n = 0.$$

Характеристическая матрица системы конечного спектра (18) с характеристическим полиномом $d_1(p) = p^2 - p$ имеет вид

$$F(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p-\lambda & -\lambda + p\lambda \\ -1 & p-1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда находим матрицу $C(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Заменой переменных $x = C^{-1}(\lambda)y$, $y = [y_1, y_2]'$, получаем, что $v_1(\lambda) = 1$, $v_2(\lambda) = 1 - \lambda$.

Для системы (25) с матрицей

$$\tilde{F}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda - \lambda^2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

будем искать FSD-регулятор в форме динамической обратной связи (26) ($N = 2$).

Согласно п. 6, выберем характеристический полином замкнутой системы (49), (26) вида

$$d(p) = (p+1)(p+2)(p+3)(p+4),$$

тогда [6]

$$a_1(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 2^2)(\lambda - 2^3)(\lambda - 2^4).$$

Для $a_2(\lambda)$ находим интерполяционные значения $a_2(2) = -1$, $a_2(2^2) = -2$, $a_2(2^3) = -3$, $a_2(2^4) = -4$, поэтому [6]

$$a_2(\lambda) = (640 - 1176\lambda + 98\lambda^2 - 3\lambda^3)/1344.$$

Столбец алгебраических дополнений к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы $pE_3 - \tilde{F}(\lambda)$ имеет вид

$$\tilde{M}(p,\lambda) = [\tilde{M}_1(p,\lambda), \tilde{M}_2(p,\lambda), d_1(p)]' = [\lambda - \lambda^2, p - \lambda, -p + p^2]'.$$

Запишем функцию

$$\tilde{K}(p,\lambda) = (a_1(\lambda)g'(\lambda)\tilde{M}(p,\lambda) + d(p))/(a_2(\lambda) - p),$$

где $g'(\lambda) = [g_1(\lambda), g_2(\lambda), g_3(\lambda)]$. Полиномы $g_i(\lambda)$, $i = \overline{1,3}$, можно найти [8] методом неопределенных коэффициентов как решение системы (42), а можно, решив интерполяционную задачу (37), (38). Продемонстрируем второй способ.

Задача (37), (38) решается относительно интерполяционных значений полиномов $\tilde{g}_2(\lambda)$, $\tilde{g}_3(\lambda)$, где

$$\tilde{g}'(\lambda) = [\tilde{g}_1(\lambda), \tilde{g}_2(\lambda), \tilde{g}_3(\lambda)] = g'(\lambda)S(\lambda), \quad S(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - \lambda^2 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы записать систему (37), находим матрицу $\tilde{S}(\lambda)$, присоединенную к $S(\lambda)$:

$$\tilde{S}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & -(-1+\lambda)\lambda & 0 \\ \lambda & -(-1+\lambda)\lambda & -(-1+\lambda)\lambda \end{bmatrix}.$$

В данном случае

$$\delta(\lambda) = |G(\lambda)| = (-1+\lambda)\lambda, \quad \Lambda_\delta = \{0; 1\},$$

$$\psi(\lambda) = -(a_2^4(\lambda) + 10a_2^3(\lambda) + 35a_2^2(\lambda) + 50a_2(\lambda) + 24)/a_1(\lambda).$$

Система (37), реализующая условие B), имеет вид

$$((\tilde{S}_2(\lambda_k)-a_2(\lambda_k)\tilde{S}_1(\lambda_k))\tilde{g}_2(\lambda_k)+(\tilde{S}_3(\lambda_k)-a_2^2(\lambda_k)\tilde{S}_1(\lambda_k))\tilde{g}_3(\lambda_k)+\psi(\lambda_k)\tilde{S}_1(\lambda_k))=0,$$
$$\lambda_k\in\Lambda_\delta=\{0;1\}, \tag{50}$$

где $\tilde{S}_i(\lambda)$ $(i=\overline{1,3})$ – i-я строка матрицы $\tilde{S}(\lambda)$.

Система равенств (38), обеспечивающих условие C), имеет вид

$$(p_k^*-a_2(\lambda_k^*))\tilde{g}_2(\lambda_k^*)+(p_k^{*2}-a_2^2(\lambda_k^*))\tilde{g}_3(\lambda_k^*)=$$
$$=-((p_k^{*4}-a_2^4(\lambda_k^*))+10(p_k^{*3}-a_2^3(\lambda_k^*))+35(p_k^{*2}-a_2^2(\lambda_k^*))+50(p_k^*-a_2(\lambda_k^*)))/a_1(\lambda_k^*), \tag{51}$$
$$p_k^*\in P^*=\{0;1\},\quad \lambda_k^*=e^{-p_k^*h}\in\Lambda^*=\{1;1/2\}.$$

Напомним, что P^* – множество различных корней полинома $d_1(p)$.

Из системы (50), (51) линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных величин $\tilde{g}_j(0)$, $\tilde{g}_j(1/2)$, $\tilde{g}_j(1)$ $(j=2,3)$, находим

$$\tilde{g}_2(0),\ \tilde{g}_2(1/2),\ \tilde{g}_2(1),\ \tilde{g}_3(1)\quad \forall\tilde{g}_3(0),\tilde{g}_3(1/2)\in\mathbb{R}. \tag{52}$$

К найденным интерполяционным значениям добавим еще значения производных

$$\tilde{g}_2'(0)=\tilde{g}_{21},\quad \tilde{g}_2''(0)=\tilde{g}_{22}\quad \forall\tilde{g}_{21},\tilde{g}_{22}\in\mathbb{R}, \tag{53}$$

чтобы за счет выбора произвольных постоянных $\tilde{g}_{21}$, $\tilde{g}_{22}$, $\tilde{g}_3(0)$, $\tilde{g}_3(1/2)$ уменьшить кратность запаздываний в регуляторе (28). Решая интерполяционную задачу (52), (53), получаем полиномы $\tilde{g}_2(\lambda)$, $\tilde{g}_3(\lambda)$. По формуле (40) находим $\tilde{g}_1(\lambda)$, а по формуле (41) – векторный полином $g'(\lambda)=[g_1(\lambda),g_2(\lambda),g_3(\lambda)]$, зависящий от произвольных постоянных $\tilde{g}_{21}$, $\tilde{g}_{22}$, $\tilde{g}_3(0)$, $\tilde{g}_3(1/2)$. Согласно представлению (29), получаем функцию $K(p,\lambda)$ и функцию $f_3(p,\lambda)=K(p,\lambda)/d_1(p)$.

Записываем регулятор (28) и за счет выбора произвольных постоянных $\tilde{g}_{21}$, $\tilde{g}_{22}$, $\tilde{g}_3(0)$, $\tilde{g}_3(1/2)$ уменьшаем кратность запаздываний. Регулятор для исходной системы нейтрального типа (49) примет окончательный вид

$$u(t)=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t),$$
$$\dot{x}_3(t)=\frac{-15424+1176\lambda-98\lambda^2+3\lambda^3}{1344}x_3(t)+$$
$$+\int_0^h\frac{-2709504+712384\lambda+24824\lambda^2-14446\lambda^3+673\lambda^4}{53760}x_3(t-s)\,ds+$$
$$+\int_0^h\frac{1262475904-1041040440\lambda+287583610\lambda^2-30038805\lambda^3+989011\lambda^4}{5312160}x_3(t-s)e^s\,ds+$$
$$+a_1(\lambda)x_4(t),$$
$$\dot{x}_4(t)=\frac{-35574722600-37294846882\lambda+3169661089\lambda^2-98137095\lambda^3}{114232688640}x_1(t)+$$
$$+\frac{-1704617384-2300951182\lambda+193089973\lambda^2-5934066\lambda^3}{7139543040}x_2(t)+$$
$$+\frac{-221923200+366546074\lambda-4743\lambda^2}{951939072}x_3(t)+a_2(\lambda)x_4(t),\quad t>0. \tag{54}$$

Построенный регулятор содержит распределенное запаздывание только по вспомогательной переменной x_3.

Непосредственным вычислением убеждаемся в том, что замкнутая система (49), (54) имеет требуемый характеристический полином

$$d(p) = |pE_4 - \breve{A}(p, e^{-ph})| = (p+1)(p+2)(p+3)(p+4).$$

Первые три строки обратной матрицы $(pE_4 - \breve{A}(p,\lambda))^{-1}$ $(\lambda = e^{-ph})$ образованы целыми функциями, где старшая степень λ равна 9. Согласно теореме Винера–Пэли, при $t \geq 9h = 9\ln 2$ фазовые переменные $x_i(t)$ $(i = \overline{1,3})$ тождественно равны нулю, поскольку их изображения по Лапласу – целые функции экспоненциального типа не больше $9h$. Таким образом, регулятор (54) обеспечивает асимптотически устойчивый конечный спектр замкнутой системы и полное успокоение исходной системы (49).

Пример 2. Проиллюстрируем случай отсутствия FSA-инвариантных значений. Пусть параметры системы (1) имеют вид

$$A(p,\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1-p\lambda & p\lambda & 1+p\lambda & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1-p\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h = \ln 2. \tag{55}$$

Следуем схеме, предложенной в п. 8.

1) Находим характеристический квазиполином данной системы ($\lambda = e^{-ph}$) вида $w(p,\lambda) = p^4(1-\lambda) + p^3\lambda + p^2$ – квазиполином нейтрального типа. Вычисляем алгебраические дополнения к элементам (начиная с первого) последней строки характеристической матрицы $W(p,\lambda) = pE_n - A(p,\lambda)$:

$$M(p,\lambda) =$$
$$= [1+p+p\lambda-p^2\lambda, -1+p+2p^2\lambda+p^2\lambda^2-p^3\lambda^2, (1-p\lambda)(1+p^2+p\lambda-p^2\lambda), p(1+p^2+p\lambda-p^2\lambda)]$$

и исследуем систему (9). Последняя, очевидно, решений не имеет, т.е. FSA-инвариантных значений нет. Поэтому условие (4) и (легко проверить) условие (5) выполнены.

Запишем коэффициенты $k_i(\lambda)$ при степенях p^3 в полиномах $M_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1,4}$:

$$k_1(\lambda) = 0, \quad k_2(\lambda) = -\lambda^2, \quad k_3(\lambda) = \lambda^2 - \lambda, \quad k_4(\lambda) = 1 - \lambda.$$

Согласно системе (14) находим полиномы $\beta_1(\lambda) = 0$, $\beta_2(\lambda) = \beta_3(\lambda) = -\beta_4(\lambda) = -1$. Выбрав управление вида (17), где

$$\varphi_1(p,\lambda) = 0, \quad \varphi_2(p,\lambda) = \varphi_3(p,\lambda) = -p, \quad \varphi_4(p,\lambda) = p,$$

получим замкнутую систему вида (18) с характеристическим квазиполиномом $\breve{w}(p, e^{-ph}) = -p^3 + p^4$ запаздывающего типа.

2) Запишем матрицу $C(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1-\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, образованную элементами матрицы (18) при степенях p. Выполнив замену переменных $x = C^{-1}(\lambda)y$, $y = [y_1, \ldots, y_4]'$, получим систему запаздывающего типа вида (44)

$$\begin{bmatrix} p+\lambda & -1 & -1 & \lambda \\ 1+\lambda^2 & p-\lambda & -1-\lambda & -\lambda+\lambda^2 \\ \lambda & -1 & -1+p & -1+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} y(t) = e_4 u_1(t). \tag{56}$$

3) С учетом замечания 4 выбираем характеристический полином

$$d(p) = (1+p)(2+p)(3+p)(4+p)(5+p)$$

замкнутой системы (44), (47). По формулам (31), (32) находим полиномы

$$a_1(\lambda) = (-32+\lambda)(-16+\lambda)(-8+\lambda)(-4+\lambda)(-2+\lambda),$$

$$a_2(\lambda) = \frac{58368 - 100800\lambda + 9800\lambda^2 - 450\lambda^3 + 7\lambda^4}{107520}.$$

Согласно равенству (36) ($N = 3$), записываем полином

$$\psi(\lambda) = -(120 + 274a_2(\lambda) + 225a_2^2(\lambda) + 85a_2^3(\lambda) + 15a_2^4(\lambda) + a_2^5(\lambda))/a_1(\lambda).$$

Строим (см. равенство (35)) матрицу $S(\lambda) = G(\lambda)\tilde{G}^{-1}(\lambda)$, где матрицы $G(\lambda)$, $\tilde{G}(\lambda)$ получаем согласно п. 6 при $N = 3$. Матрицу $\tilde{F}(\lambda)$ берем из системы (56). Находим векторный полином $\bar{g}(\lambda) = [g_1(\lambda), \ldots, g_4(\lambda)]'$ как решение уравнения (45) и записываем функцию $K(p,\lambda)$.

4) В разложении (46) векторный полином $\varphi(p,\lambda)$ имеет вид

$$\varphi(p,\lambda) = [(1-\lambda)/2, -1/2, \lambda, 0].$$

Заменяя производные функций y_1, y_2, y_3 в выражении $\varphi'(p,\lambda)K(p,\lambda)y(t)$ их представлениями (22), получаем предпоследнее уравнение (48) замкнутой системы (44), (47), из которого находим векторный полином $v(\lambda) = [v_1(\lambda), \ldots, v_4(\lambda)]'$. На основании регулятора (43) получаем матрицу $\breve{A}(p,\lambda) = [\breve{a}_{ij}(p,\lambda)]$ системы (55), замкнутой дифференциально-разностным FSD-регулятором.

В замкнутой системе $x_i(t)$ равен нулю тождественно, $t \geq 7\ln 2$, $i = \overline{1,4}$, поскольку элементы первых четырех строк матрицы $(pE_5 - \breve{A}(p,\lambda))^{-1}$ – целые функции экспоненциального типа не выше 7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М., 1968.
2. *Метельский А.В., Минюк С.А.* Критерии конструктивной идентифицируемости и полной управляемости линейных стационарных систем нейтрального типа с запаздыванием // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 5. С. 15–23.
3. *Хартовский В.Е., Павловская А.Т.* Полная управляемость и управляемость линейных автономных систем нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 2013. № 5. С. 59–79.
4. *Метельский А.В.* Задача назначения конечного спектра для дифференциальной системы нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 1. С. 70–83.
5. *Manitius A.Z., Olbrot A.W.* Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays // IEEE Trans. on Autom. Control. 1979. AC-24. № 4. P. 541–553.
6. *Карпук В.В., Метельский А.В.* Полное успокоение и стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 19–28.
7. *Метельский А.В.* Спектральное приведение дифференциальных систем с запаздыванием в регулярном случае // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2012. № 6. С. 3–14.
8. *Метельский А.В.* Полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием через спектральное приведение // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2014. № 1. С. 3–21.
9. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1988.

Белорусский национальный технический университет, г. Минск

Поступила в редакцию 12.12.2014 г.