МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Информационные системы и технологии»

А. А. Лобатый
В. Ю. Степанов
Е. А. Хвитько

МЕТОДЫ И СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пособие
для студентов специальностей
1-53 81 02 «Методы анализа и управления
в технических и экономических системах»,
1-53 81 05 «Распределенная автоматизация на основе
промышленных компьютерных сетей»

В 3 частях

Часть 1

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Республики Беларусь по образованию
в области автоматизации технологических процессов,
производств и управления*

Минск
БНТУ
2020

УДК 681.5:681.3(075.8)
ББК 14.2.6
Л68

Р е ц е н з е н т ы:
заведующий кафедрой ЭВС УО БГУИР,
доктор технических наук, доцент *И. С. Азаров*;
главный научный сотрудник ОИПИ НАН Беларуси,
доктор технических наук, профессор *В. В. Старовойтов*

Лобатый, А. А.

Л68 Методы и системы оптимального управления: пособие для студентов специальностей 1-53 81 02 «Методы анализа и управления в технических и экономических системах», 1-53 81 05 «Распределенная автоматизация на основе промышленных компьютерных сетей»: в 3 ч. / А. А. Лобатый, В. Ю. Степанов, Е. А. Хвитько. – Минск : БНТУ, 2020. – Ч. 1. – 64 с.

ISBN 978-985-583-263-9 (Ч. 1).

В пособии рассмотрены задачи и методы синтеза линейных и некоторых нелинейных систем автоматического управления. В первой части издания дается подробная характеристика задач и методов синтеза САУ, состав и процесс создания СУ, приводится определение понятия математических моделей и представляется их детальная классификация, рассматриваются системы компьютерной математики, а затем речь идет об основных свойствах систем, таких как наблюдаемость, идентифицируемость, управляемость и адаптируемость с дальнейшей непосредственной постановкой задачи синтеза систем автоматического управления.

УДК 681.5:681.3(075.8)
ББК 14.2.6

ISBN 978-985-583-263-9 (Ч. 1)
ISBN 978-985-583-264-6

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целенаправленное воздействие на объект или систему с участием или без участия человека называется управлением, а система, обеспечивающая данное управление, соответственно системой управления (СУ). Если СУ функционирует с участием человека, то такая система называется автоматизированной, а если без участия человека, то автоматической (САУ). САУ – это взаимодействующий с объектом управления автоматический или автоматизированный регулятор, в котором преобразование и передача информации, формирование управляющих команд и их реализация осуществляются автоматически согласно заданному алгоритму управления.

Автоматизация является одним из главных направлений научно-технического прогресса и важным средством повышения эффективности практически любой сферы деятельности. Современное состояние развития техники и технологий характеризуется ростом масштабов и усложнением технологических процессов, увеличением единичной мощности отдельных агрегатов и узлов, применением интенсивных, высокоскоростных режимов, близких к критическим, повышением требований к качеству продукции, безопасности персонала, сохранности оборудования и т. д.

Экономичное, надежное и безопасное функционирование сложных технических объектов может быть обеспечено с помощью лишь самых совершенных технических средств, разработка, изготовление, монтаж, наладка и эксплуатация которых немыслимы без знания СУ.

Основной задачей, решаемой при проектировании СУ, является синтез регуляторов, которые должны обеспечивать заданные или оптимальные показатели в переходных процессах и установившихся режимах работы, которые и будут рассмотрены в данном пособии.

1. Основные задачи анализа и синтеза систем управления

Разработкой методов анализа и синтеза систем управления (СУ), направленных на решение практических задач с помощью математических моделей, занимались многие русские и зарубежные ученые. Приведем основные свойства математических моделей систем, тесно связанных с качеством управления.

Математическое определение устойчивости применительно к объектам управления, записанным в форме Коши, сформулировано великим русским математиком и механиком, академиком Петербургской Академии наук (1901) Александром Михайловичем Ляпуновым (1857–1918). Это свойство предполагает, что математическая модель объекта управления задана на всей полуоси времени $[0, \infty)$, а сам объект доступен только возмущениям начальных условий, и на него не действуют никакие другие внешние воздействия. Предполагается также, что система имеет единственное состояние равновесия, каковым является начало координат.

Во многих технических приложениях динамика объекта рассматривается на конечном интервале времени $[0, t]$. К таким приложениям относятся, например, пилотажно-навигационные комплексы космических спускаемых аппаратов и баллистических ракет, предназначенные для выведения этих аппаратов на орбиту вокруг Земли, системы автоматического управления оружием массового поражения, включая баллистические ракеты, торпеды и т. д. Количество таких продуктов человеческой деятельности настолько велико, что породило целое направление, которое развивалось Г. В. Каменковым, А. А. Лебедевым, Н. Г. Четаевым, Н. Д. Моисеевым, К. А. Абгаряном, С. Я. Степановым и др.

В 1945 году ставший впоследствии почетным академиком Российской Академии естественных наук Владимир Викторович Солодовников ввел в практику автоматического управления понятие прямых показателей качества переходных процессов. Под этим понятием понимаются два неформализованных свойства переходных процессов в замкнутой системе: время регулирования и перерегулирования. При этом полагается, что переходной процесс является реакцией на ступенчатое внешнее воздействие и стремится к некоторому установившемуся значению.

В том же году В. В. Солодовниковым было введено понятие статической ошибки, которая характеризует точность работы системы управления в установившемся режиме.

Для определения прямых показателей качества переходных процессов стационарных линейных систем А. А. Фельдбаум ввел в рассмотрение корневые показатели:

– степень устойчивости, или расстояние до мнимой оси ближайшего к ней слева корня;

– колебательность, или отношение абсолютной величины мнимой части корня к действительной для ближайшей (слева) к мнимой оси пары комплексно сопряженных корней.

В 1939 году Г. В. Щипановым в практику автоматического управления применительно к объектам управления, записанным в форме Коши, было введено понятие инвариантности: i-выход ($i = 1, m$) замкнутой системы назовем инвариантным к j-входу ($j = 1, m$, $i = j$), если он невосприимчив к этому входу.

В 1938 году членом-корреспондентом АН СССР Иваном Николаевичем Вознесенским было введено понятие автономности: объект управления называется автономным, если замкнутая многосвязная система с векторным управлением (m-размерность вектора управлений) распадается на m односвязных подсистем.

Свойство автономности вводилось И. Н. Вознесенским применительно к объектам управления, записанным в форме Коши. Однако форма описания «вход – выход» позволяет формализовать введенное свойство, и инвариантности являются двумя частями одной и той же математической модели в форме «вход – выход»: всякий i-выход системы не зависит от всех не i-х компонентов вектора входа. Причем описанный эффект проявляется при любом $m > 1$, т. е. начиная с $m = 2$. Академик АН СССР Борис Николаевич Петров назвал возникающий для $m = 2$ эффект принципом двухканальности. В рамках теории инвариантности ценные результаты получены В. С. Кулебакиным, Н. Н. Лузиным, П. И. Кузнецовым, Б. Н. Петровым, А. Г. Ивахненко, Г. М. Улановым и др.

В 1937 году ставшими впоследствии академиками АН СССР Александром Александровичем Андроновым (1901–1952) и Львом Семеновичем Понтрягиным (1908–1988) было дано определение грубой (структурно устойчивой) математической модели.

При использовании математической модели объекта управления возникает естественный вопрос о соответствии свойств модели свойствам описываемого ею объекта. Поскольку любая модель описывает объект лишь приближенно, то интерес представляют только те свойства модели, которые сохраняются при вариациях ее параметров в некоторых пределах.

Если подобное справедливо для модели, то вполне естественно, что и объект управления наделен свойствами, совпадающими со свойствами модели. Варьировать параметры модели необходимо и для учета реализации закона управления, полученного расчетным путем, на конкретных физических элементах, а также учета изменения физических параметров объекта управления вследствие старения (износа).

Если при вариациях параметров модели некоторое свойство ее движений сохраняется, то такое свойство принято называть грубым (или, как принято в англоязычных странах, робастным).

Академиком АН СССР Николаем Николаевичем Красовским в 1956 году дано определение грубости данного свойства движений модели.

Заданные свойства математических моделей систем управления: устойчивость, автономность, грубость (робастность), инвариантность, качество переходных процессов, точность и другие свойства – достигаются решением задач анализа и синтеза.

2. Методы анализа и синтеза систем управления

Приведем лишь некоторые результаты решения задач анализа и синтеза СУ и назовем их авторов.

К первым результатам решения задачи синтеза СУ следует отнести гиперболу И. А. Вышнеградского (1832–1895), с помощью которой определяется область устойчивости и область неустойчивости СУ, поведение которой описывается дифференциальными уравнениями третьего порядка. Гипербола И. А. Вышнеградского направлена на решение задачи стабилизации СУ в форме «вход – выход»; она позволяет выделить области апериодических и колебательных переходных процессов. С результатом И. А. Вышнеградского тесно связана задача модального управления, формализованная Н. Н. Розенброком, и аналитическое решение этой задачи для скалярного случая, предложенное Ю. Аккерманом.

В 1940 году В. С. Кулебакиным сформулирован подход, который можно назвать принципом двухэтапного синтеза регуляторов (принцип двухэтапной коррекции). Содержание его заключается в том, что на первом этапе выбирается эталонный оператор замкнутой системы (для стационарных систем – эталонная передаточная функция (ПФ) $W^{э}(s)$), а на втором – структурная схема и параметры регулятора, а также исполнительный элемент, имеющий мощность, обеспечивающую необходимое быстродействие.

Что касается класса стационарных линейных СУ, то существенные результаты по выбору эталонных передаточных функций систем, удовлетворяющих техническим требованиям при некоторых типовых полезных сигналах, были получены в работах В. А. Боднера, Б. Н. Петрова, В. В. Солодовникова, Г. С. Поспелова, Т. Н. Соколова, С. П. Стрелкова, А. А. Фельдбаума.

При решении задач синтеза СУ, подверженных воздействию случайных процессов, важную роль играет нахождение динамических характеристик оптимальной (эталонной) системы. Большое значение в решении этой проблемы имеют работы Н. Винера, Л. Заде и Дж. Рагаццини, В. В. Солодовникова, В. С. Пугачева, П. С. Матвеева, К. А. Пупкова, В. И. Кухтенко.

В частотном методе, разработанном В. В. Солодовниковым и получившим широкое распространение в инженерной практике, расчет производится с использованием типовых логарифмических амплитудных частотных характеристик, для которых построены подробные номограммы показателей качества процессов управления. С помощью этих номограмм можно построить эталонную амплитудно-частотную характеристику (реализация 1-го этапа) синтезируемой системы, определить ее передаточную функцию, найти частотные характеристики и передаточную функцию корректирующего устройства.

Я. З. Цыпкиным рассмотрена задача определения эталонной характеристики замкнутой СУ для случаев, когда показателями качества выбраны интегральное квадратическое отклонение и энергия управления.

Теоретические положения, являющиеся основой решения задачи синтеза, нашли отражение в работах Е. П. Попова и В. А. Бесекерского.

Широкий спектр подходов к решению задачи построения ММ эталонной системы, например с использованием фильтров Баттерворса, рассмотрен А. А. Первозванским.

В. С. Кулебакиным был предложен метод синтеза систем автоматического управления, описываемых линейными дифференциальными уравнениями второго и третьего порядков, удовлетворяющих некоторым техническим требованиям. Для таких систем эталонная передаточная функция выбирается из условия реализации заданной формы переходного процесса. На основе выбранной эталонной передаточной функции можно найти параметры реальной системы. Такой метод синтеза носит название метода стандартных коэффициентов. Характерная особенность этого метода заключается в том, что искомые параметры определяются при решении системы уравнений, полученных путем приравнивания коэффициентов при соответствующих операторах эталонной и реальной передаточных функций системы управления.

Основными недостатками метода стандартных коэффициентов при решении задачи синтеза является во многих случаях неразрешимость системы уравнений, служащей для определения параметров этой системы.

В. А. Боднером показано, что при включении определенным образом обратных параллельных корректирующих устройств система становится разрешимой.

Существенные результаты, направленные на решение задачи определения параметров элементов, входящих в систему управления и обеспечивающих равенство эталонной математической модели и эталонной математической модели проектируемой системы, получены В. В. Солодовниковым, В. Г. Сегалиным, Т. Н. Соколовым, В. Р. Эвансом, В. А. Боднером, В. С. Кулебакиным, Э. Г. Удерманом и др.

Для решения инженерных задач разрабатывались методы синтеза СУ в следующих постановках:

1. Синтез по заданному расположению полюсов изображений процессов (передаточной функции), а также с использованием D-разбиения плоскости коэффициентов знаменателя изображения (или плоскости параметров системы).

2. Синтез по заданному расположению полюсов и нулей передаточной функции, в том числе метод корневых годографов.

3. Синтез по интегральным оценкам.

4. Синтез методом подобия амплитудно-фазовых и вещественных частотных характеристик.

Методы синтеза по расположению полюсов передаточной функции рассмотрены в работах Г. Н. Никольского, В. К. Попова, Т. Н. Соколова, З. Ш. Блоха, Ю. И. Неймарка и др.

Метод синтеза по заданному (взаимному) расположению полюсов и нулей передаточной функции может обеспечить все показатели качества переходного процесса. Он рассматривается в работах С. П. Стрелкова, Е. П. Попова, Траксела и др.

Кроме того, корневые методы предложены К. Ф. Теодорчиком, Г. А. Бендриковым, Г. В. Римским и др.

Метод, разработанный Н. Т. Кузовковым, позволяет использовать связь основных показателей качества процесса управления с величинами доминирующих полюсов и нулей синтезируемой системы, а также установить связь этих полюсов и нулей с варьируемым параметром.

Для определения части параметров используются также интегральные оценки качества переходного процесса, развиваемые в работах Л. И. Мандельштама, Б. В. Булгакова, В. С. Кулебакина, А. А. Фельдбаума, А. А. Красовского и других ученых.

Синтез звеньев по амплитудно-фазовым характеристикам скорректированной и нескорректированной систем предложен в работе А. В. Фатеева.

А. В. Башариным разработан графический метод синтеза нелинейных систем управления, который может применяться также к системам с переменными параметрами.

Н. Н. Соколовым изучен широкий спектр задач синтеза линеаризованных систем автоматического управления, при этом основное внимание уделено методам определения эталонных передаточных функций. Подходы к решению задачи синтеза регуляторов, доведение ее до алгоритма вычисления параметров корректирующих цепей с использованием линейных дифференциальных операторов в классе систем с переменными параметрами изучены А. В. Солодовым.

Один из ведущих разделов аналитической механики составляют обратные задачи динамики систем, суть которых состоит в том, что по заданному описанию модели динамической системы необходимо найти систему сил, действие которых порождает ее движение с заданными свойствами. Взаимосвязь задачи формирования заданных движений на выходе управляемой динамической системы с обратными задачами динамики рассматривали Л. М. Бойчук, А. А. Жевнин, К. С. Колесников, А. П. Крищенко, В. И. Толокнов, Б. Н. Петров, П. Д. Крутько, Е. П. Попов, Г. Е. Пухов, К. Д. Жук, А. В. Тимофеев и др.

В результате исследования условий подавления (парирования) влияния возмущений на поведение объекта управления А. С. Востриковым был сформулирован принцип локализации как структурное требование к построению алгоритмов управления динамическими объектами, суть которого состоит в организации в системе управления специальной быстрой подсистемы, где локализуются возмущения, влияние которых на поведение объекта нужно парировать.

Метод синтеза СУ, обеспечивающих формирование заданных показателей качества переходных процессов в условиях действия неконтролируемых возмущений на основе использования старшей производной совместно с большим коэффициентом усиления в законе обратной связи, был предложен в работах А. С. Вострикова и получил дальнейшее развитие в методе локализации. Кроме того, в качестве общей методической основы для синтеза нелинейных систем управления был предложен принцип локализации как структурное требование к проектируемой системе управления, заключающееся в формировании специальной быстрой подсистемы для подавления влияния сигнальных и параметрических возмущений.

Структурное представление систем, удовлетворяющих данному принципу, позволяет выделить контур – «контур локализации». При этом расчет системы управления сводится главным образом к решению двух задач: проектированию эталонного уравнения и стабилизации быстрых процессов в контуре локализации. Принципу локализации удовлетворяют различные типы систем, в частности, системы со скользящими режимами, системы с большими коэффициентами в законе обратной связи, а также ряд адаптивных систем и систем, близких по свойствам к адаптивным.

В настоящее время можно выделить несколько наиболее развитых направлений в теории синтеза систем управления, позволяющих обеспечить формирование требуемых показателей качества переходных процессов по выходным переменным, а также их инвариантность по отношению к переменным характеристикам объекта и неконтролируемым возмущениям.

Важное направление – это теория синтеза систем с переменной структурой и, в частности, систем управления с организацией скользящих режимов движения вдоль многообразия, заданного в пространстве состояний объекта. Основы этого направления рассматривались в работах Е. А. Барбашина, Е. И. Геращенко, С. М. Геращенко, С. В. Емельянова, Б. Н. Петрова, В. И. Уткина и получили дальнейшее развитие в работах многих исследователей. Данное направление интенсивно развивается и в настоящее время.

Системы с переменной структурой, введенные в теорию и практику автоматического управления С. В. Емельяновым, находят большое теоретическое развитие и практическое применение. Основная идея построения систем с переменной структурой заключается в организации нескольких структур регулятора и смене их в процессе управления объектом таким образом, чтобы в наибольшей степени использовать положительные свойства каждой из структур и получить новые движения системы, возможно, несвойственные ни одной из отдельно взятых структур регулятора. При этом вся система в целом может получить качественно новые свойства.

Решение задачи компенсации в виде функциональных степенных рядов рассмотрено Г. Ван-Трисом. Им же построены алгоритмы определения компенсирующих ядер в прямой цепи и цепи обратной связи.

К. А. Пупковым, А. С. Ющенко и В. И. Капалиным систематически и с единых методологических позиций изложена теория нелинейных систем; разработаны методы синтеза регуляторов в классе нелинейных систем, поведение которых описывается функциональными рядами Вольтерра. Класс систем со случайными параметрами исследован в работах Е. А. Федосова и Г. Г. Себрякова, а применение теории чувствительности – в работах Р. М. Юсупова.

Аппарат многомерных импульсных переходных функций, передаточных функций, частотных характеристик, а также многомерных интегральных преобразований Лапласа и Фурье позволил О. Н. Киселеву, Б. Л. Шмульяну, Ю. С. Попкову и Н. П. Петрову разработать конструктивные алгоритмы идентификации и оптимизации нелинейных стохастических систем, включая синтез регуляторов. Я. З. Цыпкиным и Ю. С. Попковым рассмотрены методы синтеза регуляторов в классе дискретных систем.

А. С. Шаталовым, В. В. Барковским, В. Н. Захаровым рассмотрен широкий спектр вопросов по проблеме синтеза систем автоматического управления, результаты отражены в их работах. Аппарат обратных задач динамики управляемых систем использован П. Д. Крутько для синтеза оператора обратной связи, а также для решения ряда других задач.

И. А. Орурком рассмотрена задача синтеза в следующей постановке: параметры регулятора определяются таким образом, чтобы:

1) воспроизводился переходной процесс $h_э(t)$, относящийся к координате $x(t)$, при возмущениях определенного вида; при этом с допустимой погрешностью должна воспроизводиться кривая $h_э(t)$, ее экстремальные значения, скорость и время протекания переходного процесса;

2) обеспечивалась заданная степень устойчивости и колебательность системы.

Конструктивные алгоритмы синтеза регуляторов для широкого класса систем с использованием аппарата математического программирования предложены И. А. Дидуком, А. С. Орурком, А. С. Коноваловым, Л. А. Осиповым.

В. В. Солодовниковым, В. В. Семеновым и А. Н. Дмитриевым разработаны спектральные методы расчета и проектирования САУ, позволяющие построить конструктивные алгоритмы синтеза регуляторов. В. С. Медведевым и Ю. М. Астаповым рассмотрены алгоритмы нахождения эталонных ПФ при случайных воздействиях, а также методы синтеза корректирующих устройств с использованием логарифмических частотных характеристик по заданным собственным значениям матрицы системы управления линейными объектами по квадратичному критерию качества.

В. И. Сивцовым и Н. А. Чулиным получены результаты, позволяющие решать задачи автоматизированного синтеза систем управления на основе частотного метода. В. А. Карабановым, Ю. И. Бородиным и А. Б. Ионнисианом рассмотрены некоторые задачи обобщения частотного метода на класс нестационарных систем.

В работах Е. Д. Теряева, Ф. А. Михайлова, В. П. Булекова и других рассмотрены задачи синтеза нестационарных систем.

Чрезвычайно трудной является проблема синтеза регуляторов в многомерных системах. В работах, рассматривающих вопрос о разрешимости задачи синтеза регуляторов при выполнении известных требований, получены соответствующие условия разрешимости (Р. Брокетт, М. Месарович). В. В. Солодовниковым, В. Ф. Бирюковым, Н. Б. Филимоновым получены результаты, направленные на решение задач синтеза регуляторов в классе многомерных систем. Ими предложен критерий качества, который адекватно отражает динамическое поведение многомерных систем, сформулированы условия, при которых задача синтеза разрешима. Ценные результаты получены А. Г. Александровым. Многими авторами (Б. Андерсон, Р. Скотт и др.) рассмотрен подход, в основу которого положено «модельное соответствие» синтезируемой системы и желаемой модели. В этом же русле (с использованием метода пространства состояний) созданы работы Б. Мура, Л. Силвермана, В. Уонема, А. Морзе и др. Используется «геометрический подход», рассмотренный В. Уонемом и Д. Персоном.

Одной из проблем, связанной с синтезом регуляторов в классе многомерных систем, является проблема «развязки» каналов. С целью решения этой проблемы созданы работы Е. Джильберта, С. Уанга, Е. Девисона, В. Воловича, Г. Бенгстона и др.

Вопросы синтеза регуляторов в многомерных системах с использованием разных подходов изложены в работах Е. М. Смагина, Х. Розенброка, М. Явдана, А. Г. Александрова, Р. И. Ивановского, А. Г. Таранова.

С. Кант и Т. Калат изучили «проблему минимального проектирования». Вопросы, связанные с диагональной доминантностью, изучались О. С. Соболевым, Х. Розенброком, Д. Хаукинсом.

Отдельным вопросам проблемы синтеза многомерных систем посвящены работы М. В. Меерова, Б. Г. Ильясова. В работе Е. А. Федосова рассмотрены перспективные методы проектирования многомерных динамических систем.

Современный период развития теории управления характеризуется постановкой и решением задач, учитывающих неточность наших знаний об объектах управления и действующих на них внешних возмущений. Задачи синтеза регулятора и оценивания состояния с учетом неопределенности в модели объекта и характеристиках входных воздействий являются одними из центральных в современной теории управления. Их важность обусловлена прежде всего тем, что практически в любой инженерной задаче конструирования САУ присутствует неопределенность в модели объекта и в знании класса входных возмущений.

Решению проблем теории автоматического управления, определяющих прогресс науки об управлении в последние десятилетия, посвящены книги И. В. Мирошника, В. О. Никифорова и А. Л. Фрадкова, Б. Р. Андриевского и В. Н. Афанасьева, С. В. Емельянова и С. К. Коровина, В. Б. Колмановского и В. Р. Носова.

Монография В. Д. Юркевича посвящена проблемам синтеза непрерывных и дискретных САУ в условиях неполной информации о внешних неконтролируемых возмущениях при переменных параметрах объекта управления.

Новые подходы отражены в монографии В. А. Подчукаевым, где получено решение задач синтеза в явном виде (в аналитической форме) без использования каких-либо итерационных или поисковых процедур.

Результаты, характеризующие современный этап развития важных направлений теории автоматического управления, получены Е. А. Федосовым, Г. Г. Себряковым, С. В. Емельяновым, С. К. Коровиным, А. Г. Бутковским, С. Д. Земляковым, И. Е. Казаковым, П. Д. Крутько, В. Ю. Бутковским, А. С. Ющенко, И. Б. Ядыкиным и другими.

Необходимо отметить, что вышедшие за последние годы учебники затрагивают, как правило, лишь отдельные стороны современной теории. Некоторую информацию можно извлечь из статей и обзоров на русском языке, однако все это дает лишь мозаичную картину предмета. В книге Б. Т. Поляка и П. С. Щербакова «Робастная устойчивость и управление» дано систематическое изложение современной теории управления.

В последние десятилетия опубликован ряд монографий и статей, связанных с рассмотрением таких проблем, как применение в теории систем геометрических методов, теории катастроф и теории хаоса, адаптивного и робастного управления, класса интеллектуальных систем, нейрокомпьютеров и др.

Введено понятие бифуркаций, рассматриваются соответствующие определения, для класса операторов определены точки бифуркации, т. е. точки, в которых в уравнении с соответствующим оператором происходит рождение нового, нетривиального решения этого уравнения. Показано также, что хаотическое поведение динамических систем определяется высокой чувствительностью к начальным условиям и невозможностью предсказания поведения на большом интервале времени.

Рассмотрены некоторые положения робастного управления. Проектировщик часто не располагает полной информацией о моделях объектов, т. е. последние содержат неопределенности и, таким образом, имеют место информационные ограничения, например, при проектировании новых технологических процессов, объектов новой техники и др. Явление неопределенности может порождаться неизвестными параметрами объекта, неточно известными нелинейными характеристиками математической модели, неизмеряемыми внешними возмущениями и др. Если методы классической теории управления основаны на предположении, что все характеристики управляемого процесса известны заранее и поэтому возможно использование закона управления, заданного в явной форме, то в условиях неопределенности задача обеспечения требуемого качества управления обеспечивается применением методов робастного управления.

При проектировании систем автоматического управления часто используют свойство адаптации, когда недостаточная степень априорной информации восполняется обработкой по соответствующим алгоритмам текущей информации. Системы, обладающие свойством адаптивности (что позволяет сократить сроки их проектирования, наладки и испытаний), называют адаптивными.

С учетом сказанного можно поставить вопрос о решении задачи оптимизации в условиях неполной априорной информации (адаптивное оптимальное управление).

Изучение теории автоматического управления без учета физических процессов, протекающих в проектируемой системе, может привести к полной беспомощности в постановке и решении практических задач. Поэтому уделяется большое внимание изучению и применению численных методов для исследования и синтеза достаточно сложных автоматических систем с целью дать представление о реально используемых алгоритмах и таких понятиях, как корректность, устойчивость и обусловленность вычислительных схем.

3. Тенденции развития теории систем управления

Основной задачей, решаемой при проектировании СУ, является синтез регуляторов, которые должны обеспечивать заданные или оптимальные показатели в переходных процессах и установившихся режимах работы. При этом необходимо учитывать информационные, конструктивные, энергетические и другие эксплуатационные ограничения, которые играют существенную роль при реализации алгоритмов управления, полученных абстрактным теоретическим путем.

Задача синтеза СУ в широком смысле заключается в определении состава, структуры (конфигурации) СУ, параметров всех ее устройств и технических средств реализации из условия удовлетворения заданному комплексу технических требований.

Эти требования многоплановы и разнохарактерны: от вида статических и динамических характеристик, точности, запаса устойчивости, надежности до весовых, габаритных и энергетических характеристик (требования в отношении быстродействия должны соответствовать мощности исполнительного элемента регулятора), условий изготовления (технологические проблемы) и требований к эксплуатационному обслуживанию и др.

Задачей синтеза СУ по заданным показателям качества является рациональный выбор вспомогательных элементов, параметров и структуры системы при известном динамическом описании объекта управления в целях обеспечения необходимых значений показателей качества. Этими показателями качества, например для линейных стационарных систем, являются запасы устойчивости по амплитуде и фазе, вид переходного процесса, точность СУ при заданных входных воздействиях и др.

Большое значение имеет теория оптимизации СУ. С ее помощью находится решение задачи синтеза такого закона управления, который оптимизирует процесс по тому или иному заданному критерию. Это может быть максимальное быстродействие при ограниченной мощности или ограниченном управляющем моменте или обеспечение наименьших затрат энергии на процесс управления при заданных условиях работы.

Решение первой проблемы (синтез по заданным показателям качества) достигается синтезом регуляторов, включающим рассмотрение вопросов определения его структуры и параметров, места включения, исходя из обеспечения требований к качеству процессов управления. Предметом изучения рассматриваемой проблемы является направление, формулируемое как методы научного проектирования систем с заданными показателями качества. Вторая проблема – проблема оптимизации – по существу является вариационной задачей, когда требуется получить экстремум функционала, который избран в качестве критерия оптимальности системы.

Тенденции развития методов синтеза систем автоматического управления можно представить в общем виде, представленном на рис. 1.

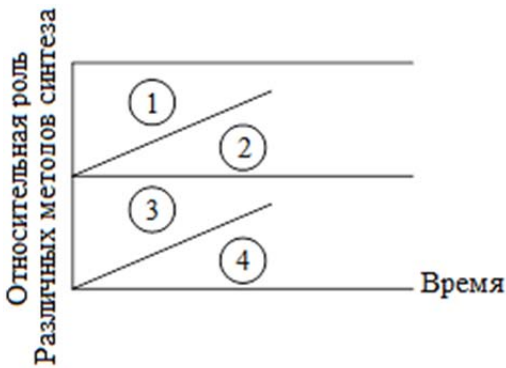

Рис. 1. Тенденции развития методов синтеза САУ:
1 – синтез алгоритмов (законов управления) на стадии проектирования системы; *2* – синтез управления в процессе функционирования системы; *3* – классическая теория автоматического регулирования (ТАР); *4* – современная теория автоматического управления (ТАУ)

При этом необходимо отметить, что деление на классические и современные методы довольно условно.

Классическая ТАР базируется в первую очередь на теории устойчивости и качестве процессов в системе объект – регулятор, рассматривая преимущественно линейные дифференциальные уравнения.

Определение понятия современной теории автоматического управления (СТАУ) различное и с течением времени меняется. Наиболее удовлетворительное определение СТАУ получается, если в основу положить требования научно-технического прогресса, современной и перспективной автоматизации.

4. Состав и процесс создания систем управления

Создание систем автоматического управления, особенно таких, которые проектируются впервые и которые включают элементы, в основу работы которых положены разные физические законы (ракета, радиолокационная станция (РЛС), электрические и пневматические устройства и др.) – процесс сложный, требующий обширных знаний в различных областях науки и большого опыта работы (творческих навыков).

Прежде чем переходить к задачам проектирования, рассмотрим типовую функциональную схему системы управления. Рассмотренные при изучении различные примеры СУ позволяют представить типовую функциональною схему (рис. 2).

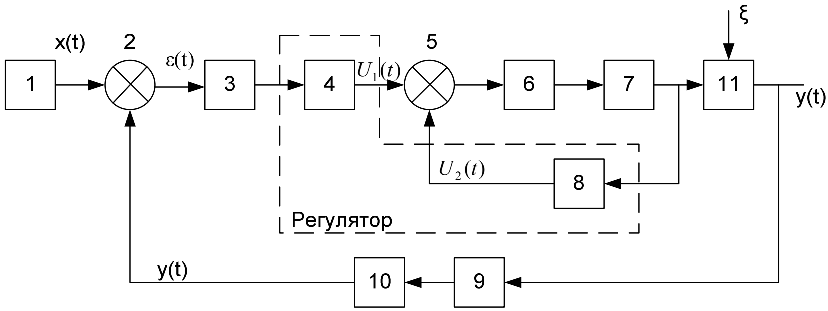

Рис. 2. Типовая функциональная схема САУ:
1 – задающее устройство; *2*, *5* – сравнивающие устройства; *3* – преобразующее устройство; *4*, *8* – корректирующие устройства (регулятор); *6* – усилительное устройство; *7* – исполнительное устройство; *9* – чувствительные или измерительные элементы; *10* – элемент главной обратной связи; *11* – объект управления; ξ(*t*) – помеха

Функциональное назначение каждого из элементов типовой схемы состоит в следующем.

Задающее устройство преобразует воздействие в сигнал $x(t)$, а сравнивающее устройство путем сравнения сигнала $x(t)$ и управляемой величины $y(t)$ (предполагается, что *9* и *10* не искажают сигнал) вырабатывает сигнал ошибки $\varepsilon(t)$. Иногда сравнивающее устройство называют датчиком ошибки, отклонения или рассогласования.

Преобразующее устройство *3* служит для преобразования одной физической величины в другую, более удобную для использования в процессе управления (во многих системах преобразующее устройство отсутствует).

Регулятор *4*, *8* служит для обеспечения заданных динамических свойств замкнутой системы. Например, с его помощью обеспечивается высокая точность работы в установившемся режиме, демпфируются колебания для сильно колебательных объектов (например, летательных аппаратов). Более того, введение в систему регулятора позволяет устранить незатухающие или возрастающие колебания управляемой величины. Иногда регуляторы вырабатывают управляющие сигналы (команды) в зависимости от возмущающих воздействий, что существенно повышает качество работы систем, увеличивая их точность.

Из схемы СУ видно, что в хорошо спроектированной системе ошибка $\varepsilon(t)$ должна быть мала. Вместе с тем на объект должны поступать достаточно мощные воздействия. Мощности же сигнала $\varepsilon(t)$ совершенно недостаточно для питания даже небольшого двигателя. В связи с этим важным элементом СУ является усилительное устройство, предназначенное для усиления мощности сигнала ошибки $\varepsilon(t)$. Усилитель управляет энергией, поступающей от постороннего источника. На практике широко используются электронные, магнитные, гидравлические, пневматические усилители.

Следующим важным элементом СУ является исполнительное устройство, предназначенное для воздействия на управляющий орган. В системах управления используются следующие типы исполнительных устройств: пневматические, гидравлические и электрические, подразделяемые, в свою очередь, на электромоторные и электромагнитные.

Пневматические исполнительные устройства имеют сравнительно малые габариты и массу, но требуют большого расхода сжатого газа.

Гидравлические исполнительные устройства практически безынерционные и способны преодолевать большие нагрузки. Недостаток – большая масса.

Электрические исполнительные устройства достаточно универсальны в применении и отличаются простотой канализации подводимой к ним энергии. Вместе с тем их использование требует наличия достаточно мощного источника тока. В некоторых СУ исполнительный механизм как таковой отсутствует и воздействие на объект осуществляется изменением состояния какой-либо величины (тока, напряжения) без помощи механических устройств.

Чувствительные или измерительные элементы (датчики) необходимы для преобразования управляемых переменных в сигналы управления (например, преобразования вида «угол – напряжение»).

Элемент, который подвергается управлению, называют объектом управления. При проектировании систем объектом управления считают всю неизменяемую часть системы (все элементы, кроме регулятора). Им может быть электрическая печь для закаливания металла, самолет, ракета, космический аппарат, двигатель, ядерный реактор, станок для обработки металла и т. д. В связи с большим разнообразием объектов управления разными могут быть и управляемые переменные: напряжение, число оборотов, угловое положение, курс, мощность и т. д. Изучением конструкций объектов занимаются специальные дисциплины: электротехника, авиация и космонавтика, самолетостроение, энергетика, ядерная техника, турбостроение, двигателестроение и т. д.

Из рассмотрения рис. 2 можно сделать вывод, что СУ представляет собой замкнутую систему, обладающую свойством однонаправленности и реагирующую на сигнал ошибки $\varepsilon(t)$. Можно заключить, что система включает функционально-необходимые элементы (неизменяемая часть системы), т. е. элементы, без которых принципиально невозможна работа СУ (объект управления, исполнительный элемент, усилитель, измерительное устройство), и изменяемую часть, которая вводится для придания системе желаемых свойств, обеспечивающих качество управления, определяемое техническим заданием (регулятор системы).

На первом этапе расчета и проектирования СУ ограничиваются качественным описанием систем и в связи с этим рассматривают их функциональные схемы. Такое описание называют содержательным или неформальным. Неформальным описанием СУ называется вся имеющаяся совокупность сведений о ней, достаточная для построения фактического алгоритма ее работы. Неформальное описание системы содержит информацию, достаточную для построения ее функциональной схемы. Последняя же служит основой для разработки формального (математического) описания системы.

Недостаток содержательного или неформального описания систем в том, что такой подход не оперирует количественными характеристиками. Таким образом, наука, в основе которой лежит неформальное описание, не является точной наукой. Для решения же задач исследования и проектирования систем необходимо оперировать количественными характеристиками, определяющими качество ее работы. В связи с этим центральным понятием теории систем является математическая модель или оператор системы.

5. Основные понятия моделей систем

Понятие модели системы играет важную роль в проведении системных исследований любой направленности. Модель – это искусственно создаваемый образ конкретного объекта, процесса или явления, в конечном счете, любой системы. Понятие модели связано с наличием какого-либо сходства между выбранными объектами, один из которых является оригиналом, а другой – его образом, выполняющим роль модели. Модели являются всегда упрощенным описанием системы. Модель – это отображение реальной системы (оригинала), имеющее определенное объективное соответствие ей и позволяющее прогнозировать и исследовать ее функциональные характеристики, т. е. характеристики, определяющие взаимодействие системы с внешней средой. При составлении модели отражают отдельные стороны функционирования системы, т. е. то специфичное, что направлено на решение поставленной целевой установки общей задачи системного анализа. Сходство двух объектов с точки зрения выполнения каких-либо функций, целей или задач позволяет утверждать, что между ними существует отношение оригинала и модели. В задачах системного исследования первоочередной интерес представляет сходство поведения модели и объекта, выраженное на каком-либо формальном языке и изучаемое путем преобразований соответствующих формул или высказываний.

Наиболее простой, грубой формой описания системы является представление ее в виде черного ящика, которое имеет следующие особенности. Во-первых, такое представление не раскрывает внутренней структуры, внутреннего устройства системы. Оно лишь выделяет систему из окружающей среды, подчеркивает ее целостное единство. Во-вторых, такое представление говорит также о том, что система хоть и является обособленной, выделенной из среды, но, тем не менее, она не является изолированной от нее. Действительно, планируемая цель предполагает, что в конечном итоге будут произведены изменения в системе, которые будут оказывать воздействия на внешнюю среду. Любая система работает на какого-либо внешнего потребителя. Иными словами, система связана со средой и с помощью этих связей воздействует на среду. Таким образом, можно заключить, что у системы есть выходы. Выходы системы отражают ее целевое предназначение. С другой стороны, система является средством, с помощью которого достигаются те или иные цели. Следовательно, должны существовать возможности воздействия на систему, управления системой. Эти связи направлены из среды в сторону системы. Такие воздействия называются входами системы. В результате такого представления получилась модель системы, которая называется черным ящиком (рис. 3).

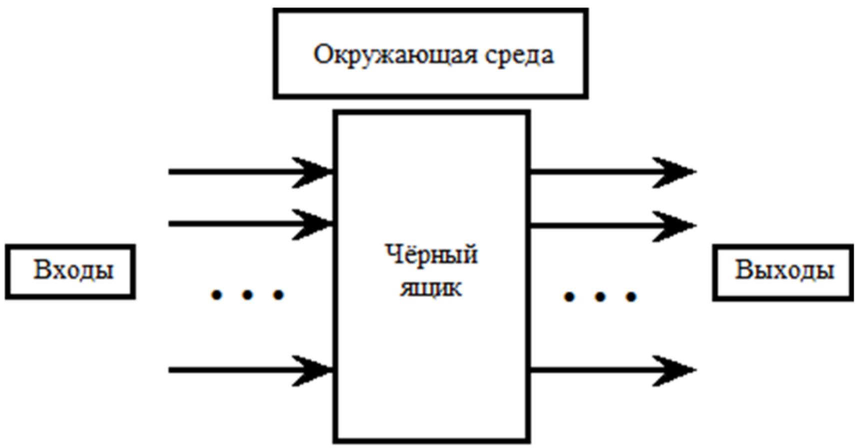

Рис. 3. Представление системы в виде черного ящика

Название модели черного ящика подчеркивает полное отсутствие сведений о внутреннем содержании модели. В данном представлении задаются только связи модели с внешней средой в виде входных и выходных воздействий. Такая модель, несмотря на внешнюю простоту, бывает полезной для решения определенного круга задач.

В модели черного ящика входы и выходы могут иметь качественное, словесное описание. Тогда и сама модель будет качественной. В реальных ситуациях для построения модели требуется количественное описание входов и выходов. В этом случае формируются множества входных X и выходных Y переменных (векторов).

В общем виде математическое описание исследуемой системы может быть выражено зависимостью

$$\{Y\}=\left[\{X\},\{Z\},\{V\}\right], \tag{1}$$

где $\{Y\}=\ (Y_1, Y_2,..., Y_l)$ – множество векторов выходных переменных системы.

В качестве выходных переменных, как правило, используются критерии, отражающие цели исследования. Под критерием понимают целевые функции, параметры оптимизации и т. д. В общем случае множество входных переменных подразделяют на три класса: $\{X\}=(X_1, X_2,..., X_n)$ – множество векторов входных контролируемых управляемых независимых переменных (факторов), действующих на процессы; $\{Z\}=(Z_1, Z_2,..., Z_k)$ – множество векторов входных контролируемых, но неуправляемых независимых переменных; $\{V\}=\ (V_1, V_2,..., V_m)$ – множество векторов неконтролируемых возмущающих воздействий; Ф – оператор системы, определяющий связь между указанными величинами. Отметим, что в модели черного ящика оператор системы, определяющий связь между указанными величинами, не исследуется.

Модель черного ящика является начальным этапом изучения сложных систем. На первых этапах проведения системных исследований необходимо задать, сформировать множество входных и выходных параметров системы. Задача формирования множества параметров применительно к рассмотрению сложных систем сама по себе является непростой задачей. Сложная система имеет множественные и разнообразные связи с внешней средой. Чтобы избежать ошибки на этом этапе, необходимо сформулировать одно правило, гласящее, что в модель следует отбирать только те входы и выходы, которые отражают целевое назначение модели. Дело в том, что реальная система взаимодействует с объектами окружающей среды неограниченным числом способов. Задача системного аналитика при построении модели состоит в том, чтобы из бесчисленного множества связей отобрать конечное их число для включения в список входов и выходов. Критерием отбора является существенность той или иной связи по отношению к цели, ради достижения которой строится модель.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий процедуру отбора входов и выходов для достаточно простой системы. Пусть требуется разработать модель черного ящика для калькулятора. Основное целевое предназначение калькулятора – производить расчеты согласно заданной программе. Для того чтобы формировать задание для расчетов, калькулятору необходимы кнопки, причем двух типов. С одной стороны, с помощью кнопок будут вводиться цифры, с другой стороны, с помощью кнопок будут задаваться операции. Для отображения результатов расчетов необходимо табло. С точки зрения выполнения калькулятором основных функций отмеченных входов и выходов оказывается достаточно. Добавим теперь к целям использования калькулятора возможность автономной работы. Это повлечет за собой требование обеспечения его батареями питания. Выдвинув цель, состоящую в том, что калькулятор должен быть удобным и транспортабельным, получим новые требования на вес и габариты устройства. Выдвинув в качестве цели удобство и наглядность чтения результатов с табло, получим требования на характеристики табло. Рассматривая условия эксплуатации калькулятора, можно добавить требования надежности работы и прочности корпуса. Далее можно еще расширить круг учитываемых требований и добавить соответственно несколько выходов, таких как эстетичный внешний вид, соответствие цены покупательной способности потребителя. Далее можно говорить о возможности работы с калькулятором в условиях плохой видимости, например, в темноте. Тогда следует рассмотреть необходимость подсветки циферблата, различение кнопок на ощупь и т. д. Данный ряд требований можно продолжать, рассматривая химические, физические, социальные, экономические аспекты. Таким образом, в зависимости от выдвигаемых целей и формулируемых требований, предъявляемых к калькулятору, будет различный набор входов и выходов данной системы.

Следовательно, можно сделать вывод о том, что построение модели черного ящика не является тривиальной задачей. Вопрос о том, сколько и какие именно входы и выходы необходимо включать в модель, не имеет простого и однозначного ответа. С одной стороны, выполнение только основной цели недостаточно, необходимо учитывать дополнительные цели. С другой стороны, встает вопрос, сколько дополнительных целей необходимо учитывать, где требуется остановиться. Критерия не существует. Здесь выбор полностью ложится на исследователя и зависит от его опыта.

В том случае, когда системного аналитика интересуют вопросы внутреннего устройства системы, модели черного ящика оказывается недостаточно. Для решения данного вопроса необходимо разрабатывать более детальные, более развитые модели. Одной из разновидностей таких моделей, раскрывающей внутреннее содержание системы, является модель состава системы.

Свойства системы, отображенные в модели черного ящика, целостность и обособленность, являются внешними свойствами. Внутреннее содержание системы в модели черного ящика не рассматривается. Но именно внутреннее содержание ящика оказывается неоднородным. Как было отмечено ранее, в структуре системы можно выделить различные элементы, подсистемы, компоненты системы, причем обозначенные понятия условны. В зависимости от цели, для решения которой строится модель, один и тот же объект может быть определен и в качестве элемента, и в качестве подсистемы.

Рассмотрим пример, поясняющий данную мысль. Перед системным аналитиком сформулирована цель: проведение расчета характеристик надежности некоторой системы. Предположим, что систему можно разбить на подсистемы, подсистемы на блоки, а блоки, в свою очередь, на элементы.

Проанализируем систему управления и защиты энергоблока атомной станции. В данной системе был выделен ряд подсистем: автоматического регулирования, ручного регулирования, аварийной защиты, аварийной и предупредительной сигнализации и т. д. В структуре каждой подсистемы можно выделить блоки: блок питания, датчик (счетчик нейтронов), устройство отображения информации, вторичные приборы, исполнительные механизмы и т. д. В свою очередь, в каждом из блоков выделяют: электронные (транзисторы, диоды, конденсаторы, сопротивления), электромеханические (реле, лентопротяжные механизмы) элементы, кабели, тросы и др. Задача аналитика состоит в выработке решения, на каком уровне разбиения объектов необходимо остановиться. Здесь требуется вернуться к цели и наметить пути ее достижения.

К реализации сформулированной цели можно подойти с разных позиций. Рассмотрим первый возможный подход. Система, для которой проводится анализ надежности, длительное время находилась в эксплуатации; имеется представительная статистика поведения объектов системы в процессе ее функционирования. В результате анализа надежности ставится задача максимально использовать опыт эксплуатации, так как именно в процессе эксплуатации реализуются свойства системы, и поэтому результаты расчета, полученные на основании статистической информации, наиболее реально отражают объективные закономерности. При анализе эксплуатационной информации выяснилось, что в службах предприятия на каждый блок имеются паспорта, в которых отмечается вся история поведения блока. Таким образом, делается вывод о том, что в процессе обработки информации можно получить характеристики надежности блоков и далее, используя эту информацию в качестве исходной, проводить дальнейшие расчеты надежности системы. Следовательно, при построении модели структуры системы в качестве первичного элемента достаточно ограничиться блоками, для которых рассчитывается исходная информация.

Другой возможный случай. Система, для которой проводится анализ надежности, в эксплуатации не находилась. В качестве исходной информации для проведения расчетов имеется справочная информация об интенсивностях отказов элементов типа транзисторов, диодов, конденсаторов, сопротивлений, реле, лентопротяжных механизмов и т. д. В этом случае делается вывод о том, что при составлении модели структуры системы необходимо проводить декомпозицию каждого блока на составляющие элементы. Полученная таким образом модель будет более детальной.

Таким образом, в зависимости от цели исследования, постановки задачи по достижению данной цели и исходной информации, имеющейся для решения задачи, одну и ту же систему следует представлять в виде различных частей, различных иерархий. Далее следует отметить, что условным является также разбиение на подсистемы. В той же системе управления и защиты одни и те же элементы, в зависимости от решаемой задачи, могут быть отнесены к разным подсистемам, т. е. границы между подсистемами условны. Проиллюстрируем это примером. В системе имеется группа стержней автоматического регулирования, которые в штатной ситуации осуществляют регулирование мощности энергоустановки. Следовательно, для нормального режима эксплуатации эти стержни следует отнести к подсистеме автоматического регулирования. Однако регламент работы предусматривает, что в случае возникновения аварийной ситуации данные стержни принимают участие в глушении реакторной установки, в переводе ее функционирования на подкритический уровень. Таким образом, при рассмотрении аварийных режимов стержни автоматического регулирования следует рассматривать как элементы подсистемы аварийной защиты.

И еще одна особенность, которую необходимо рассматривать при составлении модели состава системы, – неоднозначность границ между системой и окружающей средой. При работе системы управления и защиты для ее нормального штатного функционирования необходимо задать соответствующие программы: какой уровень мощности считать номинальным, какие отклонения от данного уровня являются допустимыми, а какие требуют вмешательства системы, на какие ситуации следует реагировать как на аварийные и осуществлять при этом глушение реакторной установки. Данные программы формируются внешними по отношению к технической системе органами. Включать их в состав системы или нет также зависит от цели, для решения которой строится модель состава системы.

Подводя итог, можно отметить, что границы между системой и внешней средой определяются целями построения модели и не имеют абсолютного характера. Таким образом, модель состава ограничивается снизу теми объектами, которые приняты в качестве элементов, а сверху – границей системы, определяемой целями анализа.

Следующий тип модели, который еще глубже характеризует внутреннюю композицию системы, называется моделью структуры системы. Модели данного типа наряду с характеристикой состава системы отражают взаимосвязи между объектами системы: элементами, частями, компонентами и подсистемами. Таким образом, модель структуры системы является дальнейшим развитием модели состава. Для того чтобы отразить композицию системы, недостаточно перечислить ее состав; необходимо установить между элементами определенные связи, отношения.

При рассмотрении модели структуры системы приходится сталкиваться с аналогичными особенностями, о которых уже частично шла речь ранее, а именно, анализируя реальные системы, можно констатировать, что между объектами, входящими в состав системы, имеется большое количество отношений. Отношения между элементами могут быть самыми разнообразными. Однако можно попытаться их классифицировать и по возможности перечислить. Трудность состоит в том, что заранее неизвестно, какие отношения реально существуют, и является ли их число конечным. Задача аналитика заключается в следующем: из множества реально существующих отношений между объектами, вовлеченными в систему, отобрать наиболее существенные. Критерием существенности отношений должна выступать опять же цель, для достижения которой строится модель. Таким образом, модель структуры является очередным шагом в развитии модели систем, описывающей существенные связи между элементами.

Развивая модели описания системы от модели черного ящика до модели структуры, приходим к описанию системы в виде структурной схемы. Структурная схема отражает, как правило, статическое состояние системы. В ней указываются все существенные с точки зрения выполнения поставленной цели элементы системы, все связи между элементами внутри системы и связи с окружающей средой – то, что названо входами и выходами. Для изображения структурной схемы абстрагируются от содержательной стороны схемы, оставив в рассматриваемой модели только общее для каждой схемы. В результате получается модель, в которой отмечено только наличие элементов и связей между ними. Для такого представления используют изображение в виде графа. На графе элементы отображаются в виде вершин, связи между элементами – в виде дуг. Если связи в схеме направленные, они изображаются стрелками, и тогда граф будет направленным или ориентированным. Если направление связей не обозначается, граф называется неориентированным. Для изображения и преобразования структур разработана специальная математическая дисциплина – теория графов, задачи которой связаны с различными преобразованиями графов, с рассмотрением различных отношений на графах. Отношения могут быть отражены в виде весовых характеристик, рангов, вероятностных характеристик и т. п.

Таким образом, еще раз отметим, что структурная схема системы является наиболее подробной моделью, отражающей статическое состояние системы. Однако для решения задач системного анализа статические структуры имеют важное, но, как правило, вспомогательное значение. Большинство задач системного анализа связано с изучением либо характеристик системы, либо с прогнозированием развития системы во времени, либо с анализом возможных траекторий развития и т. п.

Цели большинства задач системного анализа связаны с изучением динамики системы – ее динамического поведения. В этом случае появляется необходимость построения новых моделей – динамических.

Динамические модели отражают поведение систем, описывают происходящие с течением времени изменения, последовательность операций, действий, причинно-следственные связи. Системы, в которых происходят какие бы то ни было изменения со временем, называются динамическими, а модели, отображающие эти изменения, – динамическими моделями систем.

Говоря о динамике систем, следует остановиться на двух типах динамических процессов: функционирование и развитие. Под функционированием понимают процессы, которые происходят в системе, стабильно реализующей фиксированную цель. Развитием называют изменения, происходящие с системой при смене ее целей. Характерной чертой развития является то обстоятельство, что изменение цели, как правило, с неизбежностью приводит к изменению всей системы. Это касается либо изменения структуры, либо изменения состава системы, иногда приходится проводить коренную перестройку системы. Таким образом, при построении динамических моделей на первом шаге анализируют тип отображаемого изменения системы, который хотят описать. Далее приступают к анализу происходящих изменений с целью более конкретного отображения динамики анализируемых процессов. На этом этапе вычленяют части, этапы происходящего процесса, рассматривают их взаимосвязь.

Заключительный этап построения динамической модели системы состоит в более глубокой формализации процессов, иными словами, в построении математического описания анализируемых процессов.

При построении модели черного ящика был записан функционал, отображающий зависимость выхода системы от ее входов, в виде:

$$\{Y\} = \Phi\left[\{X\},\{Z\},\{V\}\right]. \qquad (2)$$

Было отмечено, что в модели черного ящика характер зависимости или вид функционала не исследуется. Решение этого вопроса является задачей настоящего этапа.

Для построения математической модели динамического поведения системы вводится понятие состояния системы. Состояние системы есть некоторая внутренняя характеристика системы, значение которой в настоящий момент времени определяет значение выходной величины. Состояние можно рассматривать как некий информационный объект, необходимый для предсказания влияния настоящего на будущее. Состояние есть множество Z. Конкретизируя множества X, Y и Z, а также отображения множества входов и состояний на множество выходов, можно перейти к моделям различных систем. Если ввести время как зависимую переменную, то получим два разных типа систем: дискретные и непрерывные. Примерами дискретных систем являются цифровые устройства: измерительные, вычислительные, управляющие. Примерами непрерывных систем являются производственные системы, аналоговые вычислительные машины и другие, т. е. объекты, в которых не проводится дискретизация времени.

В зависимости от вида оператора отображения Ф различают линейные и нелинейные системы. Выделяют также класс стационарных систем, т. е. систем, свойства которых со временем не изменяются.

И наконец, говоря о динамических моделях, следует остановиться на подчиненности реальных систем принципу причинности. Согласно этому принципу, отклик системы на некоторое воздействие не может начаться раньше самого воздействия. Строя математическую модель системы, необходимо следовать сформулированному принципу. Дело в том, что в практике построения моделей встречаются ситуации, когда данный принцип игнорируется. В этом случае возникает ситуация, когда теоретические модели не могут быть реализованы на практике. Задача, стоящая перед исследователями при построении динамических моделей, – выяснение условий физической реализуемости теоретических моделей. Для обеспечения физической реализуемости требуется проводить тщательный анализ конкретных ограничений, которые приходится накладывать на модель.

Моделирование можно рассматривать как замещение исследуемого объекта (оригинала) его условным образом, описанием или другим объектом, именуемым моделью и обеспечивающим адекватное с оригиналом поведение в рамках некоторых допущений и приемлемых погрешностей. Моделирование обычно выполняется с целью познания свойств оригинала путем исследования его модели, а не самого объекта. Разумеется, моделирование оправдано в том случае, когда оно проще создания самого оригинала или когда последний по каким-то причинам лучше вообще не создавать.

Исключительно велика роль моделирования в ядерной физике и энергетике. Достаточно сказать, что замена натурных ядерных испытаний моделированием не только экономит огромные средства, но и благоприятно сказывается на экологии планеты. А такое явление, как «ядерная зима», вообще может исследоваться только на моделях, поскольку произойди оно на самом деле, это означало бы уничтожение жизни на Земле. Запрет на испытания ядерного оружия стал возможен также благодаря самым изысканным средствам моделирования ядерных и термоядерных процессов. Трудно переоценить роль моделирования в космонавтике и авиации, в предсказании погоды, в разведке природных ресурсов и т. д.

Однако не только такие показательные примеры демонстрируют роль математического (и компьютерного) моделирования. На самом деле моделирование даже самых простых и широко распространенных устройств, например работы сливного бачка в туалете или электрического утюга, ведет к огромной экономии средств и улучшению качества массовых изделий. Чем сложнее проектируемый объект, тем, как правило, важнее роль моделирования в его изучении и создании. Самое широкое применение моделирование находит в механике и физике, электротехнике, радиотехнике и электронике, в технике обработки сигналов и коммуникаций. В свою очередь, успехи в этом направлении способствуют созданию аппаратных и программных средств математического моделирования.

Трудно переоценить роль моделирования в образовании, где нередко реальные дорогие лабораторные работы приходится заменять компьютерным моделированием. Но, пожалуй, главное заключается в том, что математическое моделирование позволяет понять физическую и математическую сущности моделируемых явлений и обосновать оптимальные подходы к проектированию самых различных изделий.

Реальная польза от моделирования может быть получена при выполнении двух главных условий:

– модель должна быть адекватной оригиналу в том смысле, что должна с достаточной точностью отображать интересующие исследователя характеристики оригинала;

– модель должна устранять проблемы, связанные с физическим измерением каких-то сигналов или характеристик оригинала.

6. Математические модели систем управления

Под математической моделью СУ понимают количественную формализацию абстрактных представлений об изучаемой системе. Математическая модель – это формальное описание системы с помощью математических средств, дифференциальных, интегральных, разностных, алгебраических уравнений, а также неравенств, множеств и т. д.

Пользуясь понятием системного оператора, можно на единой основе рассмотреть понятие математической модели СУ.

Пусть X и Y – множества входных и выходных сигналов СУ. Если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие определенный элемент $y \in Y$, то говорят, что задан системный оператор A.

Связь между входом и выходом системы задается посредством системного оператора A:

$$Ax = y \text{ и } x = A^{-1}y = A_{\text{c}}y. \tag{3}$$

Операторное уравнение (или уравнение с оператором A) $Ax = y$ следует считать математической моделью СУ, поскольку оно устанавливает количественную связь между входом $x(t)$ и выходом $y(t)$ системы.

Принципиально важным является ответ на вопрос: как построить оператор системы и, таким образом, определить ее математическую модель. Ответ на поставленный вопрос состоит в следующем: математические модели могут быть представлены разными математическими средствами, но важнейшую роль играют дифференциальные и интегральные уравнения, которые получаются на основании фундаментальных физических законов, лежащих в основе функционирования механических, электрических, гидравлических, термодинамических систем.

Для получения дифференциального уравнения системы в целом обычно составляют описание ее отдельных элементов, т. е. составляют дифференциальные уравнения для каждого входящего в систему элемента (например, для СУ (рис. 2) составляются дифференциальные уравнения усилителя, привода, реостата, электрической печи, термопары и элемента сравнения).

Совокупность всех уравнений элементов и дает уравнение системы в целом.

Уравнения системы определяют ее математическую модель, которая для одной и той же системы в зависимости от цели исследования может быть разной.

Полезно при решении одной и той же задачи на разных этапах строить разные математические модели: начинать проектирование можно с простой модели, а затем ее постепенно усложнять, чтобы учесть дополнительные физические явления и связи, которые на начальном этапе не были учтены, т. к. считались несущественными.

В зависимости от того, какими классами дифференциальных уравнений описываются СУ, их можно укрупненно классифицировать так, как показано на рис. 4.

Линейными называют класс систем, описываемый линейными операторными уравнениями (например, линейными дифференциальными уравнениями или их системами), в противном случае система входит в класс нелинейных систем.

Линейными или нелинейными дискретными системами называются такие системы, которые описываются соответственно линейными или нелинейными разностными уравнениями или системами разностных уравнений.

Линейными или нелинейными стационарными системами называются системы, которые описываются дифференциальными уравнениями или системами уравнений с постоянными коэффициентами.

Нестационарными системами (линейными или нелинейными) называют системы автоматического управления, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями или системами уравнений с переменными коэффициентами.

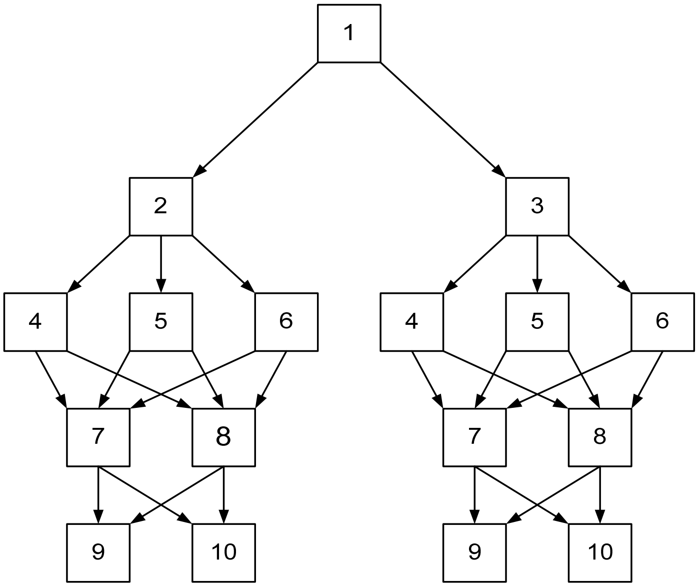

Рис. 4. Классификация СУ:
1 – САУ; *2* – линейные САУ; *3* – нелинейные САУ; *4* – непрерывные; *5* – дискретные; *6* – непрерывно-дискретные; *7* – стационарные; *8* – нестационарные; *9* – системы с сосредоточенными параметрами (сосредоточенные системы); *10* – системы с распределенными параметрами

Сосредоточенными, или системами с сосредоточенными параметрами, называются системы, поведение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Распределенные системы – это системы, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

Уже по приведенной классификации можно судить о степени сложности задачи проектирования САУ.

Рассмотрим наиболее распространенные формы математических моделей, процессов и систем:

1) детерминированная система, описываемая векторным дифференциальным уравнением в форме Коши:

$$\dot{X}(t) = f(X, U, t), \qquad X(t_0) = X_0, \tag{4}$$

где f – векторная функция;

X – вектор фазовых координат;

U – вектор управления;

t – время;

2) детерминированная непрерывная система с линейно входящими управлениями:

$$\dot{X}(t) = f(X, t) + \Phi(X, t) \cdot U, \qquad X(t_0) = X_0, \tag{5}$$

где Φ – матричная функция;

3) детерминированная линейная непрерывная управляемая система:

– нестационарная:

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x + B(t) \cdot u(t); \tag{6}$$

– стационарная:

$$\dot{x} = Ax + Bu; \tag{7}$$

4) стохастическая управляемая система, описанная уравнением в форме Ито:

$$dx = f(x, u, t) \cdot dt + g(x,t) \cdot d\omega(t), \tag{8}$$

где $\omega(t)$ – винеровский случайный процесс;

$g(t)$ – матричная функция;

5) стохастическая управляемая система, описываемая уравнением в форме Ланжевена:

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) + g(x, t) \cdot \xi(t), \qquad X(t_0) = X_0, \tag{9}$$

где $\xi(t)$ – белый шум;

6) стохастическая управляемая система, описанная уравнением в форме Ланжевена с аддитивным белым шумом:

$$\dot{x} = f(x, u, t) + \xi(t); \tag{10}$$

7) линейная стохастическая управляемая система в форме Ланжевена:

$$\dot{x} = A(t)\cdot x + B(t)\cdot u + c(t)\cdot \xi(t), \tag{11}$$

где A, B, c – матрицы коэффициентов;

8) уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) для безусловной плотности вероятности в пространстве состояний непрерывной стохастической системы:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -\operatorname{div}\pi(x,t), \tag{12}$$

где $\operatorname{div}\pi(x,t) = \Delta_X^t \cdot \pi(x,t)$, $\pi(x,t)$ – вектор плотности потока вероятности.

$$\pi(x,t) = A(x,t)\cdot f(x,t) - \frac{1}{2}[\Delta_x^t (B^t(x,t)\cdot f(x,t))]^t, \tag{13}$$

где $A(x,t), B(x,t)$ – вектор сноса и матрица диффузии векторного процесса $x(t)$, соответственно.

$$\Delta_x^t = \left[\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right], \tag{14}$$

где $\omega(x,t)$ – плотность вероятности распространения фазовых координат системы;

$\pi(x,t)$ – плотность потока вероятности;

9) уравнение Стратоновича-Кушнера для апостериорной плотности вероятности в пространстве состояний наблюдаемой стохастической системы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\hat{\omega}(x,t)}{\partial t} &= -\operatorname{div}\hat{\pi}(x,t) - \frac{1}{2}[\rho(x,z,t) - \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,z,t)\cdot\hat{\omega}(x,t)dx]\cdot\hat{\omega}(x,t), \end{aligned} \tag{15}$$

где $\hat{\omega}$ – апостериорная плотность вероятности.

$$\rho(x,z,t) = [z(t) - c(x,t)]^t \cdot Q^{-1}(t) \cdot [z(t) - c(x,t)], \qquad (16)$$

где $\rho(...)$ – функция невязки.

Имеется вектор наблюдения (измерения) для процесса $x(t)$:

$$z(t) = c(x,t) + \eta(t), \qquad (17)$$

где z – измерение;

$\eta(t)$ – белый шум интенсивности $Q(t)$;

10) детерминированная управляемая нелинейная система с дискретным временем.

Разностная схема Эйлера:

$$x(k+1) = x(k) + \tau \cdot f(x(k), u(k), k) \qquad (18)$$

или

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \qquad (19)$$

где τ – время дискретизации, $\tau = t_{k+1} - t_k$;

11) стохастическая нелинейная управляемая система с дискретным временем:

$$x(u+1) = f(x(k), u(k), \xi(k), k), \qquad (20)$$

где $\xi(k)$ – дискретный белый шум;

12) детерминированная линейная управляемая система с дискретным временем:

$$x(k+1) = A(k) \cdot x(k) + B(k) \cdot u(k); \qquad (21)$$

13) стохастическая линейная управляемая система с дискретным временем:

$$x(k+1) = A(k) \cdot x(k) + B(k) \cdot u(k) + \xi(k). \qquad (22)$$

Кроме дифференциальных уравнений для описания систем используют:

– структурные схемы;

– операторы;

– передаточные функции;

– частотные характеристики;

– различные физические законы.

Пространство состояний расширяется введением формирующих фильтров. Формирующий фильтр – математическая зависимость, описывающая случайный процесс входной переменной, которой является белый шум единичной интенсивности.

Для описания моделей используются элементы дискретной математики (теория графов) и т. д.

На рис. 5 изображено звено САУ, имеющее один входной X и один выходной Y сигналы, являющиеся скалярными величинами (X, $Y \in R$, где R – множество действительных или комплексных чисел). В дальнейшем будем интерпретировать все сигналы в системе как функции текущего времени t, т. е. $X(t)$, $Y(t)$, где $t \in [0, \infty]$.

Рис. 5. Звено САУ

Получение уравнений, описывающих поведение отдельных звеньев в каждом конкретном случае, является задачей той или иной отрасли науки, например, электротехники, электроники, механики и других, и не является предметом рассмотрения данного пособия. Поэтому будем полагать, что звено, представленное на рис. 5, в общем случае описывается дифференциальным уравнением следующего вида:

$$a_0 Y + S^n + \ldots + a^n \cdot Y = b_0 X \cdot S^m + \ldots + b^m \cdot X, \qquad (23)$$

где $x^i = \dfrac{d^i \cdot x(t)}{dt(i)}$;

$a_i, b_i = \text{const}$;

$W(S) = \dfrac{Y(S)}{X(S)}$.

Коэффициенты a_i, b_i зависят от конструктивных параметров и, возможно, от режима работы звена. Порядок n дифференциального уравнения (23) будет определять также и соответствующий порядок звена. На практике звенья описываются дифференциальными уравнениями низкого порядка, обычно n меньше либо равен двум.

Для полного математического описания процессов в звене следует задавать начальные условия $Y(0), Y^1(0), ..., Y^{(n-1)}(0)$, которые чаще всего будем полагать нулевыми.

7. Линеаризация уравнений систем управления

Реальные устройства СУ обычно являются нелинейными, однако при определенных условиях их можно заменить линейными моделями, что значительно упрощает исследование СУ. Операция замены нелинейных уравнений линейными носит название линеаризации. Существуют различные способы линеаризации уравнений динамики. Наиболее распространенным является способ, базирующийся на разложении нелинейных функций в ряд Тейлора. Пусть звено СУ описывается нелинейным дифференциальным уравнением:

$$\dot{Y} = f(X, Y), \tag{24}$$

где X – входной, а Y – выходной сигналы.

Рассмотрим установившийся режим работы звена, когда на входе действует постоянный сигнал $X^* = \text{const}$. Тогда существует постоянное значение выходного сигнала $Y^* = \text{const}$, которое можно найти из уравнения (24), полагая, что $X = \text{const}$, $Y = \text{const}$ (очевидно $Y = 0$). Связь установившихся значений сигналов X и Y будет задаваться уравнением установившегося режима:

$$f(X, Y) = 0, \tag{25}$$

из которого при заданном X^*, можно найти величину Y^*.

Введем отклонения от установившегося режима $\Delta Y = Y - Y^*$, $\Delta X = X - X^*$ и разложим функция f из (24) в ряд Тейлора относительно координат X^*, Y^*:

$$Y = f(X^*, Y^*) + a_1(Y - Y^*) + b_1(X - X^*) + \\ + \frac{a_2}{2!}(Y - Y^*) + \frac{b_2}{2!}(X - X^*) + \ldots \qquad (26)$$

или

$$\Delta Y = 0 + \Delta Y + AX, \qquad (27)$$

при $\frac{a_2}{2!}(Y - Y^*) + \frac{b_2}{2!}(X - X^*) \to 0,$

где $a_1 = \frac{\mathrm{d}f(.)}{\mathrm{d}Y} \int_{Y = Y^*}^{X = X^*}$, $b_1 = \frac{\mathrm{d}f(.)}{\mathrm{d}X} \int_{Y = Y^*}^{X = X^*}$ и т. д.

Графическое представление будет иметь следующий вид (рис. 6):

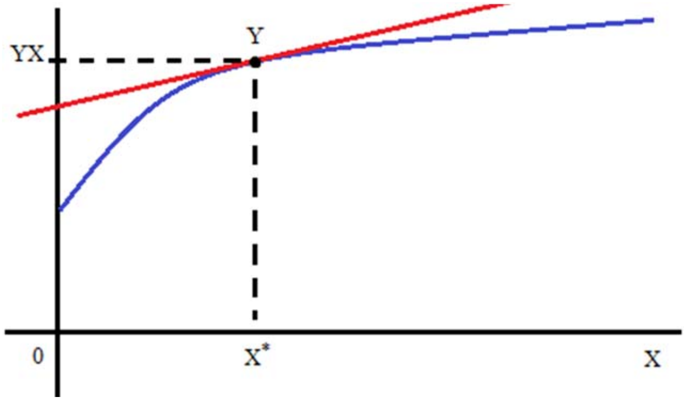

Рис. 6. Графическое представление разложения в ряд Тейлора

Учитывая, что $f(X^*, Y^*) = 0$, $\Delta Y = Y$, и ограничиваясь в ряде Тейлора только линейным членом, получим:

$$\Delta Y^* = a_1 \Delta Y + b_1 \Delta X. \qquad (28)$$

Уравнение (28) является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами и носит название линеаризованного уравнения.

Основной характеристикой звена СУ является его дифференциальное уравнение. Однако наряду с ним в теории управления нашли применение и другие характеристики. Важнейшей из них является передаточная функция, получаемая на основе применения преобразования Лапласа к исходному дифференциальному уравнению звена. Прямое и обратное преобразования Лапласа определяются следующими выражениями:

$$Y(s) = L\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st}\mathrm{d}t;$$
$$y(t) = L^{-1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s)e^{st}\mathrm{d}s, \quad (29)$$

где $y(t)$ – оригинал;

$Y(t)$ – изображение функции $y(t)$;

s – комплексная переменная;

$c = Res$;

L и L^{-1} – символы прямого и обратного преобразований Лапласа.

Если в дифференциальном уравнении звена (23) предположить, что $Y(0) = Y^{(1)}(0) = ... = Y^{n-1}(0) = 0;\ X(0) = X^{(1)}0 = ... = X^{(m-1)}(0) = 0,$ то после применения прямого преобразования Лапласа получим алгебраическое уравнение относительно изображений:

$$a_0 s^n Y(x) + a_1 s^{n-1} Y(s) + ... + a_n Y(s) = b_0 s^m X(s) + a_0 Y^n + ... =$$
$$= b_0 X^m(t) + ... + b_1 s^{m-1} X(s) + ... + b_m X(s),$$

где

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n} = \frac{Y(s)}{X(s)}. \quad (30)$$

Передаточная функция звена $W(s)$ есть отношение изображения выходного сигнала к изображению входного сигнала при нулевых условиях.

Частотные характеристики звеньев определяют динамические свойства звеньев при воздействии на них гармонических сигналов.

8. Основные свойства систем управления

Наблюдаемость. Составной частью управления является измерение (наблюдение). Связь управления с информацией, получаемой посредством измерения, лежит в основе понятия наблюдаемости.

В теории детерминированных динамических систем понятие наблюдаемости впервые было введено Р. Е. Калманом.

С физической точки зрения система называется наблюдаемой, если по измерениям части или всех ее координат или переменных, связанных с координатами, можно за конечное время определить полностью ее состояние.

Наблюдаемость системы тесно связана с основными свойствами системы. Для линейных систем свойства системы полностью характеризуются матрицей ее коэффициентов, для которой сформулированы необходимые и достаточные условия наблюдаемости.

Аналогичное понятие стохастической наблюдаемости существует и для стохастических систем и процессов. Оно связано с асимптотическим поведением апостериорных распределений вероятностей или корреляционных матриц оценок.

Стохастическая наблюдаемость системы гарантирует сходимость по вероятности к нулю или конечному значению ошибки оценки вектора состояния (процесса) по мере увеличения числа наблюдений для дискретных или времени наблюдения для непрерывных процессов.

Задача наблюдаемости может быть представлена в следующем виде.

Уравнение процесса:

$$\dot{x} = f(x, u, t). \tag{31}$$

Уравнение наблюдения:

$$z = h(x, u, t). \tag{32}$$

Идентифицируемость. В абстрактно-теоретическом рассмотрении понятие идентифицируемости является частным случаем наблюдаемости. Однако в практическом применении идентифицируемость выделяют в специальную категорию.

Параметрическая идентифицируемость представляет собой возможность определения параметров (A) математической модели системы или процесса по результатам измерения определенных выходных величин в течение некоторого интервала времени.

При изучении идентифицируемости так же, как наблюдаемости, целесообразно, по крайней мере на первом этапе, рассматривать идеальные условия, когда шумы отсутствуют, а идентифицируемые параметры постоянны.

В соответствии с этим для задачи параметрической идентифицируемости непрерывного процесса уравнение записывается в виде:

$$\dot{x} = f(x, u, a, t), \dot{a} = 0, \; z = h(x, u, a, t). \tag{33}$$

В рамках этой постановки задачи возможны различные варианты и различные условия идентифицируемости.

В некоторых задачах рассматривается непараметрическая идентификация – определение оператора, связывающего выходные сигналы (параметры) со входными.

Динамическая непараметрическая идентификация к объектам (процессам), близким к линейным, ограниченной размерности – это применение методов частотных и временных характеристик взаимных корреляционных функций.

Управляемость. Понятие управляемости связано с переводом (переходом) системы посредством управления из одного состояния в другое и состоит в возможности или невозможности этого перевода за ограниченное время.

Этому понятию придается либо структурно-качественный, либо количественный смысл.

При рассмотрении структурно-качественной стороны управляемости интересуются принципиальной возможностью перехода управляемой системы из одного заданного множества состояний в другое заданное множество состояний, как правило, за конечное время.

При количественном изучении управляемости рассматривают те или иные характеристики переходных процессов при простейших типовых управляющих воздействиях.

Управляемость обычно рассматривают применительно к детерминированным процессам, хотя возможно построение стохастических аналогов задач управляемости.

Можно рассматривать управляемость как динамических объектов, не оснащенных регуляторами, так и систем, содержащих множество замкнутых контуров управления.

В любом случае управляемость зависит от структуры системы, состава органов управления, значений параметров, располагаемой энергии управления.

Свойства управляемости впервые были сформулированы Р. Е. Калманом:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \;\; x(t_0) = 0, \;\; x(t_k) = x_k, \;\; Y(x, u) = \max(\min). \tag{34}$$

Адаптируемость. К понятию адаптируемости регулятора для заданного нестационарного динамического объекта, управляемого при помощи адаптивного регулятора, относится понятие достижимости нелинейной управляемой системой некоторой точки в пространстве состояний.

Свойство адаптируемости в общем случае зависит не только от свойств объекта управления и датчиков, но и от структуры и параметров самого регулятора.

В зависимости от математической формализации достижения цели управления СУ бывают:

– полностью адаптируемые;

– слабо адаптируемые;

– частично адаптируемые.

9. Постановка задачи синтеза системы управления

Задача синтеза СУ решается для заданного критерия оптимальности (критерия качества). Критерий качества – математическое выражение, по которому оценивают качество системы. Критерий оптимальности системы должен быть задан, исходя из смысла решаемой задачи.

Управление системой осуществляется для достижения ряда поставленных целей, которые часто можно записать в терминах минимизации некоторых функционалов или целевых функций, зависящих от траектории движения системы и управления.

Функционалы и функции, выражающие цель управления и ограничения, именуются также критериями оптимизации.

Назначение минимизируемого функционала, критериев оптимизации для каждого этапа и эксплуатационного режима системы является самой важной частью задачи оптимизации. Эта задача не может целиком решаться формализованными методами, достигается это творческой деятельностью проектировщика (на стадии проектирования) и человека-оператора (при выборе и задании функционала для очередного этапа функционирования системы).

Для детерминированных систем в зависимости от способа задания минимизируемого функционала (критерия качества) принято различать задачи Лагранжа, Майера и Больца.

В задаче Лагранжа критерий качества:

$$Y_0 = \int_{t_0=t_1}^{t_k=t_z} F_0(x(t), u, t)\mathrm{d}t, \tag{35}$$

где F_0 – заданная оптимальная скалярная функция;

t_0, t_k – время начала и окончания движения (оптимизации). t_k, t_0 – время начала и конца работы системы (оптимизации).

Момент t_k может быть либо заранее задан, либо определяется конкретной траекторией движения. В последнем случае t_k можно рассматривать как дополнительный параметр оптимизации.

В задаче Майера критерий качества J_0 зависит от траектории системы только в момент t_k окончания движения:

$$J_0 = \varphi_0(x(t_k), t_k). \tag{36}$$

В задаче Больца требуется минимизировать функционал J_0 смешанного типа:

$$J_0 = \varphi_0(x(t_k), t_k) + \int_{t_0}^{t_k} F_0(x(t), u, t)\mathrm{d}t. \tag{37}$$

Необходимо отметить, что приведенное деление задач управления по виду минимизируемого функционала весьма условно. Так, задача Больца (а тем самым, конечно, и задача Лагранжа) легко сводится к задаче Майера. Для этого введем еще одну скалярную переменную $x_{n+1}(t)$, определяемую соотношением:

$$\dot{x}_{n+1}(t) = F_0(x(t), u, t), \;\; t \geq t_0, \;\; x_{n+1}(t_0) = 0. \tag{38}$$

Из этого следует:

$$x_{n+1}(t_k) = \int_{t_0}^{t_k} F_0(x(t), u, t)\mathrm{d}t. \tag{39}$$

Поэтому функционал (37) можно записать в форме (36) следующим образом:

$$J_0 = x_{n+1}(t_k) + \varphi_0(x(t_k), t_k). \tag{40}$$

Таким образом, для объекта управления вида:

$$\dot{x} = f(x(t), u, t), \;\; \dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{41}$$

С учетом (38) получена задача Майера с критерием качества (40), эквивалентная задаче Больца.

Аналогично в случае дифференцируемости функций $\varphi_0(x, t)$ задачу Майера можно свести к задаче Лагранжа. Если в функционале Лагранжа (36) $F_0(x(t), u, t) = 1$, то задача, состоящая в минимизации времени управления, называется задачей быстродействия. В общем случае минимизируемый функционал можно задавать в форме Больца:

$$J_0 = \varphi_0(x, t_k) + \int_{t_1}^{t_2} F_0(x, u, t)\mathrm{d}t. \qquad (42)$$

Здесь $\varphi_0(x, t_k)$ – терминальная часть функционала.

Интегрирование в (42) может осуществляться по различным интервалам времени:

1) от текущего момента времени $t_1 = t$ до конечного $t_2 = t_k$;

2) по скользящему интервалу: от $t_1 = t$ до $t_2 = t + T_{\text{оп}}$, где $T_{\text{оп}}$ – заданная длительность интервала;

3) от текущего $t_1 = t$ до фиксированного промежуточного момента времени $t_2 < t_k$;

4) частным случаем является чисто терминальный функционал (целевая функция), когда $t_1 = t_2$ или $F_0(x, u, t) = 0$ – задача Майера;

5) локальной (в отношении времени) оптимизацией с целевой функцией от текущего состояния называется случай, когда $t_k = t$. Оптимизация в такой постановке настолько же менее совершенна в сравнении с общим случаем (42), когда $t_2 > t,\ t_k > t,$ насколько планирование и управление без прогноза на будущее менее совершенны в сравнении с управлением с предвидением.

Еще менее результативным является минимизация функционала типа (42) при $t_k = t,\ t_2 = t,\ t_1 < t$ (ретроспективный интервал оптимизации).

В ряде случаев целью управления является стабилизация заданного программного движения, т. е. удержание истинной траектории движения в некоторой окрестности желаемой траектории. В этом случае функции F_0 и φ_0 в функционале (37) или (42) должны характеризовать отклонение реальной траектории системы от программной.

Довольно часто для этой цели используют квадратичные функционалы Летова-Калмана, имеющие вид:

$$J_0 = X^t(t_k) \cdot R \cdot X(t_k) + \int\limits_{t_0}^{t_k} (X^t(t)Q(t)X(t) + u^t(t)\Gamma(t)u(t))\mathrm{d}t, \quad (43)$$

где $R, Q(t), \Gamma(t)$ – неотрицательно определенные матрицы.

Последнее слагаемое в (43), характеризующее затраты на управление, возникает в ряде задач естественным образом.

Для процессов с дискретным временем аналогом функционала (42) является:

$$J_0 = \varphi_0(x(k), k) + \sum_{k=k_1}^{k_2-1} F_0(x(k), u(k), k). \quad (44)$$

Для линейного стационарного объекта $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ при $t_0 = 0,\ t_k = \infty$ и скалярного управления функционал (43) принимает достаточно простой вид:

$$J_0(u) = \int\limits_0^\infty (x^t Q x + \Gamma u^2)\mathrm{d}t, \quad (45)$$

где число Γ больше нуля.

Очевидно, что выражение (45) является частным случаем функционала, используемого при векторном управляющем воздействии:

$$J(u) = \int\limits_0^\infty (x^t Q x + u^t \Gamma u)\mathrm{d}t. \quad (46)$$

При синтезе терминальных (конечных) законов управления с использованием функционалов Больца приходится решать двухточечную краевую задачу, когда часть условий задана в момент t_0 (уравнение процесса), а другая часть – в момент времени t_k. Трудности решения этой задачи не позволяют для нелинейных систем высокой размерности реализовать оптимальное управление в реальном масштабе времени.

С целью упрощения процедуры синтеза оптимальных регуляторов при терминальном управлении А. А. Красовский предложил использовать неклассические полуопределенные функционалы, называемые функционалами обобщенной работы (ФОР). Полуопределенность ФОР заключается в том, что он, в отличие, например, от критерия (42), будет содержать неизвестное (искомое) оптимальное управление U_0:

$$J_0 = \varphi_0(x, t_k) + \int_{t_1}^{t_2} F_0(x, u, u_0, t)\mathrm{d}t. \tag{47}$$

В квадратичной форме по аналогии с (43):

$$\begin{gathered} J_0 = x^t(t_k)\cdot R\cdot x(t_k) + \int_{t_0}^{t_k}(x^t(t)Q(t)x(t) + \\ + u^t(t)\Gamma(t)u(t) + u_0^t(t)\Gamma(t)u_0(t))\mathrm{d}t \end{gathered} \tag{48}$$

или

$$J(u) = \varphi_0(x, t_k) + \int_{t_0}^{t_k} Q_з(x, t)\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_k}(u_з(u, t) + u_з{}^*(u_0, t))\mathrm{d}t, \tag{49}$$

где $u_з, u_з^*$ – заданные скалярные функции векторных аргументов; они выбраны так, что выражение является положительно-определенной относительно $u(t)$ функцией, принимающей минимальное (нулевое) значение только при $u = u_0$:

$$u_з(u, t) + u_з^*(u_0, t) - \left(\frac{\partial}{\partial u_0}u_з(u_0, t)\right)u(t). \tag{50}$$

Для линейного стационарного случая и устойчивого объекта управления (ОУ) вместо выражения (46) квадратичный функционал обобщенной работы берется в виде:

$$J_0(u) = \int_0^{\infty}(x^tQx + u^t\Gamma u + u_0^t\Gamma u_0)\mathrm{d}t. \tag{51}$$

Ясно, что при введении дополнительного интегрального равенства рассмотренные функционалы обобщенной работы (ФОР) могут быть приведены к соответствующим классическим функционалам. Так минимизация ФОР (50) при дополнительном (изопериметрическом) условии эквивалентна минимизации функционала с аддитивной функцией затрат на управление (42):

$$\int_{t_0}^{t_k} U_3^*(u_0, t)\mathrm{d}t = c. \tag{52}$$

Условие (52) можно рассматривать как задание некоторой обобщенной работы оптимального управления. Отсюда происходит название данной группы функционалов.

Так как выбор функционала является неординарной задачей, то в последнее время в методе АКОР (аналитическое конструирование оптимальных регуляторов) наблюдается тенденция, согласно которой задача минимизации некоторого постулированного критерия качества отодвигается на второй план, а предпочтение отдается поиску законов управления, обеспечивающих заданный характер протекания переходных процессов. При таком подходе интегральный функционал играет роль вспомогательного средства, позволяющего выбрать желаемую экстремаль и формализовать процедуру синтеза оптимальных регуляторов (Колесников, Красовский).

Так в работе А. А. Колесникова для объектов управления типа

$$\dot{x} = f(x,t) + \varphi(x,t)u(t) \tag{53}$$

предлагается критерий качества строить на основе обобщенного интегрального функционала путем выбора соответствующей функции преобразования:

$$J = \int_0^\infty F(\psi, \dot{\psi})\mathrm{d}t. \tag{54}$$

В общем случае $\psi(x)$ может представлять собой некоторую совокупность нелинейных функций от координат состояния и, возможно, управления.

Выбор вида $\psi(x)$ фактически предопределяет требования к динамическим и установившимся режимам синтезируемой системы. При этом многообразие $\psi(x)=0$ можно интерпретировать как целевое множество (программа движения), на котором синтезируемое оптимальное управление $u(x)$ минимизирует функционал (54).

Поскольку подынтегральная функция $F(\psi,\dot{\psi})$ явно не зависит от времени t, то уравнение Эйлера-Лагранжа имеет первый интеграл, который запишется в виде:

$$F(\psi,\dot{\psi})-\dot{\psi}\frac{\mathrm{d}F(\psi,\dot{\psi})}{\mathrm{d}\dot{\psi}}=c, \tag{55}$$

где следует принять $c = 0$, чтобы сходился интеграл с бесконечным верхним пределом. Тогда уравнение принимает вид:

$$F(\psi,\dot{\psi})=\dot{\psi}\frac{\mathrm{d}F(\psi,\dot{\psi})}{\mathrm{d}\dot{\psi}} \tag{56}$$

и является необходимым условием для организации оптимального управления.

Из выражения (56) для конкретного вида функции $F(\psi,\dot{\psi})$ легко получить дифференциальное уравнение для семейства экстремалей и выделить из него устойчивое подсемейство.

Рассмотрим ограничения, которые могут иметь место при синтезе систем управления.

Ограничения на траекторию. В ряде реальных ситуаций система не может заходить в те или иные области фазового пространства. Это находит отражение в соответствующих ограничениях на траекторию $x(t)$ движения системы, состоящих в том, что в каждый момент времени t задается область $X(t)$, в которой может находиться вектор состояния $x(t), X(t)\in Rm, X(t)=X_{\text{доп}}$, где R – множество действительных чисел.

В зависимости от вида ограничений выделяют различные классы задач управления:

1) в задачах с фиксированными концами начальное $x(t_0)$ и конечное $x(t_k)$ положения заданы;

2) если $x(t_0)$ или $x(t_k)$ не задано, то соответствующая задача называется задачей со свободным левым (правым) концом;

3) задачей с подвижными концами называется задача, в которой моменты t_0 и t_k заданы, а начальное $x(t_0)$ и конечное $x(t_k)$ положения могут изменяться соответственно в пределах областей $X(t_0)$ и $X(t_k)$;

4) в задачах с изопериметрическими ограничениями считаются заданными величины интегралов:

$$J_j = \int_{t_0}^{t_k} F_j(x(t), t)\mathrm{d}t \geq 0, \ \ (j = 1, \ldots, m_1), \tag{57}$$

где F_j – заданные скалярные функции.

Задача с ограничениями вида (57) является обобщением задачи вариационного исчисления об определении замкнутой кривой заданной длины (заданного параметра), которая охватывает наибольшую площадь, отсюда, кстати, происходит термин «изопериметрические ограничения».

Возможны также и ограничения типа равенств:

$$J_i = \int_{t_0}^{t_k} F_i(x(t), t)\mathrm{d}t = 0, \ \ (i = m_1 + 1, \ldots, m_2). \tag{58}$$

Ограничения на управление (информационные ограничения). При построении оптимального управления важное значение имеет то, какая именно информация о системе доступна управляющей стороне.

Если фазовый вектор $x(t)$ недоступен измерению, то оптимальное управление, называемое в этом случае программным или П-управлением, ищется в классе функций $u(t)$, зависящих только от времени t.

Если в каждый момент времени t фазовый вектор $x(t)$ известен точно, то оптимальное управление ищется в плане функций, зависящих от времени и фазовых координат, и имеет вид $u = u(x(t), t)$. Построенное таким образом управление $u(x(t), t)$ называется с-управлением (управлением по принципу обратной связи или синтезом управления).

Ясно, что с-управление является более гибким по сравнению с П-управлением, т. е. реализует не большее, по сравнению с П-управлением, значение минимизируемого критерия качества.

Простейшим примером обратной связи является пропорциональная обратная связь, при помощи которой управляющий сигнал связан пропорциональной зависимостью с фазовым вектором.

Идея обратной связи появилась приблизительно две тысячи лет назад в устройстве водяных часов, в которых уровень воды поддерживался постоянным с помощью поплавкового клапана (центробежный регулятор Уатта и т. д.).

Также регуляторы относятся к так называемым регуляторам прямого действия, в которых измерительное устройство непосредственно воздействует на регулятор. Такое управление возможно только на машинах малой мощности. Как правило, в цель управления включают различные усилители или другие исполнительные механизмы.

Наряду с описанными информационными ограничениями, обусловленными степенью информированности управляющей стороны, возможен и другой тип ограничений, связанный с ограниченностью ресурсов управления.

Эти ограничения могут иметь вид:

$$u(t) \in U(t), \tag{59}$$

где $U(t) \in Rm$ – заданное множество;

R – множество действительных чисел.

Пример: управление двигателями космического аппарата удовлетворяет ограничениям в каждый момент времени.

Иногда ограничения на управления $u(t)$ имеют интегральный вид, аналогичный ограничениям (57) и (58) на траекторию. В некоторых случаях ограничение (59) можно интерпретировать как ограничения на стоимость процесса управления.

Таким образом, задачи оптимального управления определяются уравнениями движения (x), критерием качества (u).

Новые постановки задач получаются, если ограничения имеют совместный характер, т. е. зависят одновременно и от траектории, и от управления.

Совокупность соотношений, определяющих постановку задачи оптимального управления в этом случае, имеет вид:

1) уравнение движения:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \tag{60}$$

где $x \in R_n$;

$u \in R_m$;

$t_0 \le t \le t_k$;

2) скалярный критерий качества:

$$J_0(x(t_0), t_0, x(t_k), t_k, u) \to \inf; \tag{61}$$

3) ограничения:

$$\begin{aligned} &J_j(x(t_0), t_0, x(t_k), t_k, u) \le 0, (j = 1, ..., m_1), \\ &J_i(x(t_0), t_0, x(t_k), t_k, u) = 0, (i = 1, ..., m_2), \\ &u(t) \in U. \end{aligned} \tag{62}$$

Управление $u(t)$ ищется в классе кусочно-непрерывных функций, а траектория $x(t)$ – в классе кусочно-непрерывно-дифференцируемых функций.

Ограничения могут быть учтены посредством функций штрафа, которые вводятся в минимизируемый функционал в виде положительной функции $Q_ш(x, u)$. Функция $Q_ш(x, u)$ мала или равна нулю внутри областей $x_э, u_э (x \in X_э, u \in U_э)$ и быстро нарастает при выходе x и u за области $X_э$ и $U_э$ соответственно.

Области ограничений $X_э$ и $U_э$ часто называют эксплуатационными областями.

10. Инструментарий исследования систем управления

Решение задач анализа и синтеза СУ в настоящее время невозможно представить без использования информационных технологий. Появление компьютеров дало новый импульс развитию вычислительных методов в математике, физике и инженерных науках. Поначалу значительный прогресс наблюдался в основном в численных расчетах. Однако численные методы обладают двумя существенными недостатками:

– вычисления носят принципиально приближенный характер, результат всегда получается с округлением. Например, вычисление величины $\sin 2(x) + \cos 2(x)$ вовсе не дает тождественную единицу;

– вычисления носят частный характер. Так при решении дифференциальных уравнений изменение начальных условий приводит к необходимости повторного решения.

Поэтому в начале 60-х годов началась интенсивная работа по созданию компьютерных систем символьной математики. Можно отметить, что некоторые операции с полиномами (дифференцирование, интегрирование, умножение и т. д.) могут быть реализованы даже на программируемом калькуляторе. Появление языков высокого уровня (LISP, PROLOG) позволило алгоритмизировать работу с достаточно широким классом функций. Был создан язык программирования REDUCE, предназначенный для символьных вычислений. В 80-х годах с появлением персональных компьютеров появились и первые интегрированные системы компьютерной математики (СКМ): Derive, Eureka, MathCAD, Maple V, Mathematica. Эти системы содержат большой набор готовых к употреблению алгоритмов и программ, позволяющих решать достаточно широкий круг задач. К настоящему моменту в лидерах оказались Mathematica и Maple из-за их действительно уникальных возможностей и MathCAD, благодаря простоте в использовании и усвоении.

Системы компьютерной математики. Что общего?

Все системы компьютерной математики могут выполнять простейшие операции по упрощению и преобразованию символьных вычислений. К числу таких операций относятся разложение на множители, раскрытие выражений, замена переменных и подстановки. Необходимо иметь в виду, что слово «упростить» разные системы могут понять по-разному: для Mathematica тангенс проще отношения синуса к косинусу, а вот для Maple наоборот. Особенно эффективно использование упрощения выражений при работе с тригонометрическими и специальными функциями, когда требуется рутинное и весьма громоздкое применение достаточно большого числа соотношений.

Также СКМ поддерживают основные операции математического анализа: вычисление пределов (в том числе неопределенностей вида 0/0), дифференцирование, интегрирование, разложение функций в ряд. Многие из СКМ могут решать дифференциальные уравнения, суммировать ряды и находить значения бесконечных произведений. Практически все СКМ умеют работать с интегральными преобразованиями (Фурье, Лапласа и т. д.).

Численные вычисления не оказываются за пределами внимания систем компьютерной математики. В первую очередь это касается численного интегрирования и решения алгебраических и дифференциальных уравнений. При этом детали алгоритмов обычно составляют know-how фирмы-разработчика. Как правило, СКМ уступают в скорости работы программам, написанным на распространенных языках программирования (Fortran, Pascal). Но нет необходимости самостоятельно писать эти программы (так что спорный вопрос, где же больше временные затраты), к тому же не понадобится изучать численные методы.

Результат в виде формулы или таблицы значений не обладает достаточной наглядностью. Поэтому в системах компьютерной математики имеются средства визуализации вычислений. Речь идет не только о построении графиков функций одной переменной, но и о построении трехмерных графиков высокого качества: в цвете, с функциональной раскраской. Особо следует отметить возможность создания анимационной графики, а, следовательно, и динамического моделирования.

Еще одна особенность большинства СКМ – наличие встроенного языка программирования. Как правило, встроенные языки проще и нагляднее, чем стандартные языки программирования, к тому же приспособлены специально для своей системы. Особо удачные реализации – Mathematica и Maple. Здесь многие дополнительные программы написаны с использованием внутренних языков. Их главный недостаток – невозможность создания исполняемых файлов. Понять причину несложно: написание программы с использованием, например, команды символьного дифференцирования требует информации о правилах дифференцирования функций, задания списка функций и т. д. В результате придется даже в простейшую программу вложить значительную часть системы.

Со второй половины 90-х разработчики систем символьной математики перестали воспринимать пользовательский интерфейс как нечто вторичное, поэтому отличительная черта современных пакетов – удобный интерфейс с набором инструментальных палитр. Правда в этом отношении Maple все еще значительно отстает от Mathematica и MathCAD.

В чем отличия систем компьютерной математики?

Среди наиболее распространенных на нашем рынке СКМ: Mathematica, Maple, MathCAD. Mathematica и Maple не пугают пользователя обилием версий, каждая новая версия отличается от предыдущей достаточно глубокой переработкой. Так, в 1996-м году появилась Mathematica 3.0, в 1999-м – Mathematica 4.0 и в декабре 2000 г. – Mathematica 4.1. Maple VR4 появилась в 1996-м году, эта версия уже несколько лет в рекламных целях распространяется бесплатно, Maple VR5 – в 1997-м, и в 2000-м году появилась Maple 6. Зато новые версии MathCAD появляются практически раз в полгода, иногда даже в трех изданиях: Student, Standard, Professional.

Общие рекомендации по использованию.

При проведении достаточно объемных вычислений рассматриваемые системы также ведут себя неодинаково. Maple предлагает наиболее широкий набор функций (более 3000 команд), охватывающий практически все разделы математики и математической физики. Mathematica содержит примерно 1000 команд, но это вовсе не говорит о слабости пакета: команды Mathematica носят более элементарный характер. Например, у Maple есть команда построения графика решения с векторным полем по заданному дифференциальному уравнению, Mathematica для этого требует использования по крайней мере трех команд. Однако в Mathematica выдерживаются жесткие стандарты: имена команд всегда начинаются с заглавной буквы, аргументы находятся в квадратных скобках и т. д. В результате входные и выходные результаты оказываются хорошо согласованными друг с другом. При работе с Maple то и дело приходится прибегать к программированию, к тому же использование предыдущих результатов не так удобно. Одним словом, все зависит от совокупности факторов, таких как тип решаемой задачи, необходимая степень детализации результата вычислений и т. д.

Какие из систем компьютерной математики наиболее применимы при работе в сфере моделирования систем автоматического управления?

Кроме вышеперечисленных достаточно широкое распространение получила система MATLAB, первоначально предназначенная для численных расчетов, и в работе с аналитическими выражениями уступает вышеуказанным, однако у данного инструмента имеется целый ряд других неоспоримых достоинств.

MATLAB (сокращение от англ. «Matrix Laboratory») – термин, относящийся к пакету прикладных программ для решения задач технических вычислений, а также к используемому в этом пакете языку программирования. MATLAB используют более 1 000 000 инженерных и научных работников, он работает на большинстве современных операционных систем, включая GNU/Linux, Mac OS, Solaris и Microsoft Windows.

MATLAB как язык программирования был разработан Кливом Моулером (англ. Cleve Moler) в конце 1970-х годов, когда он был деканом факультета компьютерных наук в университете Нью-Мексико. Целью разработки служила задача дать студентам факультета возможность использования программных библиотек Linpack и EISPACK без необходимости изучения Фортрана. Вскоре новый язык распространился среди других университетов и был с большим интересом встречен учеными, работающими в области прикладной математики. До сих пор в интернете можно найти версию 1982 года, написанную на Фортране, распространяемую с открытым исходным кодом. Инженер Джон Литтл (англ. John N. (Jack) Little) познакомился с этим языком во время визита Клива Моулера в Стэнфордский университет в 1983 году. Поняв, что новый язык обладает большим коммерческим потенциалом, он объединился с Кливом Моулером и Стивом Бангертом (англ. Steve Bangert). Совместными усилиями они переписали MATLAB на C и основали в 1984 году компанию The MathWorks для дальнейшего развития. Эти переписанные на C библиотеки долгое время были известны под именем JACKPAC. Первоначально MATLAB предназначался для проектирования систем управления (основная специальность Джона Литтла), но быстро завоевал популярность во многих других научных и инженерных областях. Он также широко использовался и в образовании, в частности, для преподавания линейной алгебры и численных методов.

Язык MATLAB является высокоуровневым интерпретируемым языком программирования, включающим основанные на матрицах структуры данных, широкий спектр функций, интегрированную среду разработки, объектно-ориентированные возможности и интерфейсы к программам, написанным на других языках программирования.

Программы, написанные на MATLAB, бывают двух типов: функции и скрипты. Функции имеют входные и выходные аргументы, а также собственное рабочее пространство для хранения промежуточных результатов вычислений и переменных. Скрипты же используют общее рабочее пространство. Как скрипты, так и функции не компилируются в машинный код, а сохраняются в виде текстовых файлов. Существует также возможность сохранять так называемые pre-parsed программы – функции и скрипты, преобразованные в вид, удобный для машинного исполнения. В общем случае такие программы выполняются быстрее обычных, особенно если функция содержит команды построения графиков.

Основной особенностью языка MATLAB являются его широкие возможности по работе с матрицами.

MATLAB предоставляет пользователю большое количество (несколько сотен) функций для анализа данных, покрывающих практически все области математики, в частности:

– матрицы и линейная алгебра – алгебра матриц, линейные уравнения, собственные значения и векторы, сингулярности, факторизация матриц и другие;

– многочлены и интерполяция – корни многочленов, операции над многочленами и их дифференцирование, интерполяция и экстраполяция кривых и другие;

– математическая статистика и анализ данных – статистические функции, статистическая регрессия, цифровая фильтрация, быстрое преобразование Фурье и другие;

– обработка данных – набор специальных функций, включая построение графиков, оптимизацию, поиск нулей, численное интегрирование (в квадратурах) и другие;

– дифференциальные уравнения – решение дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений с запаздыванием, уравнений с ограничениями, уравнений в частных производных и другие;

– разреженные матрицы – специальный класс данных пакета MATLAB, использующийся в специализированных приложениях;

– целочисленная арифметика – выполнение операций целочисленной арифметики в среде MATLAB.

Также MATLAB предоставляет удобные средства для разработки алгоритмов, включая высокоуровневые с использованием концепций объектно-ориентированного программирования. В нем имеются все необходимые средства интегрированной среды разработки, включая отладчик и профайлер. Функции для работы с целыми типами данных облегчают создание алгоритмов для микроконтроллеров и других приложений, где это необходимо.

В составе пакета MATLAB имеется большое количество функций для построения графиков, в том числе трехмерных, визуального анализа данных и создания анимированных роликов.

Встроенная среда разработки позволяет создавать графические интерфейсы пользователя с различными элементами управления, такими как кнопки, поля ввода и другими. С помощью компонента MATLAB Compiler эти графические интерфейсы могут быть преобразованы в самостоятельные приложения, для запуска которых на других компьютерах необходима установленная библиотека MATLAB Component Runtime.

Пакет MATLAB включает различные интерфейсы для получения доступа к внешним подпрограммам, написанным на других языках программирования, данным, клиентам и серверам, общающимся через технологию Component Object Model или Dynamic Data Exchange, а также периферийным устройствам, которые взаимодействуют напрямую с MATLAB. Многие из этих возможностей известны под названием MATLAB API.

Для решения специализированных задач разработаны пакеты расширений системы MATLAB с дополнительными функциями. Такие пакеты называются ToolBoxes. При установке системы MATLAB пользователь может выборочно загрузить нужные ему пакеты. Например, пакет Symbolic Math ToolBox добавляет к системе возможность символьных вычислений. Однако самый известный пакет предназначен для имитационного моделирования и носит название Simulink.

Simulink – это графическая среда имитационного моделирования, позволяющая при помощи блок-диаграмм в виде направленных графов строить динамические модели, включая дискретные, непрерывные и гибридные, нелинейные и разрывные системы (классификация моделей более подробно будет рассмотрена в последующих частях пособия).

Интерактивная среда Simulink позволяет использовать уже готовые библиотеки блоков для моделирования всевозможных систем, а также применять развитый модельно-ориентированный подход при разработке систем управления, средств цифровой связи и устройств реального времени.

Дополнительные пакеты расширения Simulink позволяют решать весь спектр задач от разработки концепции модели до тестирования, проверки, генерации кода и аппаратной реализации.

Simulink имеет обширную библиотеку блочных компонентов, редактор блок-схем и по существу является средством визуального программирования. С помощью мыши пользователь переносит нужные компоненты на рабочий стол системы и соединяет линиями входы и выходы блоков. Таким образом создается блок-схема системы или устройства. В состав моделей могут включаться источники сигналов различного вида, преобразователи с разнообразными формами передаточных характеристик, интегрирующие и дифференцирующие блоки, виртуальные регистрирующие приборы, графические средства анимации. Двойной щелчок мышью на блоке модели выводит окно со списком его параметров, которые пользователь может менять. Запуск имитации обеспечивает математическое моделирование построенной модели с наглядным визуальным представлением результатов.

На всех этапах работы, особенно при подготовке моделей схем, пользователь практически не имеет дела с обычным программированием. Программа автоматически генерируется в процессе ввода выбранных блоков компонентов, их соединений и задания параметров компонентов.

Simulink автоматизирует наиболее трудоемкий этап моделирования: он составляет и решает сложные системы алгебраических и дифференциальных уравнений, описывающих заданную функциональную схему (модель), обеспечивая удобный и наглядный визуальный контроль за поведением созданного пользователем виртуального устройства. Достаточно уточнить (если нужно) вид анализа и запустить Simulink в режиме симуляции (откуда и название пакета) созданной модели системы или устройства.

Simulink практически мгновенно меняет математическое описание модели по мере ввода ее новых блоков, даже в том случае, когда этот процесс сопровождается сменой порядка системы уравнений и ведет к существенному качественному изменению поведения системы. Впрочем, это является одной из главных целей пакета Simulink.

Ценность Simulink заключается и в обширной, открытой для изучения и модификации, библиотеке компонентов (блоков). Она включает источники воздействий (сигналов) с практически любыми временными зависимостями, масштабирующие, линейные и нелинейные преобразователи с разнообразными формами передаточных характеристик, квантующее устройство, интегрирующие и дифференцирующие блоки и т. д.

В библиотеке имеется целый набор виртуальных регистрирующих устройств от простых измерителей типа вольтметра или амперметра до универсальных осциллографов, позволяющих просматривать временные зависимости выходных параметров моделируемых систем, например токов и напряжений, перемещений, давлений и т. п. Имеется даже графопостроитель для создания фигур, заданных параметрически и в полярной системе координат, например фигур Лиссажу и фазовых портретов колебаний. Simulink имеет средства анимации и звукового сопровождения. А в дополнительных библиотеках можно отыскать и такие компоненты, как анализаторы спектра сложных сигналов, многоканальные самописцы и средства анимации графиков.

Интеграция одной из самых быстрых матричных математических систем – MATLAB с пакетом Simulink – открыла новые возможности использования самых современных математических методов для решения задач динамического и ситуационного моделирования сложных систем и устройств.

И наконец, важным достоинством Simulink является возможность задания в блоках произвольных математических выражений, что позволяет решать типовые задачи, пользуясь примерами пакета Simulink или же просто задавая новые выражения, описывающие работу моделируемых пользователем систем и устройств. Важным свойством пакета является и возможность задания системных функций (S-функций) с включением их в состав библиотек Simulink. Необходимо отметить также возможность моделирования устройств и систем в реальном масштабе времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник: в 5 т. / под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – Т. 4. – 744 с.
2. Бесекерский, В. А. Теория систем автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – 4-е изд., перераб. и доп. – СПб.: изд-во Профессия, 2003. – 752 с.
3. Пугачёв, В. С. Теория стохастических систем / В. С. Пугачёв, И. Н. Синицин. – М.: Логос, 2004. – 630 с.
4. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / под ред. В. А. Бесекерского. – М.: Наука, 1987. – 587 с.
5. Андриевский, Б. Р. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков. – СПб.: Наука, 2010. – 286 с.
6. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.
7. Афанасьев, В. Н. Математическая теория конструирования систем управления / В. Н. Афанасьев, В. Б. Калмановский, В. Р. Носов. – М.: Высш. шк., 2003. – 615 с.
8. Казаков, И. Е. Методы оптимизации стохастических систем / И. Е. Казаков, Д. И. Гладков. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
9. Аттетков, А. В. Методы оптимизации / А. В. Аттетков, С. В. Галкин, В. С. Зарубин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 440 с.
10. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи / В. М. Алексеев, Э. М. Галлеем, В. М. Тихомиров. – М.: Наука, 1999. – 288 с.
11. Шахтарин, Б. И. Случайные процессы в радиотехнике / Б. И. Шахтарин. – М.: Радио и связь, 2000. – 295 с.

Учебное издание

ЛОБАТЫЙ Александр Александрович
СТЕПАНОВ Владимир Юрьевич
ХВИТЬКО Евгений Анатольевич

МЕТОДЫ И СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пособие
для студентов специальностей
1-53 81 02 «Методы анализа и управления
в технических и экономических системах»,
1-53 81 05 «Распределенная автоматизация на основе
промышленных компьютерных сетей»

В 3 частях

Часть 1

Редактор *А. С. Мокрушников*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 19.10.2020. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,78. Уч.-изд. л. 2,95. Тираж 100. Заказ 669.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.