

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Информационные системы и технологии»

А. А. Лобатый
В. Ю. Степанов
Е. А. Хвилько

МЕТОДЫ И СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пособие
для студентов специальностей
1-53 81 02 «Методы анализа и управления
в технических и экономических системах»,
1-53 81 05 «Распределенная автоматизация на основе
промышленных компьютерных сетей»

В 3 частях

Часть 2

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области автоматизации технологических процессов,
производств и управления*

Минск
БНТУ
2020

УДК 681.5:681.3 (075.8)

ББК 14.2.6

Л68

Рецензенты:

заведующий кафедрой ПОСТ, канд. техн. наук, доцент *В. А. Рыбак*;
главный научный сотрудник ОИПИ НАН РБ, д-р техн. наук,
профессор *В. В. Старовойтов*

Лобатый, А. А.

Л68 Методы и системы оптимального управления: пособие для студентов специальностей 1-53 81 02 «Методы анализа и управления в технических и экономических системах», 1-53 81 05 «Распределенная автоматизация на основе промышленных компьютерных сетей» : пособие : в 3 ч. / А. А. Лобатый, В. Ю. Степанов, Е. А. Хвилько. – Минск : БНТУ, 2020. – Ч. 2. – 64 с.
ISBN 978-985-583-384-1 (Ч. 2).

Целью данного пособия является освещение ряда задач по следующим тематикам: задачи, в которых на управление накладываются ограничения в виде неравенств (за счет применения принципа максимума Понтрягина), динамическое программирование, аналитическое конструирование оптимальных регуляторов, оптимизация управления методами вариационного исчисления. Также в пособии рассмотрены вопросы синтеза регуляторов линейных систем управления, синтез дискретных регуляторов, синтез регуляторов нестационарных систем.

Часть 1 данного издания была выпущена в 2020 году.

УДК 681.5:681.3 (075.8)

ББК 14.2.6

ISBN 978-985-583-384-1 (Ч. 2)

ISBN 978-985-583-264-6

© Лобатый А. А., Степанов В. Ю.,
Хвилько Е. А., 2020

© Белорусский национальный
технический университет, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. Принцип максимума Понтрягина	5
2. Динамическое программирование	15
3. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов	22
4. Оптимизация управления методами вариационного исчисления	26
5. Синтез регуляторов линейных систем управления	32
6. Синтез дискретных регуляторов	43
7. Синтез регуляторов нестационарных систем	56
ЛИТЕРАТУРА	64

ВВЕДЕНИЕ

Целенаправленное воздействие на объект или систему с участием или без участия человека называют управлением, а систему, обеспечивающую управление, – системой управления. В ряде современных практических задач, где применяются системы управления, часто возникает ситуация, когда необходимо использовать управление, на которое накладываются ограничения в виде неравенств.

Рассматриваемые ранее в первой части пособия задачи оптимизации максимального быстродействия сводятся к одной обобщенной задаче. Для этого функционал качества рассматривается не только в конечный момент времени, но и в текущий момент, а для многомерных задач определение оптимального управления представляет собой значительную трудность.

Далее рассматривается динамическое программирование, которое вместе с принципом максимума является одним из основных аналитических методов поиска оптимального управления. В отличие от принципа максимума оно позволяет определить оптимальное управление с обратной связью. Метод применим для оптимизации дискретных процессов. Показано, что в основу метода динамического программирования положен принцип оптимальности Беллмана, справедливый для дискретных и непрерывных систем.

Затем рассматривается аналитическое конструирование оптимальных регуляторов, что является синтезом оптимального управления для объекта, описывающегося линейной моделью, и квадратичного функционала качества.

В следующем разделе пособия рассматривается раздел математики, в котором ставятся задачи исследования максимума или минимума функционала и определение функций, на которых эти максимум и минимум достигаются (методы вариационного исчисления); а вторая часть настоящего пособия посвящена рассмотрению вопросов синтеза регуляторов линейных систем управления, синтеза дискретных регуляторов, синтеза регуляторов нестационарных систем. При синтезе регуляторов используются положения и понятия теории автоматического управления: управление, управляемые переменные, качество управления, которые и будут подробно рассмотрены в данном пособии.

1. Принцип максимума Понтрягина

В ряде практических задач на управление накладываются ограничения в виде неравенств, решение таких задач дает принцип максимума – математический метод, разработанный Понтрягиным и его учениками. Постановка задачи следующая – поведение математической модели объекта управления (ОУ) описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, которое имеет вид:

– в векторной форме

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t); \quad (1)$$

– в скалярной форме

$$\dot{x}_k(t) = f_k(x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_m, t). \quad (2)$$

Начальное условие $x(t_0) = x_0$.

Структурная схема процесса управления представлена на рис. 1.

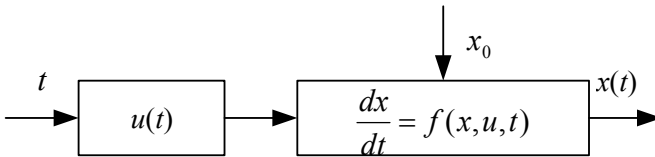


Рис. 1. Структурная схема процесса управления

Множество управлений образует кусочно-непрерывные функции $u(t)$ со значениями в области допустимых значений $U_{\text{доп}}$.

Функционал качества в общем случае запишем в виде (задача Больца):

$$J_0 = \varphi_0(x, t_k) + \int_{t_0}^{t_k} F_0(x, u, t) dt, \quad (3)$$

где φ_0 и F_0 – заданные непрерывно-дифференцируемые функции.

Постановка задачи следующая. Требуется найти такую тройку $d^* = (x^*, u^*, t^*)$, где x^* – оптимальная траектория; u^* – оптималь-

ное управление; t^* – оптимальный момент времени окончания процесса, чтобы выполнялось условие:

$$J_0(d^*) = \min J_0(d). \quad (4)$$

Иначе в эквивалентной форме можно записать:

$$J_0(t_0, x_0, u^*(t)) = \min_{u(t) \in U_{\text{доп}}} J_0(t_0, x_0, u(t)), \quad (5)$$

где t_0, x_0 – начальные значения времени t и фазовых координат вектора состояний x .

Рассматриваемые ранее в первой части пособия типовые задачи оптимизации (максимального быстродействия или терминальная задача) сводятся к одной обобщенной задаче. Для этого функционал качества рассматривается не только в конечный момент времени, но и в текущий. При этом функционал J_0 принимается за дополнительную x_{n+1} фазовую координату.

Рассмотрим разные критерии:

1. Максимальное быстродействие. Время t считается x_{n+1} координатой, определяемой уравнением:

$$\dot{x}_{n+1} = 1, (x_{n+1})_0 = x_{n+1}(t_0) = t_0. \quad (6)$$

Таким образом, задача минимизации времени управления $t_k - t_0$ сводится к минимизации x_{n+1} фазовой координаты.

2. Терминальный критерий (задача Майера). Новая фазовая координата имеет вид:

$$x_{n+1} = J_0(t_k) = \Phi_0(x, t_k), \quad (7)$$

$$\dot{x}_{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{d\Phi_0}{dx_k} f_k(x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_m, t). \quad (8)$$

3. Задача Лагранжа (интегральный критерий). Новая фазовая координата:

$$x_{n+1}(t) = J_0 = \int_{t_0}^{t_k} F_0(x, u, t) dt, \quad (9)$$

$$\dot{x}_{n+1} = F_0(x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_m, t). \quad (10)$$

Таким образом, задача оптимизации функционала качества J_0 сводится к минимизации в момент времени t_k фазовой координаты x_{n+1} расширенного векторного состояния по отношению к управлению u . При этом на конечное состояние объекта могут накладываться различные ограничения. Ограничения могут иметь следующий вид:

$$q_j(x_1(t_k), \dots, x_n(t_k)) = 0, \quad j = \overline{1, r}, \quad (11)$$

где q_j – некоторые дифференцируемые функции.

Для поиска экстремума функции при наличии ограничений в виде равенств используется метод множителей Лагранжа. В соответствии с этим методом задача оптимизации сводится к описанию экстремума функции следующего вида:

$$\pi = x_{n+1}(t_k) + \sum_{j=1}^r \lambda_j q_j(x_1(t_k) \dots x_n(t_k)), \quad (12)$$

где λ_j – неопределенные множители Лагранжа.

Таким образом, необходимо найти $u(t) \in U_{\text{доп}}$, при котором функционал π будет минимален.

Решение задачи оптимизации управления было получено Понтрягиным и его учениками благодаря открытому ими принципу максимума, связавшему оптимальный функционал π с динамикой процесса. Эта связь была установлена через так называемую функцию Гамильтона, как назвал ее Понтрягин, или функцию Понтрягина, как называют ее в настоящее время, которая имеет вид:

$$H(x, u, \psi, t) = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i + \psi_{n+1} f_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \psi_i f_i. \quad (13)$$

В данном случае имеют место следующие обозначения:

f_i – правая часть выражения (1) для x_i ($i = 1 \dots n$);

f_{n+1} – правая часть уравнения для x_{n+1} ;

x_{n+1} определяется в зависимости от задачи оптимизации.

Неопределенные функции ψ_i удовлетворяют уравнению:

$$\dot{\psi}_i = - \sum_{j=1}^{n+1} \psi_j \frac{df_j}{dx_i}, \quad i = \overline{1, n+1}. \quad (14)$$

Для коэффициентов ψ_i заданы конечные условия, определяемые выражением:

$$\psi_i(t_k) = - \frac{d\pi}{dx_i} = - \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{dq_j}{dx_i}, \quad i = \overline{1, n+1}; \quad (15)$$

$$\psi_{n+1}(t_k) = -1. \quad (16)$$

Основная идея принципа максимума состоит в том, что для оптимального управления $u(t)$ и соответствующих координат $x_i(t)$, для которых функционал π имеет минимальное значение, функция Понтрягина H имеет максимум по отношению к управлению $u(t)$ по всему интервалу $[t_0, t_k]$.

Принцип максимума был обоснован математически как необходимое условие оптимальности для нелинейных систем и как необходимое и достаточное для линейных систем. Таким образом, задача сводится к определению максимума функции H .

Используя (13), для функции H можно переписать уравнение для фазовых координат (1) и уравнения для вспомогательных функций ψ_i (14) в так называемой канонической форме. Для этого продифференцируем (13) по ψ_i :

$$\frac{dH}{d\psi_i} = f_i(x, u, t) = \dot{x}_i(t), \quad i = \overline{1, n+1}. \quad (17)$$

Дифференцируя (13) по x_i , получим:

$$\frac{dH}{dx_i} = \sum_{j=1}^{n+1} \psi_j \frac{df_j}{dx_i} = -\dot{\psi}_i, \quad i = \overline{1, n+1}. \quad (18)$$

Выражения (17) и (18) позволяют привести уравнения (13) и (14) к следующей так называемой канонической форме уравнений Гамильтона (Понтрягина):

$$\dot{x}_i = \frac{dH}{d\psi_i}, \quad i = \overline{1, n+1}; \quad (19)$$

$$\dot{\psi}_i = -\frac{dH}{dx_i}, \quad i = \overline{1, n+1}. \quad (20)$$

Таким образом, имеем две системы уравнений. Для x_i заданы начальные условия, а для ψ_i – конечные условия, определяемые (12). Уравнение (13) показывает, что при поиске $u(t)$ необходимо решать так называемую двухточечную краевую задачу, когда в системе уравнений часть условий заданы в момент времени t_0 , а часть – в конечный момент времени t_k . Аналитические решения возможны только для систем малых размерностей, однако современные численные методы позволяют решать более сложные задачи.

Доказательство необходимых условий оптимальности (по принципу максимума) основано на рассмотрении так называемой игольчатой вариации. Большинство практических задач – это задачи со свободным правым концом и заданным временем переходного процесса. Понтрягин предложил решение как игольчатую вариацию отклонения управления от оптимального значения (рис. 2).

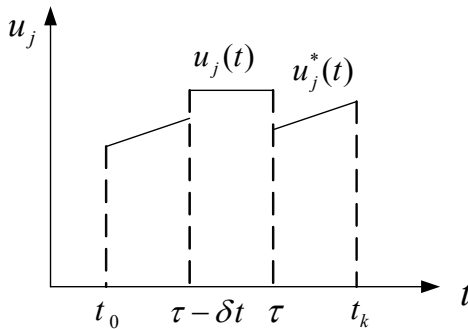


Рис. 2. Игольчатая вариация оптимального управления

Достаточно строгое доказательство принципа максимума получено методом вариационного исчисления. При этом рассмотрены вариации (бесконечно малые приращения). Выразив зависимость между этими вариациями, легко увидеть, что:

$$\delta\pi = -\delta t \left[H(x, u, \psi, t) - H(x^*, u^*, \psi, t) \right]. \quad (21)$$

При этом очевидно, что оптимальное управление имеет место при выполнении неравенства

$$H(x^*, u^*, \psi, t) \geq H(x, u, \psi, t). \quad (22)$$

Оптимальное управление определяется выражением:

$$\frac{dH}{du_i} = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (23)$$

Недостающие краевые условия для коэффициентов ψ_i определяются из условий трансверсальности (от лат. «transversus» – поперечный). В математике это условие оптимальности в вариационных задачах с подвижными концами. В принципе максимума это дополнительное условие, позволяющее решать практические задачи. Рассмотрим задачу со свободным правым концом, когда

$$x_{n+1}(t_k) \geq 0. \quad (24)$$

В то же время

$$\delta x_{n+1}(t_k) - \delta t [H(x, u, \psi, t) - H(x^*, u^*, \psi, t)]. \quad (25)$$

На основании выражений (21) и (22) получим:

$$H(x, u, \psi, t)\delta t = \sum_{i=1}^n \psi_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \delta t + \psi_{n+1} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial t} \delta t. \quad (26)$$

При малых вариациях $\partial t = \delta t$ следует, что $\partial x = \delta x$.

Из (26) при $t = t_k$ $\psi_{n+1} = -1$.

$$H(x, u, \psi, t)\delta t_k = \sum_{i=1}^n \psi_i(t_k)\delta x_i(t_k) - \delta x_{n+1}. \quad (27)$$

В то же время

$$\delta x_{n+1} = \frac{\partial J_0}{\partial x} \delta x + \frac{\partial J_0}{\partial t} \delta t, \quad (28)$$

при $t = t_k^*$, $\delta t = 0$, $\delta x_{n+1}(t_k) = \delta f_0(t_k)$.

Подставив (27) и (28) в (25), получим выражение

$$\delta \varphi_0(t_k) - H(x^*, u^*, \psi, t)\delta t_k + \sum_{i=1}^n \psi_i(t_k)\delta x_i(t_k) = 0, \quad (29)$$

которое представляет собой условие трансверсальности для задач со свободным правым концом.

Для других классов задач условия трансверсальности будут отличаться и иметь сложную форму.

Алгоритм применения принципа максимума:

1. Для модели процесса $\dot{x} = f(x, u, t)$ и функционала J_0 составить Гамильтониан.

$$H(x, u, \psi, t) = \sum_{j=1}^n \psi_j f_j(x, u, t) + f_{n+1}(x, u, t). \quad (30)$$

2. Найти структуру управления $u^*(t) = u^*(x, \psi, t)$ из условия максимума Гамильтониана по управлению.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \quad (31)$$

3. Составить систему канонических уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \frac{\partial H(x^*, u^*, \Psi, t)}{\partial t} = f_i(x^*, u^*, \Psi, t), & x_i(t_0) = x_{0i}, \\ \Psi_i(t) = -\frac{\partial H(x^*, u^*, \Psi, t)}{\partial x_i}, & \Psi_i(t_k) = \Psi_{ki}, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}. \quad (32)$$

4. Получить недостающие условия для уравнений составленной системы из условий трансверсальности.

$$\delta\varphi_0(t_k) - H(t_k)\delta t_k + \sum_{i=1}^n \Psi_i(t_k)\delta x_i(t_k) = 0. \quad (33)$$

5. Решить двухточечную краевую задачу для системы канонических уравнений. В результате определяется тройка оптимальных значений (t^*, x^*, u^*) , на которой достигается экстремум функционала качества. Необходимо отметить, что при других подстановках задачи решения могут несколько отличаться.

Пример решения задачи с помощью принципа максимума.

Дано: модель объекта управления описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, 1] = 0.$$

Функционал качества: $J_0 = \int_0^1 u^2(t)dt - x(1) \rightarrow \min.$

Имеет место задача со свободным правым концом.

Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем:

$$f(x, u, t) = x + u, \quad F_0(x, u, t) = u^2, \quad \varphi_0 = -x^2.$$

1. Составим Гамильтониан.

$$H = \Psi(x + u) - u^2. \quad (34)$$

2. Находим максимум Гамильтониана по управлению. Так как ограничения на управления отсутствуют, то можно применить необходимые условия безусловного экстремума.

$$\frac{\partial}{\partial u} H(x, u, \psi, t) = \psi - 2u = 0. \quad (35)$$

$$u^* = \frac{\psi}{2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2} H(x, u, \psi, t) = -2 < 0.$$

3. Необходимо записать систему канонических уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \psi} = x(t) + \frac{\psi(t)}{2}, \\ \dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\psi(t), \quad x(0) = 0. \end{cases} \quad (36)$$

4. Проверяем условия трансверсальности. Так как $\varphi_0 = -x$, $\delta\varphi_0 = -\delta x$, то $[-\delta x - H(t_k)\delta t_k + \psi(t_k)\delta x] = 0$. Так как $t_k = 1$, то $\delta t_k = 0$.

На $x(t_k)$ ограничений не наложено, следовательно

$$[\psi(t_k) - 1]\delta x = 0 \Rightarrow \psi(1) - 1 = 0 \Rightarrow \psi(1) = 1. \quad (37)$$

5. Решаем полученную двухточечную задачу.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + \frac{\psi(t)}{2}, \quad x(0) = 0; \\ \dot{\psi}(t) = -\psi(t), \quad \psi(1) = 1. \end{cases} \quad (38)$$

Второе уравнение решается аналитически.

$$\psi(t) = e^{tk-t}. \quad (39)$$

Выражение для оптимального управления имеет вид:

$$u^*(t) = \frac{1}{2} e^{t_k - t}. \quad (40)$$

Получаем оптимальную траекторию:

$$x^*(t) = \frac{1}{4} [e^{t_k + t} - e^{t_k - t}]. \quad (41)$$

Для многомерных задач определение оптимального управления представляет собой значительную трудность, а иногда и невозможно. В этом случае для решения двухточечной краевой задачи применяют численные методы, которые несколько снижают точность решения.

2. Динамическое программирование

Этот метод вместе с принципом максимума является одним из основных аналитических методов поиска оптимального управления. В отличие от принципа максимума, метод динамического программирования позволяет определить оптимальное управление с обратной связью (С-управление). Метод применим более строго для оптимизации дискретных процессов. В основу метода динамического программирования положен принцип оптимальности Беллмана, справедливый для дискретных и для непрерывных систем.

Принцип оптимальности Беллмана формулируется следующим образом: оптимальное управление обладает тем свойством, что при любом начальном состоянии и управлении до данного момента последующее управление должно быть оптимальным при том состоянии, в которое пришла система в результате предыдущего этапа управления.

Таким образом, оптимальное управление определяется состоянием системы в данный момент времени и поставленной целью и не зависит от состояний в предыдущие моменты времени.

Рассмотрим сущность метода на примере простейшей одномерной системы, описываемой разностным уравнением:

$$x(k+1) = x(k) + f(x, u, k). \quad (42)$$

На интервале $t_k - t_0 = T$:

$$T_n = \frac{t_k - t_0}{N} \text{ – интервал дискретности, } k = \overline{1, N}.$$

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \\ |u| &\leq U_{\text{доп}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Требуется определить последовательность оптимальных управлений $u(0), \dots, u(N-1)$, минимизирующую сумму (эквивалент функционала) следующего вида:

$$J_0 = \sum_{k=0}^{N-1} F(x, u, k) + Q(x, N), \quad (44)$$

где F, Q – заданные функции.

На основе принципа оптимальности, сформулированного выше, задача оптимизации функции многих переменных $u(0, 1, \dots, N-1)$ сводится к задаче последовательной минимизации функций одной переменной.

Дискретный многошаговый процесс построения оптимального управления (алгоритм синтеза) состоит из следующих шагов:

1. Рассмотрим последний интервал $(N-1)T_n \leq t \leq NT_n$.

Пусть $x(N-1)$ известно (рис. 3):

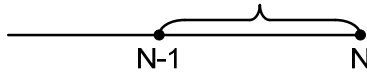


Рис. 3. Диапазон известных значений

На основании принципа Беллмана управление на этом интервале $u(N-1)$ зависит от $x(N-1)$ и минимизирует сумму.

$$J_{N-1} = F(x, u, N-1) + Q(x, N). \quad (45)$$

Заменив $x(N)$ его выражением, получим

$$J_{N-1} = F(x, u, N-1) + Q(x(N-1) + f(x, u, N-1)). \quad (46)$$

Так как сумма (46) зависит от одной переменной u , то из условия минимума J_{N-1} определяется оптимальное управление на участке $u^*(N-1)$.

Обозначим:

$$\begin{aligned} \varphi_{N-1}(x, N-1) &= \min_{u \in U_{\text{доп}}} J_{N-1} = \\ &= \min \{F(x, u, N-1) + Q(x(N-1) + f(x, u, N-1))\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Таким образом, минимизируя (46), определяется функция

$$\varphi_{N-1}(x, N-1). \quad (48)$$

2. Переходим к интервалу времени $(N-2)T_n \leq t \leq NT_n$.
 На рис. 4 представлен временной интервал:

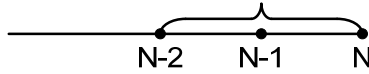


Рис. 4. Временной интервал

Этому интервалу соответствует:

$$J_{N-2} = F(x, u, N-2) + J_{N-1}. \quad (49)$$

Определяем минимум J_{N-2} по $u(N-2)$. Обозначим:

$$\varphi_{N-2}(x, N-2) = \min_{\substack{u(N-1) \in U_{\text{доп}} \\ u(N-2) \in U_{\text{доп}}}} J_{N-2}. \quad (50)$$

3. С учетом определения оптимального управления на интервале до $N-1$, запишем:

$$\begin{aligned} & \varphi_{N-2}(x, N-2) = \\ & = \min \{F(x, u, N-2) + \varphi_{N-1}(x(N-2) + f(x, u, N-2))\}. \end{aligned} \quad (51)$$

В результате минимизации (51) определяется оптимальное управление $u^*(N-2)$.

Продолжая процедуру оптимизации по шагам от конечного момента времени к начальному, получим рекуррентную формулу:

$$\begin{aligned} & \varphi_{N-k}(x, N-k) = \\ & = \min \{F(x, u, N-k) + \varphi_{N-k+1}(x(N-k) + f(x, u, N-k))\}. \end{aligned} \quad (52)$$

Таким образом, минимизация проводится по одной переменной $u(N-k)$ и определяется $u^*(N-k)$. Применяя последовательно формулу (52), в результате на последнем интервале оптимизации получаем $u^*(0)$, зависящую от $x(0) = x_0$.

Алгоритм оптимизации справедлив и для многомерных систем с числом управлений $u_1 \dots u_m$. При этом скаляры x, u, f заменяются на соответствующие векторы и минимизируется функция m переменных, что при компьютерной реализации требует большого объема памяти.

При оптимизации непрерывных систем оптимальное управление определяется на основе уравнения Беллмана. Тогда поведение модели объекта управления описывается уравнением:

$$\dot{x} = f(x, u, t); \quad x(t_0) = x_0; \quad x(t_k) = x_k. \quad (53)$$

Минимизируем функционал следующего вида:

$$J_0 = \int_{t_0}^{t_k} F_0(x, u, t) dt + \varphi_0(x, t_k). \quad (54)$$

Постановка задачи формулируется следующим образом. Необходимо найти $u^*(x, t)$ и $x^*(t)$, используя информацию об $x(t)$ в каждый текущий момент времени. Структура управления имеет вид, представленный на рис. 5.

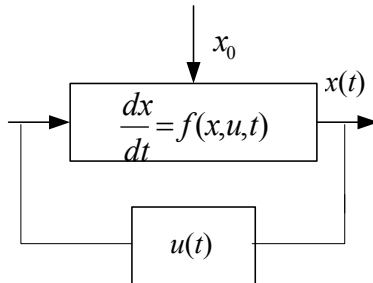


Рис. 5. Структура процесса управления

Достаточным условием минимума функционала (54) является так называемое функциональное уравнение Беллмана для функции $\varphi(x, t)$ с конечными условиями $\varphi_0(x, t_k)$, которые представляют собой терминальный член минимизируемого функционала.

$$\max \left\{ \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x_i} f_i(x, u, t) - F_0(x, u, t) \right\} = 0. \quad (55)$$

При этом $\varphi(x, t_k) = -\varphi_0(x, t_k)$.

Так как первое слагаемое явно не зависит от u , то:

$$u^*(x, t) = \arg \max \left\{ \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x_i} f_i(x, u, t) - F_0(x, u, t) \right\}. \quad (56)$$

При этом:

$$\min J_0 = -\varphi(x_0, t_0). \quad (57)$$

Вывод уравнения Беллмана является полуэвристическим, математически не строгим.

Алгоритм синтеза оптимального управления с полной обратной связью:

1. Записать уравнение Беллмана с граничным условием $\varphi_0(x, t_k)$.
2. Определить структуру $u^*(x, t)$ поиском минимума выражения (55) через производную $\varphi(x, t)$.
3. Подставить $u^*(x, t)$ в выражение (55).
4. Решить полученное выражение в частных производных, что является основной трудностью при решении задачи.

Связь принципа максимума и динамического программирования можно выразить следующим образом. Постановка задачи следующая:

$$\begin{aligned} x &= f(x, u, t), \\ x(t_0) &= x_0, \\ x(t_k) &= x_k. \end{aligned} \quad (58)$$

$$J_0 = \int_{t_0}^{t_k} F_0(x, u, t) dt. \quad (59)$$

Уравнение Беллмана имеет следующий вид:

$$\max_u \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x_i} f_i(x, u, t) - F_0(x, u, t) \right\} = 0. \quad (60)$$

$u^*(t)$ – оптимальное управление.

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x_i} f_i(x, u, t) - F_0(x, u, t) = 0. \quad (61)$$

Продифференцируем (61) по x_j , $j = \overline{1, n}$.

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} f_i(x, u, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_i(x, u, t)}{\partial x_j} - \frac{\partial F_0(x, u, t)}{\partial x_j} = 0. \quad (62)$$

На основе (58) имеем:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} f_i(x, u, t) = \underbrace{\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x_j}}_{\frac{dx_i}{dt}}. \quad (63)$$

Таким образом, (60) перепишем в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x_j} - \frac{\partial F_0(x, u, t)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial f_i(x, u, t)}{\partial x_j} = 0. \quad (64)$$

Обозначим:

$$\Psi_j = \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x_j}. \quad (65)$$

Учтем, что

$$\frac{\partial F_0}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_{n+1}}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (66)$$

$$x_{n+1} = F_0; \quad \Psi_{n+1} = -1. \quad (67)$$

Из (64) следует:

$$\begin{cases} \frac{d\psi_{n+1}}{dt} = 0, \\ \frac{d\psi_j}{dt} = -\sum_{i=1}^{n+1} \psi_i \frac{\partial f_i(x, u, t)}{\partial x_j}, \end{cases} \quad j = \overline{1, n}. \quad (68)$$

Выражения (68) имеют тот же вид, что и принцип максимума, следовательно, соотношение (60) можно записать в следующем виде:

$$\max_U H(x, u, t) = 0. \quad (69)$$

Из (68) следует, что оптимальное управление достигает в каждый момент времени максимума функции Гамильтона. Таким образом, получены все условия принципа максимума.

Метод динамического программирования позволяет получить решение в виде уравнения в частных производных. Принцип максимума позволяет получить оптимальное управление в виде двухточечной краевой задачи для обычных дифференциальных уравнений, решение которых в некоторых случаях проще, чем решение уравнения Беллмана.

3. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов

Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов (АКОР) – это синтез оптимального управления для объекта управления, описывающегося линейной моделью, и квадратичного функционала качества. Математическая модель имеет вид:

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (70)$$

где A, B – матрицы; u принадлежит $U_{\text{доп}}$.

Функционал качества имеет вид:

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_k)Rx(t_k) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_k} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)\Gamma(t)u(t)dt], \quad (71)$$

где Q, R, Γ – матрицы; $u^*(t)$ необходимо найти.

Структура оптимального управления определяется следующим образом. Сравнивая (70) и (71) с постановкой задачи динамического программирования на основе уравнения Беллмана, имеем:

$$\begin{aligned} f(x, u, t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ F_0(x, u, t) &= \frac{1}{2}[x^T Q(t)x + u^T \Gamma(t)u], \\ \varphi_0(x) &= \frac{1}{2}x^T R x. \end{aligned} \quad (72)$$

Учтем такие свойства матриц, как произведение, дифференцирование и транспонирование.

Уравнение Беллмана для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} \max_{u \in U_{\text{доп}}} \left\{ \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \right)^T [A(t)x + B(t)u] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}[x^T Q(t)x + U^T \Gamma(t)u] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (73)$$

$$\varphi(x, t_k) = -\frac{1}{2}x^T R x. \quad (74)$$

Тогда

$$u^*(x, t) = \arg \max \left\{ \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x_i} B(t) u - \frac{1}{2} u^T \Gamma(t) u \right\}. \quad (75)$$

Найдем максимум по уравнению в выражении (75). Дифференцируя по u выражения в квадратных скобках и приравнявая к нулю, получаем структуру оптимального управления:

$$u^*(x, t) = \Gamma^{-1} B^T(t) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t}. \quad (76)$$

Решение уравнения Беллмана (73) в данной постановке задачи ищем в следующем виде:

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2} x^T K(t) x, \quad (77)$$

где $K(t)$ – неизвестная симметричная матрица.

Подставляя (77) в (73) и решая матричное уравнение в частных производных, получим уравнение в векторно-матричном виде для матрицы $K(t)$, называемое уравнением Риккати:

Уравнение Риккати имеет вид:

$$\dot{K}(t) = -KA - A^T K - KB\Gamma^{-1}B^T K + Q, \quad (78)$$

где $K(t_k) = -R$.

Решая уравнение Риккати с учетом (76), можно получить оптимальное управление, которое имеет вид:

$$u^*(x, t) = \Gamma^{-1} B^T K(t) x(t). \quad (79)$$

Иногда вводят обозначение $p = -K$, тогда

$$\dot{p} = -pA - A^T p + pB\Gamma^{-1}B^T p + Q. \quad (80)$$

Данная постановка задачи АКОР определяет вид закона управления (79). Сложность решения задачи АКОР становится очевидной при решении матричного уравнения Риккати (78) или (80) в обратном времени.

Для упрощения решения задачи Красовский А. А. предложил использовать так называемый функционал обобщенной работы, отличающийся от функционала Летова-Калмана наличием в подынтегральной части дополнительного слагаемого:

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_k) R x(t_k) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} [x^T Q(t) x(t) + u^T(t) \Gamma(t) u(t) + u_{\text{опт}}^T(t) \Gamma(t) u_{\text{опт}}] dt. \quad (81)$$

В этом случае уравнение Риккати превращается в линейное уравнение. В установившемся режиме дифференциальные уравнения превращаются в алгебраические.

Метод АКОР позволяет использовать так называемую теорему разделения при линейной стохастической модели процесса вида:

$$\dot{x}(t) + A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)\xi(t), \quad x(t_0) = x_0(t), \quad (82)$$

где $\xi(t)$ – белый шум.

Математически доказывается, что оптимальная система управления состоит из последовательно соединенных оптимального фильтра (фильтра Калмана) и оптимального регулятора.

Пример.

Схема описывается векторно-матричным уравнением следующего вида: $\dot{x} + Ax + Bu$, где:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}. \quad (83)$$

$$J_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + \Gamma u^2) dt. \quad (84)$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}. \quad (85)$$

$$u^* = -\frac{1}{\Gamma}(P_{12}x_1 - P_{22}x_2) = \Gamma^{-2}B^T Px. \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{P_{11}P_{12}}{P_{21}P_{22}} \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} \frac{P_{11}P_{12}}{P_{21}P_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 01 \\ 00 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 00 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{P_{11}P_{12}}{P_{21}P_{22}} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{P_{11}P_{12}}{P_{21}P_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\Gamma} [01] \begin{bmatrix} \frac{P_{11}P_{12}}{P_{21}P_{22}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1 0 \\ -q_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (87)$$

$$P(t_k) = R = 0. \quad (88)$$

$$\begin{aligned} P_{11} &= P_{12} \frac{b}{\Gamma} P_{22} - q_1; \\ P_{12} &= -P_{21} = -aP_{11} + P_{12} \frac{b}{\Gamma} P_{22}; \\ P_{22} &= 2aP_{12} + 2P_{22}^2 \frac{b}{\Gamma} - q_2. \end{aligned} \quad (89)$$

Скалярные уравнения для p могут решаться аналитически или численно.

4. Оптимизация управления методами вариационного исчисления

Вариационное исчисление – раздел математики, в котором рассматриваются задачи исследования максимума или минимума функционала и определение функций, на которых эти максимум и минимум достигаются.

В отличие от принципа максимума и метода динамического программирования, методы вариационного исчисления, как правило, не дают требуемого решения в задачах с ограничениями. При этом необходимо учитывать основные понятия вариационного исчисления: функционал, непрерывность и линейность функционала.

Например, для функционала $J_0 = \int_{t_0}^{t_k} F_0(x, u, t) dt$ каждой функции

$x(t)$ соответствует число J_0 .

Дифференциал функционала dJ_0 – главная линейная часть функционала. Вариация функционала ΔJ_0 – бесконечно малое приращение. $\delta J_0 = dJ_0$.

Решение задачи оптимального управления.

Рассмотрим пример вариационного исчисления для одной из задач. Такая задача рассматривалась ранее при выводе принципа максимума.

Объект управления задан в следующем виде:

$$\begin{aligned}x &= f(x, u, t), \\x &\in R^n, u \in R^m, m \leq n,\end{aligned}\tag{90}$$

где R – евклидово пространство, компонентами которого являются векторы.

Функционал качества имеет вид:

$$J_0 = \varphi_0(x, t_2) + \int_{t_1}^{t_2} F_0(x, u, t) dt.\tag{91}$$

Здесь имеет место задача со свободным правым концом и заданным временем переходного процесса.

Заданы начальные условия:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= t_k, \\ t_0 &= t_1, \quad t_k = t_2. \end{aligned} \quad (92)$$

Решение задачи представим в виде алгоритма.

1. Образует вспомогательный критерий качества прибавлением к (91) правых частей уравнения (90) с некоторыми множителями, составляющими вектор $\lambda(t) = [\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)]^T$.

$$\lambda = \varphi_0(x(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ F_0(x, u, t) + \lambda^T(t) [f(x, u, t) - \dot{x}(t)] \right\} dt. \quad (93)$$

Необходимо найти такое оптимальное управление, при котором обеспечивается минимум J_0 : $u(t) \in U_{\text{доп}} \cdot \lambda_i, i = \overline{1, n}$ – неопределенные множители Лагранжа.

2. Введем скалярную функцию-Гамильтониан:

$$H(x, u, \lambda, t) = F_0(x, u, t) + \lambda^T(t) f(x, u, t). \quad (94)$$

3. Интегрируя по частям последнее слагаемое в правой части (93) и с учетом (94), получим:

$$\begin{aligned} \pi &= \varphi_0(x(t_2)) + \lambda^T(t_1)x(t_1) - \lambda^T(t_2)x(t_2) + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left\{ H(x, u, \lambda, t) + \lambda^T(t)x(t) \right\} dt. \end{aligned} \quad (95)$$

4. Найдем вариацию (полный дифференциал) критерия качества:

$$\begin{aligned} \delta\pi &= \underbrace{\left\{ \frac{\partial \varphi_0(x(t_2))}{\partial x(t_2)} - \lambda^T(t_2) \right\}}_{=0} \delta x(t_2) + \lambda^T(t_1) \delta x(t_1) + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \underbrace{\left[\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial x(t)} + \dot{\lambda}^T(t) \right]}_{=0} \delta x(t) + \frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial u(t)} \delta u(t) \right\} dt. \end{aligned} \quad (96)$$

Для того чтобы исключить влияние вариаций $\delta x(t)$, вызванных вариациями $\delta u(t)$, на вариации критерия $\delta \pi$, выберем векторный множитель $\delta \lambda$ таким, чтобы коэффициенты при $\lambda(t)$ и $\delta x(t_2)$ обратились в ноль.

$$\dot{\lambda}(t) = \left[\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial x(t)} \right]^T; \quad (97)$$

$$\lambda(t_2) = \left[\frac{\partial \varphi_0(x(t_2))}{\partial x(t_2)} \right]^T. \quad (98)$$

Система (97)–(98) называется сопряженной системой. При таком выборе λ уравнение (96) примет вид:

$$\delta \pi = \lambda^T(t_1) \delta x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial u(t)} \delta u(t) dt. \quad (99)$$

Выражение (99) называется первой вариацией критерия качества π .

При получении решения системы (90), $\pi = J_0 \Rightarrow \delta \pi = \delta J_0$. Если J_0 достигает экстремума, то $\delta J_0 = 0$ для произвольных $\delta u(t)$. Так как в рассматриваемой задаче условие $x(t_1)$ задано, то вариация $\delta x(t_1) = 0$, следовательно, условие стационарности критерия качества J_0 можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial u(t)} = 0, \quad t \in [t_1, t_2]. \quad (100)$$

Уравнения (97)–(98) и (100) известны в вариационном исчислении как уравнения Эйлера-Лагранжа.

Таким образом, для определения оптимального управления необходимо решить двухточечную краевую задачу.

С учетом (90), (94) и (97)–(98) запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t), \\ \dot{\lambda}(t) = - \left[\frac{\partial F_0(x, u, t)}{\partial x(t_2)} \right]^T - \left[\frac{\partial f_0(x, u, t)}{\partial x(t_2)} \right]^T, \end{cases} \quad (101)$$

где

$$\dot{\lambda}(t) = - \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (102)$$

Оптимальное управление с учетом (100) определяется из следующего условия:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \left[\frac{\partial F_0(x, u, t)}{\partial x(t)} \right]^T + \left[\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u} \right]^T \lambda(t) = 0. \quad (103)$$

Имеется двухточечная краевая задача с n краевыми условиями $x(t_1) = x_1$ на левом конце и n краевыми условиями $\lambda(t_2) = \left[\frac{\partial \varphi_0(x(t_2))}{\partial x(t_2)} \right]^T$ на правом.

Для того чтобы критерий качества J_0 достигал локального минимума, недостаточно выполнения (101), необходимо, чтобы вторая вариация этого функционала была неотрицательной для всех значений $\delta u(t)$, т. е. $\delta^2 J_0 = \delta$ и $(t) \geq 0$ при условии $\delta(x(t) - f(x_1, u_1, t)) = 0$.

При сравнении полученного решения с результатом применения принципа максимума видна аналогия в представлении результата (двухточечная краевая задача).

Определение оптимального управления линейными объектами с квадратичным функционалом методами вариационного исчисления производится следующим образом. Задача состоит в минимизации квадратичного функционала

$$J_0 = x^T(t_k) R x(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} (x^T(t) Q(t) + u^T(t) \Gamma(t) u(t)) dt. \quad (104)$$

Система описывается уравнением вида:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(t_0) = x_0, t \in [t_0, t_k], \end{cases} \quad (105)$$

где x_0, t_0, t_k заданы.

Предполагается, что матрицы R, Q, Γ неотрицательные. Для определения оптимального управления используем результаты, полученные при рассмотрении предыдущего вопроса, которые в данном случае имеют вид:

$$\begin{cases} H(x, u, \lambda, t) = x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)\Gamma(t)u(t) + \\ + \lambda^T(t)[A(t)x(t) + B(t)u(t)], \\ \lambda(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T(t)x(t) - 2Q(t)x(t), \\ \lambda(t_k) = 2Rx(t_k), \\ \frac{\partial H}{\partial u} = B^T(t)\lambda(t) + 2\Gamma(t)u(t) = 0. \end{cases} \quad (106)$$

На основе условий (105), (106) применим описываемый в предыдущем пункте метод. Алгоритм решения задачи следующий. Из последнего выражения (106) следует, что оптимальное управление вычисляется по формуле:

$$u^* = \frac{1}{2}\Gamma^{-2}(t)B(t)\lambda(t). \quad (107)$$

Для решения двухточечной краевой задачи будем искать функцию $\lambda(t)$ в следующем виде:

$$\lambda(t) = 2P(t)x^*(t). \quad (108)$$

Здесь $P(t)$ подлежит определению.

Продифференцируем обе части (108) по t с учетом (107). Подставив (107), получим уравнение для неизвестной функции $P(t)$, в котором индекс t для простоты опустим:

$$\begin{cases} \dot{P} = -PA - A^T P - PB_1 P - Q, \\ P(t_k) = R. \end{cases} \quad (109)$$

Оптимальное управление будет иметь вид:

$$u^*(x, t) = -\Gamma^{-1}(t)B^T(t)P(t)x^*(t). \quad (110)$$

Сложность в определении оптимального управления – вычисление матрицы $P(t)$ на основе уравнения Риккати, в котором заданы конечные условия. Управление вида (110) является С-управлением (управлением с обратной связью). Таким образом, структура управления имеет тот же вид, что и результат, полученный ранее на основе метода динамического программирования с использованием уравнения Беллмана. Существует ряд других задач, для которых целесообразно применить методы вариационного исчисления (другие критерии и ограничения).

5. Синтез регуляторов линейных систем управления

Синтез регуляторов (корректирующих устройств) – задача теории управления, так как необходимо учитывать особенности конкретных систем автоматического управления (САУ). Другие задачи (рассматриваемые ранее) решаются другими науками. В инженерной практике необходим труд большого числа специалистов для синтеза. Такие задачи аналитически не решаются.

Частные задачи синтеза регуляторов делятся на три группы:

1. Стабилизация объекта управления, повышение его запаса устойчивости.
2. Обеспечение необходимой точности воспроизведения входных воздействий в установившемся режиме работы САУ.
3. Обеспечение заданного качества САУ в переходном режиме.

Большое число методов синтеза регуляторов разработано для линейных стационарных систем. Они в той или иной мере основаны на аппарате математического программирования – разделе математики, посвященном методам поиска экстремумов функций многих переменных при наличии ограничений в виде равенств или неравенств. Решение задач этими методами часто носит эвристический характер. При синтезе регуляторов используются положения и понятия теории автоматического управления: управление, управляемые переменные, качество управления.

Примеры обеспечения качества управления:

- обеспечение близости $x(t)$ к $x_{\text{зад}} = \text{const}$ (задача стабилизации);
- обеспечение близости $x(t)$ к $x_{\text{зад}}(t)$ – задача программного управления.

Структура САУ включает в себя элементы, без которых невозможна работа системы (функционально необходимые элементы). При этом дополнительные элементы, как правило, не обеспечивают требуемого режима работы без соответствующего регулятора. Существуют устойчивые системы, способные возвращаться к некоторому постоянному состоянию после прекращения воздействия, однако в управляемых объектах наличие регуляторов обязательно.

Качество процессов управления в линейных САУ обычно формулируется следующим образом. Идеальная система, точно воспроизводящая входной сигнал, представляет собой передаточную функцию, равную единице на всех частотах, так как выходной сигнал –

точная копия входного сигнала. Однако таких систем, как правило, не существует.

На практике идеальной считается система, реакция которой на входной сигнал играет роль запаздывающего звена: $y(t) = kx(t - t_0)$. Это означает, что выходной сигнал отличается от входного по амплитуде и запаздывает на некоторое время.

Реальная амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) имеет следующий вид (рис. 6):

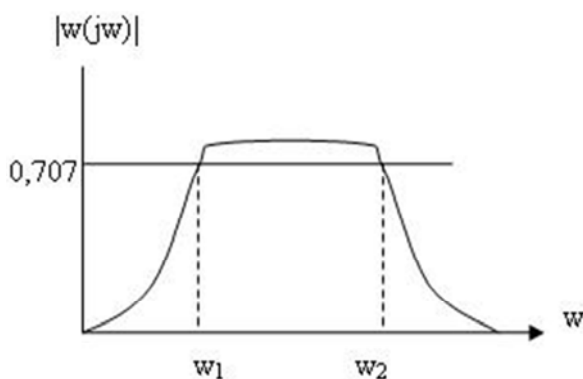


Рис. 6. Реальная амплитудно-частотная характеристика

При решении практических задач обязательно учитываются вопросы качества САУ. Напомним некоторые ключевые положения теории автоматического управления.

1. Устойчивость системы. Это свойство является одним из основных условий работоспособности любой САУ. Она означает, что переходные процессы в системе будут затухающими. Для анализа устойчивости используются различные методы. Удобно пользоваться амплитудно-фазо-частотными характеристиками.

2. Качество переходного процесса при воздействии ступенчатой функции определяется переходной характеристикой (рис. 7).

Качество переходного процесса характеризуется следующими параметрами:

1. Время управления t_j – минимальное время, в течение которого

$$|h(t) - h_{уст}| \leq \Delta.$$

2. Перерегулирование $\sigma = \frac{h_{\max_1} - h_{\text{уст}}}{h_{\text{уст}}} \cdot 100\%$ – отклонение от установившегося значения.

3. Частота колебаний: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{t}$.

4. Число колебаний $h(t)$ за время t .

5. Время нарастания переходного процесса: t_n – абсцисса первой точки пересечения $h(t)$ с $h_{\text{уст}}$;

6. Декремент затухания – обозначается χ или ξ :

$$\xi = \frac{|h_{\max_1} - h_{\text{уст}}|}{|h_{\max_1} - h_{\text{уст}}|}. \quad (111)$$

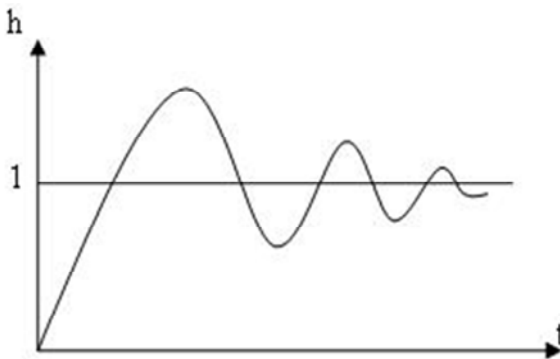


Рис. 7. Переходная характеристика

На рис. 8 представлен вид амплитудной характеристики САУ.

Иногда в качестве показателя качества рассматривают показатель колебательности вида $M = \frac{A_{\max}(\omega)}{A_0}$.

Корневые методы оценки качества управления основаны на том, что характер переходного процесса оценивается по полюсам корней характеристического уравнения замкнутой САУ.

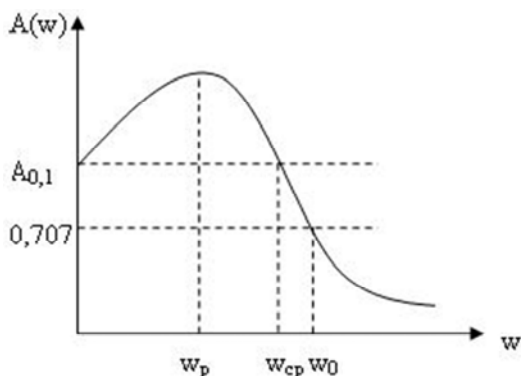


Рис. 8. Амплитудная характеристика САУ:
 ω_0 – полоса пропускания; ω_{cp} – частота среза; ω_p – резонансная частота

Большинство нелинейных систем управления при некоторых условиях (на определенных участках фазовой траектории) могут быть представлены как линейные. При проектировании САУ применяют следующие способы коррекции динамических характеристик:

1. Последовательная коррекция (регулятор включен последовательно к объекту управления). Преимущество: проще реализуемо, но чувствительней к помехам. Недостатки: предъявляют повышенные требования к основным элементам системы.

2. Параллельная коррекция (регулятор включен параллельно к объекту управления). Такие САУ меньше зависят от помех, проще обеспечиваются питанием, но на практике элементы обратной связи сложнее, более громоздки и требуют больших коэффициентов усиления.

3. Корректирующая обратная связь (регулятор – элемент местной обратной связи).

4. Комбинированная коррекция.

При синтезе регуляторов используются следующие ключевые понятия:

- эталонный оператор системы, обеспечивающий требуемое качество процесса;

- эталонный выходной сигнал при эталонном входном сигнале.

В задачах синтеза регуляторов выделяют следующие задачи:

- обеспечение устойчивости (стабилизация);

- повышение запаса устойчивости;

- повышение точности управления в устойчивом режиме;
- улучшение качества переходного процесса.

Таким образом, при синтезе САУ необходимо обосновать структуру схемы системы управления и выбор способов технической реализации этой схемы, отвечающих динамическим, энергетическим, эксплуатируемым требованиям.

Этапы создания САУ можно представить в следующем виде:

1. Формулировка цели управления, выбор управляемых переменных, формулировка требований к ним.
2. Выбор структуры схемы, места включения корректирующих устройств. При этом учитываются надежность, габариты, масса и другие факторы.
3. Построение математической модели функционально необходимых элементов, задачи идентификации (параметрическая или непараметрическая).
4. Выбор эталонной передаточной функции или переходной характеристики.
5. Выбор и обоснование структуры корректирующих устройств.
6. Расчет численных параметров корректирующих устройств.
7. Исследование синтезируемой САУ с точки зрения достижения цели управления.
8. Формирование технического задания на эскизное проектирование и создание опытных образцов, серийное производство.

Методы определения структуры регуляторов можно разделить на следующие группы:

1. Стабилизация объектов введением обратной связи (ОС) по производным. Структурная схема объекта управления, охваченного ОС, представлена на рис. 9.

Характеристическое уравнение исходной системы имеет вид:

$$D_0(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0. \quad (112)$$

Для скорректированной системы характеристическое уравнение имеет вид:

$$D(s) = s^n + (d_{n-1} + k \cdot k_{n-1})s^{n-1} + \dots + (d_1 + k \cdot k_1)s + (d_0 + k \cdot k_0). \quad (113)$$

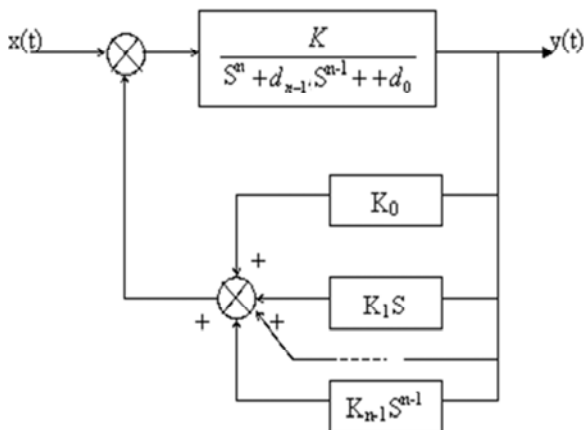


Рис. 9. Структурная схема объекта, охваченного ОС

Таким образом, видим, что структура характеристического уравнения та же, но изменились его коэффициенты. Путем изменения коэффициентов k_0, k_1, k_{n-1} можно добиться равенства многочлена (113) эталонному (требуемому) характеристическому многочлену. Расположение корней характеристического уравнения замкнутой схемы обеспечивается обратной связью до $(n - 1)$ -го порядка (необязательно включаются все производные до $(n - 1)$ -го порядка).

Пример – колебательное звено (рис. 10).

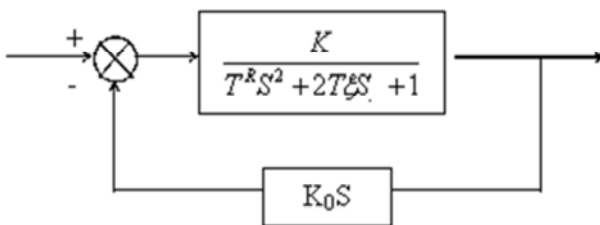


Рис. 10. Колебательное звено

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)},$$

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + \underbrace{(2T\xi + K \cdot K_0)}_{2T\xi_3} s + 1} = \frac{k}{T^2 s^2 + 2T\xi_3 s + 1}. \quad (114)$$

Из этого следует, что эталонный декремент затухания имеет вид:

$$\xi_{\text{Э}} = \frac{2T\xi + K \cdot K_0}{2T} = \xi + \frac{K \cdot K_0}{2T}. \quad (115)$$

2. Изменение динамических свойств системы введением дифференцирующих звеньев в прямую цепь. Пример системы управления после добавления дифференцирующего звена представлен на рис. 11.

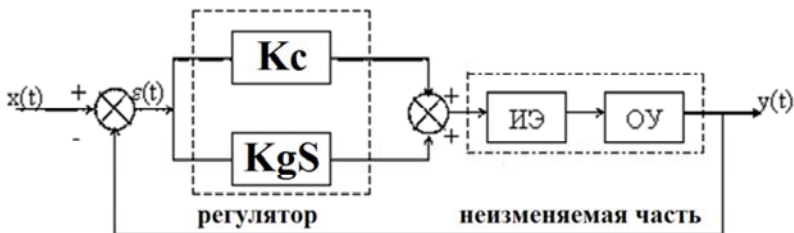


Рис. 11. Пример системы после добавления дифференцирующего звена

Наличие дифференцирующего звена в прямой цепи позволяет формировать управляющий сигнал $u(t)$ с прогнозом, то есть $\xi(t) \uparrow \rightarrow \varepsilon > 0 \rightarrow u(t) \uparrow$ и наоборот.

Подбором k_g и k_c изменяют динамические свойства системы.

3. Изменение коэффициентов усиления и интеграторов в прямой цепи оказывает влияние на работу САУ в установившемся режиме.

Установившаяся ошибка САУ определяется выражением:

$$\varepsilon(t) = c_0 x(t) + c_1 \dot{x}(t) + \frac{1}{2!} c_2 \ddot{x}(t) + \dots + \frac{1}{m!} \cdot c_m x^{(m)}(t), \quad (116)$$

где c_0, c_1, \dots, c_m – коэффициенты ошибок, соответственно по положению, по скорости и т. д.

Из теории автоматического управления известна формула:

$$c_n = \frac{d^k}{dS^k} [1 - W(s)] \Big|_{s=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (117)$$

при $s = 0$ и $n = 0, 1, 2, \dots$

Здесь $W(s)$ – передаточная функция замкнутой системы.
При этом

$$c_0 = \frac{1}{1+k}, \quad (118)$$

где k – коэффициент усиления разомкнутой системы.

Из (118) видно, что $k \uparrow \rightarrow c_0 \downarrow$. На основе (117) легко показать, что при включении в прямую цепь одного интегратора получим $c_0 = 0$, двух интеграторов – $c_0 = c_1 = 0$ и т. д. При этом необходимо проводить исследования по обеспечению устойчивости системы.

Влияние местных обратных связей (ОС) оказывает существенное влияние на характеристики системы управления. Основные виды ОС подразделяются следующим образом:

1. Жесткая ОС $W_{oc}(s) = k_{oc}$ действует в переходном и установившемся режимах, уменьшает инерционность системы, уменьшается коэффициент передачи.

2. Инерционная жесткая ОС $W_{oc}(s) = \frac{k_{oc}}{T_{oc}s + 1}$ превращает усиленное звено в реальное дифференцирующее, с помощью которого можно получить производную входного сигнала.

3. Инерционная гибкая ОС

$$W_{oc}(s) = \frac{K_{oc}s}{T_{oc}s + 1} \quad (119)$$

дает возможность получить дифференцирующее звено, уменьшая инерционность системы.

4. Гибкая ОС $W_{oc}(s) = k_{oc}s$ действует в переходных режимах, увеличивает инерционность.

Рассмотрим простейшие математические модели регуляторов и проведем их анализ.

Существуют следующие основные типы регуляторов:

1. П-регулятор (пропорциональное корректирующее устройство) (П-управление):

$$W_{кп}(s) = K. \quad (120)$$

2. И-регулятор (интегральное корректирующее устройство) (И-управление):

$$W_{\text{кy}}(s) = \frac{K_u}{s} = \frac{1}{T_u s}, \quad (T_u = \frac{1}{K_u}). \quad (121)$$

3. ПИ-регулятор (пропорционально-интегральное корректирующее устройство) (ПИ-управление):

$$W_{\text{кy}}(s) = K + \frac{K_u}{s} = K + \frac{1}{T_u s}. \quad (122)$$

4. ПД-регулятор (пропорционально-дифференциальное корректирующее устройство) (ПД-управление):

$$W_{\text{кy}}(s) = K + K_D s = K + \frac{1}{T_D} s. \quad (123)$$

5. ПИД-регулятор (пропорционально-интегрально-дифференциальное корректирующее устройство) (ПИД-управление):

$$W_{\text{кy}}(s) = K + \frac{K_u}{s} + K_D s. \quad (124)$$

Возможны более сложные структуры регулятора. Необходимо учесть следующие факторы. Регулятор не должен повышать действие на систему помех. Включение в прямую цепь аperiodического звена повышает устойчивость системы, если постоянная его времени больше постоянных времени элементов этой цепи.

По своим возможностям ПИД-регулятор является наиболее универсальным, позволяющим реализовать различные задачи управления.

Примеры динамических характеристик некоторых регуляторов приведены на рис. 12.

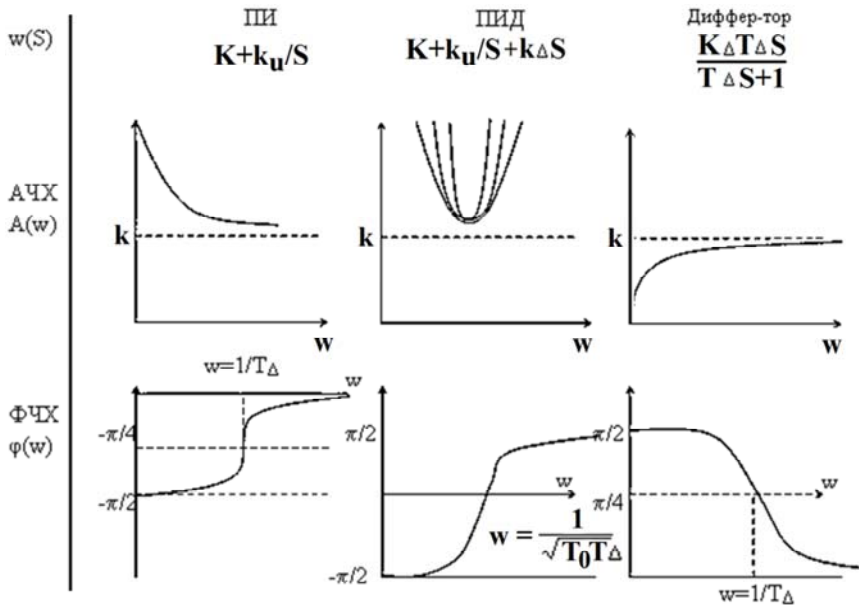


Рис. 12. Динамические характеристики некоторых регуляторов

При решении задач расчета параметров регуляторов в линейных системах существует два подхода. Первый подход состоит в том, что структура и параметры регулятора определяются точно, если заданы эталонные передаточные функции системы и передаточная функция объекта управления (пример такой системы представлен на рис. 13).

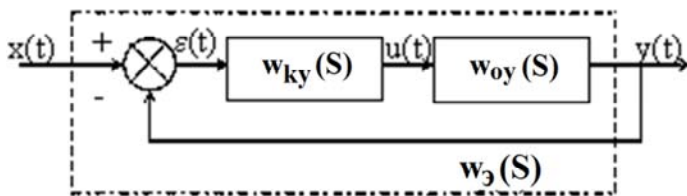


Рис. 13. Пример системы с точно определенной структурой и параметрами регулятора

Или в более развернутом виде:

$$W_3(s) = \frac{W_{\text{кy}}(S)W_0(s)}{1 + W_{\text{кy}}(S)W_0(s)},$$
$$W_{\text{кy}}(s) = \frac{W_3(s)}{W_{\text{oy}}(s)(1 - W_3(s))}.$$
(125)

Реализация такого подхода дает точное решение, но требуется учесть следующее: неточное определение передаточной функции корректирующего устройства может нарушить устойчивость системы, могут проявиться новые свойства и сложность реализации регулятора. Сложность реализации данного подхода заключается в точном определении эталонной передаточной функции.

Вторая основная идея состоит в обеспечении приближенного равенства эталонной и реальной передаточных функций. При этом структура регулятора определяется проектировщиком, его творчеством и опытом.

Выбор методов синтеза может быть основан в конкретном случае на построении алгоритма решения задачи синтеза. Основные методы синтеза регуляторов следующие:

1. Построение эталонной передаточной функции в процессе оптимизации задач.
2. Частотный метод синтеза корректирующего устройства.
3. Применение принципа динамической компенсации.
4. Спектральный метод синтеза корректирующего устройства.
5. Метод нелинейного программирования при расчете параметров корректирующего устройства.
6. Метод порождающих функций.
7. Метод моментов.

6. Синтез дискретных регуляторов

Внедрение микропроцессорной техники в системы управления – это настоящее и будущее. При этом часть элементов системы в силу особенностей физических процессов невозможно заменить цифровыми. Таким образом, имеет место класс непрерывно-дискретных систем (гибридных). Они обладают свойствами, отличающимися как от непрерывных систем, так и от дискретных.

Непрерывная часть таких систем описывается дифференциальными уравнениями, а дискретная – разностными уравнениями. Такое смешанное описание, дополненное математическими моделями цифро-аналоговых (ЦАП) и аналого-цифровых преобразователей (АЦП), представляет определенную трудность при решении задач анализа и синтеза.

Существует два подхода в практике синтеза цифровых регуляторов:

1. Представление всей системы дискретной моделью, описываемой разностными уравнениями, и на основе этого – синтез дискретного регулятора.

2. Описание системы дифференциальными уравнениями, синтез непрерывного регулятора и дальнейшая реализация его с помощью информационных систем.

Оба подхода широко используются, имея свои достоинства и недостатки.

Процесс, управляемый с помощью ЭВМ, может представляться в следующем виде (рис. 14).

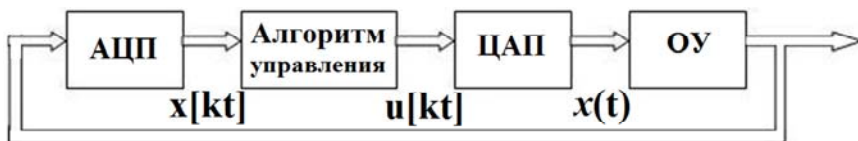


Рис. 14. Процесс управления с помощью ЭВМ

АЦП осуществляет квантование по времени и по уровням сигнала $x(t)$. ЦАП формирует непрерывный сигнал, являясь экстраполятором.

При синтезе регуляторов квантование по уровню, как правило, не учитывается, так как его учет предполагает нелинейное описание

системы, что значительно усложняет задачу. Квантование по уровню учитывают при анализе спроектированных систем.

Отметим некоторые важнейшие соотношения:

1. Квантование по времени с постоянным шагом T заменяет непрерывный сигнал $x(t)$ импульсной последовательностью:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT), \quad (126)$$

где $\delta(t)$ – единичная импульсная функция.

2. Применяя к сигналу (126) преобразование Лапласа, получим формулу прямого дискретного преобразования Лапласа:

$$x^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-skT}. \quad (127)$$

3. Спектр непрерывного сигнала $x(j\omega)$ после квантования меняется существенно:

$$x^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x \left[j \left(\omega + \frac{2\pi}{T} k \right) \right]. \quad (128)$$

Из выражения (128) следует теорема Котельникова. Выделение непрерывного сигнала частотой ω_0 из квантованной последовательности осуществляется при выполнении соотношения:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{T} \geq 2\omega_0, \quad (129)$$

где ω_k – частота квантования.

Выражение (128) характеризует эффект переноса частот, проявляющийся в том, что высокочастотная помеха, не влияющая на непрерывную систему (фильтруемая ее инерциальными свойствами), действует на дискретную систему в области низких частот. Нежелательные влияния эффекта переноса частот компенсируются введением дополнительных фильтров.

4. Подстановка

$$z = e^{sT} \quad (130)$$

в формулу (127) дает формулу прямого z -преобразования:

$$x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}, \quad (131)$$

обозначаемое

$$\begin{cases} x(z) = z\{x(kT)\}, \\ x(kT) = z^{-1}\{k(z)\}. \end{cases} \quad (132)$$

Существует два подхода к синтезу дискретных регуляторов: на основе дискретных или непрерывных моделей.

Дискретная модель получается при рассмотрении процесса в тактовые моменты времени.

В качестве примера рассмотрим экстраполятор нулевого порядка, запоминающий значение поступающего сигнала в течение тактового периода. Экстраполятор имеет следующую передаточную функцию:

$$W_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}. \quad (133)$$

Задача синтеза регулятора решается рассмотрением дискретной модели, описываемой z -передаточной функцией:

$$W_0(z) = z\{W_0(s)W_{0y}(s)\}, \quad (134)$$

где $z\{\dots\}$ – z -преобразование выражения в фигурных скобках.

При необходимости из z -передаточной функции можно получить разностные уравнения:

$$x[(k+1)T] = Ax(kT) + Bu(kT). \quad (135)$$

Матрицы A и B определяются на основе соответствующих матриц непрерывных уравнений состояния. Это отдельная непростая задача.

Использование дискретной модели дает точное представление о движении объекта в тактовые моменты и не содержит информации о движении системы между тактовыми точками, что приводит к нежелательным явлениям («скрытые раскачивания»).

Альтернативный подход основан на решении задачи синтеза в рамках непрерывной модели с последующей реализацией цифровыми методами. При этом изменения, внесенные в схему математической модели, представляют в виде дополнительного запаздывания, равного половине периода квантования (это доказывается аналитически). В этом случае синтез регуляторов выполняют для так называемого модифицированного объекта, который отличается от исходного наличием запаздывающего звена

$$W_0^M(s) = W_0(s)e^{-s\frac{T}{2}}. \quad (136)$$

При этом частота квантования должна быть существенно больше диапазона рабочих частот системы управления.

При синтезе управлений многомерных дискретных систем необходимо учитывать их особенности. В отличие от непрерывных систем, рассматриваемых в классической теории управления, здесь появляются специфические свойства, так как задачи синтеза решаются при выполнении следующих условий: управляемость, достижимость, наблюдаемость, восстанавливаемость.

Система управляема, если существует управляющая последовательность, переводящая ее из произвольного состояния в начальное за конечное время. Система имеет свойство достижимости, если существует управляющая последовательность, переводящая ее из начального состояния в желаемое за конечное время.

Все непрерывные системы обладают свойством достижимости, а дискретная система, описываемая уравнением (136), будет управляема и достижима, если матрица A – невырожденная.

$$\det[A] = |A| \neq 0. \quad (137)$$

Критерий достижимости находится на основе уравнения (135), представленного в виде:

$$\begin{aligned}
 X^*(n) &= A^n X(0) + A^{n-1}Bu(0) + \dots + Bu(n-1) = A^n x(0) + Q_c U, \\
 Q_c &= [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B], \\
 U &= [u(n-1) \ u(n-2) \ \dots \ u_0]^T.
 \end{aligned}
 \tag{138}$$

Q_c – составная матрица, состоящая из подматриц. Система будет достижимой, если матрица Q_c имеет ранг размерности вектора состояния.

Состояние системы $X(k_0)$ наблюдаемо, если оно может быть определено по будущим значениям выходной переменной при $k > k_0$, интервал (k, k_0) – конечен. Состояние системы $X(k_0)$ восстанавливаемо, если оно может быть определено по прошлым значениям выходной переменной при $k < k_0$, интервал (k, k_0) – конечен.

Наблюдаемость и восстанавливаемость конкретной системы определяется рангом соответствующих матриц.

Дискретная система, полученная квантованием непрерывной системы, может быть ненаблюдаемая, даже если соответствующая непрерывная система наблюдаема.

Алгебраический синтез дискретных регуляторов производится, как правило, на основе дискретных моделей в пространстве «вход – выход». При этом необходимо отметить, что существуют также методы синтеза регуляторов в «пространстве состояний».

Цели синтеза дискретных регуляторов близки к рассмотренным ранее целям, применительно к непрерывным регуляторам. В частности, регулятор должен, например, обеспечить заданные значения характеристического полинома замкнутой системы. В более общей постановке требуется с помощью регулятора получить заданную z -передаточную функцию замкнутой системы.

Пусть объект управления описывается передаточной функцией $W_0(z)$ и включает в себя экстраполятор \mathcal{E}_0 , а также необходимые измерители, исполнительные элементы и фильтры (все вместе $W_{об}(z)$), как показано на рис. 15.

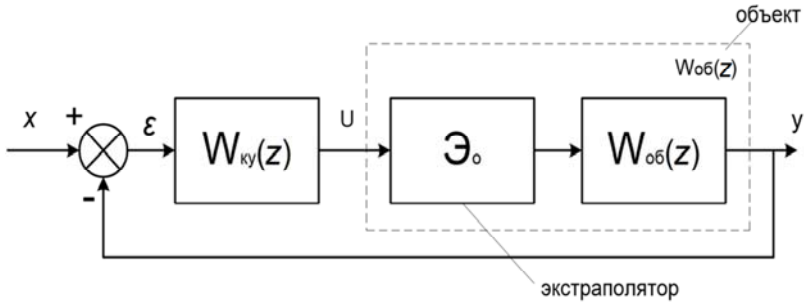


Рис. 15. Модель объекта управления с измерителями, исполнительными элементами и фильтрами

Традиционный подход предполагает выбор регулятора $W_{ky}(z)$ в прямой цепи так, чтобы замкнутая система отвечала эталонной передаточной функции:

$$W^3(z) = \frac{W_{ky}(z)W_0(z)}{1 + W_{ky}(z)W_0(z)}. \quad (139)$$

Разрешая выражение (139) относительно передаточной функции регулятора по аналогии с непрерывными системами, получим:

$$W_{ky}(z) = \frac{1}{W_0(z)} \cdot \frac{W^3(z)}{1 - W^3(z)}. \quad (140)$$

Синтез регулятора выполняется на первый взгляд тривиально, однако следует соблюдать осторожность при выборе эталонной системы. При выборе эталонной передаточной функции $W^3(z)$ придется учитывать ряд ограничений: регулятор должен быть физически реализуемым, порядок числителя его передаточной функции должен учитывать разность порядков знаменателя и числителя объекта управления.

Если характеристический многочлен объекта управления содержит нули или полюсы вне единичного круга, то простое сокращение их с помощью регулятора недопустимо, поскольку гарантированно приводит к появлению таких корней в характеристическом уравнении замкнутой системы, и, следовательно – к ее неустойчивости. Это нужно учитывать при синтезе.

Алгебраические методы синтеза в пространстве «вход – выход» появились раньше тех же методов в «пространстве состояний», отличающихся внутренним представлением систем в отличие от внешнего представления в пространстве «вход – выход». В пространстве состояний система описывается, как правило, разностными уравнениями. Оба подхода эффективно дополняют друг друга при решении задач управления.

Дискретная реализация непрерывных регуляторов имеет широкое практическое применение. Необходимость реализации аналоговых регуляторов на микропроцессорах возникает, например, при модернизации эксплуатируемых технических средств (систем). Расширение или изменение области и условий применения оборудования заставляет менять непрерывные управляющие устройства на компьютерные системы. С другой стороны, проектирование непрерывных регуляторов десятки лет проводилось классическими методами с использованием частотных характеристик и прозрачной физической интерпретацией результатов. Представляется естественным использование накопленного опыта проектирования аналоговых регуляторов при синтезе цифровых управляющих устройств.

Напомним, что непрерывный регулятор, реализуемый на ЭВМ, выбирается для модифицированного объекта, где учитывается влияние запаздывания в цепях преобразователей и процессора. Поэтому выбор периода квантования предшествует синтезу управляющего устройства. При выборе частоты (периода) квантования ориентируются на теорему Котельникова.

Известно достаточно большое число рекомендаций по назначению периода квантования, зависящего от физического характера управляемых процессов и особенностей системы. В практике управления получило распространение следующее правило: частота квантования должна быть на порядок больше полосы частот объекта управления. Поскольку построение частотной характеристики управляемого объекта при проектировании систем частотными методами является необходимым этапом, можно считать известными и полосу пропускания системы, и определяемый ею диапазон рабочих частот.

Период квантования является конструктивным параметром, и при его выборе принимают компромиссные решения из-за иных противоречивых факторов. С одной стороны, уменьшение периода квантования ограничивает допустимую сложность алгоритма и число

обслуживаемых каналов управления (при работе в режиме разделения времени). С другой стороны, увеличение периода квантования увеличивает временное запаздывание в каналах преобразования и обработки сигналов и приводит к возрастанию информационных потерь, что приводит к ухудшению качества управления.

Быстродействие цифровых устройств постоянно растет, поэтому выполнение условий, определяемых теоремой Котельникова, не вызывает особых трудностей. Вместе с тем увеличение частоты квантования приводит к удорожанию системы управления, поскольку почти всегда требует одновременного повышения разрядности арифметических устройств.

При выборе периода квантования приходится учитывать возможное появление дополнительных возмущений при дискретизации аналоговых сигналов. Высокочастотная помеха, не проявляющая себя в непрерывной системе благодаря фильтрующим свойствам объекта, из-за эффекта переноса частот может превратиться в заметное низкочастотное воздействие.

Для исключения вредного воздействия высокочастотных помех перед квантованием приходится применять низкочастотные фильтры, которые должны включаться в описание объекта управления. При этом звено чистого запаздывания часто заменяют дробно-рациональной аппроксимацией вида:

$$e^{-sT} = \frac{1 - \frac{sT}{2}}{1 + \frac{sT}{2}}. \quad (141)$$

Затем для модифицированного непрерывного объекта синтезируется регулятор, описываемый передаточной функцией $W_{\text{кв}}(s)$.

Несмотря на то, что при синтезе регуляторов частотным методом необходимо учитывать соответствующие ограничения на объект (обеспечение устойчивости, демпфирования колебаний и т. д.), частотный метод получил широкое распространение, так как он фактически реализует компенсационные способы исключения нежелательных полюсов и благодаря простоте и наглядности является до настоящего времени одним из самых популярных в практике проектирования систем управления.

Непрерывный регулятор, заданный своей передаточной функцией $W_{\text{кy}}(s)$, реализуется в виде численного алгоритма микропроцессора.

Известно большое число способов дискретизации, основанных на замене производных разностными схемами и методах численного интегрирования. Наибольшее распространение на практике (для детерминированных систем) получил подход, основанный на численном интегрировании методом трапеций, известный в западной литературе как преобразование Тастина. Интегрирование ошибки $\varepsilon(t)$ (формирование управляющего сигнала) методом трапеций представляется разностной схемой:

$$u(kT) = u[(k-1)T] + \frac{T}{2} [\varepsilon(kT) + \varepsilon((k-1)T)], \quad (142)$$

которой соответствует z -преобразование:

$$u(z) = \frac{T}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} E(z). \quad (143)$$

Другими словами, непрерывному оператору интегрирования $\frac{1}{s}$ соответствует дискретная аппроксимация $\frac{T}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$. Отсюда следует простое правило вычисления дискретной реализации непрерывных регуляторов (билинейное преобразование):

$$W_{\text{кy}}(z) = W_{\text{кy}}(s) \Bigg|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}. \quad (144)$$

Это преобразование отличает легкость применения и ряд полезных свойств, обеспечивающих его популярность среди проектировщиков. Недостатком преобразования (144) является то, что при его применении искажается исходная частотная характеристика регулятора. При этом искажения увеличиваются по мере увеличения частоты сигнала. Для устранения этого недостатка перед применением билинейного преобразования исходная характеристика непрерыв-

ного фильтра искусственно специальным образом искажается и, соответственно, изменяется коэффициент передачи.

Близким к билинейному преобразованию является метод z -форм, который сложнее в реализации. Для аппроксимации интегрирующих звеньев порядка выше первого там используются разложения в ряд по $\ln z$:

$$\frac{1}{s^n} = \left(\frac{T}{\ln z}\right)^n, \quad \ln z = 2\left(v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5 + \dots\right), \quad (145)$$

где $v = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$.

При использовании z -форм передаточная функция представляется в виде выражения от $\frac{1}{s}$, а степени интегрирующих звеньев заменяются их дискретными представлениями, полученными на основе соотношений (145).

Другой подход, основанный на опыте синтеза непрерывных регуляторов, называется методом W -преобразований. Исходное описание объекта управления при этом задано дискретной передаточной функцией $W_0(z)$, которая при $z = e^{j\omega T}$ оказывается трансцендентной (не алгебраической) функцией, построение которой намного сложнее привычных для непрерывных систем логарифмических амплитудных характеристик.

W -преобразование заменяет трансцендентные функции дробно-рациональными. При этом у новых системных характеристик свойства оказываются близки к свойствам передаточных функций непрерывных систем. W -преобразование – это билинейное преобразование вида:

$$\omega = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}, \quad z = \frac{1 + \frac{T}{2}\omega}{1 - \frac{T}{2}\omega}. \quad (146)$$

W -преобразование отображает круг единичного радиуса z -плоскости на всю левую полуплоскость.

Частотная характеристика $W_0(z)$ представляет собой $W_0(e^{j\omega T})$, тогда как частотная характеристика $W_0(\omega)$ будет $W_0(j\omega)$.

Алгоритм синтеза регулятора с помощью W -преобразования состоит из пяти этапов:

1. Для непрерывного объекта управления и экстраполятора по соотношению

$$W_0(z) = (1 - z^{-1})z \left\{ \frac{W_0(s)}{s} \right\} \quad (147)$$

назначают период квантования и вычисляют соответствующую передаточную функцию $W_0(z)$.

2. Подстановкой (146) находят $W_0(\omega)$:

$$W_0(\omega) = W_0(z) \Big|_{z=1+\frac{T}{2}\omega / 1-\frac{T}{2}\omega} \quad (148)$$

3. Частотным методом, используя логарифмические частотные характеристики, определяется корректирующее устройство (регулятор) $W_{\text{ку}}(\omega)$.

4. Подстановкой (146) определяют дискретную передаточную функцию корректирующего устройства $W_{\text{ку}}(z)$:

$$W_{\text{ку}}(z) = W_{\text{ку}}(\omega) \Big|_{\omega=\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} \quad (149)$$

5. По передаточной функции составляют вычислительный алгоритм для микропроцессора.

Необходимо отметить, что алгоритмы, рассмотренные выше, получены для линейных моделей управляемых объектов без учета особенностей реализации. Конкретные цифровые устройства, используемые в качестве регулятора, добавляют в динамику системы целый ряд неучтенных факторов, которые могут оказывать влияние на качество системы. Преобразователи, процессор и память имеют ограниченную разрядную сетку. Сигналы в этих устройствах отличаются от расчетных сигналов на величины, зависящие от шага кванто-

вания по уровню. По этой причине коэффициенты регулятора не могут в точности совпадать со значениями, назначенными при расчете регулятора.

Можно указать три главных источника численных ошибок при реализации регуляторов:

1. При преобразовании аналоговых величин в дискретные из-за конечного числа разрядов преобразователя появляются ошибки, оказывающие заметное влияние на точностные характеристики системы.

2. При арифметических операциях в процессоре конечной разрядности цифровые значения округляются в зависимости от числа учитываемых разрядов.

3. При хранении в памяти процессора коэффициентов регулятора их приходится округлять соответственно числу разрядов запоминающих устройств.

Большинство ошибок реализации носит случайный характер, и для их учета необходимо использовать аппарат статистической динамики дискретных систем.

Шаг квантования по уровню определяется разрядностью преобразователя C и соответствует величине $q = \frac{1}{2^C}$.

Цифровое значение аналогового сигнала, равное целому числу шагов квантования, из-за конечного значения шага отличается от истинного значения. Значащие цифры меньше последнего разряда исчезают. Остаток либо просто отбрасывают, отсекая, таким образом, младшие разряды, либо округляют до ближайшего целого числа. Величина ошибки δ лежит в пределах шага квантования: $|\delta| < q$ при усечении, $|\delta| < 0,5q$ при округлении.

Статистическая модель ошибок квантования строится в предположении, что эти ошибки порождаются быстроменяющимися сигналами и могут моделироваться белым шумом, равномерно распределенным в интервале шириной, равной шагу квантования q . Уровень белого шума, определяемый его дисперсией δ^2 , зависит от величины шага q :

$$\delta^2 = \frac{q^2}{12}. \quad (150)$$

При расчете влияния этих шумов на систему используются известные в теории автоматического управления зависимости между спектральными плотностями на входе и выходе системы с передаточной функцией $W(z)$.

$$S_{\text{вых}}(z) = W(z) \cdot W(z^{-1}) \cdot S_{\text{вх}}(z). \quad (151)$$

Разрядность преобразователя из аналога в код (АЦП), равная $C + 1$ (число и знак), определяется диапазоном изменения аналогового сигнала и шумами квантования. Этот диапазон зависит от минимального l_{\min} и максимального l_{\max} значений аналогового сигнала.

Уровень (шаг) квантования зависит от отношения этих величин и определяется разрядностью преобразователя:

$$q = \frac{l_{\min}}{l_{\max}} = 2^{-C}. \quad (152)$$

Разрешая (152) относительно C , найдем минимальное значение C :

$$C = \log_2 \frac{l_{\max}}{l_{\min}}. \quad (153)$$

Разрядность преобразователя из кода в аналог, управляющего работой исполнительных устройств, оказывает существенно меньшее влияние на точность системы. Разрядность, как в предыдущем случае, определяется диапазоном изменения сигнала:

$$C = \log_2 \frac{U_{\max}}{U_{\min}}. \quad (154)$$

Исследование влияния шумов квантования – отдельная задача, решаемая при анализе системы.

Таким образом, синтез регуляторов в классе дискретных автоматических систем включает системы с постоянными параметрами, некоторые системы с переменными параметрами, а также системы, включающие нелинейные элементы.

Синтез регуляторов является непростой задачей, требующей знания математики и хорошего знания физических процессов, протекающих в системе.

7. Синтез регуляторов нестационарных систем

При решении задач синтеза нестационарных систем одним из принципиальных теоретических положений является принцип динамической компенсации. Этот принцип основан на возможности не учитывать динамику объекта при синтезе регулятора и использует положения операторной алгебры.

В теории управления часто используется операторное соотношение:

$$y(t) = Ax(t), \quad (155)$$

где A – оператор системы (или звена). Он определяет соответствие между входным $x(t)$ и выходным $y(t)$ сигналами системы управления.

Рассмотрим систему управления (рис. 16).

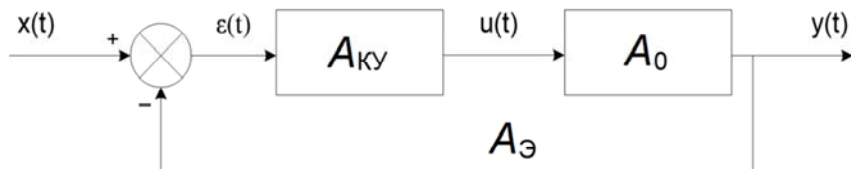


Рис. 16. Система управления:

$A_э$ – эталонный оператор замкнутой системы; $A_{кy}$ – оператор регулятора;

A_0 – оператор неизменяемой части системы (объекта управления)

Используем положения операторной алгебры, в соответствии с которыми имеют место следующие действия:

- 1) сложение операторов, $A + B = C$;
- 2) умножение операторов, $A \cdot B = C$;
- 3) умножение оператора на скаляр, $A \cdot K = B$, $K \cdot A = B$.

Кроме того, справедливы правила:

- 1) операция сложения коммутативна, $A + B = B + A$;
- 2) операции сложения и умножения ассоциативны $A + (B + C) = (A + B) + C$ и $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
- 3) операция умножения не коммутативна $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Для представленной на рис. 16 системы справедливы зависимости:

$$\varepsilon(t) = x(t) - y(t), \quad y(t) = A_0 u(t), \quad u(t) = A_{кy} \varepsilon(t). \quad (156)$$

Из формулы (156) имеем:

$$y(t) = A_0 A_{\text{кы}} \varepsilon(t). \quad (157)$$

Или по-другому:

$$y(t) = A_p \varepsilon(t), \quad (158)$$

где A_p – оператор разомкнутой системы, $A_p = A_0 A_{\text{кы}}$.

Имеет место отношение $\varepsilon(t) = x(t) - A_0 A_{\text{кы}} \varepsilon(t)$ и, следовательно, $\varepsilon(t) + A_0 A_{\text{кы}} \varepsilon(t) = (1 + A_0 A_{\text{кы}}) \varepsilon(t) = x(t)$. Отсюда находим:

$$\varepsilon(t) = (1 + A_0 A_{\text{кы}})^{-1} x(t). \quad (159)$$

Поскольку

$$y(t) = A_0 A_{\text{кы}} \varepsilon(t) = A_0 A_{\text{кы}} (1 + A_0 A_{\text{кы}})^{-1} x(t), \quad (160)$$

то оператор замкнутой системы определяется формулой:

$$A = A_0 A_{\text{кы}} (1 + A_0 A_{\text{кы}})^{-1}. \quad (161)$$

Умножим обе части равенства (161) на $(1 + A_0 A_{\text{кы}})$ справа: $A(1 + A_0 A_{\text{кы}}) = A_0 A_{\text{кы}}$, откуда следует следующее выражение: $A = A_0 A_{\text{кы}} - A A_0 A_{\text{кы}} = (A_0 - A A_0) A_{\text{кы}} = (1 - A) A_0 A_{\text{кы}}$, следовательно

$$A_{\text{кы}} = [(1 - A) A_0]^{-1} A = A_0^{-1} (1 - A)^{-1} A. \quad (162)$$

Поскольку оператор замкнутой системы должен равняться эталонному оператору $A = A^3$, то окончательная формула, определяющая оператор регулятора, записывается в виде:

$$A_{\text{кы}} = A_0^{-1} (1 - A^3)^{-1} A^3, \quad (163)$$

где 1 – единичный оператор.

В формуле (163) A^\ominus и A_0 известны, поэтому принципиально возможен расчет оператора $A_{\text{ку}}$. При этом определяются структура регулятора и численные значения его параметров.

Поскольку оператор разомкнутой системы определяется формулой

$$A_p = A_0 A_{\text{ку}}, \quad (164)$$

то с учетом выражения (163) из (164) имеем:

$$A_p = A_0 A_0^{-1} (1 - A^\ominus)^{-1} A^\ominus. \quad (165)$$

Из зависимости (165) следует, что равенство оператора замкнутой системы эталонному оператору обеспечивается компенсацией влияния на A^\ominus оператора объекта A_0 за счет наличия обратного оператора A_0^{-1} .

Например, если входной сигнал элемента $x(t)$ подвергается искажению в результате прохождения через элемент с оператором A_0 , то восстановление первоначальной формы $x(t)$ этого сигнала может быть достигнуто с помощью динамической системы, каскадно соединенной с первой системой и имеющей оператор A^{-1} (рис. 17).

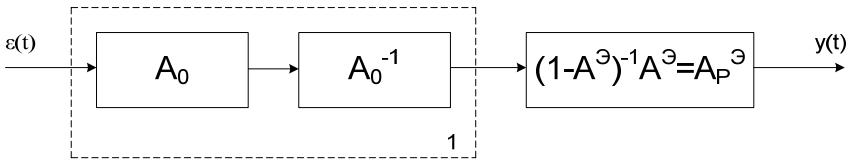


Рис. 17. Динамическая система, имеющая оператор динамической компенсации A^{-1}

Данный подход используется для полной нейтрализации влияния динамических характеристик объекта на оператор замкнутой системы управления. Изложенный выше подход получил название принципа динамической компенсации.

Таким образом, основным содержанием принципа динамической компенсации является возможность не учитывать динамику объекта при синтезе регулятора.

Формально зависимость, определяющая $A_{\text{ку}}$, дает точное решение задачи синтеза регулятора. В большинстве же случаев физически элемент с оператором $A_{\text{ку}}$ реализовать не удается. Это обусловлено тем, что математические модели объектов задаются приближенно и компенсация динамики объекта любой точности труднодостижима. При расчете мы вынуждены опираться лишь на соответствующие оценки. Любая же погрешность, несоответствие оценки и реальных значений могут привести к синтезу неработоспособной системы.

Важным является следующее положение: содержание большого числа инженерных методов синтеза регуляторов сводится к той или иной форме аппроксимации соотношения (163), но не его точной реализации.

Такая аппроксимация направлена на решение следующих задач:

- 1) упрощение структуры регулятора;
- 2) возможность получения физически реализуемых элементов;
- 3) обеспечение устойчивости замкнутой системы;
- 4) повышение свойства грубости (робастности).

Вместе с тем необходимо отметить, что многие рассмотренные ранее методы в неявной форме реализуют метод динамической компенсации, например, используя понятие передаточной функции системы и ее элементов.

Видоизмененный принцип динамической компенсации использует методы эталонных передаточных функций непрерывных и дискретных систем при определении структуры регулятора (рассмотрено ранее), $S \rightarrow Z$ – дискретная система:

$$W_{\text{ку}}(s) = \frac{1}{W_0(s)} = \frac{W^3(s)}{1 - W^3(s)}. \quad (166)$$

Применение принципа динамической компенсации может также использоваться при описании системы весовыми функциями.

Приведенная формула, определяющая $W_{\text{ку}}(s)$ ($W_{\text{ку}}(z)$), представляет интерес с точки зрения выявления тех трудностей, которые необходимо преодолеть при решении задачи синтеза.

Для класса нестационарных систем решение задачи синтеза регуляторов определяется формулой (163). Эта формула – общий результат, использующий понятие оператора системы.

Рассмотрим применение данного подхода в терминах импульсной переходной функции (ИПФ) или, что то же самое, весовой функции системы и выявим соответствующие особенности.

Введя понятие оператора системы с переменными параметрами, определим проблему синтеза регулятора нестационарной системы (рис. 18), рассматривая в качестве примера конкретную задачу.

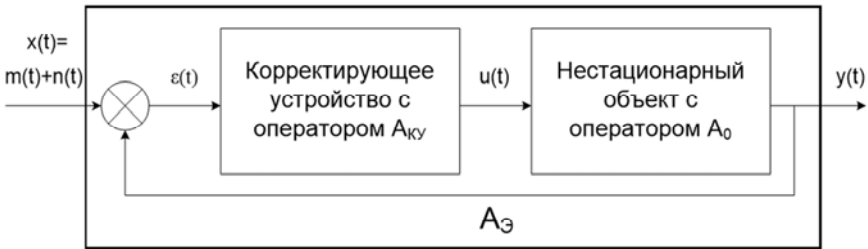


Рис. 18. Нестационарная система

На вход системы поступает полезный нестационарный сигнал $m(t)$ и нестационарная помеха $n(t)$. Статические характеристики сигналов $m(t)$ и $n(t)$ известны: $R_{mm}(t_1, t_2)$, $R_{nn}(t_1, t_2)$ – корреляционные функции соответственно полезного сигнала $m(t)$ и помехи $n(t)$, при условии, что $m(t)$ и $n(t)$ – не коррелированы.

В рассматриваемой задаче полагаем известными и уравнения, описывающие динамику нестационарного объекта. Задача заключается в нахождении структуры и параметров такого нестационарного корректирующего устройства, которое обеспечивало бы выполнение следующего условия:

$$M \left[(m(t) - y(t))^2 \right] \rightarrow \min. \quad (167)$$

Решая данное уравнение, называемое уравнением Винера-Хопфа, можно найти эталонный оператор замкнутой нестационарной системы.

Рассмотрим решение поставленной задачи с использованием аппарата импульсных переходных функций.

Импульсная переходная функция разомкнутой системы, включающей последовательное соединение регулятора и объекта управления, определяется зависимостью:

$$g_p(t, \tau) = \int_{\tau}^t g_{KY}(\mu, \tau) \cdot g_0(t, \mu) d\mu, \quad (168)$$

где $g_{KY}(t, \tau)$ – импульсная переходная функция регулятора;

$g_0(t, \tau)$ – импульсная переходная функция объекта управления.

Предварительно отметим, что наряду с обратными операторами можно ввести в рассмотрение и обратные импульсные переходные функции (рис. 19):

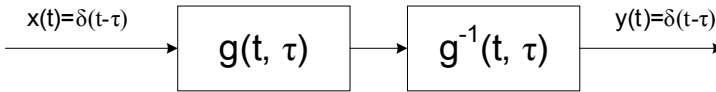


Рис. 19. Обратная импульсная переходная функция

Имеем:

$$\int_{\tau}^t g(t, \eta) \cdot g^{-1}(\eta, \tau) d\eta = \delta(t - \tau). \quad (169)$$

Умножая обе части (168) на $g_0^{-1}(t, \tau)$ и интегрируя, найдем:

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^t g_p(\eta, \tau) \cdot g_0^{-1}(t, \eta) d\eta &= \\ &= \int_{\tau}^t g_0^{-1}(t, \eta) d\eta \cdot \int_{\tau}^{\eta} g_0(\eta, \mu) \cdot g_{KY}(\mu, \tau) d\mu. \end{aligned} \quad (170)$$

Или в другой форме:

$$g_{KY}(t, \tau) = \int_{\tau}^t g_p(\eta, \tau) \cdot g_0^{-1}(t, \eta) d\eta. \quad (171)$$

Соответствующая структурная схема системы с обратной импульсной переходной функцией имеет вид (рис. 20).

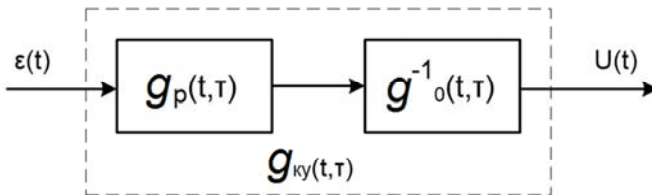


Рис. 20. Система с обратной импульсной переходной функцией

В задаче синтеза в качестве эталонной ИПФ задается ИПФ замкнутой системы $g(t, \tau)$, которая связана с ИПФ $g_p(t, \tau)$ очевидной зависимостью:

$$g(t, \tau) = g_p(t, \tau) - \int_{\tau}^t g_p(t, \eta) \cdot g(\eta, \tau) d\eta. \quad (172)$$

Соотношение (172) представляет собой интегральное уравнение, позволяющее найти ИПФ $g(t, \tau)$ разомкнутой системы управления. Алгоритм синтеза регулятора включает следующие этапы:

1. Задание из соображений обеспечения заданного качества работы системы управления эталонной ИПФ $g_s(t, \tau)$ замкнутой системы (например, она может быть найдена путем решения уравнения Винера-Хопфа).

2. Нахождение эталонной ИПФ $g_p^3(t, \tau)$ разомкнутой системы путем решения интегрального уравнения (на основе (172)):

$$g^3(t, \tau) = g_p^3(t, \tau) - \int_{\tau}^t g_p^3(t, \eta) \cdot g_s(\eta, \tau) d\eta. \quad (173)$$

3. Расчет ИПФ регулятора по формуле (следует из (171)):

$$g_{кy}(t, \tau) = \int_{\tau}^t g_p^3(\eta, \tau) \cdot g_0^{-1}(t, \eta) d\eta. \quad (174)$$

С учетом сказанного, структурная схема нестационарной системы с регулятором может быть представлена следующим образом (рис. 21).

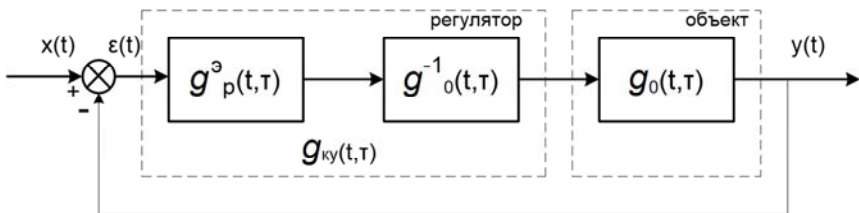


Рис. 21. Схема нестационарной системы с регулятором

Это один из случаев, в том числе и для стационарных систем, когда имеет место принцип динамической компенсации (в данном случае нестационарной системы).

Трудности реализации подхода, использующего аппарат ИПФ, состоят как в необходимости решения достаточно сложных интегральных уравнений, так и в нахождении и реализации обратных импульсных переходных функций.

При разработке конкретных систем автоматического управления с переменными параметрами аппарат ИПФ используется редко и в основном на этапе предварительного проектирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андриевский, Б. Р. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB-5 и Scilab / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков. – СПб. : Наука, 2010. – 286 с.
2. Аттетков, А. В. Методы оптимизации / А. В. Аттетков, С. В. Галкин, В. С. Зарубин. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 440 с.
3. Бесекерский, В. А. Теория систем автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – 4-е изд. перераб. и доп. – СПб. : изд-во Профессия, 2003. – 752 с.
4. Казаков, И. Е. Методы оптимизации стохастических систем / И. Е. Казаков, Д. И. Гладков. – М. : Наука, 1987. – 304 с.
5. Афанасьев, В. Н. Математическая теория конструирования систем управления. / В. Н. Афанасьев, В. Б. Калмановский, В. Р. Носов. – М. : Высш. Шк., 2003. – 615 с.
6. Методы классической и современной теории автоматического управления : учебник : в 5 т. / под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – Т. 4. – 744 с.
7. Пугачёв, В. С. Теория стохастических систем / В. С. Пугачёв, И. Н. Сеницин. – М. : Логос, 2004. – 630 с.
8. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи / В. М. Алексеев, Э. М. Галлеев, В. М. Тихомиров. – М.: Наука, 1999. – 288 с.
9. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / под ред. В. А. Бесекерского. – М.: Наука, 1987. – 587 с.
10. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.

Учебное издание

ЛОБАТЫЙ Александр Александрович
СТЕПАНОВ Владимир Юрьевич
ХВИТЬКО Евгений Анатольевич

МЕТОДЫ И СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пособие
для студентов специальностей
1-53 81 02 «Методы анализа и управления
в технических и экономических системах»,
1-53 81 05 «Распределенная автоматизация на основе
промышленных компьютерных сетей»

В 3 частях

Часть 2

Редактор *А. С. Мокрушиков*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 09.11.2020. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,78. Уч.-изд. л. 2,95. Тираж 100. Заказ 328.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.