

РАСЧЕТ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННО – ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ ОПЕРАТОРНО - СИМВОЛИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Акимов В.А.

Белорусский национальный технический университет

Запишем дифференциальные уравнения равновесия упругой изотропной среды, находящейся в условиях плоской деформации без учета массовых сил и сил инерции в виде:

$$\begin{cases} \partial_1 \sigma_x + \partial_2 \tau_{xy} = 0 \\ \partial_1 \tau_{yx} + \partial_2 \sigma_y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь обозначено: $\partial_1 = \partial/\partial x$ – частная производная по x , $\partial_2 = \partial/\partial y$ – частная производная по y . Напряжения выразим через функцию напряжений по известным формулам Эри:

$$\sigma_x = \partial_2^2 \varphi \quad \sigma_y = \partial_1^2 \varphi \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\partial_1 \partial_2 \varphi \quad (2)$$

Легко убедиться что соотношения (1) выполняются тождественно. А сама функция φ удовлетворяет бигармоническому уравнению вида:

$$(\partial_1^4 + 2\partial_1^2 \partial_2^2 + \partial_2^4) \varphi = 0 \quad (3)$$

Для решения поставленной задачи будем использовать операторно-символический метод. Тогда представим:

$$\begin{aligned} \varphi = [& A(\partial_1) \sin(y\partial_1) + B(\partial_1) y \cos(y\partial_1) + C(\partial_1) \cos(y\partial_1) + \\ & + D(\partial_1) y \sin(y\partial_1)] * f(x) \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь A, B, C, D – операторные коэффициенты, а $f(x)$ – произвольная функция.

Можно непосредственно убедиться в том, что введенная формулой (4) функция напряжений удовлетворяет уравнению (3), а, следовательно, и соотношениям (2) и (1). Рассмотрим задачу о сжатии упругого прямоугольника $-a \leq x \leq a$ и $-b \leq y \leq b$ параболической нагрузкой $P = q(x^2 - a^2)$. Краевые условия должны быть следующие:

$$\sigma_y(x, \pm a) = P; \quad \tau_{xy}(\pm a, y) = \tau_{yx}(x, \pm b) = 0; \quad \sigma_x(x = \pm a) = g(y) \quad (5)$$

Как известно, данная задача не имеет замкнутого решения. Операторный метод позволяет построить новое функциональное уравнение, которое эффективно решает поставленную задачу. Так, например, можно подобрать такие операторные коэффициенты A, B, C, D , что касательные напряжения в (5) будут тождественно равны нулю.