УДК 539.3

О ПОСТРОЕНИИ ЗАМКНУТОГО РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Акимов В.А.
Белорусский национальный технический университет

Вопрос об исследовании замкнутости решения появляется в связи с новым представлением бигармонической функции, положенной в основу решения плоской задачи теории упругости:

$$\varphi = \{[\frac{1}{\partial_1}(1 - btg(b\partial_1))\sin(y\partial_1) + y\cos(b\partial_1)]B(\partial_1) +$$
$$+[\frac{1}{\partial_1}(1 - bctg(b\partial_1)\cos(y\partial_1) + y\sin(y\partial_1)]D(\partial_1)\} * \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{\pi n x}{a}) \qquad (1)$$

Здесь A, B, C, D – произвольные операторные функциональные коэффициенты.

В качестве модельной задачи рассмотрим задачу о сжатии упругого прямоугольника $-a \le x \le a$ и $-b \le y \le b$ параболической нагрузкой $P(x) = q(x^2 - a^2)$. Возьмем следующие краевые условия:

$$\sigma_y(x, \pm b) = \mp P(x); \quad \tau_{xy}(\pm a, y) = \tau_{yx}(x, \pm b) = 0; \quad \sigma_x(\pm a, y) = G(y) \qquad (2)$$

И тогда вопрос о замкнутости решения сведется к вопросу о том, какой части граничных условий (2) можно будет удовлетворить за счет произвола A, B, C, D, a_n. Можно непосредственно убедиться в том, что при такой записи бигармонической функции, граничные условия для касательных напряжений выполняются тождественно.

Коэффициенты a_n должны быть определены таким образом, чтобы удовлетворить оставшимся первому и третьему граничным условиям (2).

Первому граничному условию можно удовлетворить, если положить $D(\partial_1) = 0$, а коэффициенты a_n найти из условия разложения в ряд Фурье соотношения вида $\partial_1^2 \varphi(x, b) = P(x)$. Подставляя найденное значение коэффициентов в выражение $\partial_2^2 \varphi(\pm a)$, определим функцию $G(y)$.

Таким образом, задача как бы решена с некоторой дополнительной нагрузкой $\sigma_x(x = \pm a) = G(y)$. Зная коэффициенты ряда Фурье функции $f(x) = q(x^2 - a^2)$, функцию $G(y)$ можно воспроизвести по этим коэффициентам таблично, а затем при помощи аппроксимации и аналитически.