УДК 519.641.2

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Подкопаев П.А, Корчеменко С.В.
Военная академия Республики Беларусь

Аннотация. Рассматривается задача Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения с внешним дифференциальным оператором в частных производных. С целью использования известных приближенных методов, данная задача сводится к интегральному уравнению с помощью численного обращения дифференциального оператора. Это обращение основано на применении таких приближенных методов как, например, метод Рунге-Кутты, метод Адамса и других численных методов решения дифференциальных уравнений.

Рассмотрим задачу Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}(t,x)\nabla+\text{ц}(t,x)\right]u(t,x)=\int\limits_{\Omega}G(t,x,y)u(t,y)\,dy+\text{ш}(t,x), \tag{1}$$

$$u(t,x)\big|_{t=t_0}=f(x),$$

где $t_0\le t\le T,\ \ T<\infty,\ \ x=\ x_i\ ,\ \ y=\ y_i\ ,\ \ (i=\overline{1,\ n}),\ \ \Omega-$ некоторая ограниченная область: $\Omega=\ x_i^0\le x_i\le X_i,\ \ X_i<\infty\ \ (i=\overline{1,\ n})\ ,\ \ \nabla-$ оператор Гамильтона, $\mathbf{V}(t,x)=\ V_i(t,x)\quad(i=\overline{1,\ n})-$ известные функции переменных $t,\,x$.

Предполагается, что существует и единственно решение задачи (1) и функции, входящие в поставленную задачу, имеют необходимую гладкость, при которой справедливы проводимые в дальнейшем рассуждения Также предполагается, что существует и единственно решение задачи Коши:

$$\frac{dx(t)}{dt}=\mathbf{V}(t,x), \tag{2}$$

$$x(t)\big|_{t=\text{ф}}=\tilde{x}, \tag{$2'$}$$

где $\tau\in\ t_0,T\ \ ,\ \ \tilde{x}\in\Omega.$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(t,x) = A(t,x) + \int_{\Omega}\int_{t_0}^{t} \tilde{G}(t,\,\tau,x,y)\,u(\tau,y)\,d\tau dy, \tag{3}$$

где

$$A(t,x) = \exp\left\{-\int_{t_0}^{t}\text{ц}(\tau;\ \xi(\tau,\,t,\,x))\,d\tau\right\} + \ f(\xi(t_0,\,t,x)) +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\text{щ}(\tau;\ \xi(\tau,\,t,\,x))\exp\left\{\int_{t_0}^{\tau}\text{ц}(\tau_1;\ \xi(\ \tau_1,\,t,\,x))\right\}d\tau\Bigg], \tag{3$'$}$$

$$\tilde{G}(t,\text{ф}\,x,y) = G(\text{ф}\ \xi(\text{ф}\ t,\,x),y)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}\text{ц}(\text{ф}\ \xi(\text{ф}\ t,\,x))\,d\tau + \right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{\tau}\text{ц}(\text{ф}_1;\ \xi(\ \text{ф}_1,\,t,\,x))\,d\text{ф}_1\right\}, \tag{3$''$}$$

Причем в $(3')$ и $(3'')$ $\xi(\text{ф}\ t,\,x)-$первый интеграл системы (2), для каждого фиксированного значения переменных $\text{ф}\ t,\ x$ численно равный решению задачи (2) и $(2')$ в точке ф с начальными условиями, заданными в точке $(t,\,x)$.

Пусть $u(t,\,x)$ является решением интегрального уравнения (3), тогда $u(t,\,x)$ является также решением задачи (1). Действительно, дифференцируя (3) по t с учетом $\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial\xi}{\partial x}V(t,x)\equiv 0,$ затем по x и составляя выражение $\left[\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}(t,x)\nabla+\text{ц}(t,x)\right]u(t,x)$, получим правую часть уравнения (1). Начальные условия проверяются непосредственной подстановкой, при $t=t_0$, получим $u(t,\,x)\big|_{t=t_0} = f(\xi(t_0,\,t_0,\,x)),$ но так как $\xi(t_0,\,t_0,\,x)-$ решение задачи (2) с начальными условиями $x(t)\big|_{t=t_0}=x,$ вычисленное в точке $t=t_0$, то $\xi(t_0,\,t_0,\,x)\equiv x.$

Решение уравнения (3) будем искать в каждой точке сетки $T_n \times \Omega_{k,l}$, где

$$T_n = \; t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T \;\; ,$$
$$\Omega_{k,l} = \; x_1^0 < x_1^1 < \ldots < x_1^k = X_1\,,\; x_2^0 < x_2^1 < \ldots < x_2^l = X_2 \;\; . \tag{4}$$

Обозначим $\text{д}_j = t_{j+1} - t_j\,,\; h_m^j = x_m^{j+1} - x_m^j \quad (m = 1, 2)$. Пролагая в (3) $t = t_i\,,\; x = \; x_1^j,\; x_2^s \quad (i = \overline{1,\, n};\;\; j = \overline{1,\, k};\;\; s = \overline{1,\, l}\;)$, получим

$$u(t_i\,,\, x_1^j,\, x_2^s) = A(t_i\,,\, x_1^j,\, x_2^s) + \int\limits_{x_1^0}^{X_1}\int\limits_{x_2^0}^{X_2}\int\limits_{t_0}^{t_i}\tilde{G}(t_i, \text{ф}\; x_1^j,\, x_2^s,\, y_1, y_2) \times$$
$$\times u(\text{ф}\; y_1, y_2)\, d\text{ф} dy_1 dy_2\,, \tag{5}$$

причем $A(t_i\,,\, x_1^j,\, x_2^s)$, $\tilde{G}(t_i, \text{ф}\; x_1^j,\, x_2^s,\, y_1, y_2)$ имеют такой же вид, как и в ($3'$),($3''$), где следует положить

$$\text{о}(\text{ф}\; t, x) = \; \text{о}_1(\text{ф}\; t_i, x_1^j, x_2^s),\; \text{о}_2(\text{ф}\; t_i, x_1^j, x_2^s) \;\; .$$

Заметим, что $\text{о}_p(\text{ф}\; t_i, x_1^j, x_2^s) \;\; (p = 1,\, 2) -$ есть решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\text{о}_1(\text{ф})}{d\text{ф}} = V_1(\text{ф}\; \text{о}_1,\, \text{о}_2),$$
$$\frac{d\text{о}_2(\text{ф})}{d\text{ф}} = V_2(\text{ф}\; \text{о}_1,\, \text{о}_2) \tag{6}$$

с начальными условиями

$$\text{о}_1(t_i) = x_1^j,\;\; \text{о}_2(t_i) = x_2^s\,. \tag{7}$$

Поскольку точное решение задачи (6), (7) удается получить только в некоторых частных случаях, в дальнейшем будем использовать решение, полученное каким-нибудь из известных приближенных методов, считая, что его можно найти с необходимой степенью точности. Пусть это решение имеет вид $\tilde{\text{о}}_p(\text{ф}\; t, x_1, x_2) \quad (p = 1,\; 2)$. Подставляя его в (5), получим

$$\tilde{u}(t_i\,,\, x_1^j,\, x_2^s) = \tilde{A}(t_i\,,\, x_1^j,\, x_2^s) + \int\limits_{x_1^0}^{X_1}\int\limits_{x_2^0}^{X_2}\int\limits_{t_0}^{t_i}\tilde{G}(t_i, \text{ф}\; x_1^j,\, x_2^s,\, y_1, y_2) \times$$
$$\times \tilde{u}(\text{ф}\; y_1, y_2)\, d\text{ф} dy_1 dy_2\,. \tag{8}$$

Если при аппроксимации интегралов в (8) применять квадратурные формулы конкретного вида, то можно получать алгоритмы, имеющие различную степень точности. Например, если в (8) интеграл по ф аппроксимировать формулой трапеций, а интегралы по переменным y_1, y_2 аппроксимировать формулой Симпсона, то получим алгоритм, имеющий погрешность $O((д^{+})^2 + h^4)$, где $h = \max\limits_{i,\, j}\ h_1^i,\, h_2^j \quad (i = \overline{0,\, k};\quad j = \overline{0,\, l})$, $д^{+}$ - максимальное значение шага по t.