The design procedure of the tubular resonator for a vibrating and peak densitometer is developed.

Я. Ю. ГУСЕЙНОВ, Т. К. ГУСЕЙНОВ, Н. А. АБДУЛОВА, Сумгаитский государственный университет

УДК 681.128.8

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕЗОНАТОРА СТУПЕНЧАТО- ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ДЛЯ ВИБРАЦИОННО-АМПЛИТУДНОГО ПЛОТНОМЕРА ЖИДКОСТИ

В металлургической промышленности для измерения плотности пульп и суспензий в основном применяются тензометрические, ультразвуковые и радиоизотопные плотномеры [1]. По своим метрологическим характеристикам для этих целей подходят и вибрационно-амплитудные плотномеры, однако на сегодняшний день промышленные образцы подобных приборов и теоретические основы их расчета еще не разработаны. Учитывая тот факт, что вибрационно-амплитудные плотномеры в сравнении с указанными выше плотномерами отличаются простотой изготовления и эксплуатации, работы, проводимые в этом направлении, можно считать актуальными.

В работе [2] нами была синтезирована форма резонатора для вибрационно-амплитудного плотномера жидкости в виде жестко закрепленной на концах трубки со ступенчато-переменным сечением. Трубка условно состоит из трех участков: центрального и двух симметрично расположенных относительно вертикальной оси симметрии периферийных. При этом внутренний диаметр всех участков одинаков, а внешний диаметр периферийных участков больше внешнего диаметра центрального участка. Такое исполнение резонатора, в частности, позволяет более точно производить его настройку на резонансную частоту при заполнении его эталонной жидкостью. Однако отсутствие математической модели подобного резонатора не позволяет разработать методику основ его расчета.

Задача состоит в определении аналитической зависимости между частотой собственных колебаний резонатора и плотностью, находящейся в ней жидкости.

Допуская абсолютную симметричность резонатора, задачу можно свести к рассмотрению одной из половин трубки. Разделим условно половину трубки на два участка: первый – от места защемления до места изменения внешнего диаметра трубки; второй – от места изменения внешнего диаметра трубки до ее середины. Примем соответственно длины участков l_1 и l_2, при этом $l_1+l_2=l$. Введем две системы координат, связанные с каждым из участков. Отклонение оси трубки на каждом из участков обозначим через y_1 и y_2. Эти величины есть функции времени t и положения точек на трубке, определяемые координатами x_1 и x_2. Без учета трения уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} EJ_1\dfrac{\partial^4 y_1}{\partial x_1^4}+m_1\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}=0, \\ EJ_2\dfrac{\partial^4 y_2}{\partial x_2^4}+m_2\dfrac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}=0, \end{cases} \qquad (1)$$

где E – модуль упругости; J_1, J_2 – осевые моменты инерции поперечных сечений; m_1, m_2 – массы единицы длины трубок с жидкостью.

Для анализа воспользуемся функциями и интегралами Крылова. Для рассматриваемого случая граничные условия имеют вид

$$x_1=0,\quad y_1=0,\quad \frac{\partial y_1}{\partial x_1}=0,$$

$$x_2=0,\quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial^3 y_2}{\partial x_2^3}=0,$$

Условия сопряжения при $x_1=l_1$ и $x_2=l_2$ запишем так:

$$y_1 = y_2, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial y_2}{\partial x_2},$$
$$EJ_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = EJ_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2}, \quad EJ_1 \frac{\partial^3 y_1}{\partial x_1^3} = -EJ_2 \frac{\partial^3 y_2}{\partial x_2^2}. \qquad (2)$$

Сделаем замену:

$$y_i(x_i, t) = z_i(x_i) v(t), \quad i = 1, 2, \qquad (3)$$

где $z_i(x_i)$ – решения дифференциального уравнения IV порядка:

$$z_i^{IV} - v_i^4 z_i = 0; \qquad (4)$$

$v(t)$ – решение дифференциального уравнения II порядка:

$$v_i + \omega \upsilon_i = 0,$$
$$\omega = v_i^2 \sqrt{\frac{EJ_i}{m_i}}. \qquad (5)$$

Здесь $\omega = 2\pi f$ – круговая частота колебаний; f – собственная частота колебаний. Перейдем от уравнения (1) и (2) к уравнениям в обыкновенных производных:

$$\begin{cases} z_1^{IV} + v_1^4 z_1 = 0, \\ z_2^{IV} + v_2^4 z_2 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

при краевых условиях:

$$z_1(0) = 0, \ z_1'(0) = 0, \ z_2''(0) = 0, \quad z_2'''(0) = 0,$$
$$z_1(l_1) = z_2(l_2), \ \ z_1'(l_1) = -z_2'(l_2),$$
$$z_1''(l_1) = \frac{E_2 J_2}{E_1 J_1} z_2''(l_2), \ \ z_1'''(l_1) = -\frac{E_2 J_2}{E_1 J_1} z_2'''(l_2), \qquad (7)$$
$$v_i^4 = \frac{m_1 \omega^2}{E_i I_i}, \ i = 1, 2.$$

С целью упрощения записей примем следующие обозначения:

$$U_i = U(l_i \nu_i), \quad S_i = S(l_i \nu_i),$$
$$T_i = T(l_i \nu_i), \quad V_i = V(l_i \nu_i),$$

В функциях Крылова с учетом первых четырех условий (7) решения уравнений (6) запишем в виде:

$$\begin{cases} z_1(x_1) = a_1 U_1 + b_1 V_1, \\ z_2(x_2) = a_2 U_2 + b_2 S_2, \end{cases} \qquad (8)$$

где a_1, a_2 и b_1, b_2 – произвольные постоянные. Используя условия сопряжения, условия 5–8 системы (7), получаем

$$\begin{cases} a_1 U_1 + b_1 V_1 = a_2 U_2 + b_2 S_2, \\ a_1 T_1 + b_1 U_1 = k_1 a_2 T_2 + k_1 b_2 V_2, \\ a_1 S_1 + b_1 T_1 = k_2 a_2 S_2 + k_2 b_2 U_2, \\ a_1 V_1 + b_1 S_1 = k_3 a_2 V_2 + k_3 b_2 T_2, \end{cases} \qquad (9)$$

где

$$k_1 = -\sqrt[4]{\frac{E_1 J_1 m_2}{E_2 J_2 m_1}}; \ k_2 = \frac{E_2 J_2}{E_1 J_1} k_1^2; \ k_3 = \frac{E_2 J_2}{E_1 J_1} k_1^3.$$

Введем матрицы:

$$V = \begin{vmatrix} U_1 V_1 \\ T_1 U_1 \end{vmatrix}, \quad \Phi = \begin{vmatrix} U_2 S_2 \\ k T_2 k V_2 \end{vmatrix},$$
$$V_1 = \begin{vmatrix} S_1 T_1 \\ V_1 S_1 \end{vmatrix}, \quad \Phi_1 = \begin{vmatrix} k_2 S_2 k_2 U_2 \\ k_3 V_2 k_3 T_2 \end{vmatrix}, \qquad (10)$$
$$F_1 = \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \end{vmatrix}, \qquad F_2 = \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда уравнение (9) можно записать в виде:

$$\begin{cases} F_1 V = F_2 \Phi, \\ F_1 V = F_2 \Phi_1 \end{cases} \qquad (11)$$

или

$$X F_1 = 0, \qquad (12)$$

где $X = (\Phi_1 \Phi^{-1} V - V_1) F_1 = 0$, а ее элементы определяются следующим образом:

$$x_{11} = k_1 k_2 U_1 (S_2 V_2 - U_2 T_2) +$$
$$k_2 T_1 (U_2^2 - S_2^2) - k_1 S_1 (U_2 V_2 - T_2 S_2),$$

$$x_{12} = k_1 k_2 V_1 (S_2 V_2 - U_2 T_2) +$$
$$k_2 U_1 (U_2^2 - S_2^2) - k_1 T_1 (U_2 V_2 - T_2 S_2),$$

$$x_{21} = k_1 k_3 U_1 (V_2^2 - T_2^2) +$$
$$k_3 T_1 (T_2 U_2 - S_2 V_2) - k_1 V_1 (U_2 V_2 - T_2 S_2),$$

$$x_{22} = k_1 k_3 V_1 (V_2^2 - T_2^2) +$$
$$k_3 U_1 (T_2 U_2 - S_2 V_2) - k_1 S_1 (U_2 V_2 - T_2 S_2).$$

Для того чтобы существовало отличное от нуля решение уравнения (11), необходимо соблюдение условия $\det x = 0$. Раскрывая определитель, получаем уравнение для отыскания частоты собственных колебаний трубки анализируемого резонатора:

$$x_{11} x_{22} - x_{21} x_{12} = 0. \qquad (13)$$

В частном случае, при $I_1 = I_2$ и $l_1 = l_2$ (однородная трубка с жидкостью) корнем данного уравнения является $\nu l = 4{,}73$.

Видим, что найденное значение корня уравнения (13) совпадает с известным решением уравнения собственных колебаний жестко закрепленной на концах однородной трубки с жидкостью [3]. Это свидетельствует о хорошем согласовании полученных результатов с общей теорией резонаторов.

Сведем полученные нами результаты к следующим удобным на практике формулам.

Из (5) частота собственных колебаний трубок исследуемого резонатора:

$$f = \frac{v_i^2}{2\pi}\sqrt{\frac{EJ_i}{m_i + m_ж}}, \qquad (14)$$

где параметр v_i определяется из решения уравнения (13).

Учитывая в (14) то, что

$$J_i = \frac{\pi}{64d}(D_i^4 - d^4),$$

$$m_1 = \rho_i \frac{\pi}{4}(D_i^2 - d^2),$$

$$m_ж = \rho_ж \frac{\pi}{4} d^2,$$

где D_i, $i = 1, 2$ – внешний диаметр трубки на I и II участках; d – внутренний диаметр трубки; ρ_i и $\rho_ж$ – плотность материала трубки и жидкости в резонаторе, получаем

$$f = f_{0i}\sqrt{\frac{A_i}{A_i + \rho_ж}}. \qquad (15)$$

Здесь $f_{0i} = \frac{\omega_{щ}^2}{8\pi L_{щ}}\sqrt{\frac{E}{\rho_i}(n_i^2 + 1)}$ – частота колебаний пустого резонатора; $\omega_i = v_i l_i; n_i = \frac{D_i}{d}$; $A_i = \rho_i(n_i^2 - 1)$ – постоянные резонатора; $n_i = \frac{D_i}{d}$ – относительная толщина стенки резонатора на I и II участках.

На основе полученных результатов нами будет разработана методика расчета трубчатого резонатора для вибрационно-амплитудного плотномера.

Литература

1. К и в и л и с С. С. Плотномеры. М.: Энергия, 1980.
2. Г у с е й н о в Т. К., А б д у л о в а Н. А. Синтез высокодобротного механического резонатора с помощью электромеханических аналогий // Materiały Vii Międzynarodowej Naukowi-Praktycznej Konferencji «Perspektywiczne Opracowania Są Nauką I Technikami. 2011» 07–15 listopada 2011 roku. Volume 54 Techniczne nauki. Przemyśl: Nauka i studia. 2011. С. 63–66.
3. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1980.