УДК 539.3

МЕТОД ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Акимов В.А.
Белорусский национальный технический университет

Запишем дифференциальные уравнения равновесия упругой изотропной среды, находящейся в условиях плоской деформации без учета массовых сил и сил инерции в виде:

$$\begin{cases} \partial_1\sigma_x + \partial_2\tau_{xy} = 0 \\ \partial_1\tau_{yx} + \partial_2\sigma_y = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Здесь обозначено: $\partial_1 = \partial/\partial x$ – частная производная по переменной x, $\partial_2 = \partial/\partial y$ – частная производная попеременной y. Напряжения выразим через функцию напряжений по известным[1] формулам Эри:

$$\sigma_x = \partial_2^2\varphi \quad \sigma_y = \partial_1^2\varphi \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\partial_1\partial_2\varphi \tag{2}$$

Легко убедиться что уравнения (1) тождественно удовлетворяются. А сама функция φ должна удовлетворять бигармоническому уравнению вида:

$$(\partial_1^4 + 2\partial_1^2\partial_2^2 + \partial_2^4)\varphi = 0 \tag{3}$$

Для решения поставленной задачи будем использовать операторно – символический метод, изложенный в [3]. Тогда представим:

$$\begin{aligned} \varphi = [&A(\partial_1)\sin(y\partial_1) + B(\partial_1)y\cos(y\partial_1) + C(\partial_1)\cos(y\partial_1) + \\ &+D(\partial_1)y\sin(y\partial_1)] * f(x) \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $A(\partial_1), B(\partial_1), C(\partial_1), D(\partial_1)$ – операторные функциональные коэффициенты, а $f(x)$ – произвольная функция. В дальнейшем, для упрощения записей, зависимость операторных коэффициентов от аргумента ∂_1 показывать не будем, а будем только подразумевать. Можно непосредственно убедиться, что представленная соотношением (4) бигармоническая функция тождественно удовлетворяет уравнению (3).

Построим так называемое однородное решение плоской задачи теории упругости. Это означает, что на границах $y = \pm b$, будем полагать $\tau_{xy} = 0$ и $\sigma_y = 0$.

На основании (2), равенство нулю нормальных и касательных напряжений в зависимости только от y, будет равносильна системе операторных уравнений $\varphi(\pm b)=0$ и $\partial_2\varphi(\pm b)=0,$ которая в нашем случае принимает вид:

$$\begin{cases} A\sin(b\partial_1)+Bb\cos(b\partial_1)+C\cos(b\partial_1)+Db\sin(b\partial_1)=0 \\ -A\sin(b\partial_1)-Bb\cos(b\partial_1)+C\cos(b\partial_1)+Db\sin(b\partial_1)=0 \\ A\partial_1\cos(b\partial_1)+B\cos(b\partial_1)-Bb\partial_1\sin(b\partial_1)-C\partial_1\sin(b\partial_1)+ \\ +D\sin(b\partial_1)+Db\cos(b\partial_1)=0 \\ A\partial_1\cos(b\partial_1)+B\cos(b\partial_1)-Bb\partial_1\sin(b\partial_1)+C\partial_1\sin(b\partial_1)- \\ -D\sin(b\partial_1)-Db\cos(b\partial_1)=0 \end{cases} \quad (5)$$

Полученная таким образом однородная система уравнений распадается на две независимые однородные системы уравнений:

$$\begin{cases} A\sin(b\partial_1)+Bb\cos(b\partial_1)=0 \\ A\partial_1\cos(b\partial_1)+B\cos(b\partial_1)-Bb\partial_1\sin(b\partial_1)=0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} C\cos(b\partial_1)+Db\sin(b\partial_1)=0 \\ C\partial_1\sin(b\partial_1)-D\sin(b\partial_1)-Db\cos(b\partial_1)=0 \end{cases} \quad (7)$$

Для того, что бы полученные системы уравнений имели нетривиальное решение необходимо равенство нулю их определителей. Для систем уравнений (6) и (7) получим соответственно следующие трансцендентные уравнения:

$$\sin 2b\partial_1-2b\partial_1=0 \quad (6') \qquad \text{и} \qquad \sin(2b\partial_1)+2b\partial_1=0 \quad (7')$$

Далее из условия $\varphi_{y=\pm b}=0$, получаем $A=-bctg(b\partial_1)B$ и $C=-btg(b\partial_1)D$. Тогда выражение φ и $\partial_2\varphi$ приобретают вид:

$$\varphi=[-bctg(b\partial_1)\sin(y\partial_1)+y\cos(y\partial_1)]B+[-btg(b\partial_1)\cos(y\partial_1)+y\sin(y\partial_1)]D$$

$$\begin{aligned} \partial_2\varphi&=[(-b\partial_1ctg(b\partial_1)+1)cos(y\partial_1)-y\partial_1\sin(y\partial_1)]B+ \\ &+[b\partial_1tg(b\partial_1+1)\sin(y\partial_1)+y\partial_1\cos(y\partial_1)]D \end{aligned}$$

Отсюда видно, что если соотношение $\varphi_{y=\pm b}=0$ выполняется непосредственно, то для соотношения $\partial_2\varphi_{y=\pm b}=0$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned} y&=b \qquad [1скобка]B+[2скобка]D=0 \\ y&=-b \qquad [1скобка]B-[2скобка]D=0 \end{aligned}$$

Данная система уравнений имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. В результате приходим к соотношению

$$[1скобка]\cdot[2скобка]=0 \text{ или}$$

$$[(-b\partial_1 ctg(b\partial_1)+1)cos(b\partial_1)-b\partial_1\sin(b\partial_1)][b\partial_1 tg(b\partial_1+1)\sin(b\partial_1)+$$
$$+b\partial_1\cos(b\partial_1)]=0$$

Раскроем эту скобку

$$b\partial_1[(-b\partial_1 ctg(b\partial_1+1)\cos^2(b\partial_1)-(b\partial_1 tg(b\partial_1+1)\sin^2(b\partial_1)]+$$
$$+[(-b\partial_1 ctg(b\partial_1)+1)(b\partial_1 tg(b\partial_1)+1)-(b\partial_1)^2]\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)=$$
$$=b\partial_1[\cos^2(b\partial_1)-\sin^2(b\partial_1)-b\partial_1\frac{\cos^4(b\partial_1)+\sin^4(b\partial_1)}{\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)}]+$$
$$+[b\partial_1\frac{\sin^2(b\partial_1)-\cos^2(b\partial_1)}{\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)}-2(b\partial_1)^2+1]\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)=$$
$$=-(b\partial_1)^2\frac{1-2\sin^2(b\partial_1)\cos^2(b\partial_1)}{\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)}+(-2(b\partial_1)^2+1)\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)=$$
$$=-\frac{(b\partial_1)^2}{\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)}+\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)=0$$

Отсюда получаем $\sin(b\partial_1)\cos(b\partial_1)=\pm b\partial_1$ или $\sin(2b\partial_1)\pm 2b\partial_1=0$, что совпадает с приведенными выше формулами. Разделяя корни, получим два вида выражений φ:

$$\varphi_1=\frac{(b\partial_1 tg(b\partial_1)+1)\sin(b\partial_1)+b\partial_1\cos(b\partial_1)}{(-b\partial_1 ctg(b\partial_1)+1)\cos(b\partial_1)-b\partial_1\sin(b\partial_1)}[-bctg(b\partial_1)\sin(y\partial_1)+y\cos(y\partial_1)]-$$
$$-btg(b\partial_1)\cos(y\partial_1)+y\sin(y\partial_1)$$

$$\varphi_2=-bctg(b\partial_1)\sin(y\partial_1)+y\cos(y\partial_1)+$$
$$+\frac{(-b\partial_1 ctg(b\partial_1)+1)\cos(b\partial_1)-b\partial_1\sin(b\partial_1)}{b\partial_1 tg(b\partial_1+1)\sin(b\partial_1)+b\partial_1\cos(b\partial_1)}[-btg(b\partial_1)\cos(y\partial_1)+y\sin(y\partial_1)]$$

С учетом соотношений

$$(b\partial_1 tg(b\partial_1)+1)\sin(b\partial_1)+b\partial_1\cos(b\partial_1)=\frac{b\partial_1}{\cos(b\partial_1)}+\sin(b\partial_1)=\frac{\sin(2b\partial_1)+2b\partial_1}{2\cos(b\partial_1)}$$
$$(-b\partial_1 ctg(b\partial_1)+1)\cos(b\partial_1)-b\partial_1\sin(b\partial_1)=\cos(b\partial_1)-\frac{b\partial_1}{\sin(b\partial_1)}=\frac{\sin(2b\partial_1)-2b\partial_1}{2\sin(b\partial_1)}$$

φ_1 и φ_2 перепишем в виде:

$$\varphi_1 = \frac{\sin(2b\partial_1) + 2b\partial_1}{\sin(2b\partial_1) - 2b\partial_1}[tg(b\partial_1) y\cos(y\partial_1) - b\sin(y\partial_1)] - tg(b\partial_1) b\cos(y\partial_1) +$$
$$+ y\sin(y\partial_1)$$
$$\varphi_2 = \frac{\sin(2b\partial_1) - 2b\partial_1}{\sin(2b\partial_1) + 2b\partial_1}[ctg(b\partial_1) y\sin(y\partial_1) - b\cos(y\partial_1)] - ctg(b\partial_1) b\sin(y\partial_1) +$$
$$+ y\cos(y\partial_1)$$

Проверим выполнение граничных условий. Теперь нетрудно установить:

$$y = \pm b \qquad \varphi_1 = \varphi_2 = 0\,; \quad y = -b \qquad \partial_2\varphi_1 = \partial_2\varphi_2 = 0$$

$$y = +b$$

$$\partial_2\varphi_1 = 2[(b\partial_1 tg(b\partial_1) + 1)\sin(b\partial_1) + b\partial_1\cos(b\partial_1)] = 2[\frac{b\partial_1}{\cos(b\partial_1)} + \sin(b\partial_1)] =$$
$$= \frac{\sin(2b\partial_1) + 2b\partial_1}{\cos(b\partial_1)}$$

$$\partial_2\varphi_2 = 2[(-b\partial_1 ctg(b\partial_1) + 1)\cos(b\partial_1) - b\partial_1\sin(b\partial_1)] = 2[\cos(b\partial_1) - \frac{b\partial_1}{\sin(b\partial_1)}] =$$
$$= \frac{\sin(2b\partial_1) - 2b\partial_1}{\sin(b\partial_1)}$$

И после этого остается удовлетворить последнему граничному условию

$$\tau_{xy}(y, x = \pm a) = 0$$

Это можно достигнуть с помощью метода, изложенного в [2] или путем переразложения рядов, содержащих корни одних трансцендентных уравнений

$$\varphi = [\frac{1}{\partial_1}(1 - btg(b\partial_1))\sin(y\partial_1) + y\cos(b\partial_1)]B(\partial_1) +$$
$$+[\frac{1}{\partial_1}(1 - bctg(b\partial_1)\cos(y\partial_1) + y\sin(y\partial_1)]D(\partial_1) \;\; * \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{\pi n x}{a})$$

в ряды, содержащие корни других трансцендентных уравнений.

Литература

1. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.-416 с.
2. Новацкий В.. Теория упругости. М.: Издательство «Мир», 1975.-872с.
3. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. Мн.: УП «Технопринт», 2003.-101 с.