УДК 539.3

ОРТОГОНАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Акимов В.А.
Белорусский национальный технический университет

Запишем дифференциальные уравнения равновесия упругой изотропной среды, находящейся в условиях плоской деформации без учета массовых сил и сил инерции в виде:

$$\begin{cases} \partial_1 \sigma_x + \partial_2 \tau_{xy} = 0 \\ \partial_1 \tau_{yx} + \partial_2 \sigma_y = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь обозначено: $\partial_1 = \partial/\partial x$ – частная производная по переменной x, $\partial_2 = \partial/\partial y$ – частная производная попеременной y. Напряжения выразим через функцию напряжений по известным[1,2] формулам Эри:

$$\sigma_x = \partial_2^2 \varphi \quad \sigma_y = \partial_1^2 \varphi \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\partial_1 \partial_2 \varphi \qquad (2)$$

Легко убедиться что уравнения (1) тождественно удовлетворяются. А сама функция φ должна удовлетворять бигармоническому уравнению вида:

$$(\partial_1^4 + 2\partial_1^2 \partial_2^2 + \partial_2^4)\varphi = 0 \qquad (3)$$

Для решения поставленной задачи будем использовать операторно-символический метод, изложенный в [3]. Тогда представим:

$$\begin{aligned} \varphi = [&A(\partial_1)\sin(y\partial_1) + B(\partial_1)y\cos(y\partial_1) + C(\partial_1)\cos(y\partial_1) + \\ &+D(\partial_1)y\sin(y\partial_1)] * f(x) \end{aligned} \qquad (4)$$

Здесь $A(\partial_1), B(\partial_1), C(\partial_1), D(\partial_1)$ – операторные функциональные коэффициенты, а $f(x)$ – произвольная функция. Можно непосредственно убедиться в том, что соотношения (4) тождественно удовлетворяют формулам (3).

На этот раз рассмотрим подход, основанный на выполнении граничных условий вида: $\tau_{xy} \quad x = \pm a \quad = \tau_{xy} \quad y = \pm b \quad = 0$ (5)

Для достижения этой цели наряду с функцией

$$\begin{aligned}\varphi_1 = [A_1(\partial_1)\sin(y\partial_1) + B_1(\partial_1)y\cos(y\partial_1) + C_1(\partial_1)\cos(y\partial_1) + \\ + D_1(\partial_1)y\sin(y\partial_1)] * f(x)\end{aligned} \tag{6}$$

введем еще одну бигармоническую функцию:

$$\begin{aligned}\varphi_2 = [A_2(\partial_2)\sin(x\partial_2) + B_2(\partial_2)x\cos(x\partial_2) + C_2(\partial_2)\cos(x\partial_2) + \\ + D_2(\partial_2)x\sin(x\partial_2)] * f(y)\end{aligned} \tag{7}$$

И тогда граничные условия примут вид:

$$\partial_2\varphi_1(y = \pm b) = 0 \ \text{ и } \ \partial_1\varphi_2(x = \pm a) = 0 \tag{8}$$

В этом случае, как нетрудно видеть, следует использовать следующие зависимости между операторными коэффициентами:

$$A = \frac{1}{\partial_1}(b\partial_1 tg(b\partial_1) - 1)B \qquad\qquad C = \frac{1}{\partial_1}(b\partial_1 ctg(b\partial_1) + 1)D \tag{9}$$

Окончательно функции напряжений представляется в виде:

$$\begin{aligned}\varphi_1 = \ & [\frac{1}{\partial_1}(b\partial_1 tg(b\partial_1) - 1)\sin(y\partial_1) + y\cos(y\partial_1)]B_1(\partial_1) + \\ & +[\frac{1}{\partial_1}(b\partial_1 ctg(b\partial_1) + 1)\cos(y\partial_1) + y\sin(y\partial_1)]D_1(\partial_1) \ * \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{\pi n x}{a})\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 = \ & [\frac{1}{\partial_2}(a\partial_2 tg(a\partial_2) - 1)\sin(x\partial_2) + x\cos(x\partial_2)]B_2(\partial_2) + \\ & +[\frac{1}{\partial_2}(a\partial_2 ctg(a\partial_1) + 1)\cos(x\partial_2) + x\sin(x\partial_2)]D_2(\partial_2) \ * \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\frac{\pi n y}{b})\end{aligned} \tag{11}$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что предложенные формулы (9), предопределяют равенство нулю касательных напряжений на всем контуре пластины, в чем нетрудно убедиться непосредственной проверкой. Так как необходимый произвол содержится в коэффициентах a_n и b_n, то можно положить $B_1(\partial_1) = D_1(\partial_1) = B_2(\partial_2) = D_2(\partial_2) = 1$. В результате получим:

$$\begin{aligned}& \tau_{xy}^1(x = \pm a, y = \pm b) = -\partial_1\partial_2\varphi_1(x = \pm a, y = \pm b) = \frac{\pi n}{a}\{[(b\partial_1 tg(b\partial_1) - 1)\cos(b\partial_1) + \\ & + \cos(b\partial_1) - b\partial_1\sin(b\partial_1)] + [-(ctg(b\partial_1) + 1)\sin(b\partial_1) + \sin(b\partial_1) + b\partial_1\cos(b\partial_1)]\} * \\ & * \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\frac{\pi n x}{a}) = 0\end{aligned}$$

$$\tau_{xy}^2(x=\pm a, y=\pm b) = -\partial_1\partial_2\varphi_2(x=\pm a, y=\pm b) = \frac{\pi n}{b}\{[(a\partial_2 tg(a\partial_2)-1)\cos(a\partial_2)+$$
$$+\cos(a\partial_2) - a\partial_2\sin(a\partial_2)] + [-(ctg(a\partial_2)+1)\sin(a\partial_2)+\sin(a\partial_2)+a\partial_2\cos(a\partial_2)]\} *$$
$$*\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{\pi n y}{b}) = 0$$

Итак, граничные условия вида $\tau_{xy}=0$ выполняются тождественно на сторонах $x=\pm a$ и $y=\pm b$ тождественно. Коэффициенты a_n и b_n будут находиться из оставшихся граничных условий. А именно, используя приведенную в [3] таблицу, предварительно раскроем операторные скобки:

$$\sin(y\partial_1)*[\sin(\pi nx/a)] = sh(\pi ny/a)\cos(\pi nx/a)$$

$$y\partial_1\cos(y\partial_1)*[\sin(\pi nx/a)] = (\pi ny/a)ch(\pi ny/a)\cos(\pi nx/a)$$
$$tg(a\partial_1)\cos(y\partial_1)*[\sin\pi nx/a] = tg(\pi n)ch(\pi ny/a)\cos(\pi nx/a)$$
$$tg(a\partial_1)y\partial_1\sin(y\partial_1)*[\sin\pi nx/a] = tg(\pi n)ch(\pi ny/a)\cos(\pi nx/a)$$

Затем, используя известные формулы Фурье для ортогональных рядов, определим коэффициенты a_n и b_n из следующих соотношений:

$$\sigma_x = \partial_2^2(\varphi_1+\varphi_2)\Big|_{x=\pm a} = G(y) \quad \text{и} \quad \sigma_y = \partial_1^2(\varphi_1+\varphi_2)\Big|_{y=\pm b} = F(x)$$

Здесь $F(x)$ и $G(y)$ – известные функции, а φ_1 и φ_2 задаются формулами (10) и (11).

Таким образом, выше изложен операторно-символический подхода к решению плоской задачи теории упругости. Изложение материала носит теоретический характер. Получено новые общее аналитические решение плоской задачи теории упругости о сжатии упругой прямоугольной пластины. На основании полученных формул в дальнейшем можно будет получить численные результаты для конкретных задач в данной постановке.

Литература

1. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.-416 с.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Издательство «Мир», 1975.-872 с.
3. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости.
Мн.: УП «Технопринт», 2003.-101 с.