М. А. КНЯЗЕВ
БНТУ (г. Минск)

ДВУХСОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА ДЕ ФРИЗА В ИНФЛЯЦИОННОЙ МОДЕЛИ

Инфляционная модель в настоящее время является одним из наиболее перспективных направлений изучения Вселенной на ранних стадиях её развития [1]. В этой модели принято считать, что на раннем этапе эволюции Вселенная обладала значительной энергией и находилась в неустойчивом вакуумоподобном состоянии. Под действием произвольных факторов такая Вселенная расширилась по экспоненциальному закону, после чего произошел распад вакуумоподобного состояния с последующим разогревом, а затем уже поведение Вселенной стандартной теории горячей Вселенной. Несмотря на очевидные успехи инфляционной модели, она имеет и нерешенные проблемы. В частности, не решена проблема определения первоначальной конфигурации скалярного инфляционного поля, которая с течением времени привела к современному распределению микроволнового излучения.

В этой связи представляет интерес поиск новых решений уравнения Фридмана, описывающего поведение Вселенной. Наряду с новыми решениями, которые можно найти, исходя из предположений физического характера, можно искать решения, используя математические свойства уравнений.

Одним из таких подходов является построение общего решения уравнения Фридмана с использованием уравнения Кортевега де Фриза (КдФ) и связи последнего с уравнением Риккати [2]. Известна связь между решением уравнения Фридмана и решением уравнения КдФ, описывающего одиночный солитон. Следующим после односолитонного решения в иерархии решений уравнения КдФ является двухсолитонное решение. Представляет интерес исследование взаимосвязи между двухсолитонным решением уравнения КдФ и решением уравнения Фридмана, в частности, как это можно использовать для вычисления параметров инфляционной модели.

В данной работе рассмотрена инфляционная модель, содержащая одно скалярное поле ϕ [3]. Плотность возмущения исследуем в наименьшем порядке для приближения медленного скатывания. Считаем, что скалярное поле изменяется монотонно со временем так, что производная по времени от него больше нуля. Уравнение Фридмана в такой модели имеет вид:

$$3H^2 - 2H'^2 = V(\phi), \quad \dot{\phi} = -2H', \tag{1}$$

где H - параметр Хаббла, $V(\phi)$ - инфляционный потенциал, точка обозначает дифференцирование по времени, а штрих – по инфляционному полю. Для определения плотности энергии использовано соотношение $\rho(\phi) = 3H^2$. В наименьшем порядке по параметрам скатывания спектральный индекс удовлетворяет нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$-(1-n_s)H^{2'} + H^{2'''} + \frac{2}{H_0^2}H^2 H^{2'} = 0, \tag{2}$$

где H_0 – произвольная константа, n_s – спектральный индекс. Данное уравнение представляет собой уравнение КдФ для функции H^2.

Исследуем инфляционную модель, для которой возможно построение двухсолитонного решения уравнения (2). Согласно [4], рассмотрим двухсолитонное решение уравнения КдФ для времени, значительно отстоящего от момента взаимодействия его солитонных составляющих. И для времени, бесконечно удаленного в прошлое, и для времени, бесконечно удаленного в будущее, двухсолитонное решение можно представить в виде:

$$H = H_1\left(\frac{\lambda_1\sqrt{8\pi}}{2m_P}\phi\right) + H_2\left(\frac{\lambda_2\sqrt{8\pi}}{2m_P}\phi\right), \tag{3}$$

где $\lambda_i^2 = 1 - n_{si}$, $i = 1, 2$, m_P – масса Планка.

Несмотря на то, что соотношение (3) описывает фактически невзаимодействующие компоненты, вследствие нелинейного характера задачи, в результате подстановки (3) в уравнение (2) получим систему нелинейных связанных уравнений вида:

$$-4\lambda_1^2 H_1^{'} + H_1^{'''} + \frac{3}{H_0}H_1 H_1^{'} + \frac{3}{H_0}H_1 H_2^{'} = 0, \tag{4}$$

$$-4\lambda_2^2 H_2^{'} + H_{21}^{'''} + \frac{3}{H_0}H_2 H_2^{'} + \frac{3}{H_0}H_2 H_1^{'} = 0. \tag{5}$$

Если ввести две новые функции y_1 и y_2 при помощи соотношений

$$H_1 = H_0\left(\lambda_1^2 - a_1 y_1^2\right), \tag{6}$$

$$H_2 = H_0\left(\lambda_2^2 - a_2 y_1^2\right), \tag{7}$$

где a_1 и a_2 - некоторые константы, то, подставив соотношения (6) и (7) в уравнения (4) и (5), последние можно преобразовать к виду

$$\frac{\left(y_1^2\right)''}{\left(y_1^2\right)} - 3\left(y_1^2 + y_2^2\right) = \lambda_1^2 + 3\lambda_2^2,$$

$$\frac{\left(y_2^2\right)''}{\left(y_2^2\right)} - 3\left(y_1^2 + y_2^2\right) = \lambda_2^2 + 3\lambda_1^2.$$

Полученные уравнения описывают в рассмотренном приближении взаимодействие между составляющими двухсолитонного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Линде, А.Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космология / А.Д. Линде. – М.: Наука, 1990. – 280 с.

2. Faraoni, V. Solving for dynamics of the universe // http://xxx.lanl.gov (arXiv:physics/9901006).

3. Lidsey, J.E. Cosmology and Korteweg-de Vries equation // http://xxx.lanl.gov (arXiv: astro-phys/1205.5641).

4. Князев, М.А. Инвариантное соотношение для составляющих двухсолитонного решения уравнения Кортевега де Фриза / М.А. Князев // Доклады НАН Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 1. – С. 38–40.

Е.А.КУЗНЕЦОВА
ГУО «Козенская средняя школа Мозырского района» (д. Козенки, Беларусь)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ СИСТЕМ С НЕЧЕТНЫМИ ОТНОШЕНИЯМИ КОМПОНЕНТ РЕШЕНИЙ

Отражающая функция – функция, связывающая прошлое состояние системы с её будущим состоянием в симметричный момент времени [1, с. 7] Понятие отражающей функции введено Владимиром Ивановичем Мироненко. Исследования с помощью отражающей функции позволяют получить новые результаты даже для уже хорошо изученных систем.

Ниже рассмотрим нечётность отношения координат решений системы по времени на примере конкретной заданной системы.

Для примера выясним, когда для системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by; \\ \dot{y} = cx + dy, \end{cases} \tag{1}$$

отношение $\dfrac{x(t)}{y(t)}$ нечетно по времени. Для решения задачи будем использовать теорию отражающей функции.

Решение. Сначала из системы (1) выразим $\dfrac{x}{y}$ следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{(ax+by)y - (cx+dy)x}{y^2} = \frac{(ax+by)y}{y^2} - \frac{(cx+dy)x}{y^2} = \frac{ax+by}{y} - \frac{(cx+dy)x}{y^2} =$$

$$a\frac{x}{y} + b - c\frac{x^2}{y^2} - d\frac{x}{y} = b + (a-d)\frac{x}{y} - c\left(\frac{x}{y}\right)^2.$$ Получим $$\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{y}\right) = b + (a-d)\frac{x}{y} - c\left(\frac{x}{y}\right)^2 \tag{2}$$

Для решения данной вначале задачи докажем следующую теорему для системы (1).

Теорема. *Пусть* $b, c, (a-d)$ *– чётные. Тогда для любого решения* $x(t), y(t)$, *для которого* $x(0) = 0$, *функция* $\dfrac{x(t)}{y(t)}$ *– нечётная.*