УДК 517.98

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЁТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

МешковаА.Н.
Научный руководитель - Кленовская И.С., старший преподаватель

Операторный метод − это метод расчёта переходных процессов в электрических цепях, основанный на замещении действительных функции времени$i(t)$, $u(t)$, называемые оригиналами, некоторыми новыми функциями, называемыми операторными изображениями$I(p)$, $U(p)$.

Переход от оригинала функции $f(t)$ к ее операторному изображению $F(p)$ устанавливается на основе прямого преобразования интеграла Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt,$$

где $p = \sigma + j \cdot \omega$ – комплексный оператор Лапласа.

Данное преобразование позволяет заменить операции дифференцирования и интегрирования над оригиналами функций на операции умножения и деления над операторными изображениями этих функций, что значительно упрощает расчет переходных процессов.

Условно расчет переходных процессов данным методом можно разделить на 3 этапа.

На 1-м этапе расчета по законам электротехники составляется система дифференциальных уравнений для оригиналов функций, далее эти функции подвергаются преобразованию Лапласа, после чего система дифференциальных уравнений для оригиналов принимает вид системы алгебраических уравнений для операторных изображений этих функций.

На 2-ом этапе выполняется решение системы алгебраических операторных уравнений относительно искомой функции, в результате чего получают выражение искомой функции в операторной форме $F(p)$.

На 3-м этапе выполняется обратный переход от найденного операторного решения для искомой функции $F(p)$ к соответствующей ей функции времени $f(t)$.

Обратный переход от операторного изображения функции $F(p)$ к ее оригиналу $f(t)$ устанавливается на основе обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \int_{\sigma - j \cdot \omega}^{\sigma + j \cdot \omega} F(p) \cdot e^{p \cdot t} \cdot dp.$$

Однако на практике для перехода от изображения функции к её оригиналу используются формула разложения и таблицы соответствия.

Мгновенные значения тока $i(t)$ и напряжения $u(t)$ на идеальных элементах электрических схем связаны между собой дифференциальной формой уравнений: $u_R(t) = i \cdot R$ – для резистора; $u_L(t) = L \cdot \dfrac{di}{dt}$ – для катушки индуктивности;) $u_C(t) = \dfrac{1}{C}\int\limits_0^t i \cdot dt + u_C(0)$ – для конденсатора. Применим к дифференциальным уравнениям преобразование Лапласа и получим соответствующее им операторные изображения:

$$U_R(p) = I(p) \cdot R\,,$$

$$U_L(p) = I(p) \cdot pL - L \cdot i(0)\,,$$

$$U_C(p) = I(p) \cdot \frac{1}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}\,.$$

Как отмечалось ранее переход от операторного изображения функции к ее оригиналу, т.е. к функции времени $f(t)$, осуществляется двумя способами.

Первый способ – по таблице соответствия. В этом случае операторное выражение искомой функции $F(p)$ преобразуется к одному из табличных видов и по таблице соответствия определяется оригинал функции $f(t)$.

Второй способ – по формуле разложения.

При решении системы операторных уравнений для искомой функции получают операторное выражение $F(p)$ в виде дроби, в числителе и знаменателе которой стоят степенные полиномы:

$$F(p) = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot p + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot p + b_0} = \frac{N(p)}{M(p)}\,.$$

При выполнении условий: m>n и уравнение $M(p) = 0$ не содержит кратных корней, выражение $F(p) = \dfrac{N(p)}{M(p)}$ может быть представлена в виде суммы простых дробей:

$$F(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \ldots + \frac{A_m}{p - p_m} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{A_k}{p - p_k}\,.$$

где A_1, A_2, … A_m – постоянные коэффициенты,

p_1, p_2, … p_m - корни уравнения $M(p) = 0$.

Для определения коэффициента A_1 умножим обе части уравнения на множитель $(p - p_1)$ и найдем предел выражения $F(p)$ при $p \to p_1$. В правой части уравнения получаем A_1, а в левой – неопределенность, так как $M(p_1) = 0$.

Раскроем эту неопределенность по правилу Лопиталя:

$$A_1 = \lim_{p \to p_1} \frac{N(p)}{M(p)} \cdot \left(p - p_1\right) = \lim_{p \to p_1} \frac{N(p) \cdot 1 + \left(p - p_1\right) \cdot N'(p)}{M'(p)} = \frac{N(p)}{M'(p)}.$$

Таким образом получаем следующий вид функции:

$$F(p) = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} \cdot \frac{1}{p - p_1} + \ldots + \frac{N(p_m)}{M'(p_m)} \cdot \frac{1}{p - p_m} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k}.$$

По таблице соответствия находим, что операторному изображению

$F(p) = \dfrac{A_k}{p - p_k}$ соответствует оригинал $f(t) = A_k \cdot e^{p_k t}$

Отсюда оригинал искомой функции получает вид:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot e^{p_k t}.$$

Это уравнение получило название формулы разложения и используется для перехода от операторного изображения функции к ее оригиналу.

Для наглядности применения данного метода в расчетах переходных процессов приведем пример такого расчета. Пусть в электрической цепи (рисунок 1) требуется найти закон изменения тока, протекающего через резистор R_3.

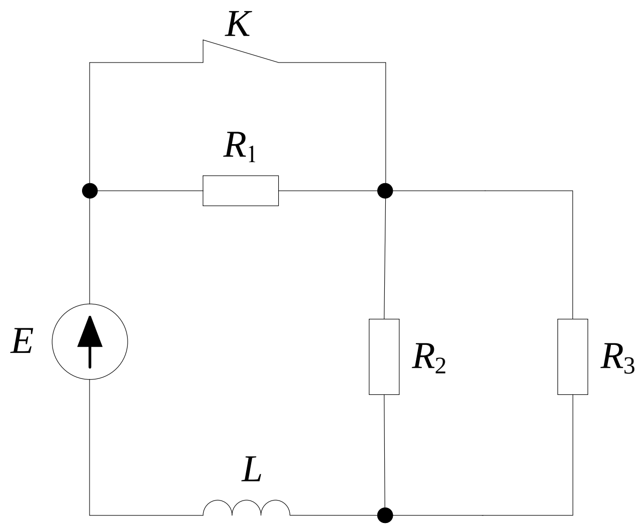

Рисунок 1 – Исходная схема электрической цепи

Для начала рассчитаем независимые начальные условия и найдем ток катушки до коммутации. Расчет проведем в соответствии с рисунком 2.

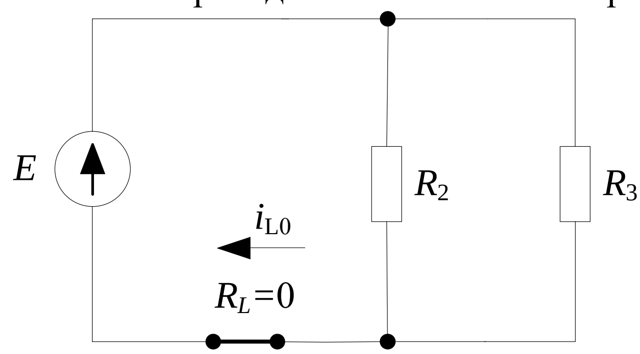

Рисунок 2 – Схема цепи для докоммутационного режима

В докоммутационном режиме ключ *K*замкнут. Сопротивление катушки в этом режиме равно нулю.

Находим ННУ:

$$i_L(0) = \frac{E \cdot \left(R_2 + R_3\right)}{R_2 \cdot R_3}.$$

Составим операторную схему замещения цепи после коммутации, заменив необходимые элементы их изображениями (рисунок 3).

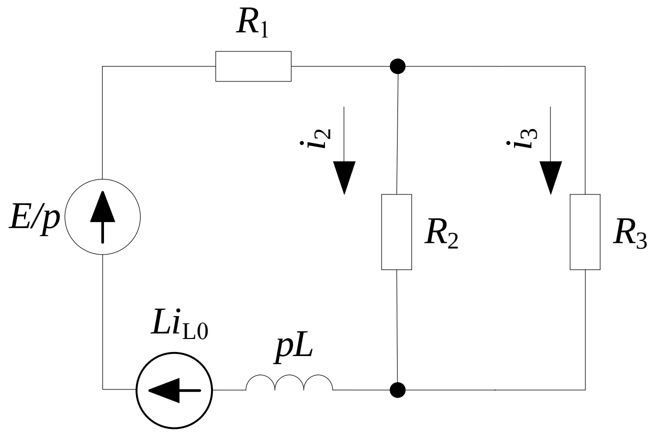

Рисунок 3 – Операторная схема замещения в послекоммутационном режиме

Составим уравнение для изображения искомого тока по методу двух узлов:

$$i_3 = \frac{\left(E + pL \cdot i_L(0)\right) \cdot R_2}{p \cdot \left(R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 + R_3 \cdot pL + R_2 \cdot R_1 + R_2 \cdot pL\right)} = \frac{N\left(p\right)}{M\left(p\right)}.$$

Для того, чтобы применить теорему разложения найдем корни уравнения $M(p) = 0$:

$$p \cdot \left(R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 + R_3 \cdot pL + R_2 \cdot R_1 + R_2 \cdot pL\right) = 0.$$

Получаем: $p_0 = 0$,

$$p_1 = \frac{-\left(R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_1\right)}{L \cdot \left(R_3 + R_2\right)}.$$

Искомую функцию тока выведем, применив теорему разложения:

$$i_3(t) = \frac{N(p_0)}{M'(p_0)} \cdot e^{p_0 t} + \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} \cdot e^{p_1 t}.$$

Литература

1 Учебное пособие для студентов электротехнических специальностей. Мазуренко А.А. Белорусский национальный технический университет – Кафедра Электротехника и электроника – Минск 2013 г. – 211 стр.

2 Toehelp.ru [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://toehelp.ru/theory/toe/lecture27/lecture27.html. – Дата доступа: 20.05.2020.

3 Свободная энциклопедия «Википедия» [Электронный ресурс]. – Режим доступа : https://ru.wikipedia.org/wiki/Операторный_метод_расчёта_переходных_процессов – Дата доступа : 20.05.2020.