УДК 517.925.4

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Сахнович А.Д.
Научный руководитель – Кураленко М.В., ст. преподаватель

Введение

В приложениях математики к различным отраслям науки дифференциальные уравнения играют важную роль. Их использование – наиболее эффективное и распространенное средство решения многих прикладных задач. Одной из отраслей, активно использующих дифференциальные уравнения на практике, является физика. Часто при изучении различных физических явлений не удается непосредственно найти законы, связывающие величины, характеризующие то или иное явление. Но, в то же время, без проблем можно установить зависимость между их производными или дифференциалами. При этом будут получены уравнения, содержащие неизвестные функции под знаком производной или дифференциала.

Принципы составления дифференциальных уравнений по условиям задач

Универсальных правил для составления дифференциальных уравнений не существует, однако в большинстве своем можно выделить следующие этапы методики решения прикладных задач с использованием дифференциальных уравнений:

1) Внимательный разбор условия задачи и составление чертежа, отражающего ее суть;
2) Определение математической зависимости между переменными величинами и их приращениями, замена их соответствующими дифференциалами, составление дифференциального уравнения;
3) Интегрирование полученного уравнения и нахождение его общего решения;
4) Определение частного решения задачи на основе заданных начальных условий;
5) Определение, по мере необходимости, вспомогательных параметров (например, коэффициентов пропорциональности и др.) с использованием для этого дополнительных условий задачи;

6) Вывод общего закона рассматриваемого процесса и числовое определение величин;

7) Анализ полученного результата.

В качестве примера рассмотрим физическую задачу о движении планет, приводящую к системам дифференциальных уравнений второго порядка.

Движение планет

Задача. Найти закон движения планет Солнечной системы, в частности, движения Земли вокруг Солнца, основываясь на законе всемирного тяготения, не учитывая при этом влияния других планет.

Решение. Пусть Солнце находится в начале системы координат *xOy,* а Земля в момент t движения по солнечной орбите имеет текущие координаты (*x,y*).

В качестве положительных направлений векторов примем направления +*x* и +*y*.

Из рисунка 1 видно, что действующая на Землю сила *F*раскладывается на горизонтальную и вертикальную составляющие соответственно *F*cosθ и *F*sinθ.

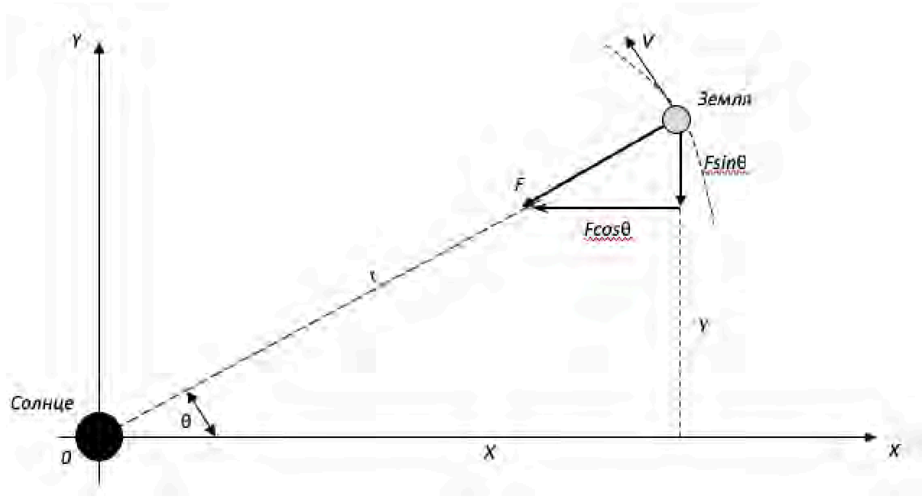

Рисунок 6

Пусть M – масса Солнца, m– масса Земли.

Тогда на основании закона всемирного тяготения $F = \frac{kM_1M_2}{d^2}$ и второго закона динамики $F = ma$получаем

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -F\cos\theta = -\frac{kMm}{r^2}\cos\theta, \tag{1}$$

$$m\,\frac{d^2y}{dt^2} = -F\sin\theta = -\frac{kMm}{r^2}\sin\theta, \tag{2}$$

Учитывая, что $\sin\theta = \frac{y}{r}$ и $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, используяv=kM, уравнения (1) и (2) примут вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\frac{vx}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\,\frac{vy}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \tag{3}$$

Начальные условия: t= 0, $x = a$, y = 0, $\frac{dx}{dt}$ = 0, $\frac{dy}{dt}$ = v_0.

Теперь нужно решить систему дифференциальных уравнений (3), удовлетворяющую этим начальным условиям.

Так как $x = r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$, то дифференцируя эти выражения по tи обозначая соответствующие производные сверху точкой, подставляя полученные результаты в систему (3) и выполняя некоторые преобразования, получаем:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\,\frac{v}{r^2}. \tag{4}$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + \dot{r}\ddot{\theta} = 0. \tag{5}$$

Соответственно необходимо представить начальные условия в полярных координатах:

$$\text{при}\, t = 0 \quad r = a,\ \theta = 0,\ \dot{r} = 0,\ \dot{\theta} = \frac{v_0}{a}. \tag{6}$$

Теперь необходимо решить систему уравнений (4) и (5), удовлетворяющую начальным условиям (6).

Замечая, что левая часть уравнения (5) представляет выражение $\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}$ $(r^2\dot{\theta})$, можем его заменить уравнением $\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0$

или

$$\left(r^2\dot{\theta}\right) = C_1. \tag{7}$$

Из условий (6) видим, что при $t = 0$ $r = a$и $\dot{\theta} = \frac{v_0}{a}$. Используя это, из уравнения (7) получаем (8) и уравнение (4) будет выглядеть следующим образом:

$$\boldsymbol{\dot{\theta} = \frac{a v_0}{r^2}}; \tag{8}$$

$$\ddot{r} = \frac{a^2 {v_0}^2}{r^3} - \frac{v}{r^2}. \tag{9}$$

Уравнение (9) решим методом понижения порядка, и рассмотрим только положительный корень:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\left(v_0^2 - \frac{2v}{a}\right) + \frac{2v}{r} - \frac{a{v_0}^2}{r^2}}. \tag{10}$$

Для описания траектории Земли при ее движении необходимо получить уравнение, связывающее r и θ. Разделим уравнение (10) на (8) и получим уравнение содержащее r и θ, но не включающее t.

$$\frac{dr}{d\theta} = r\sqrt{Ar^2 + 2Br - 1}, \tag{11}$$

где $A = \frac{1}{a^2} - \frac{2v}{a^3 {v_0}^2}, B = \frac{v}{a^2 {v_0}^2}$.

Разделяем переменные, интегрируем и получаем

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{Ar^2 + 2Br - 1}} = \int d\theta = \theta + C_3. \tag{12}$$

Применяя подстановку $r = \frac{1}{u}$,$dr = -\frac{du}{u^2}$ и преобразовывая, получаем

$$\arccos \frac{u - B}{\sqrt{A + B^2}} = \theta + C_3. \tag{13}$$

Общее решение $u = B + \sqrt{A + B^2}\cos(\theta + C_3) = \mathrm{B}[1 + e\cos(\theta + C_3)]$,

где $e = \frac{\sqrt{A + B^2}}{B} = \frac{a{v_0}^2}{v} - 1$.

Так как $u = \frac{1}{r}$, то $r = \frac{\frac{a^2 {v_0}^2}{v}}{1 + e\cos(\theta + C_3)}$.

Начальное условие: $\theta = 0$ $r = a$. Отсюда

$$a(1 + e\cos C_3) = \frac{a^2 {v_0}^2}{v}.$$

Сокращаем на aи переносим единицу в правую часть уравнения, и затем снова сокращая обе части равенства наe, получим искомую зависимость r= f(θ):

$$r = \frac{a^2 {v_0}^2}{v(1 + e\cos\theta)}.$$

Литература

1. Пономарев К. К., Составление дифференциальных уравнений: Учебное пособие. – Мн., «Вышэйш. школа», 1973. – 560 с.