

Ч. А. Якубовский

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ

Пособие

для студентов специальностей

1-36 01 01 «Технология машиностроения»,

1-36 01 03 «Технологическое оборудование
машиностроительного производства»,

1-36 01 05 «Машины и технология обработки
материалов давлением»,

1-55 01 01 «Интеллектуальные приборы, машины и производства»,

1-55 01 02 «Интегральные сенсорные системы»,

1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника»

УДК 620.1 (075.8)
ББК 30.121я7
Я49

Р е ц е н з е н т ы:

зав. каф. «Механика материалов и детали машин» БГАТУ,
канд. техн. наук, доцент *В. Н. Основин*;
кафедра «Механика материалов и конструкций» БГТУ,
зав. каф., канд. техн. наук, доцент *А. В. Спиглазов*

Якубовский, Ч. А.

Я49 Упругопластический изгиб стержней: пособие для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства», 1-36 01 05 «Машины и технология обработки материалов давлением», 1-55 01 01 «Интеллектуальные приборы, машины и производства», 1-55 01 02 «Интегральные сенсорные системы», 1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника» / Ч. А. Якубовский. – Минск: БНТУ, 2020. – 62 с.

ISBN 978-985-583-139-7.

В пособии изложены теоретические сведения по определению нормальных напряжений и деформаций при плоском изгибе, внецентренном растяжении и сжатии, косом изгибе и упругопластическом изгибе стержней. Приведены методические указания для решения конкретных примеров задач с учетом прочностных свойств материалов.

УДК 620.1 (075.8)
ББК 30.121я7

ISBN 978-985-583-139-7

© Якубовский Ч. А., 2020
© Белорусский национальный
технический университет, 2020

ВВЕДЕНИЕ

Изгибом называют такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях из шести возможных внутренних силовых факторов возникают лишь поперечные силы и изгибающие моменты. Если в сечении стержня поперечная сила отсутствует, то такой изгиб называется *чистым*. Однако при нагружении стержней внешними силами, что чаще всего происходит на практике, в сечениях стержней действуют также поперечные силы. В этом случае имеет место *поперечный изгиб*.

Изгиб является одним из наиболее распространенных видов деформации элементов машин и сооружений. Изучение изгиба стержней представляет собой большую и сложную задачу. Основными направлениями при исследовании деформации изгиба являются:

- выявление внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержня и изучение закона их изменения с целью выявления опасных сечений;

- определение напряжений при изгибе, изучение закона их распределения по сечению и проверка прочности стержней;

- исследование изогнутой оси стержня, определение линейных и угловых деформаций поперечных сечений и проверка жесткости стержней.

Напряжения, возникающие в различных сечениях стержня при изгибе, зависят от величин внутренних силовых факторов в этих сечениях. Поэтому первостепенной задачей при расчете стержней на изгиб является изучение закона изменения поперечных сил и изгибающих моментов. Изменение этих величин по длине стержня обычно представляют в виде графиков, называемых *эпюрами*.

Правила построения эпюр внутренних силовых факторов при изгибе, а также зависимости между ними, позволяющие контролировать правильность построения эпюр, подробно рассматриваются в учебной литературе по сопротивлению материалов.

Рассмотрим более подробно определение нормальных напряжений в общем случае нагружения стержня, а также энергетический метод определения деформаций при изгибе стержней.

1. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ИЗГИБА

1.1. Силовые факторы в сечении стержня

Для выявления силовых факторов в поперечных сечениях стержня применяется известный из литературы метод сечений [1–2]. Он основан на рассмотрении равновесия отсеченной части стержня, к которой кроме внешних сил прикладываются в сечении силы, равные усилиям внутренних связей. Эти силы приводятся к центру тяжести сечения в виде главного вектора R и главного момента M .

Выбираем правостороннюю систему координат xuz и раскладываем главный вектор и главный момент на составляющие вдоль этих осей (рис. 1.1).

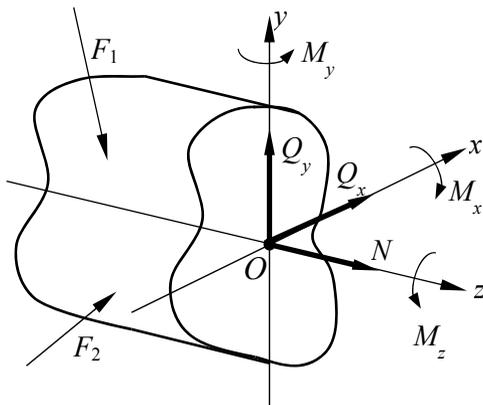


Рис. 1.1. Внутренние силовые факторы в сечении стержня

Для компонент внутренних сил установлены следующие названия:

N – продольная (нормальная) сила;

Q_x , Q_y – поперечные (перерезывающие) силы;

M_x , M_y – изгибающие моменты;

M_z – крутящий момент.

Эти составляющие главного вектора и главного момента называются *внутренними силовыми факторами*. Они определяются из уравнений равновесия, составленных для отсеченной части стержня

ня. В общем случае для пространственной системы сил можно записать, как известно, шесть уравнений равновесия.

1.2. Правило знаков внутренних силовых факторов

Для составляющих главного вектора R принимается следующее правило знаков: в сечении стержня, внешняя нормаль к которому совпадает с положительным направлением координатной оси, силы Q_x , Q_y и N считаются положительными, если они совпадают с положительным направлением осей x , y и z . Если внешняя нормаль совпадает с отрицательным направлением оси, то эти силы считаются положительными, если они направлены в сторону соответствующей отрицательной оси.

Для составляющих главного момента M принимается правило знаков вращения, используемое для правосторонней системы координат. Согласно этому правилу момент или вращение относительно оси считается положительным, если поворот осуществляется против часовой стрелки при взгляде со стороны положительного направления соответствующей координатной оси.

На рис. 1.1 показаны положительные направления всех внутренних силовых факторов.

В отечественной учебной литературе по сопротивлению материалов, а также в литературе стран СНГ правило знаков внутренних силовых факторов не связывается с координатными осями, а устанавливается произвольно [2–5]. Исключение составляет лишь учебное пособие [6]. Это, на наш взгляд, является неправомерным и приводит к определенным противоречиям. Так, например, в указанных источниках при плоском поперечном изгибе поперечная сила Q_y в сечении считается положительной, если она стремится повернуть отсеченную часть стержня по часовой стрелке. При этом обоснование выбора именно такого правила в учебной литературе найти невозможно. В то же время, в этом же сечении касательные напряжения τ_y , являющиеся мерой интенсивности внутренних сил Q_y и действующие в их направлении, согласно правилу знаков напряжений, принятому в этих же и других источниках, считаются отрицательными [2, с. 23, 31], [7]. Поэтому необходимо принимать общее правило знаков для напряжений и внутренних силовых факторов, свя-

занное с принятой системой координат и зависящее от направления внешней нормали к сечению.

1.3. Гипотеза плоских сечений

Точное решение задачи об определении нормальных и касательных напряжений при изгибе представляет собой определенные трудности, поэтому в инженерной практике для определения этих напряжений применяется теория изгиба, построенная на гипотезе плоских сечений, впервые предложенная Я. Бернулли. Согласно этой гипотезе поперечные сечения стержней, плоские и нормальные к оси стержня до деформации, остаются плоскими и нормальными к его оси и после деформации.

Гипотеза плоских сечений является строгой при чистом изгибе (когда $Q_x = 0$ и $Q_y = 0$) и приближенной при поперечном изгибе.

При чистом изгибе изгибающий момент постоянен по длине стержня. Поэтому любой выделенный элемент длиной dz будет нагружен симметричной нагрузкой (моментами M_x). Следовательно, срединное сечение этого элемента после деформации из-за симметрии остается плоским и нормальным к его деформированной оси.

При поперечном изгибе в плоскости yz картина нагружения выделенного элемента будет иной (рис. 1.2).

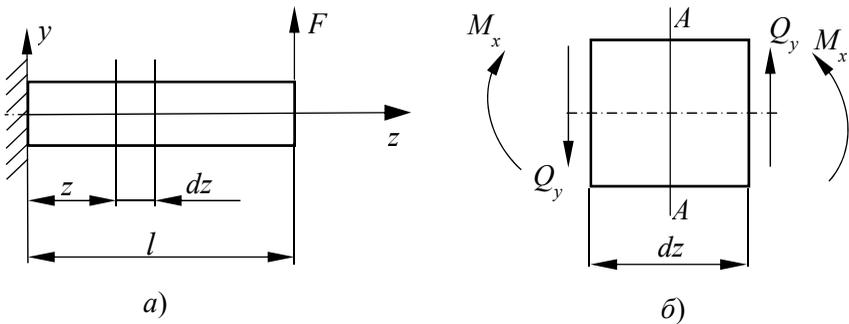


Рис. 1.2. Поперечный изгиб стержня:
а) расчетная схема; б) выделенный элемент

Элемент стержня (рис. 1.2, б) нагружен несимметрично. Поэтому он будет деформироваться несимметрично относительно средин-

ного сечения $A-A$, и это сечение не останется плоским после деформации. Однако при постоянном значении Q_y по длине стержня постоянного сечения его поперечные сечения хотя и будут искривляться, но совершенно одинаковым образом. Поэтому картина деформации продольных волокон стержня будет такой же, как и при чистом изгибе. Лишь при изгибе стержней переменного сечения, а также при изменении поперечной силы Q_y вдоль участка стержня гипотеза плоских сечений является приближенной. Однако, для стержней большой длины погрешность вычислений нормальных напряжений по формулам чистого изгиба относительно мала.

1.4. Вывод формулы нормальных напряжений

Рассмотрим стержень, подвергающийся чистому изгибу. Это наиболее простой случай, который позволяет изучить основные особенности деформации изгиба. В этом случае поперечные силы $Q_x = Q_y = 0$ (рис. 1.1). Также отсутствуют деформации сдвига, т. е.

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \text{ и } \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

Согласно гипотезе о ненадавливании продольных волокон друг на друга можно также записать:

$$\sigma_x = \sigma_y = 0 \text{ и } \tau_{xy} = 0.$$

Таким образом, из шести напряжений, определяющих напряженное состояние в точке отличной от нуля является лишь нормальное напряжение σ_z , действующее перпендикулярно плоскости сечения стержня. Поэтому в упругой стадии нагружения оно может быть определено из закона Гука при растяжении:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z. \quad (1.1)$$

Сформулируем гипотезу плоских сечений по-другому: все точки поперечного сечения стержня и после деформации лежат в одной плоскости, нормальной к его оси. Поэтому для определения пере-

мещения произвольной точки A поперечного сечения (рис. 1.3) вдоль оси z воспользуемся уравнением плоскости:

$$w = a + bx + cy, \quad (1.2)$$

где a , b и c являются функциями одной лишь переменной z . При этом величина a представляет собой перемещение вдоль оси z точек, лежащих на оси стержня.

Обозначим $a = w_0$.

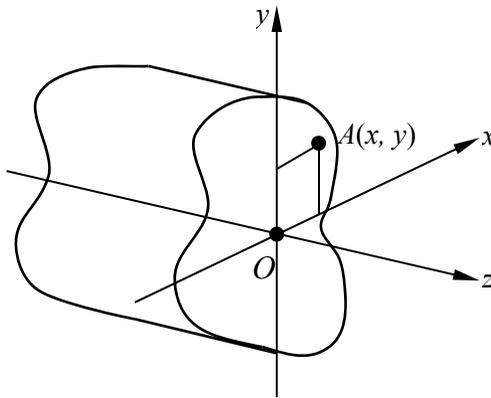


Рис. 1.3. Упругое смещение точек поперечного сечения стержня при изгибе

Запишем известные формулы Коши, связывающие между собой деформации и перемещения точек упругого тела [7]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z},$$

где u , v , w – проекции на координатные оси x , y , z перемещения точки;
 ε_x , ε_y , ε_z – линейные деформации вдоль координатных осей x , y , z .

Так как $\gamma_{yz} = 0$, то получим

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Из выражения (1.2) находим $\frac{\partial w}{\partial y} = c$. Тогда $\frac{\partial v}{\partial z} + c = 0$; $c = -\frac{\partial v}{\partial z}$.

Аналогично получим $\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$; $\frac{\partial w}{\partial x} = b$;

$$b + \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad b = -\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Подставляя значения a , b и c в уравнение (1.2), запишем

$$w = w_0 - \frac{\partial u}{\partial z} \cdot x - \frac{\partial v}{\partial z} \cdot y.$$

Дифференцируя по z , получим

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z = \varepsilon_0 - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot x - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \cdot y, \quad (1.3)$$

где $\varepsilon_0 = \frac{\partial w_0}{\partial z}$ – относительная деформация точек, лежащих на оси стержня.

Рассматривая совместно выражения (1.1) и (1.3), запишем

$$\sigma_z = E \left(\varepsilon_0 - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot x - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \cdot y \right). \quad (1.4)$$

Обозначим $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k_y$; $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = k_x$. Тогда выражение (1.4) принимает вид

$$\sigma_z = E \left(\varepsilon_0 - k_y \cdot x - k_x \cdot y \right). \quad (1.5)$$

Для определения величин ε_0 , k_x и k_y (так называемых параметров деформации) свяжем напряжение σ_z с внутренними силовыми факторами.

Как известно, в поперечном сечении стержня возникают только нормальные напряжения при условии чистого изгиба или центрального растяжения. Поэтому рассмотрим общий случай, когда в поперечном сечении стержня действуют изгибающие моменты и продольная сила (рис. 1.4).

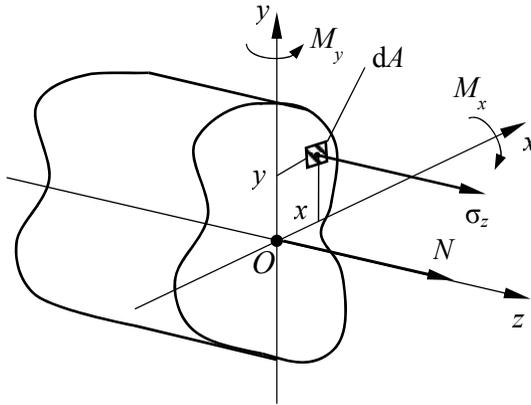


Рис. 1.4. Связь нормальных напряжений с внутренними силовыми факторами

Выражая внутренние усилия через напряжения σ_z , запишем

$$N = \int_A \sigma_z dA; \quad M_x = \int_A \sigma_z y dA; \quad M_y = -\int_A \sigma_z x dA. \quad (1.6)$$

Знак « $-$ » в последнем равенстве указывает на то, что момент элементарной силы $\sigma_z dA$ относительно оси y противоположен положительному направлению вращения, т. е. положительно направленному моменту M_y (рис. 1.4).

Подставляя выражение (1.5) в соотношения (1.6), получим

$$\begin{aligned}
N &= E \left(\varepsilon_0 \int_A dA - k_y \int_A xdA - k_x \int_A ydA \right); \\
M_x &= E \left(\varepsilon_0 \int_A ydA - k_y \int_A xydA - k_x \int_A y^2 dA \right); \\
-M_y &= E \left(\varepsilon_0 \int_A xdA - k_y \int_A x^2 dA - k_x \int_A xydA \right).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

В этих формулах интегралы представляют собой геометрические характеристики поперечного сечения стержня:

$$\begin{aligned}
\int_A dA &= A; & \int_A xdA &= S_y; & \int_A ydA &= S_x; \\
\int_A xydA &= I_{xy}; & \int_A y^2 dA &= I_x; & \int_A xdA &= I_y.
\end{aligned}$$

Если оси x и y являются центральными осями, то статические моменты относительно этих осей обращаются в ноль:

$$S_x = \int_A ydA = 0; \quad S_y = \int_A xdA = 0.$$

С учетом вышеизложенного формулы (1.7) принимают вид

$$\begin{aligned}
N &= E\varepsilon_0 A; & \varepsilon_0 &= \frac{N}{EA}; & M_x &= E(-k_y \cdot I_{xy} - k_x \cdot I_x); \\
-M_y &= E(-k_y \cdot I_y - k_x \cdot I_{xy}).
\end{aligned}$$

Решая совместно два последних уравнения, находим

$$k_y = \frac{M_x \cdot I_{xy} + M_y \cdot I_x}{E(I_x \cdot I_y - I_{xy}^2)}; \quad k_x = -\frac{M_x \cdot I_y + M_y \cdot I_{xy}}{E(I_x \cdot I_y - I_{xy}^2)}. \tag{1.8}$$

Подставляя значения ε_0 , k_x и k_y в уравнение (1.5), получим

$$\sigma_z = \frac{N}{A} - \frac{M_x \cdot I_{xy} + M_y \cdot I_x}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \cdot x + \frac{M_x \cdot I_y + M_y \cdot I_{xy}}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \cdot y. \quad (1.9)$$

Формула (1.9) справедлива для произвольных центральных осей поперечного сечения стержня. В практических расчетах чаще всего используют главные оси сечения, которые можно получить путем поворота заданных центральных осей $xу$ на определенный угол α . При этом угол α выбирают таким, чтобы центробежный момент инерции в главных осях $xу$ обращался в ноль, т. е.

$$I_{xy} = \int_A xy dA = 0. \quad (1.10)$$

Способ нахождения положения главных осей хорошо известен. Известно также, что если хотя бы одна из центральных осей $xу$ является осью симметрии сечения, то условие (1.10) заведомо выполняется. В этом случае оси $xу$ являются главными центральными осями.

Подставляя в формулу (1.9) $I_{xy} = 0$, получим

$$\sigma_z = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} \cdot x + \frac{M_x}{I_x} \cdot y. \quad (1.11)$$

Выражения (1.8) также значительно упрощаются:

$$k_y = \frac{M_y}{E \cdot I_y}; \quad k_x = -\frac{M_x}{E I_x}. \quad (1.12)$$

Физический смысл параметров деформации k_x и k_y заключается в том, что они выражают кривизны проекций изогнутой оси стержня на координатные плоскости xoz и yoz соответственно. При этом

$$k_y = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \quad k_x = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Знак « \rightarrow » в последнем равенстве (1.12) указывает на то, что при положительном значении изгибающего момента M_x кривизна изогнутой оси отрицательна.

Таким образом, при малых деформациях кривизна изогнутой оси стержня в плоскости, содержащей его продольную ось, равна второй производной от прогиба в этой плоскости по длине стержня.

Формула (1.11) является одной из основных формул в сопротивлении материалов. Она в полной мере применима к задачам о внецентренном растяжении или сжатии, когда внешняя сила не совпадает с осью стержня, а проходит через точку, называемую *поллюсом*, оставаясь параллельной его оси. В этой формуле первое слагаемое выражает напряжение от растяжения или сжатия, два других слагаемых – напряжения от изгиба стержня.

Если в сечении продольная сила отсутствует, а изгибающий момент приложен не в главной плоскости, то такой вид изгиба, как известно, называется *косым изгибом*. В этом случае формула (1.11) принимает вид

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot x. \quad (1.13)$$

При $M_y = 0$ получим известную формулу для определения нормальных напряжений при плоском изгибе [8]:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y.$$

Рассмотрим более подробно эти виды нагружения стержня.

2. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Пусть на стержень действуют растягивающие силы, равнодействующая которых F проходит через точку P с координатами x_p и y_p , оставаясь параллельной оси стержня (рис. 2.1).

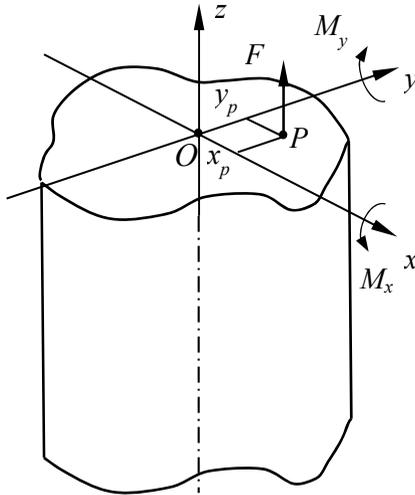


Рис. 2.1. Внецентренное растяжение стержня

Тогда в любом поперечном сечении стержня возникают изгибающие моменты относительно центральных осей x и y , а также продольная сила:

$$\begin{aligned} M_x &= F \cdot y_p; \\ M_y &= -F \cdot x_p; \\ N &= F. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь знак « $-$ » указывает на то, что момент силы F относительно оси y противоположен положительному направлению вращения. Подставляя равенства (2.1) в формулу (1.9), после очевидных преобразований получим

$$\sigma_z = \frac{F}{A} \left\{ 1 + \frac{A}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \left[(I_x \cdot x_p - I_{xy} \cdot y_p) \cdot x + (I_y \cdot y_p - I_{xy} \cdot x_p) \cdot y \right] \right\}. \quad (2.2)$$

Формула (2.2) справедлива для произвольных центральных осей поперечного сечения стержня. Однако, как отмечалось ранее, в практических расчетах используют в основном главные центральные оси.

В этом случае $I_{xy} = 0$, и формула (2.2) значительно упрощается:

$$\sigma_z = \frac{F}{A} \left[1 + A \left(\frac{x_p}{I_y} \cdot x + \frac{y_p}{I_x} \cdot y \right) \right]. \quad (2.3)$$

Известны следующие соотношения между геометрическими характеристиками сечения:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \quad (2.4)$$

где i_x, i_y – радиусы инерции сечения относительно осей x и y соответственно.

С учетом выражений (2.4) формула (2.3) принимает вид

$$\sigma_z = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_p}{i_y^2} \cdot x + \frac{y_p}{i_x^2} \cdot y \right). \quad (2.5)$$

Анализируя данное выражение, приходим к следующему правилу, называемому *теоремой о взаимности напряжений*: сила, параллельная оси стержня и приложенная в точке A сечения, вызывает напряжение в точке B , равное напряжению в точке A при действии такой же силы, приложенной в точке B и параллельной оси стержня.

Наибольшие напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии, уравнение которой получим из выражения (2.5), приравнивая σ_z к нулю:

$$1 + \frac{x_p}{i_y^2} \cdot x + \frac{y_p}{i_x^2} \cdot y = 0. \quad (2.6)$$

Последнее уравнение можно записать в виде уравнения прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a_x} + \frac{y}{a_y} = 1, \quad (2.7)$$

где a_x и a_y – отрезки, отсекаемые нейтральной линией от координатных осей x и y соответственно. При этом

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_p}; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_p}. \quad (2.8)$$

Анализ выражений (2.6) и (2.8) показывает, что:

- нейтральная линия не проходит через центр тяжести сечения, а пересекает оси координат в четверти сечения, противоположной полюсу;
- при приближении полюса силы к центру тяжести сечения нейтральная линия удаляется от него и, наоборот;
- если полюс расположен на одной из центральных осей, то нейтральная линия перпендикулярна этой оси.

На рис. 2.2 изображено сечение стержня и эпюра распределения нормальных напряжений по сечению (продольная сила F – растягивающая).

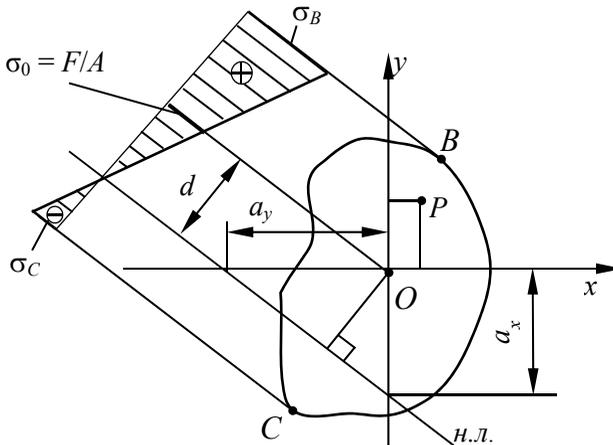


Рис. 2.2. Эпюра нормальных напряжений стержня произвольного сечения

Для определения расстояния от центра тяжести сечения до нейтральной линии воспользуемся известной из аналитической геометрии формулой, определяющей расстояние от точки до прямой (рис. 2.3):

$$d = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (2.9)$$

где a , b , c – постоянные, входящие в уравнение прямой:

$$ax + by + c = 0. \quad (2.10)$$

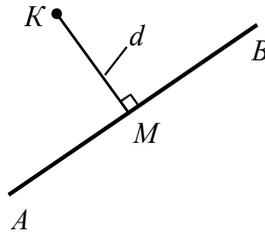


Рис. 2.3

В нашем случае (см. выражение (2.6)) имеем

$$a = \frac{x_p}{i_y^2}; \quad b = \frac{y_p}{i_x^2}; \quad c = 1.$$

Тогда

$$d = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_p}{i_y^2}\right)^2 + \left(\frac{y_p}{i_x^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{a_y}\right)^2}} = \frac{a_x \cdot a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}. \quad (2.11)$$

При расчете на прочность по допускаемым напряжениям записывают условие прочности для наиболее удаленных точек растянутой и сжатой зон (рис. 2.2):

$$\sigma_{\max} = \sigma_B = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_p}{i_y^2} \cdot x_B + \frac{y_p}{i_x^2} \cdot y_B \right) \leq [\sigma_p]; \quad (2.12)$$

$$\sigma_{\min} = |\sigma_C| = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_p}{i_y^2} \cdot x_C + \frac{y_p}{i_x^2} \cdot y_C \right) \leq [\sigma_c]. \quad (2.13)$$

Здесь также можно использовать формулу (1.11). Если материал стержня одинаково работает на растяжение и сжатие (малоуглеродистые стали, медь и др.), то $[\sigma_p] = [\sigma_c]$, и тогда расчет ведется по наибольшему по абсолютной величине значению напряжения.

Следует отметить, что во многих учебниках и учебных пособиях по сопротивлению материалов формула (1.11) записывается в следующем виде:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot x \pm \frac{M_x}{I_x} \cdot y. \quad (2.14)$$

При этом знаки слагаемых в формуле (2.14) предлагается выбирать «по знакам напряжений от изгиба в первом квадранте» [3, с. 197] либо в каждом конкретном случае устанавливать «по характеру деформации стержня» [9, с. 283]. При этом в [3] предлагается ставить знаки напряжений «+» или «-» в каждой четверти сечения в зависимости от направления изгибающих моментов M_x и M_y .

Авторы [2] предлагают изменять положительные направления координатных осей в сечении, направляя их в каждом конкретном случае в сторону растянутых волокон стержня.

Все эти приемы являются разобщенными, громоздкими и сложными для усвоения.

При рассмотрении подобных задач рекомендуется поступать следующим образом.

1. Первоначально выбрать правостороннюю систему координат, при которой переход от оси x к оси y происходит против часовой стрелки при взгляде со стороны положительно направленной оси z

и т. д. (рис. 2.4). При этом при выводе формул и решении конкретных задач следует пользоваться только правосторонней системой координат.

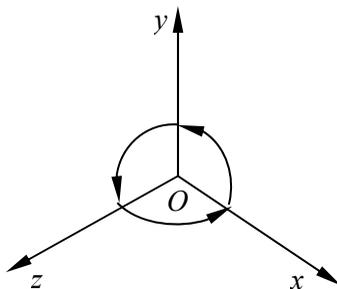


Рис. 2.4. Правосторонняя система координат

2. Первоначально следует принять правило знаков для всех внутренних силовых факторов, которое неразрывно связано с принятой системой координат. При выполнении последующих расчетов следует строго придерживаться принятого правила знаков.

3. В расчетных формулах для определения нормальных напряжений, а также положения нейтральной линии координаты рассматриваемой точки x и y , а также координаты полюса силы x_p и y_p подставляются со своими знаками.

При выполнении этих условий нет необходимости дополнительно применять те или иные методы для определения знаков слагаемых во всех расчетных формулах.

Пример. Короткая бетонная стойка прямоугольного поперечного сечения подвергается действию продольной сжимающей силы, приложенной внецентренно (рис. 2.5). Определить положение нейтральной линии сечения и построить эпюру нормальных напряжений. Проверить прочность стойки.

Исходные данные:

$$b = 12 \text{ см}; h = 20 \text{ см}; F = 15 \text{ кН}; x_p = -2 \text{ см}; y_p = -3 \text{ см}.$$

Допустимые напряжения для бетона [3]: на растяжение $[\sigma_p] = 0,6 \text{ МПа}$; на сжатие $[\sigma_c] = 6 \text{ МПа}$.

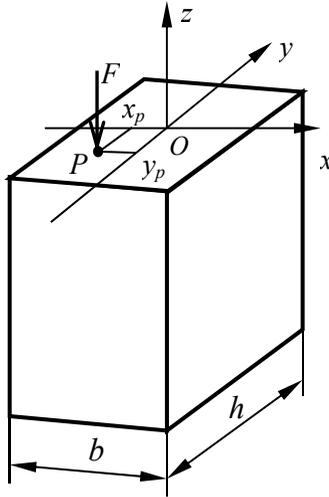


Рис. 2.5

Решение.

1. Определяем положение нейтральной линии в поперечном сечении стержня. Для этого вычисляем отрезки, отсекаемые нейтральной линией на координатных осях x и y :

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_p}; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_p},$$

где
$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12} = \frac{20^2}{12} = 33,3 \text{ см}^2;$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{hb^3}{12bh} = \frac{b^2}{12} = \frac{12^2}{12} = 12 \text{ см}^2.$$

Тогда $a_x = -\frac{12}{-2} = 6 \text{ см}; \quad a_y = -\frac{33,3}{-3} = 11,1 \text{ см}.$

Откладывая эти отрезки вдоль осей x и y , проводим нейтральную линию (рис. 2.6).

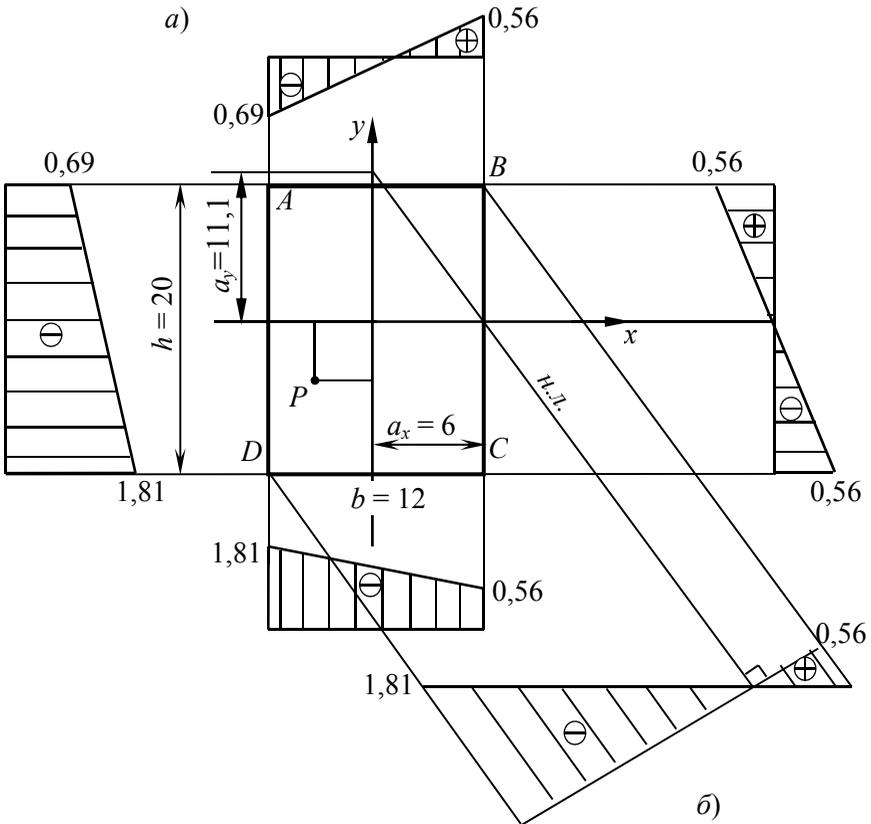


Рис. 2.6. Эпюры нормальных напряжений:
 а) вдоль сторон прямоугольника; б) суммарная эпюра
 (все размеры в см, все напряжения в МПа)

2. Строим эпюру нормальных напряжений в сечении стержня. Для этого находим напряжения в характерных точках сечения с использованием уравнения (1.11):

$$\sigma_z = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} \cdot x + \frac{M_x}{I_x} \cdot y.$$

Здесь знаки моментов M_x и M_y устанавливаются не по знакам координат полюса, каждая из которых является лишь плечом силы F , а по принятому ранее правилу знаков для моментов M_x и M_y .

Вычисляем также

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 20^3}{12} = 8000 \text{ см}^4; \quad I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{20 \cdot 12^3}{12} = 2880 \text{ см}^4;$$

$$M_x = F \cdot y_p = 15 \cdot 0,03 = 0,45 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_y = -F \cdot x_p = -15 \cdot 0,02 = -0,3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\frac{N}{A} = \frac{-15 \cdot 10^3}{240 \cdot 10^2} = -0,625 \text{ МПа};$$

$$\frac{M_x}{I_x} = \frac{0,45 \cdot 10^6}{8000 \cdot 10^4} = 0,0056 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^3}; \quad \frac{M_y}{I_y} = \frac{-0,3 \cdot 10^6}{2880 \cdot 10^4} = -0,0104 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^3}.$$

Подставляя все величины в уравнение (1.11), получим

$$\sigma_z = -0,625 + 0,0104 \cdot x + 0,0056 \cdot y.$$

По данному уравнению вычисляем напряжения в наиболее удаленных от нейтральной линии точках, а также в других узловых точках сечения (рис. 2.6):

– точка D ($x_D = -6$ см; $y_D = -10$ см):

$$\sigma_D = -0,625 + 0,0104 \cdot (-60) + 0,0056 \cdot (-100) = -1,81 \text{ МПа};$$

– точка B ($x_B = 6$ см; $y_B = 10$ см):

$$\sigma_B = -0,625 + 0,0104 \cdot 60 + 0,0056 \cdot 100 = 0,56 \text{ МПа};$$

$$\sigma_A = -0,625 + 0,0104 \cdot (-60) + 0,0056 \cdot 100 = -0,69 \text{ МПа};$$

$$\sigma_C = -0,625 + 0,0104 \cdot 60 + 0,0056 \cdot (-100) = -0,56 \text{ МПа}.$$

По результатам вычислений строим эпюры нормальных напряжений в сечении (рис. 2.6).

3. Проверяем прочность стойки.

Имеем

$$\sigma_{\max(\text{раст.})} = \sigma_B = 0,56 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 0,6 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\max(\text{сж.})} = |\sigma_D| = 1,81 \text{ МПа} < [\sigma_c] = 6 \text{ МПа}.$$

Вывод: прочность бетонной стойки обеспечивается.

Замечание. Более просто решить данную задачу можно, применяя преобразованные выражения (2.12) и (2.13). Используя в расчетах широко применяемую в учебной литературе формулу (2.14), нами была поставлена задача показать на конкретном примере, что нет необходимости применять дополнительные приемы для установления знаков нормальных напряжений в произвольной точке поперечного сечения внецентренно деформируемого стержня.

2.1. Ядро сечения

Некоторые строительные материалы (бетон, кирпичная и каменная кладка и др.) плохо сопротивляются растяжению. Такие материалы используются для изготовления конструкций, элементы которых работают лишь на сжатие. Поэтому при внецентренном сжатии необходимо обеспечить такое условие нагружения элемента, при котором в его поперечном сечении будут возникать лишь сжимающие напряжения. Это достигается в том случае, если точка приложения сжимающей силы расположена внутри некоторой области в окрестности центра тяжести сечения или на границе этой области, называемой ядром сечения.

Таким образом, *ядром сечения* называется область в окрестности центра тяжести, которая обладает следующим свойством: если внецентренно приложенная нагрузка расположена в области ядра или на его границе, то нормальные напряжения во всех точках поперечного сечения имеют один знак.

Способ построения ядра сечения очевиден из его определения. Поэтому при его построении нейтральную линию как бы обкатывают вокруг сечения стержня. При этом полюс вычертит контур ядра.

Можно использовать другой способ построения ядра сечения, применяя правило о взаимности напряжений при внецентренном растяжении–сжатии. Поэтому можно потупить наоборот – перемещать полюс по контуру сечения. При этом нейтральная линия опшет контур ядра.

Пример. Построить ядро сечения для стержня, имеющего прямоугольную форму поперечного сечения (рис. 2.7).

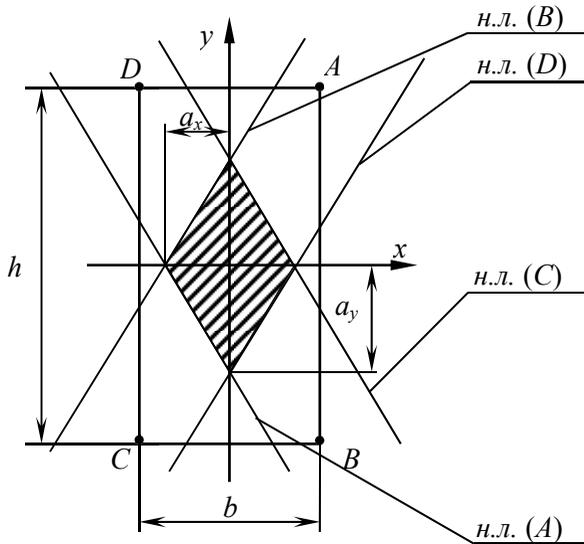


Рис. 2.7

Решение.

Выбираем полюс в точке $A\left(\frac{b}{2}; \frac{h}{2}\right)$.

Тогда $x_p = \frac{b}{2}$; $y_p = \frac{h}{2}$.

Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях x и y при положении полюса в точке A , равны:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_p} = -\frac{b^2/12}{b/2} = -\frac{b}{6}; \quad a_y = -\frac{h}{6}.$$

Откладываем эти отрезки вдоль осей x и y и проводим нейтральную линию, соответствующую положению силы F в точке A .

Перемещая полюс в другие угловые точки сечения, находим соответствующие положения нейтральной линии. В результате получаем ядро сечения в виде ромба (см. рис. 2.7).

Данную задачу можно решить и первым способом. Для этого проводим нейтральные линии поочередно вдоль каждой стороны прямоугольника и для каждого их положения находим соответствующие координаты полюса, используя формулу (2.8).

Здесь осталось выяснить, как будет перемещаться полюс при переходе от одной стороны сечения к другой, когда нейтральная линия поворачивается вокруг вершины этих сторон.

Для этого рассмотрим сечение произвольной формы (рис. 2.8).

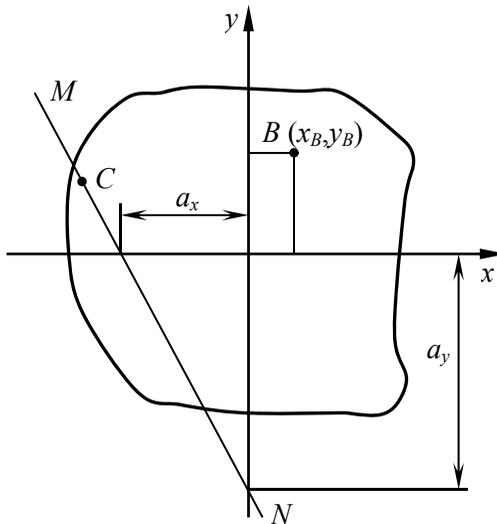


Рис. 2.8

Пусть в точке B приложена внешняя сжимающая сила.

По формулам (2.8) находим отрезки a_x , a_y и проводим нейтральную линию (прямая MN). Таким образом, если полюс находится в точ-

ке B , то нормальное напряжение в любой точке прямой MN , например, в точке C равно нулю.

Если теперь приложить силу в точке C , то, согласно правилу о взаимности напряжений, напряжение в точке B будет равно нулю. Следовательно, нейтральная линия пройдет через эту точку.

Также и при положении полюса в любой другой точке прямой MN напряжение в точке B окажется равным нулю. Таким образом, для всех положений полюса на прямой MN нейтральная линия проходит через точку B , поворачиваясь вокруг нее.

Из вышеизложенного вытекает следующее важное правило: при перемещении полюса по прямой нейтральная линия поворачивается вокруг неподвижной точки. Справедливо также и обратное заключение. Это правило позволяет выполнять построение ядра сечения для сечений стержней, имеющих угловые точки.

3. КОСОЙ ИЗГИБ

Как отмечалось выше, под косым изгибом понимается такой вид изгиба, при котором плоскость действия изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных центральных осей инерции сечения.

Если в поперечном сечении стержня возникает один лишь изгибающий момент, а продольная сила отсутствует, то такой вид деформации называют *чистым косым изгибом*. Если наряду с изгибающим моментом в сечении стержня действует и поперечная сила, то имеет место *поперечный косой изгиб*. Однако, как указывалось ранее, расчеты на прочность и жесткость обычно проводятся без учета поперечных сил, так как их влияние не существенно. Косой изгиб так же может быть *плоским*, когда внешняя нагрузка расположена в одной плоскости (рис. 3.1), и *пространственным*, когда внешняя нагрузка находится в разных плоскостях (рис. 3.2).

Формулу для определения нормальных напряжений при косом изгибе для произвольных центральных осей сечения стержня получим, принимая в основной формуле (1.9) $N = 0$, тогда

$$\sigma_z = -\frac{M_x \cdot I_{xy} + M_y \cdot I_x}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \cdot x + \frac{M_x \cdot I_y + M_y \cdot I_{xy}}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \cdot y. \quad (3.1)$$

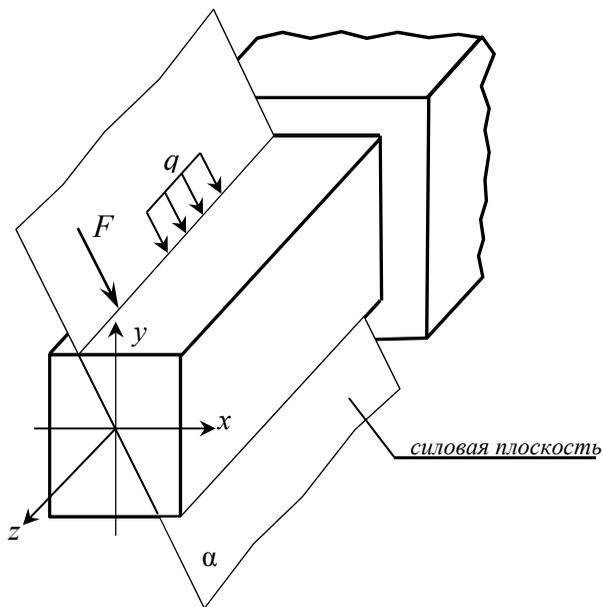


Рис. 3.1. Плоский кривой изгиб стержня

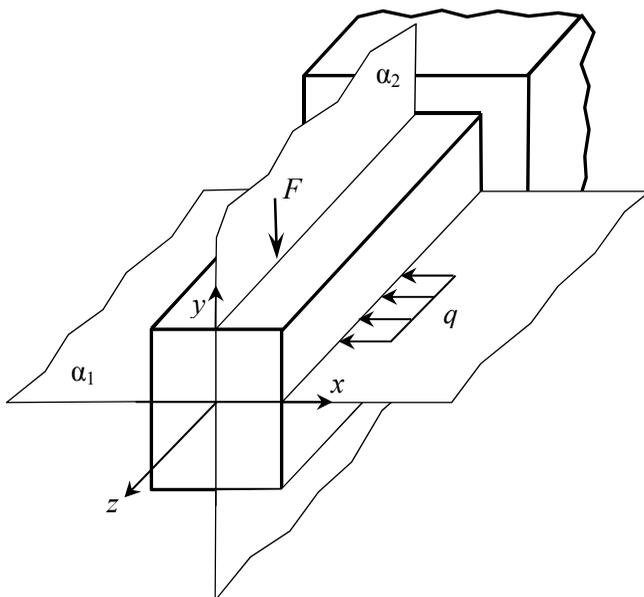


Рис. 3.2. Пространственный кривой изгиб

Уравнение нейтральной линии получим из формулы (1.9), принимая $N = 0$ и $\sigma_z = 0$:

$$(M_x \cdot I_y + M_y \cdot I_{xy}) \cdot y - (M_y \cdot I_x + M_x \cdot I_{xy}) \cdot x = 0. \quad (3.2)$$

Из уравнения (3.2) следует, что нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения стержня. Ее угловой коэффициент равен

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \beta = \frac{M_y \cdot I_x + M_x \cdot I_{xy}}{M_x \cdot I_y + M_y \cdot I_{xy}}, \quad (3.3)$$

где β – угол наклона нейтральной линии к оси x .

Обозначим

$$\frac{M_y}{M_x} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (3.4)$$

где α – угол наклона к оси x вектора результирующего изгибающего момента (так называемый векторный момент).

Как известно, векторный момент перпендикулярен силовой плоскости (плоскость, в которой расположена внешняя нагрузка). При этом векторный момент направлен таким образом, чтобы его вращение осуществлялось против часовой стрелки, если смотреть от конца вектора к его началу (рис. 3.3).

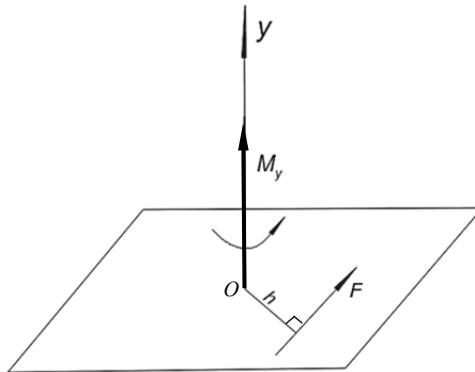


Рис. 3.3. Правило изображения векторного момента

В некоторых учебниках векторный момент в отличие от вектора силы обозначают двойной стрелкой.

В отечественной учебной литературе по сопротивлению материалов, а также в литературе стран СНГ, при изучении косоугольного изгиба угол наклона нейтральной линии связывается не с углом наклона результирующего векторного момента, который откладывается от оси x , а с углом наклона силовой плоскости (исключение составляет лишь [6]). При этом этот угол откладывается от вертикальной оси y . Такой подход, на наш взгляд, является методически неверным, так как в плоскости xy все углы поворотов должны быть привязаны лишь к одной оси – оси x .

В практических расчетах в большинстве случаев пользуются главными центральными осями. В этом случае $I_{xy} = 0$ и полученные выше формулы (3.1) и (3.3) значительно упрощаются:

$$\sigma_z = -\frac{M_y}{I_y} \cdot x + \frac{M_x}{I_x} \cdot y; \quad (3.5)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M_y \cdot I_x}{M_x \cdot I_y} = \frac{I_x}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.6)$$

Как известно, при плоском косоугольном изгибе направление линейного перемещения центра тяжести поперечного сечения стержня перпендикулярно нейтральной линии [2] и в общем случае не совпадает с силовой плоскостью. При этом продольная ось стержня искривляется, оставаясь в силовой плоскости. При пространственном изгибе изогнутая ось стержня является пространственной кривой.

Пример 1. Стержень в виде равнополочного уголка, жестко защемленный одним концом, нагружен на конце консоли вертикальной силой F , совпадающей с центральной осью y уголка (рис. 3.4). Определить максимальные напряжения в опасном сечении уголка и координаты наиболее нагруженной точки опасного сечения.

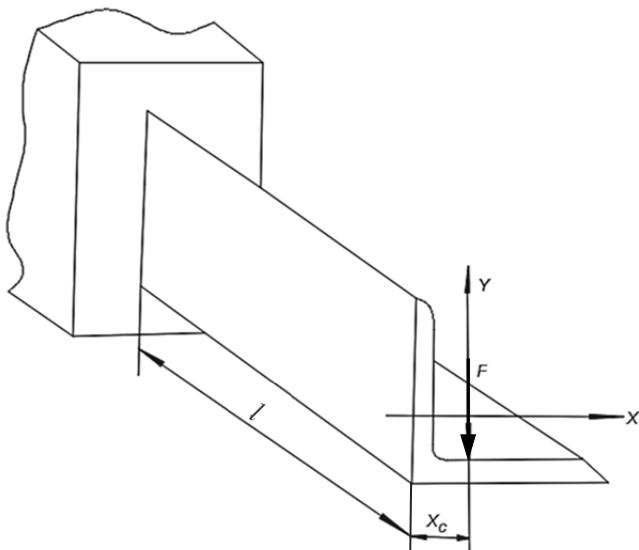


Рис. 3.4

Исходные данные: $F = 2$ кН; $l = 1,5$ м; уголок № 10 ($100 \times 100 \times 12$ мм).

Решение.

1 способ. Опасным является жестко защемленное сечение стержня. Изобразим это сечение отдельно в масштабе 1:2 (рис. 3.5).

Из таблицы сортамента выписываем геометрические характеристики уголка:

$$I_x = I_y = 208,9 \text{ см}^4; \quad x_c = y_c = 2,91 \text{ см}; \quad I_{\min} = 86,9 \text{ см}^4.$$

Вычисляем центробежный момент инерции уголка относительно центральных осей $xу$:

$$I_{xy} = -(I_x - I_{\min}) = -(208,9 - 86,9) = -122 \text{ см}^4.$$

Определяем положение нейтральной линии по формуле (3.3). В нашем случае $M_y = 0$; $\text{tg } \alpha = 0$.

Тогда

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_{xy}}{I_y} = \frac{-122}{208,9} = 0,5840; \quad \beta = -30,29^\circ.$$

Откладывая от оси x угол β с учетом его знака, проводим нейтральную линию (рис. 3.5).

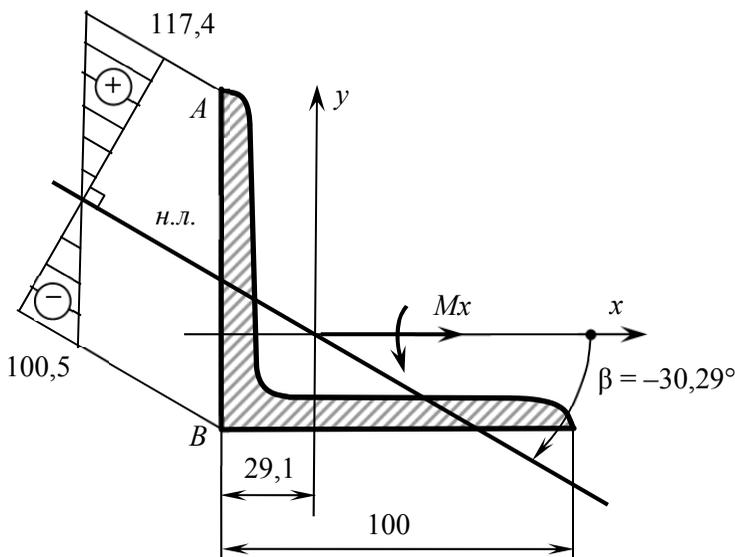


Рис. 3.5

Наиболее удаленными от нейтральной линии являются точки A и B . Вычисляем их координаты в системе осей xy :

$$x_A = -29,1 \text{ мм}; \quad y_A = 100 - 29,1 = 70,9 \text{ мм};$$

$$x_B = y_B = -29,1 \text{ мм}.$$

Расчет нормальных напряжений производим по формуле (3.1), которая при $M_y = 0$ принимает вид

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} (I_y \cdot y - I_{xy} \cdot x) = -\frac{M_x \cdot I_{xy}}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} \left(x - \frac{I_y}{I_{xy}} \cdot y \right).$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\sigma_z = -\frac{2 \cdot 1,5 \cdot 10^6 \cdot (-122) \cdot 10^4}{(208,9^2 - (-122)^2) \cdot 10^8} \cdot \left(x - \frac{208,9}{-122} \cdot y \right);$$

$$\sigma_z = 1,237(x + 1,712 y).$$

Вычисляем напряжения в точках A и B по их координатам:

$$\sigma_{z(A)} = 1,237 \cdot ((-29,1) + 1,71 \cdot 70,9) = 117,4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{z(B)} = 1,273 \cdot ((-29,1) + 1,712 \cdot (-29,1)) = -100,5 \text{ МПа}.$$

Строим эпюру нормальных напряжений в сечении стержня (рис. 3.5).

2-й способ. Решение задачи в главных центральных осях (рис. 3.6).

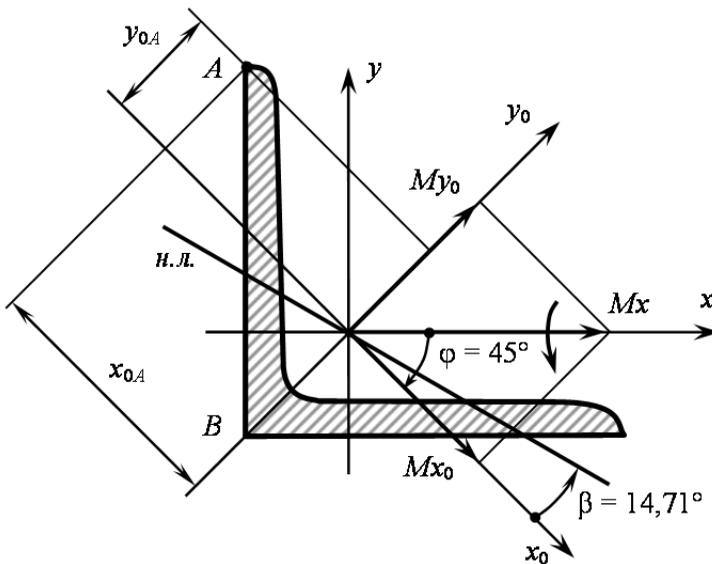


Рис. 3.6

Из таблицы сортамента находим

$$I_{x_0} = I_{\min} = 86,9 \text{ см}^4; \quad I_{y_0} = I_{\max} = 331 \text{ см}^4;$$
$$\varphi = 45^\circ.$$

При этом $I_{x_0 y_0} = 0$.

По формуле (3.3) получаем уравнение нейтральной линии:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_{x_0}}{I_{y_0}} \cdot \frac{M_{y_0}}{M_{x_0}},$$

где $M_{x_0} = M_{y_0} = M_x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2,12 \text{ кНм}$.

Тогда

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_{x_0}}{I_{y_0}} = \frac{86,9}{331} = 0,2625; \quad \beta = 14,71^\circ.$$

Откладываем угол β от оси x_0 с учетом его знака и проводим нейтральную линию (рис. 3.6).

Находим координаты наиболее нагруженной точки опасного сечения (точка A) в системе осей $x_0 y_0$:

$$x_{0A} = -(y_A \cos \varphi - x_A \sin \varphi) = -(70,9 - (-29,1)) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -70,7 \text{ мм};$$

$$y_{0A} = (x_A \cos \varphi - y_A \sin \varphi) = (-29,1 + 70,9) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 29,6 \text{ мм}.$$

По формуле (3.5) находим

$$\sigma_z = -\frac{M_{y_0}}{I_{y_0}} \cdot x + \frac{M_{x_0}}{I_{x_0}} \cdot y.$$

Так как $M_{x_0} = M_{y_0}$, то получим

$$\sigma_z = -\frac{M_{y_0}}{I_{y_0}} \left(x - \frac{I_{y_0}}{I_{x_0}} \cdot y \right) = -\frac{2,12 \cdot 10^6}{331 \cdot 10^4} \left(x_0 - \frac{331}{86,9} \cdot y_0 \right);$$

$$\sigma_z = -0,640 \cdot ((-70,7) - 3,809 \cdot 29,6) = 117,4 \text{ МПа.}$$

Результаты расчетов, полученные обоими способами, полностью совпадают.

Пример 2. Стержень прямоугольного поперечного сечения нагружен на конце консоли вертикальной силой F и изгибающим моментом M , расположенным в горизонтальной плоскости (рис. 3.7). Определить максимальные напряжения в стержне, а также величину перемещения центра тяжести конечного сечения и его направление.

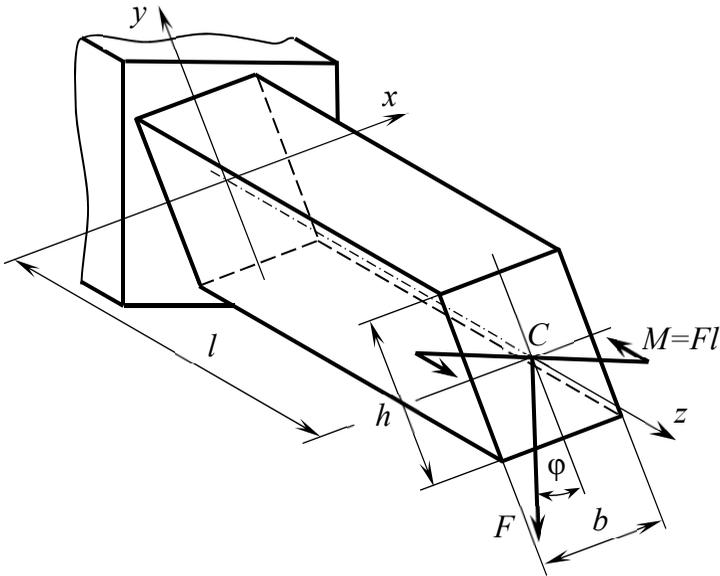


Рис. 3.7

Исходные данные: $F = 4 \text{ кН}$; $l = 1,5 \text{ м}$; $\varphi = 20^\circ$; $b = 6 \text{ см}$; $h = 2b$;
 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Решение.

Опасным является жестко защемленное сечение стержня. Для удобства расчетов изобразим это сечение в повернутом положении. При этом изгибающие моменты в этом сечении от внешней силы F и заданного момента M изображаем в виде векторов (рис. 3.8).

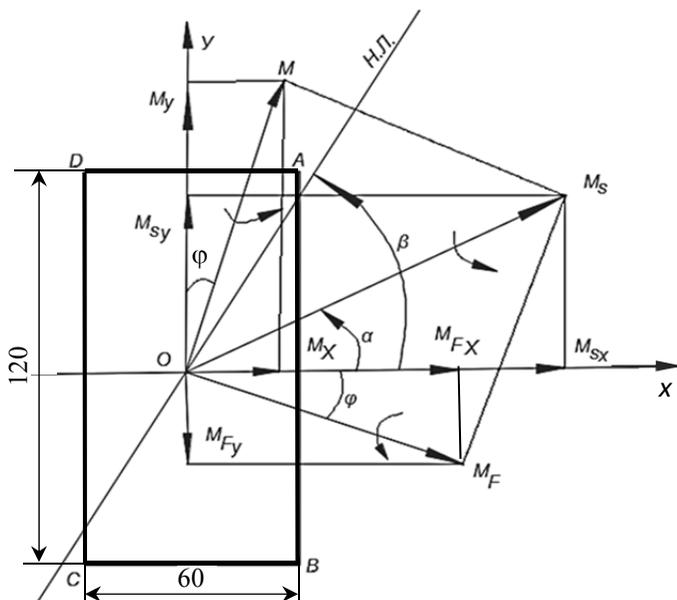


Рис. 3.8

Находим в опасном сечении стержня изгибающие моменты относительно главных центральных осей x и y от действия силы F и изгибающего момента M :

$$M_{Fx} = Fl \cdot \cos\varphi; \quad M_{Fy} = -Fl \cdot \sin\varphi;$$

$$M_x = M \cdot \sin\varphi; \quad M_y = M \cdot \cos\varphi.$$

Определяем суммарные изгибающие моменты в опасном сечении относительно осей x и y :

$$M_{Sx} = M_{Fx} + M_x = Fl \cdot \cos\varphi + M \cdot \sin\varphi = Fl(\cos\varphi + \sin\varphi);$$

$$M_{Sy} = M_{Fy} + M_y = -Fl \cdot \sin\varphi + M \cdot \cos\varphi = Fl(\cos\varphi - \sin\varphi).$$

Вычисляем угол наклона α вектора суммарного момента M_S :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M_{Sy}}{M_{Sx}} = \frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi} = \frac{1 - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\varphi} = \frac{1 - \operatorname{tg}20^\circ}{1 + \operatorname{tg}20^\circ} = 0,4663;$$

$$\alpha = 25^\circ.$$

Определяем угол наклона нейтральной линии к оси x :

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{I_x}{I_y} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{bh^3/12}{hb^3/12} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{h^2}{b^2} \cdot \operatorname{tg}\alpha = 4\operatorname{tg}\alpha = 4 \cdot 0,4663 = 1,8652;$$

$$\beta = 61,80^\circ.$$

Проводим нейтральную линию в опасном сечении (рис. 3.8).

Находим напряжения в узловых точках сечения по формуле (3.5):

$$\sigma = \frac{M_{Sx}}{I_x} \cdot y - \frac{M_{Sy}}{I_y} \cdot x = \frac{Fl(\cos\varphi + \sin\varphi)}{\frac{2}{3}b^4} \cdot y - \frac{Fl(\cos\varphi - \sin\varphi)}{\frac{b^4}{6}} \cdot x,$$

$$\text{где } I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{2}{3}b^4; \quad I_y = \frac{2b \cdot b^3}{12} = \frac{b^4}{6}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{3Fl(\cos\varphi + \sin\varphi)}{2b^4} \cdot y - \frac{6Fl(\cos\varphi - \sin\varphi)}{b^4} \cdot x = \\ &= \frac{3Fl}{2b^4} [(\cos\varphi + \sin\varphi) \cdot y - 4(\cos\varphi - \sin\varphi) \cdot x] = \\ &= \frac{3 \cdot 4 \cdot 1,5 \cdot 10^6}{2 \cdot 60^4} [(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ) y - 4(\cos 20^\circ - \sin 20^\circ) x] = \\ &= 0,694(1,282y - 2,391x); \end{aligned}$$

$$\sigma_A = 0,694(1,282 \cdot 60 - 2,391 \cdot 30) = 3,6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = 0,694(1,282 \cdot (-60) - 2,391 \cdot 30) = -103,6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_C = -\sigma_A = -3,6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_D = -\sigma_B = 103,6 \text{ МПа}.$$

Строим эпюру напряжений (рис. 3.9).

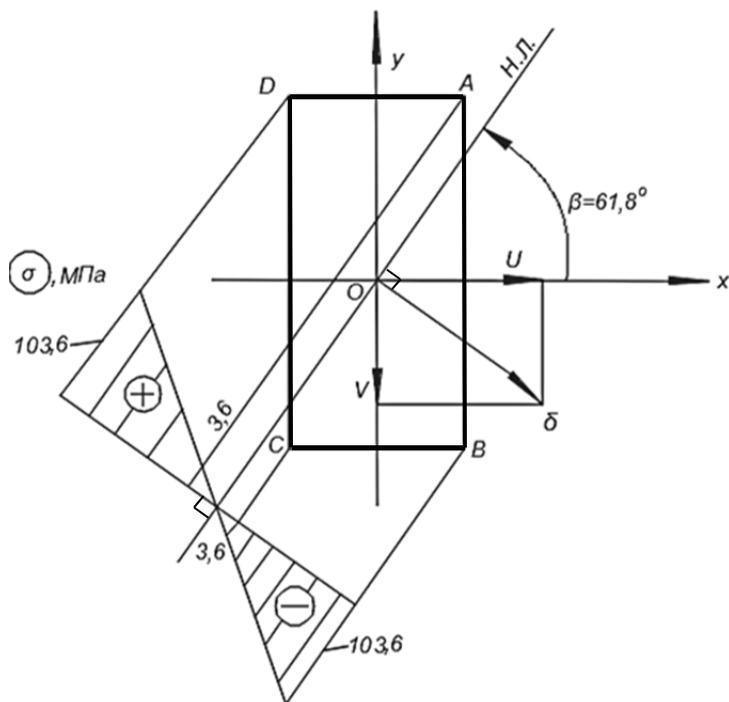


Рис. 3.9

Определяем перемещение центра тяжести конечного сечения стержня. Для этого находим перемещения вдоль осей x и y отдельно от действия силы F и изгибающего момента M , применяя при этом известные формулы [9]:

$$-u_F = \frac{F \sin \varphi \cdot l^3}{3EI_y}; \quad -v_F = \frac{F \cos \varphi \cdot l^3}{3EI_x};$$

$$u_M = \frac{M \cos \varphi \cdot l^2}{2EI_y}; \quad -v_M = \frac{M \sin \varphi \cdot l^2}{2EI_x},$$

где $M = Fl$.

Вычисляем суммарные составляющие перемещения центра тяжести конечного сечения:

$$u = u_F + u_M = -\frac{F \cdot \sin \varphi \cdot l^3}{3EI_y} + \frac{F \cos \varphi \cdot l^3}{2EI_y} = \frac{Fl^3}{6EI_y} (3 \cos \varphi - 2 \sin \varphi);$$

$$v = v_F + v_M = -\frac{F \cos \varphi \cdot l^3}{3EI_x} - \frac{Fl^3 \cdot \sin \varphi}{2EI_x} = -\frac{Fl^3}{6EI_x} (2 \cos \varphi + 3 \sin \varphi).$$

Тогда величина перемещения δ равна

$$\delta = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{Fl^3}{6EI_x} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{h^4}{b^4} \cdot (3 \cos \varphi - 2 \sin \varphi)^2 + (2 \cos \varphi + 3 \sin \varphi)^2} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot (1,5 \cdot 10^3)^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 864 \cdot 10^4} \times$$

$$\times \sqrt{2^4 (3 \cos 20^\circ - 2 \sin 20^\circ)^2 + (2 \cos 20^\circ + 3 \sin 20^\circ)^2} = 11,75 \text{ мм.}$$

При этом вектор перемещения δ перпендикулярен к нейтральной линии и направлен в сторону вращения результирующего момента M_S (рис. 3.9).

4. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ

Большинство пластичных материалов при нагружении за пределом упругости оказывают дальнейшее сопротивление нагрузке. Это связано с тем, что при развитии пластических деформаций происходит изменение структуры материала, возникают необратимые сдвиги внутри отдельных кристаллов, местные искажения, дефекты кристаллической решетки, называемые *дислокациями*. При возрастании пластических деформаций происходит продвижение дислокаций, которому препятствуют соседние, более правильно ориентированные кристаллы. Поэтому, чтобы заставить дислокацию двигаться по кристаллу, необходимо создать дополнительное напряжение за счет увеличения внешней нагрузки. Это обстоятельство и объясняет возникновение зоны упрочнения. В настоящее время предложен целый ряд теорий деформационного упрочнения, подробно описанных в литературе [10].

Для оценки прочности конструкции в инженерной практике рассматривают материал как сплошное и однородное тело, не имеющее пустот или разрывов, не вдаваясь, таким образом, в изучение внутренней микроструктуры материала. Многочисленные опыты, проведенные с образцами самых различных металлов, их сплавов и других конструкционных материалов, показали, что применение модели сплошной среды вполне оправданно [6].

Такой, так называемый феноменологический (описательный) метод позволяет обеспечить единый подход к различным по микроструктуре материалам и использовать при расчетах на прочность методы математического анализа, включающего в себя аппарат непрерывных и бесконечно малых функций.

Для применения описательного метода расчета необходимо экспериментальное изучение механических свойств материала. Одним из основных экспериментальных исследований с применением модели сплошной среды является испытание образцов на растяжение с целью изучения свойств материала при различных внешних воздействиях. При проведении таких испытаний выявляются общие свойства конструкционных материалов – упругость и пластичность.

Как отмечалось выше, при изучении изгиба стержней в инженерной практике применяется теория изгиба, основанная на гипотезе плоских сечений.

При расчете элементов конструкций в пределах упругих деформаций соблюдается закон Гука, а деформации пренебрежимо малы по сравнению с единицей. В то же время, при расчетах с учетом пластических деформаций закон Гука теряет свою силу, а деформации могут достигать значительных величин (порядка 5–10 % и более). В связи с этим возникает вопрос о возможности применения гипотезы плоских сечений при решении подобного рода задач. Проведенные опыты по пластическому деформированию показали, что данная гипотеза применима и в пластической стадии нагружения, связанной с большими деформациями [6].

Одним из методов, применяемых для упрощения расчетов в пластической области, является метод схематизации кривых деформирования, который может быть реализован различными способами в зависимости от вида реальной диаграммы растяжения и метода решения конкретной задачи.

Рассмотрим стержень прямоугольного поперечного сечения, изготовленный из пластичного материала и подвергающийся чистому изгибу в одной из главных плоскостей (рис. 4.1). Это наиболее простой случай, который позволяет изучить основные особенности изгиба.

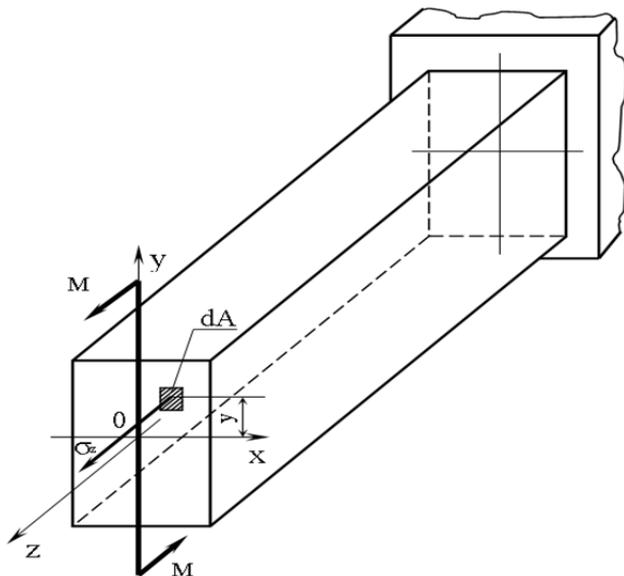


Рис. 4.1

Предельный момент в поперечном сечении стержня для каждой стадии нагружения равен моменту внутренних сил, вычисленному для соответствующего состояния. При этом момент внутренних сил равен

$$\int_A \sigma_z y dA = M_x.$$

Изобразим для прямоугольного сечения стержня (рис. 4.2, а) предельные эпюры распределения нормальных напряжений по высоте сечения на всех стадиях нагружения.

Рассмотрим все стадии нагружения стержня.

1. Упругая стадия нагружения.

В упругой стадии нагружения за опасное напряжение принимается предел текучести материала σ_T (рис. 4.2, б). Такое допущение является не совсем точным, т. к. для пластичных материалов предел пропорциональности $\sigma_{пл}$, до которого соблюдается закон Гука, несколько меньше предела текучести. Однако это отличие несущественно. Кроме того, на этой стадии нагружения расчеты на прочность проводятся по допускаемым напряжениям, которые меньше предела текучести в n раз, где n – коэффициент запаса по текучести. Например, для стали Ст3 его принимают равным 1,5.

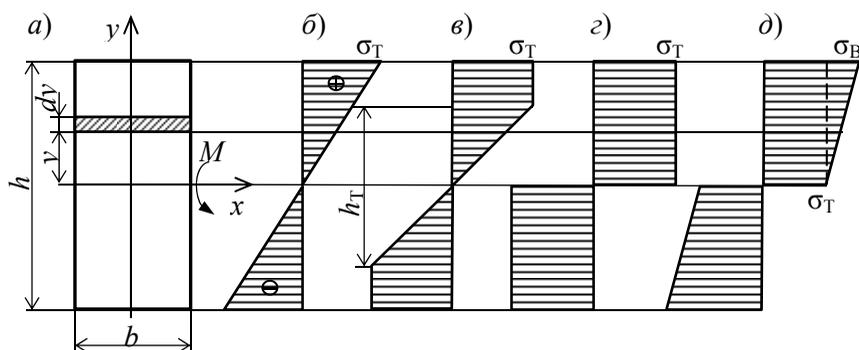


Рис. 4.2. Предельные эпюры нормальных напряжений в сечении стержня

Для произвольного волокна с ординатой y (см. рис. 4.2, б) находим

$$\sigma_z = \frac{2\sigma_T}{h} \cdot y.$$

Тогда

$$M_{\text{пр}} = \int_A \sigma_z y dA = 2b \int_0^{h/2} \frac{2\sigma_T}{h} y^2 dy = \sigma_T \cdot \frac{bh^2}{6} = 0,167\sigma_T bh^2. \quad (4.1)$$

Здесь $\frac{bh^2}{6} = W_x$ – момент сопротивления изгибу прямоугольного сечения.

2. Пластическая стадия нагружения.

Как отмечалось выше, достижение нормальным напряжением предела текучести еще не означает полного исчерпания несущей способности стержня, так как в работу включаются менее нагруженные частицы материала, что приводит к увеличению несущей способности стержня. Однако при пластическом нагружении расчеты усложняются в связи с нелинейной зависимостью между напряжением σ и деформацией ϵ .

Одним из методов, применяемых для упрощения расчетов в пластической области, является метод схематизации кривых деформирования, который может быть реализован различными способами, в зависимости от вида реальной диаграммы растяжения и метода решения конкретной задачи (рис. 4.3).

Диаграмма, представленная на рис. 4.3, a и называемая *идеальной диаграммой Прандтля*, применяется при расчете деталей из весьма пластичных материалов, условно называемых идеально-пластическими. Наклонный участок диаграммы характеризует упругую стадию нагружения, а горизонтальный – пластическую стадию. Такая диаграмма предполагает, что предел пропорциональности материала совпадает с пределом текучести, а деформации после достижения предельной величины ϵ_T неограниченно растут без увеличения напряжений. Диаграмма Прандтля не учитывает упрочнение материала за пределом текучести.

Для материалов средней пластичности, а также для цветных металлов и их сплавов в качестве расчетной принимают схематизированную диаграмму с линейным упрочнением (рис. 4.3, б).

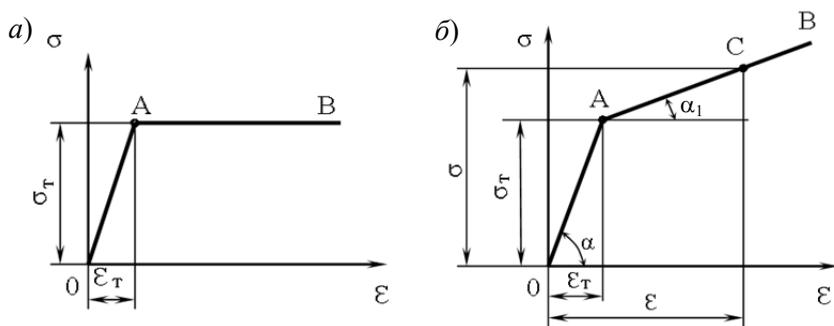


Рис. 4.3

Рассмотрим методы расчета с учетом пластических деформаций при схематизации диаграммы растяжения различными способами.

2.1. Расчет стержня в пластической стадии без учета упрочнения.

При возрастании изгибающего момента пластическая деформация возникает сначала в наиболее удаленных от нейтральной линии волокнах, а затем проникает вглубь сечения. В промежуточной стадии нагружения в средней части сечения высотой h_T материал стержня еще находится в упругом состоянии (рис. 4.2, в). При предельном значении момента $M_{пр}$ зона пластического состояния занимает всю площадь поперечного сечения (рис. 4.2, г). Несущая способность стержня полностью исчерпана. При этом в сечении образуется так называемый пластический шарнир. В отличие от идеального шарнира, который не может воспринимать изгибающего момента, в пластическом шарнире действует момент $M_{пр}$, называемый «моментом трения» [6].

Для определения величины $M_{пр}$ рассмотрим сечение в промежуточном состоянии (рис. 4.2, в). Запишем известный интеграл момента внутренних сил:

$$\int_A \sigma_x y dA = M_x.$$

Разобьем его на две части – для упругой и пластической зон. При этом в упругой зоне напряжения изменяются по линейному закону:

$$\sigma = \sigma_T \cdot \frac{2y}{h_T}.$$

В пластической зоне $\sigma = \sigma_T$. Тогда

$$\begin{aligned} M &= 2b \int_0^{h_T/2} \sigma y dy + 2b \int_{h_T/2}^{h/2} \sigma y dy = 2b \int_0^{h_T/2} \frac{2\sigma_T}{h_T} y^2 dy + 2b \int_{h_T/2}^{h/2} \sigma_T y dy = \\ &= \frac{4b\sigma_T h_T^2}{h_T} + b\sigma_T \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_T^2}{4} \right) = \frac{b\sigma_T h_T^2}{6} + \frac{b\sigma_T}{4} (h^2 - h_T^2) = \frac{b\sigma_T}{12} (3h^2 - h_T^2). \end{aligned}$$

Отсюда находим величину h_T :

$$h_T = \sqrt{3 \left(h^2 - \frac{4M}{b\sigma_T} \right)}. \quad (4.2)$$

Из этого выражения находим предельное значение изгибающего момента, приняв $h_T = 0$. Получим

$$M_{\text{пр}} = \frac{bh^2}{4} \cdot \sigma_T = \sigma_T \cdot W_T, \quad (4.3)$$

где $W_T = \frac{bh^2}{4}$ – величина, называемая пластическим моментом сопротивления.

При $h_T = h$ из формулы (4.2) найдем предельное значение изгибающего момента в упругой стадии нагружения:

$$h^2 = 3 \left(h^2 - \frac{4M}{b\sigma_T} \right); \quad M = M_{\text{пр}} = \frac{bh^2}{6} \cdot \sigma_T = \sigma_T \cdot W_x,$$

что совпадает с формулой (4.1).

Следовательно, для балки прямоугольного сечения отношение

$$\frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{уп}}} = \frac{W_{\text{T}}}{W_x} = 1,5.$$

Таким образом, расчет по предельным нагрузкам с учетом пластической работы материала позволяет увеличить несущую способность стержня на 50 % по сравнению с расчетом по допускаемым напряжениям с применением упругой теории изгиба.

Рассмотрим произвольное сечение стержня, подвергающегося плоскому изгибу (рис. 4.4).

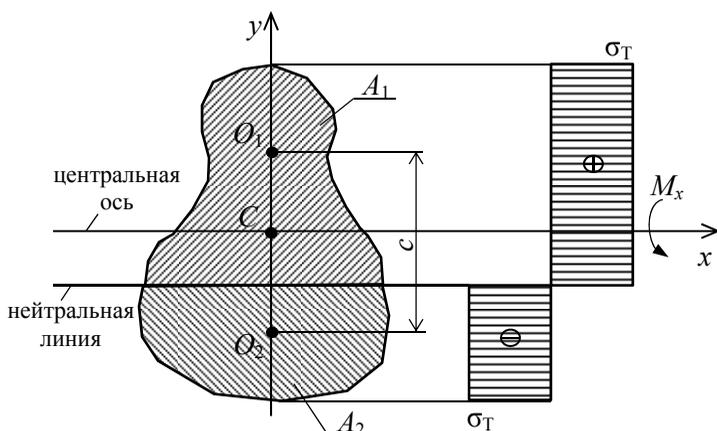


Рис. 4.4

Записываем условие отсутствия продольной силы в сечении:

$$N = \int_A \sigma dA = 0.$$

Разбиваем интеграл на два для обеих зон сечения. Получим

$$\int_A \sigma dA = \int_{A_1} \sigma_T dA + \int_{A_2} (-\sigma_T) dA = \sigma_T (A_1 - A_2) = 0.$$

Отсюда находим $A_1 = A_2$.

Таким образом, нейтральная линия делит сечение стержня на две равновеликие части. Тогда момент внутренних сил относительно нейтральной линии, равный предельному моменту, запишется так:

$$M_{\text{пр}} = \frac{A}{2} c \sigma_T,$$

где A – площадь всего сечения;

c – расстояние между центрами тяжести площадей растянутой и сжатой зон.

Величина

$$\frac{A}{2} c = W_T \quad (4.4)$$

представляет собой пластический момент сопротивления.

Рассмотрим некоторые сечения геометрической формы.

1. *Круглое сечение.*

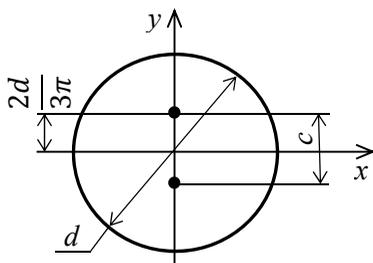


Рис. 4.5

По формуле (4.4) находим

$$W_T = \frac{\pi d^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{2d}{3\pi} = \frac{d^3}{6}.$$

Осейвой момент сопротивления круглого сечения равен:

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Вычисляем отношение

$$\frac{W_{\Gamma}}{W_x} = \frac{1/6}{\pi/32} = 1,698.$$

2. Треугольное сечение.

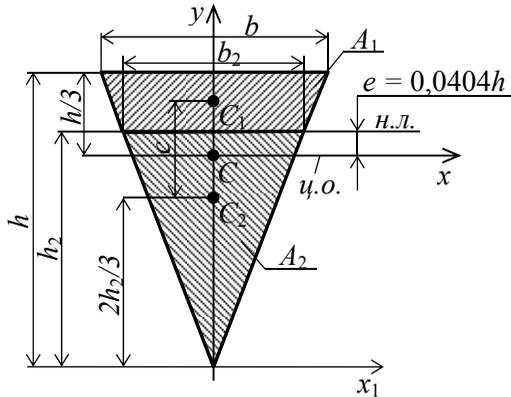


Рис. 4.6

Запишем известные формулы:

$$A = \frac{bh}{2}; \quad A_1 = A_2 = \frac{A}{2} = \frac{bh}{4}; \quad A_2 = \frac{b_2 h_2}{2},$$

где $b_2 = \frac{b}{h} h_2$.

Тогда получим

$$A_2 = \frac{b h_2^2}{2h} = \frac{bh}{4}.$$

Отсюда находим

$$h_2 = \frac{h}{\sqrt{2}}.$$

Вычисляем статический момент сечения относительно оси x_1 , проходящей через вершину треугольника:

$$S_{x_1} = A_1 \left(c + \frac{2}{3} h_2 \right) + A_2 \frac{2}{3} h_2 = \frac{A}{2} \left(c + \frac{4}{3} \frac{h}{\sqrt{2}} \right) = \frac{2}{3} Ah.$$

Из этого равенства находим c :

$$c = \frac{4}{3} h \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0,391h.$$

Вычисляем пластический момент сопротивления:

$$W_T = \frac{Ac}{2} = \frac{bh}{4} \cdot 0,391h = 0,0978bh^2.$$

Осейвой момент сопротивления треугольного сечения относительно центральной оси равен

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{bh^3/36}{2h/3} = 0,0417bh^2.$$

Вычисляем отношение $\frac{W_T}{W_x} = \frac{0,0978}{0,0417} = 1,345$.

2.2. Расчет в пластической стадии с учетом упрочнения.

На диаграмме с линейным упрочнением (рис. 4.3, б) возьмем произвольную точку C в пластической зоне нагружения и установим связь между напряжением и деформацией. Напряжение в точке C равно

$$\sigma = \sigma_T + (\varepsilon - \varepsilon_T) \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = \sigma_T + (\varepsilon - \varepsilon_T) \cdot E_1, \quad (4.5)$$

где $E_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ – модуль упрочнения (или касательный модуль) [5].

При этом $\sigma_T = E \cdot \varepsilon_T$, где $E = \operatorname{tg} \alpha$ – модуль упругости.
Тогда формула (4.5) принимает вид

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_T + \varepsilon \cdot E_1 - \varepsilon_T \cdot E_1 = E \cdot \varepsilon \cdot \left[\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon} \cdot (1 - \xi) + \xi \right], \quad (4.6)$$

где $\xi = \frac{E_1}{E}$.

Для количественной оценки и сравнения результатов расчета стержня на разных стадиях нагружения рассмотрим диаграмму растяжения образца из малоуглеродистой стали Ст3, широко применяемой в строительстве (рис. 4.7). Штриховыми линиями показана схематизированная диаграмма с линейным упрочнением.

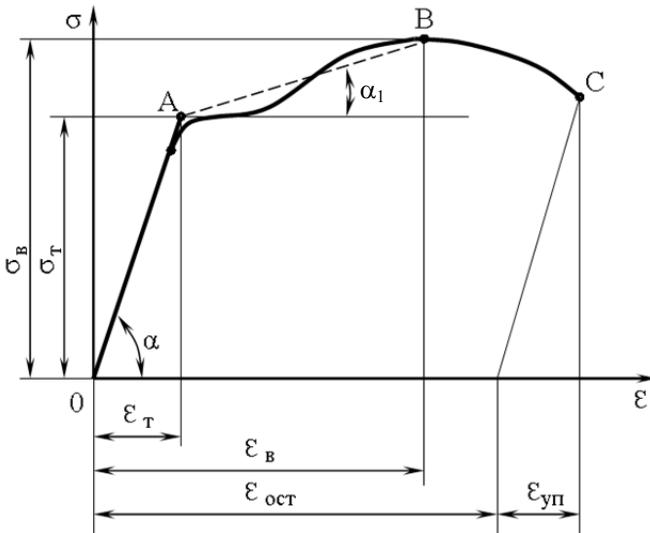


Рис. 4.7

Основные механические характеристики стали Ст3 имеют следующие значения [11]: $\sigma_T = 250$ МПа; $\sigma_B = 420$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\varepsilon_B = 0,16$.

Вычисляем величины, входящие в выражение (4.6):

$$\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E} = \frac{250}{2 \cdot 10^5} = 0,00125;$$

$$E_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sigma_B - \sigma_T}{\varepsilon_B - \varepsilon_T} = \frac{420 - 250}{0,16 - 0,00125} = 1152,5 \text{ МПа};$$

$$\xi = \frac{E_1}{E} = \frac{1152,5}{2 \cdot 10^5} = 0,00576.$$

Выразим предельные деформацию ε_B и напряжение σ_B через соответствующие величины в момент текучести. Имеем $\varepsilon_B = 0,16$ и $\varepsilon_T = 0,00125$.

Тогда

$$\varepsilon_B = \frac{0,16}{0,00125} \cdot \varepsilon_T = 128\varepsilon_T.$$

По формуле (4.6) находим

$$\begin{aligned} \sigma_B &= E \cdot \varepsilon_B \cdot \left[\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_B} \cdot (1 - \xi) + \xi \right] = \\ &= E \cdot 128\varepsilon_T \cdot \left[\frac{\varepsilon_T}{128\varepsilon_T} \cdot (1 - 0,00576) + 0,00576 \right] = 1,732\sigma_T. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Определяем теперь предельный момент в сечении стержня в пластической стадии нагружения с учетом упрочнения (см. рис. 4.2, д):

$$\sigma = \sigma_T + \frac{2(\sigma_B - \sigma_T)}{h} \cdot y.$$

Тогда

$$\begin{aligned} M_{\text{пр}} &= \int_A \sigma_z y dA = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_T + \frac{2(\sigma_B - \sigma_T)}{h} \cdot y \right) y dy = \\ &= 2b \cdot \left[\sigma_T \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^2 + \frac{2\sigma_B}{h} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^3 - \frac{2\sigma_T}{h} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right] = \\ &= \frac{bh^2}{12} (\sigma_T + 2\sigma_B). \end{aligned}$$

С учетом зависимости (4.7) получим

$$M_{\text{пр}} = \frac{bh^2}{12} (\sigma_T + 2 \cdot 1,732\sigma_T) = 0,372\sigma_T bh^2.$$

Выполненные выше расчеты показывают, что учет пластических свойств материала с использованием идеальной диаграммы Прандтля позволяет увеличить несущую способность стержня прямоугольного сечения при изгибе на 50 % по сравнению с расчетом по допускаемым напряжениям в упругой стадии нагружения. С учетом упрочнения материала в пластической стадии несущая способность стержня увеличивается на 123 %.

$$\frac{0,25 - 0,167}{0,167} \cdot 100 \% \approx 50 \% \text{ (в 1,5 раза);}$$

$$\frac{0,372 - 0,167}{0,167} \cdot 100 \% = 123 \% \text{ (в 2,23 раза).}$$

Таким образом, изучение свойств материала и распределения напряжений и деформаций в упругопластической стадии нагружения необходимо при конструировании различных машин и сооружений с целью наиболее полного использования прочностных возможностей материала. Такой подход позволяет создавать изделия с минимальным весом и габаритами, обеспечивая при этом прочность и надежность изделия.

5. ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ИЗГИБЕ

При создании современных машин и различных инженерных сооружений во многих случаях бывает важно обеспечить не только прочность элементов конструкции, позволяющую воспринимать внешние нагрузки без разрушения, но и отсутствие значительных деформаций элементов. Такая способность сопротивляться внешним воздействиям без существенных изменений геометрических размеров конструкции в инженерной практике называется *жесткостью*. В каждом конкретном случае вопрос о жесткости конструкции решается особо. Так, например, прогиб моста от внешней нагрузки (поезд, колонна машин) на несколько сантиметров считается допустимым, так как эта величина ничтожно мала по сравнению с длиной пролета моста в несколько десятков метров. В то же время прогиб вала редуктора в несколько миллиметров может нарушить правильность зубчатого зацепления. Или прогиб вала шпинделя токарного станка на десятые доли миллиметра при точной обработке детали является недопустимым.

При прямом поперечном изгибе стержня его продольная ось искривляется, оставаясь в силовой плоскости. Изогнутая ось стержня, называемая *упругой линией*, представляет собой геометрическое место центров тяжести поперечных сечений стержня. Деформации, возникающие в стержнях при изгибе, характеризуются двумя параметрами: *прогибом* u , вызванным перемещением центра тяжести сечения стержня в направлении, перпендикулярном его оси, и *углом поворота* θ поперечного сечения стержня по отношению к своему первоначальному положению. Определение линейных и угловых перемещений необходимо для расчетов стержней на жесткость.

Существуют разные методы определения деформаций при изгибе: метод непосредственного интегрирования приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси стержня, метод начальных параметров, метод Мора, правило Верещагина и др. Эти методы подробно освещены в учебной литературе по сопротивлению материалов.

Рассмотрим энергетические методы, связанные с определением потенциальной энергии деформации через внешнюю нагрузку. Эти методы позволяют находить перемещения и раскрывать статическую неопределимость стержневых, балочных и рамных систем.

Они также являются основой ряда приближенных методов, применяемых в сопротивлении материалов и теории упругости для прочностного расчета конструкций.

Базой энергетических методов является известный принцип независимости действия сил, а также теорема о взаимности работ, впервые доказанная Максвеллом в 1864 г. Позже (в 1872 г.) эту теорему независимо сформулировал итальянский ученый Бетти. Поэтому ее часто называют *теоремой Бетти*. В зарубежной литературе она носит название *теоремы Максвелла-Бетти* [12].

С применением теоремы о взаимности работ и, как частный случай, теоремы о взаимности перемещений, были разработаны различные методы для определения деформаций при изгибе. Одним из основных является метод, предложенный итальянским ученым Кастилиано. В 1875 г. он опубликовал теорему, известную как *теорема Кастилиано: частная производная от потенциальной энергии деформации системы по силе равна перемещению точки приложения силы по ее направлению*:

$$\frac{\partial U}{\partial F} = \delta_F. \quad (5.1)$$

Теорема Кастилиано применима в полной мере при расчете упругих систем, элементы которых подчиняются закону Гука. Однако она позволяет определять перемещения только тех сечений, которые нагружены внешней силой или внешним изгибающим моментом.

Для определения прогиба в произвольной точке стержня или угла поворота произвольного сечения, а также в случае нагружения стержня распределенной нагрузкой используют метод дополнительной (фиктивной) нагрузки. Для этого прикладывают дополнительную нагрузку в тех сечениях, перемещения которых необходимо определить. После выполнения вычислений в окончательном результате эту нагрузку принимают равной нулю.

При раскрытии статической неопределимости системы теорема Кастилиано трактуется как теорема о минимуме потенциальной энергии деформации. Согласно этой теореме, любое напряженное состояние равновесия тела предполагает минимум потенциальной энергии деформации.

В этом случае все неизвестные усилия X_1, X_2, \dots, X_n , от которых зависит величина потенциальной энергии деформации, могут быть определены из условий минимума энергии:

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_n} = 0.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Определить прогиб свободного конца консольного стержня (рис. 5.1).

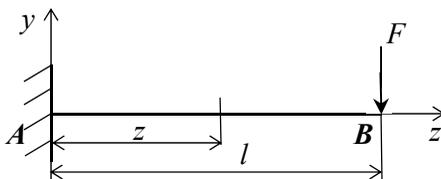


Рис. 5.1

Решение.

Потенциальная энергия деформации при изгибе равна [1]

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dz}{2EI},$$

где $M = -F(l - z)$.

Тогда

$$U = \frac{F^2}{2EI} \int_0^l (l - z)^2 dz = \frac{F^2 l^3}{6EI}.$$

По теореме Кастилиано (5.1) находим

$$\delta_F = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{F^2 l^3}{6EI} \right) = \frac{Fl^3}{3EI}.$$

Эту задачу можно решить, применяя теорему Клапейрона. Согласно закону сохранения энергии, потенциальная энергия деформации численно равна работе внешних сил:

$$U = A,$$

где по теореме Клапейрона работа внешней силы равна [2]

$$A = \frac{F \cdot \delta_F}{2}.$$

Тогда

$$\frac{F^2 l^3}{6EI} = \frac{F \cdot \delta_F}{2}.$$

Откуда находим

$$\delta_F = \frac{Fl^3}{3EI}.$$

Пример 2. Определить прогиб и угол поворота сечения C консольного стержня, нагруженного в точке B силой F (рис 5.2, a).

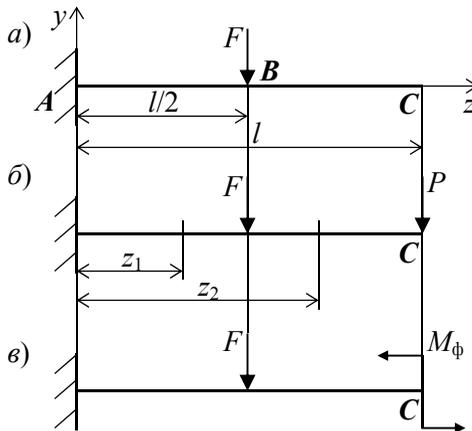


Рис. 5.2. Определение прогиба и угла поворота в произвольной точке по теореме Кастилиано

Решение.

1. Определяем прогиб сечения C .

Прикладываем фиктивную силу P в точке C (рис. 5.2, б). Вычисляем изгибающие моменты на участках стержня:

$$M_1 = -F\left(\frac{l}{2} - z_1\right) - P(l - z_1); \quad 0 \leq z_1 \leq \frac{l}{2};$$

$$M_2 = -P(l - z_2); \quad \frac{l}{2} \leq z_2 \leq l.$$

Чтобы избежать необходимости возведения в квадрат выражений изгибающих моментов, можно использовать метод дифференцирования сложной функции.

Например, если

$$U = f_1(M), \text{ а } M = f_2(x), \text{ то } \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial x}.$$

В нашем случае получим

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \frac{\partial}{\partial M} \left(\int_0^l \frac{M^2 dz}{2EI} \right) = \int_0^l \frac{M dz}{EI}.$$

Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial U}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} = \int_0^l \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} dz.$$

Фиктивная сила P нужна только для вычисления частной производной от изгибающего момента по этой силе. Поэтому силу P можно приравнять к нулю под знаком интеграла, что значительно упрощает расчеты.

Получаем

$$\begin{aligned} \delta_C = \frac{\partial U}{\partial P} &= \frac{1}{EI} \left(\int_0^{\frac{l}{2}} M_1 \cdot \frac{\partial M_1}{\partial P} \cdot dz_1 + \int_0^l M_2 \cdot \frac{\partial M_2}{\partial P} \cdot dz_2 \right) = \\ &= -\frac{1}{EI} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} F \left(\frac{l}{2} - z_1 \right) (z_1 - l) \cdot dz_1 \right] = \frac{5Fl^3}{48EI}. \end{aligned}$$

Здесь $\frac{\partial M_1}{\partial P} = -(l - z_1)$, а второй интеграл обращается в ноль.

Следует отметить, что при решении данного типа задач с применением теоремы Кастилиано начало отсчета абсциссы z можно выбирать произвольно с целью упрощения выражений $M(z)$. Кроме того, выбирая разные точки отсчета, можно добиться, чтобы нижний предел интегрирования равнялся нулю, что значительно упрощает расчеты.

2. Определяем угол поворота сечения C .

Прикладываем фиктивный момент в сечении C (рис. 5.2, в) и вычисляем изгибающие моменты на участках стержня:

$$M_1 = -F \left(\frac{l}{2} - z_1 \right) + M_\phi; \quad M_2 = M_\phi.$$

Тогда

$$\theta_C = \frac{\partial U}{\partial M_\phi} \Big|_{M_\phi=0} = \int_0^l \frac{M \cdot \frac{\partial M}{\partial M_\phi} \cdot dz}{EI} \Big|_{M_\phi=0} = -\frac{1}{EI} \int_0^{l/2} F \left(\frac{l}{2} - z_1 \right) \cdot dz_1 = -\frac{Fl^2}{8EI}.$$

Знак « \rightarrow » показывает, что поворот сечения C происходит в направлении, обратном показанному на рис. 5.2, в.

Пример 3. Раскрыть статическую неопределимость балки и определить прогиб сечения C (рис. 5.3, а).

Решение.

Балка один раз статически неопределима. Изображаем эквивалентную систему (рис. 5.3, б).

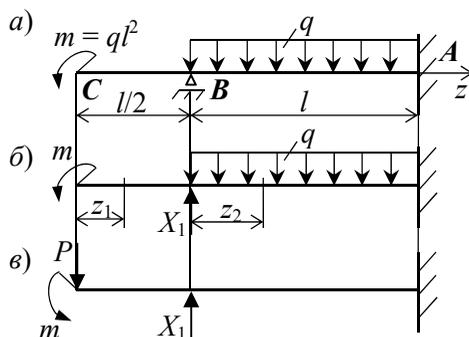


Рис. 5.3. Расчет статически неопределимой балки

Вычисляем изгибающие моменты в сечениях балки:

$$M_1 = -m; \quad M_2 = -m + X_1 \cdot z_2 - \frac{qz_2^2}{2}.$$

По теореме Кастилиано определяем вертикальное перемещение сечения B , которое равно нулю:

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial X_1} = 0.$$

Вычисляем

$$\begin{aligned} \delta_B = \frac{\partial U}{\partial X_1} &= \int_0^l \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_1} \cdot dz = \\ &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^{l/2} (-m) \cdot 0 \cdot dz_1 + \int_0^l \left(-m + X_1 z_2 - \frac{qz_2^2}{2} \right) \cdot z_2 \cdot dz_2 \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{EI} \left(-\frac{ml^2}{2} + \frac{X_1 l^3}{3} - \frac{ql^4}{8} \right) = 0.$$

Отсюда находим $X_1 = \frac{12m + 3ql^2}{8l} = \frac{15ql}{8}$.

Для определения вертикального перемещения сечения C прикладываем фиктивную силу P в этом сечении (рис. 5.3, в).

Определяем моменты в сечениях стержня с учетом силы P :

$$M_1 = -m - Pz_1; \quad M_2 = -m + X_1 \cdot z_2 - \frac{qz_2^2}{2} - P \left(\frac{l}{2} + z_2 \right).$$

Тогда

$$\frac{\partial M_1}{\partial P} = -z_1; \quad \frac{\partial M_2}{\partial P} = \left(-\frac{l}{2} - z_2 \right).$$

Принимая $P = 0$, вычисляем

$$\begin{aligned} \delta_C &= \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{l/2} (-m) \cdot (-z_1) \cdot dz_1 + \int_0^l \left(-m - X_1 z_2 - \frac{qz_2^2}{2} \right) \left(-\frac{l}{2} - z_2 \right) dz_2 \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{9ml^2}{8} - \frac{7X_1 l^3}{12} + \frac{5ql^4}{24} \right) = \frac{23ql^4}{96EI}. \end{aligned}$$

Энергетический метод с использованием теоремы Кастилиано может применяться при раскрытии статической неопределимости балочных и рамных конструкций. Этот метод является особенно эффективным при расчете статически неопределимых стержневых систем, элементы которых работают на растяжение или сжатие, а также при определении перемещений точек таких систем. Решение таких задач традиционным методом на основе геометрических соображений вызывает значительные трудности. Необходимо вычислить деформации всех стержней, изобразить систему в деформированном состоянии, составить и решить систему уравнений совмест-

ности перемещений и уравнений равновесия. При помощи теоремы Кастилиано подобные задачи решаются значительно проще.

При этом в отличие от деформации изгиба все расчеты выполняются без применения операции интегрирования.

Однако вопросы расчета стержневых систем, элементы которых работают на растяжение или сжатие, не входят в рамки данного методического пособия.

Энергетический метод расчета с применением теоремы Кастилиано широко применяется в вузах западных стран [12, 13]. Однако в вузах Республики Беларусь он практически не рассматривается.

Литература

1. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М.: МГТУ, 1999. – 591 с.
2. Горшков, А. Г. Сопротивление материалов / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – М.: Физматлит, 2002. – 544 с.
3. Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов / Э. И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2004. – 376 с.
4. Дарков, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М.: Высшая школа, 1989. – 622 с.
5. Никифоров, С. Н. Сопротивление материалов / С. Н. Никифоров. – М.: Высшая школа, 1966. – 584 с.
6. Биргер, И. А. Сопротивление материалов / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
7. Самуль, В. И. Основы теории упругости и пластичности / В. И. Самуль. – М.: Высшая школа, 1970. – 288 с.
8. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М.: Физматлит, 1976. – 856 с.
9. Винокуров, Е. Ф. Справочник по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокуров, М. К. Балыкин, И. А. Голубев и др. – Минск: Наука и техника, 1988. – 464 с.
10. Полухин, П. И. Физические основы пластической деформации / П. И. Полухин, С. С. Горелик, В. К. Воронцов. – М.: Металлургия, 1982. – 584 с.
11. Стали углеродистые обыкновенного качества: ГОСТ 380-2005.
12. Agati, Pierre. Résistance des matériaux / Pierre Agati, Frédéric Lerouge, Marc Rosseto. – Paris: Dunod, 2004. – 454 p.
13. Bazergui, André. Résistance des matériaux / André Bazergui, Thang Bui-Quoc, André Biron, Georges McIntyre, Charles Laberge. – École Polytechnique de Montréal, 2003. – 466 p.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ИЗГИБА.....	4
2. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ	14
3. КОСОЙ ИЗГИБ.....	26
4. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ.....	39
5. ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ИЗГИБЕ	52
Литература	61

Учебное издание

ЯКУБОВСКИЙ Чеслав Андреевич

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ

Пособие

для студентов специальностей

1-36 01 01 «Технология машиностроения»,

1-36 01 03 «Технологическое оборудование
машиностроительного производства»,

1-36 01 05 «Машины и технология обработки
материалов давлением»,

1-55 01 01 «Интеллектуальные приборы, машины и производства»,

1-55 01 02 «Интегральные сенсорные системы»,

1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника»

Редактор *Е. О. Германович*

Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 20.10.2020. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 3,60. Уч.-изд. л. 2,82. Тираж 100. Заказ 907.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.