

## РАЗДЕЛ III. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 624.04

### ПОСТРОЕНИЕ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ АНАЛИЗА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

*БЫНЬКОВА А. Ю.*

Белорусский национальный технический университет  
Минск, Беларусь

**Введение.** При создании любого строительного продукта главная цель – добиться такого проекта, который будет удовлетворять требованиям оптимальности по выбранным параметрам.

В современных проектно-вычислительных комплексах для расчета строительных сооружений вычислительный процесс реализован по варианту МКЭ «в перемещениях». Как правило, в итоге расчета мы получаем числовые значения искомых величин: усилия, напряжения, перемещения. «Увидеть» матрицу жесткости какого-либо конечного элемента (КЭ) или группы КЭ или исследуемой системы в целом невозможно. А желание подкорректировать некоторые параметры элементов возникает по мере стремления к лучшему проекту. Изменяя свойства КЭ (физико-механические характеристики материала, геометрические параметры элемента) можно существенно повлиять на конечные показатели проекта. Применение общих уравнений механики для формирования матриц жесткостей позволяет проектировщику управлять параметрами КЭ, а для задач небольшой размерности и получить (насколько позволяют возможности используемых компьютеров) аналитические зависимости для усилий в КЭ или перемещений их узлов, принимая значения некоторых параметров не в численном виде.

Математическая модель исследуемой системы состоит из трех групп уравнений: уравнения равновесия (1) (связь между усилиями и нагрузкой), геометрические (2) (связь между деформациями и пе-

ремещениями) и физические (3) (связь между деформациями и усилиями, зависящая от физических свойств материала).

$$\begin{cases} A\vec{S} = \vec{F}, & (1) \\ A^T \vec{Z} = \vec{\Delta}, & (2) \\ \vec{\Delta} - D\vec{S} = \vec{\Delta}' & (3) \end{cases}$$

где  $A$  – матрица равновесия всей системы;

$\vec{S}$  – вектор внутренних усилий в стержнях исследуемой системы;

$\vec{F}$  – вектор внешней нагрузки;

$A^T$  – матрица деформаций;

$\vec{Z}$  – вектор узловых перемещений системы;

$\vec{\Delta}$  – вектор деформаций всей системы, соответствующий вектору усилий  $\vec{S}$ ;

$D$  – матрица внутренней податливости всей системы;

$\vec{\Delta}'$  – вектор принудительных деформаций всей системы от соответствующего воздействия (теплого, осадки опор, неточности изготовления элементов).

Записанная система уравнений имеет единственное решение. Если для конструкции будут известны  $\vec{F}$  и  $\vec{\Delta}'$ , то в результате будет получен единственный вариант распределения усилий, перемещений и деформаций.

На основе этих уравнений формируется матрица жесткости системы, после чего записываются разрешающие уравнения МКЭ (4) в виде:

$$R \cdot \vec{Z} + R_f = 0, \quad (4)$$

где  $R$  – матрица внешней жесткости всей системы, определяемая для стержневой системы по формуле (5):

$$R = A \cdot K \cdot A^T, \quad (5)$$

где  $K$  – матрица внутренней жесткости всей системы;

$R_f$  – матрица «грузовых» реакций; внешняя нагрузка заменяется эквивалентной узловой по направлениям перемещений  $\vec{Z}$ .

После решение системы уравнений становятся известными перемещения  $\vec{Z}$  узлов в общей системе координат. Усилия в стержнях исследуемой системы определяются по формуле (6):

$$\vec{S} = K \cdot A^T \cdot \vec{Z}. \quad (6)$$

Для формирования матриц жесткостей КЭ используется матрица равновесия КЭ и матрица его внутренней жесткости.

В данной статье будет показан анализ работы пространственного каркаса, с целью определения НДС данного объекта.

В качестве примера используется расчетная схема каркаса, приведенная на рис. 1, а, б.

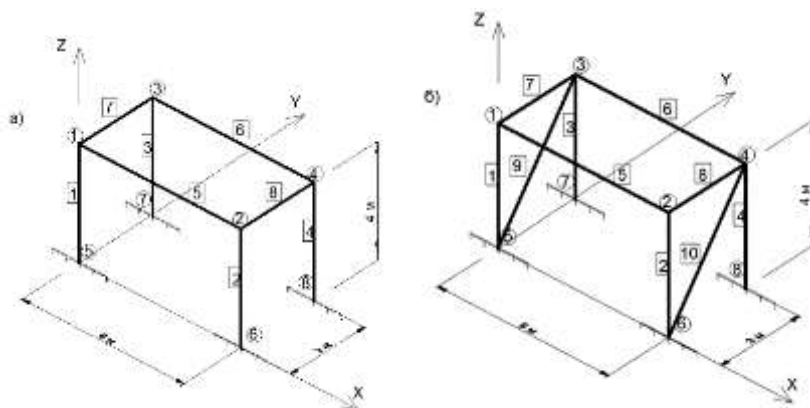


Рис. 1. Расчетная схема каркаса:  
а – каркас без связей; б – каркас со связями

Необходимо определить усилия в стержнях и перемещения узлов каркаса.

Для пространственного стержня (КЭ), примыкающего к жестким узлам, матрица равновесия имеет следующий вид (7):

$$a = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -t_{11} & & -\frac{t_{13}}{l} & \frac{t_{13}}{l} & -\frac{t_{12}}{l} & \frac{t_{12}}{l} \\ \hline -t_{21} & & -\frac{t_{23}}{l} & \frac{t_{23}}{l} & -\frac{t_{22}}{l} & \frac{t_{22}}{l} \\ \hline -t_{31} & & -\frac{t_{33}}{l} & \frac{t_{33}}{l} & -\frac{t_{32}}{l} & \frac{t_{32}}{l} \\ \hline & t_{11} & -t_{12} & & t_{13} & \\ \hline & t_{21} & -t_{22} & & t_{23} & \\ \hline & t_{31} & -t_{32} & & t_{33} & \\ \hline t_{11} & & \frac{t_{13}}{l} & -\frac{t_{13}}{l} & \frac{t_{12}}{l} & -\frac{t_{12}}{l} \\ \hline t_{21} & & \frac{t_{23}}{l} & -\frac{t_{23}}{l} & \frac{t_{22}}{l} & -\frac{t_{22}}{l} \\ \hline t_{31} & & \frac{t_{33}}{l} & -\frac{t_{33}}{l} & \frac{t_{32}}{l} & -\frac{t_{32}}{l} \\ \hline & -t_{11} & & t_{12} & & -t_{13} \\ \hline & -t_{21} & & t_{22} & & -t_{23} \\ \hline & -t_{31} & & t_{32} & & -t_{33} \\ \hline \end{array} \\ \end{array} \quad (7)$$

Относительно осей глобальной системы координат  $OXYZ$  :

- ось  $ox$  КЭ имеет направляющие косинусы  $t_{11}$ ,  $t_{21}$ ,  $t_{31}$ ;
- ось  $oy$  КЭ имеет направляющие косинусы  $t_{12}$ ,  $t_{22}$ ,  $t_{32}$ ;
- ось  $oz$  КЭ имеет направляющие косинусы  $t_{13}$ ,  $t_{23}$ ,  $t_{33}$ .

Матрица внутренней жесткости защемленного по концам стержня имеет вид (8):

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \frac{EA}{l} & & & & & \\ \hline & \frac{GI_{KP}}{l} & & & & \\ \hline & & \frac{4EJ_y}{l} & -\frac{2EJ_y}{l} & & \\ \hline & & -\frac{2EJ_y}{l} & \frac{4EJ_y}{l} & & \\ \hline & & & & \frac{4EJ_z}{l} & -\frac{2EJ_z}{l} \\ \hline & & & & -\frac{2EJ_z}{l} & \frac{4EJ_z}{l} \\ \hline \end{array} \\ \end{array} \quad (8)$$

В матрице приняты обозначения:

$EA$  – жесткость стержня на растяжение-сжатие;

$GI_{кр}$  – жесткость стержня на кручение;

$EI_Y, EI_Z$  – жесткости стержня на изгиб относительно осей  $Y$  и  $Z$ .

Из матриц жесткостей для всех КЭ формируется матрица внешней жесткости всей системы.

**Анализ решения.** Для рамы на рис. 1, *а*, *б* матрица внешней жесткости имеет размер –  $(24 \times 24)$ .

Для рамы, показанной на рисунке 1, *а*, вычислен вектор перемещений  $\vec{Z}$ :

$$\vec{Z} = [ |20.31, -2.19 -180, -4.99, -28.21, 0|; |-20.31, -2.19 -180, -4.99, 28.21, 0|; |20.31, 2.19 -180, 4.99, -28.21, 0|; |-20.31, 2.19 -180, 4.99, 28.21, 0| ]^T.$$

Соответствующий вектор усилий  $\vec{S}$  получит значения:

$$\vec{S} = [ |-45, 0, 20.60, -6.49, -4.17, 1.67|; |-45, 0, -20.60, 6.49, -4.17, 1.67|; |-45, 0, 20.60, -6.49, 4.17, -1.67|; |-45, 0, -20.60, 6.49, 4.17, -1.67|; |-6.77, 0, 9.40, 9.40, 0, 0|; |-6.77, 0, 9.40, 9.40, 0, 0|; |1.46, 0, -3.33, -3.33, 0, 0|; |1.46, 0, -3.33, -3.33, 0, 0| ].$$

Вертикальная прямая разделяет перемещения узлов 1–4 в векторе  $\vec{Z}$  и усилия в стержнях каркаса 1–8 в векторе  $\vec{S}$ , соответственно. Далее по полученным данным строятся эпюры внутренних усилий.

Сформировав с помощью общих уравнений матрицу  $R$  для рамы, показанной на рис. 1, *б*, найдем перемещения узлов и усилия в стержнях.

$$\vec{Z} = [ |20.67, -16.69 -144.21, 1.76, -27.14, 0.21| ; |-20.67, 16.69 -144.21, 1.76, 27.14, -0.21| ; |19.20, 24.10 -135.79, 6.04, -22.45, -2.06|; |-19.20, 24.10 -135.79, 6.04, 22.45, 2.06| ]^T.$$

$$\vec{S} = [ |36.05, 0.05, -19.39, 5.82, 4.50, -5.38| ; |36.05, -0.05, 19.39, -5.82, 4.50, -5.38|; |33.95, -0.52, -15.25, 4.02, 3.00, -6.02| ; |33.95, 0.52, 15.25, -4.02, 3.00, -6.02| ; |6.89, 0.00, -9.05, -9.05, -0.07, -0.07|; |6.40, 0.00, -7.48, -7.48, 0.69, 0.69|; |-2.47, 1.56, -12.00, 14.85, 0.12, -1.64|; |-2.47, -1.56, -12.00, 14.85, -0.12, 1.64|; |18.83, -3.02, -19.35, 21.76, -8.77, 2.08|; |18.83, 3.02, -19.35, 21.76, 8.77, -2.08| ]^T.$$

Естественно, что жесткость рамы, изображенной на рис. 1, *б* больше, чем рамы на рис. 1, *а*.

**Заключение.** Используя символьные переменные для составления матриц, можно этим методом получить функциональные зависимости для определения перемещений узлов и усилий в стержнях. Это позволяет варьировать различными параметрами в задачах оптимизации конструкции.

Выполняя расчет в программном комплексе SCAD Office 21.1.5, мы обнаружили не лучшую особенность этого комплекса: в графическом представлении результатов не показываются значения внутренних усилий на концах конечных элементов (стержнях). Однако, эти значения можно будет увидеть при просмотре таблицы усилий от каждого вида нагружения.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисевич, А. А. Строительная механика: учеб. пособие / А. А. Борисевич, Е. М. Сидорович, В. И. Игнатюк. – Изд. 2-е. – Минск: БНТУ, 2009. – 756 с.

2. Боголюбов, А. Н. Основы математического моделирования: конспект лекций / А. Н. Боголюбов. – Москва: Физический факультет МГУ им. Ломоносова, 2001. – 180 с.

3. Звонарев, С. В. Основы математического моделирования: учеб. пособие / С. В. Звонарев. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2019. – 112 с.

4. Короткий, А. И. Математическое моделирование / А. И. Короткий, Л. Г. Гальперин. – Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2005. – 102 с.

5. Численное моделирование строительных конструкций и систем с использованием ЭВМ. Современные аспекты обучения. Версия 1.0 [Электронный ресурс]: конспект лекций / Н. П. Абовский [и др.]. – Электрон. дан. (5 Мб). – Красноярск: ИПК СФУ, 2008.