УДК 539.3

Операторный метод расчета напряженно-деформированного состояния дорожного покрытия

Акимов В.А, Гончарова С.В.
Белорусский национальный технический университет

К настоящему времени разработано значительное количество расчетных моделей, позволяющих с той или иной степенью точности описать процесс накопления остаточных деформаций и их образования. Многие из известных к настоящему времени работ касаются, как правило, одного из конструктивных слоев покрытия-основания или грунта земляного полотна. Большинство методик требует значительного объема лабораторных и полевых испытаний, затрудняющих их практическое применение. Некоторые из упрощенных отечественных и зарубежных методов не достаточно обоснованы с физической точки зрения, т.к. носят чисто эмпирический характер, а, следовательно, область их применения остается неясной из-за небольшого числа входных расчетных показателей, являющихся основными в которых получены соответствующие уравнения. Другие разработки напротив представляются чрезвычайно сложными для применения. В их основу положены фундаментальные физико-математические модели с большим числом расчетных параметров, определение которых зачастую не представляется возможным, а решение задачи требует значительных ресурсов памяти ЭВМ. В этой работе авторы предлагают новый оригинальный аналитический метод расчета дорожного полотна, в основу которого положена модель равновесия изотропной полосы жестко сцепленной основанием с неподвижным твердым телом.

Решение рассматриваемой задачи записано в символическом виде, содержащем операторы бесконечно высокого порядка. Аргументом этих операторов является произведение продольной координаты полосы на поперечную производную. Представленное таким образом решение тождественно удовлетворяет уравнениям равновесия внутри области. Часть граничных условий выполняется за счет операторных коэффициентов, а оставшаяся часть - за счет входящих в решение двух произвольных аналитических функций. Построено три вида решения, соответствующих трем классам произвольно выбранных функций.

Решение для функций I класса представлено в виде ортогональных рядов, II класса в интегральном виде. Для интегральных решений дано сравнение с известным результатом. Решение III класса записано в неортогональных рядах. Для определения коэффициентов в этих рядах при построении инженерных аналитических решений, авторы используют теорию псевдодифференциальных операторов специального вида [2].

Рассмотрим равновесие упругой изотропной полосы жестко сцепленной основанием z=0 с неподвижным твердым телом, т.е. когда перемещения $U_0 = U\big|_{z=0}$ и $W_0 = W\big|_{z=0}$ тождественно равны нулю U_0=0, W_0=0.

Предположим, что на верхней кромке полосы $z=h$ перпендикулярно к ее поверхности приложена некоторая нагрузка $F(x)$, допускающая разложение в ряд Фурье

$$F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\delta_n x + B_n \sin\delta_n x),$$

где A_0, A_n, B_n, δ_n – известные величины.

Для удобства разложения разобьем общую смешанную задачу на две: симметричную относительно серединной плоскости $z=h/2$ (задача *A*) и антисимметричную (задача *B*) [1,2].

В соответствии с [2] представим решение поставленной задачи в виде:

<u>Задача *A*.</u>

$$U = -\frac{1}{2}\left[(\gamma-1)z\sin(z\partial_1)\right] f(x);$$

$$W = \frac{1}{2}\left[(\gamma+1)\frac{\sin(z\partial_1)}{\partial_1} - (\gamma-1)z\cos(z\partial_1)\right] f(x) \qquad (1)$$

<u>Задача *B*.</u>

$$U = \frac{1}{2}\left[(\gamma-1)z\cos(z\partial_1) + (\gamma+1)\frac{\sin(z\partial_1)}{\partial_1}\right] g(x);$$

$$W = -\frac{1}{2}\left[(\gamma-1)z\sin z\partial_1\right] g(x), \qquad (2)$$

где $\gamma = \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$,; $\nu_2 = \nu - 2$ ν – коэффициент Пуассона, $\partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $f(x)$ и $g(x)$ – произвольные функции. Формулы (1) и (2) тождественно удовлетворяют граничному условию $U|_{z=0}$=0, $W|_{z=0}$=0 и уравнению равновесия внутри области

$$\nabla^2 U + (\gamma - 1)\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0\,; \qquad \nabla^2 W + (\gamma - 1)\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0\,,$$

где U и W – соответственно горизонтальное и вертикальное перемещение частиц упругой среды,

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z}\,; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Составим выражения для напряжений

$$\tau_{zx} = G\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right) \text{ и } \sigma_{zz} = G\left(\gamma\frac{\partial W}{\partial z} + \gamma_2\frac{\partial U}{\partial x}\right)$$

В результате получим:

<u>Задача *A*.</u>

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\left[\sin z\partial_1 - \left(\gamma - 1\right) z\partial_1 \cos z\partial_1\right] f\left(x\right); \\ \sigma_{zz} &= G\left[\gamma \cos z\partial_1 + \left(\gamma - 1\right) z\partial_1 \sin z\partial_1\right] f\left(x\right) \end{aligned} \qquad (3)$$

<u>Задача *B*.</u>

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\left[\gamma \cos z\partial_1 - \left(\gamma - 1\right) z\partial_1 \sin z\partial_1\right] g\left(x\right); \\ \sigma_{zz} &= -G\left[\sin z\partial_1 + \left(\gamma - 1\right) z\partial_1 \cos z\partial_1\right] g\left(x\right) \end{aligned} \qquad (4)$$

Теперь надо удовлетворить граничным условиям в напряжениях на основании

$$z = h : \tau_{zx}\big|_{z=h} = 0, \ \sigma_{zz}\big|_{z=h} = F(x)$$

Полагаем

$$f\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k \cos\lambda_n x + b_n \sin\lambda_n x\right), \qquad (5)$$

С учетом (5) уравнения (1), (2), (3), (4) примут вид:

Задача *A*.

$$U = \frac{\gamma - 1}{2} z \sum_{k=1}^{\infty} sh(z\lambda_k)\left(a_k \sin\lambda_n x - b_n \cos\lambda_n x\right)$$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\gamma+1\right)\frac{sh(z\lambda_k)}{\lambda_k} - \left(\gamma-1\right) zch(z\lambda_k)\right]\left(a_k \cos\lambda_k x + b_k \sin\lambda_k x\right) + a_0 z \quad (6)$$

$$\tau_{zx} = G\sum_{k=1}^{\infty}\left[sh(z\lambda_k) - \left(\gamma-1\right) z\lambda_k ch(z\lambda_k)\right]\left(a_k \cos\lambda_k x - b_k \sin\lambda_k x\right)$$

$$\sigma_{zz} = G\sum_{k=1}^{\infty}\left[\gamma ch(z\lambda_k) - \left(\gamma-1\right) z\lambda_k sh(z\lambda_k)\right]\left(a_k \cos\lambda_k x + b_k \sin\lambda_k x\right) + G\gamma a_0$$

Задача *B*.

$$U = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\gamma-1\right) zch(z\mu_k) + \left(\gamma+1\right)\frac{sh(z\mu_k)}{\mu_k}\right]\left(c_k \cos\mu_k x + d_k \cos\mu_k x\right) + z\gamma c_0$$

$$W = \frac{\gamma - 1}{2} z \sum_{k=1}^{\infty} sh(z\mu_k)\left(c_k \sin\mu_k x - d_k \cos\mu_k x\right)$$

$$\tau_{zx} = G\sum_{k=1}^{\infty}\left[\gamma ch(z\mu_k) + \left(\gamma-1\right) z\mu_k sh(z\mu_k)\right]\left(c_k \cos\mu_k x + d_k \sin\mu_k x\right) + G\gamma c_0 \quad (7)$$

$$\sigma_{zz} = G\sum_{k=1}^{\infty}\left[sh(z\mu_k) + \left(\gamma+1\right) z\mu_k ch(z\mu_k)\right]\left(c_k \sin\mu_k x - d_k \cos\mu_k x\right)$$

Слагаемые a_0 и $\tilde{n}_0$ в (6) и (7) являются частью элементарного решения, позволяющего получить точное решение задачи для слоя при равномерном его обжатии и сдвиге. Формальным основанием для включения этих слагаемых служит то обстоятельство, что полные системы функций $\cos\lambda_k x$ и $\cos\mu_k x$ содержат константы.

Вводя обозначения

$$D_{1k} = -(\gamma-1)h\lambda_k ch(h\lambda_k) + sh(h\lambda_k)\,; \quad D_{2k} = \gamma ch(h\lambda_k) - (\gamma-1)h\lambda_k sh(h\lambda_k)\,;$$
$$D_{3k} = \gamma ch(h\mu_k) + (\gamma-1)h\mu_k sh(h\mu_k)\,; \quad D_{4k} = sh(h\mu_k) + (\gamma+1)h\mu_k ch(h\mu_k)\,,$$

запишем граничные условия $\tau_{zx}|_{z=h}=0$, $\sigma_{яя}|_{z=h}=F(x)$ в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_{1k}(a_k \cos\lambda_k x - b_k \sin\lambda_k x) + \sum_{k=1}^{\infty} D_{3k}(c_k \cos\mu_k x + d_k \sin\mu_k x) + G\gamma c_0 = 0 \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_{2k}(a_k \cos\lambda_k x + b_k \sin\lambda_k x) + \sum_{k=1}^{\infty} D_{4k}(c_k \sin\mu_k x - d_k \cos\mu_k x) + G\gamma a_0 =$$

$$= A_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(A_k \cos\delta_n x + B_n \sin\delta_n x) \quad (9)$$

I класс

$$\lambda_n = \mu_n = \delta_n = \frac{\pi n}{h}.$$

В этом случае $c_0=0$; $D_{1k}a_k = -D_{3k}c_k$ $D_{1k}b_k=D_{3k}d_k$; $G\gamma a_0=A_0$;

$D_{2k}a_k - D_{4k}d_k = A_k$; $D_{2k}b_k+D_{4k}c_k=B_k$.

Отсюда находим:

$$a_0 = \frac{A_0}{G\gamma}; \quad a_k = \frac{D_{2k}D_{3k}A_k + D_{1k}D_{4k}B_k}{\Delta \cdot D_3}; \quad b_k = \frac{D_{2k}D_{3k}B_k + D_{1k}D_{4k}A_k}{\Delta \cdot D_3};$$

$$c_k = -\frac{D_{1k}}{D_{3k}}a_k; \quad d_k = \frac{D_{1k}}{D_{3k}}b_k; \text{ где } \Delta = D_{2k}^2 - (D_{1k}D_{4k}/D_{3k})^2.$$

II класс

Полагая $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-i\lambda x}d\lambda$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} Be^{-i\lambda x}d\lambda$

и используя теорему о дифференцировании под знаком интеграла по параметру x, получим

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-i\lambda)^n Ae^{-i\lambda x}d\lambda, \quad g^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-i\lambda)^n Be^{-i\lambda x}d\lambda$$

На основании этих формул устанавливаем

$$\left[\sin(z\partial_1)\right] f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(iz\lambda) A e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Ash(z\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda$$

$$\left[\cos(z\partial_1)\right] f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Ach(z\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \tag{10}$$

$$\left[z\partial_1 \sin(z\partial_1)\right] f(x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Az \cdot sh(z\lambda) \frac{d}{dx}(e^{-i\lambda x}) d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A\lambda z \cdot sh(z\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda$$

$$\left[z\partial_1 \cos(z\partial_1)\right] f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Az \cdot ch(z\lambda) \frac{d}{dx}(e^{-i\lambda x}) d\lambda =$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Az\lambda \cdot ch(z\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda$$

Аналогичные соотношения получаются и для функций *g(x)*. Используя (10), запишем выражения для напряжений

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_{rz}}{G} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Ai\left[(\gamma-1)z\lambda \cdot chz\lambda - sh(z\lambda)\right] \cdot e^{-i\lambda x} d\lambda + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B\left[\gamma \cos(z\lambda) + (\gamma-1)z\lambda \cdot sh(z\lambda)\right] \cdot e^{-i\lambda x} d\lambda; \\
\frac{\sigma_{zz}}{G} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A\left[\gamma ch(z\lambda) - (\gamma-1)z\lambda \cdot sh(z\lambda)\right] \cdot e^{-i\lambda x} d\lambda + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Bi\left[sh(z\lambda) + (\gamma-1)z\lambda \cdot ch(z\lambda)\right] \cdot e^{-i\lambda x} d\lambda.
\end{aligned} \tag{11}$$

Рассмотрим случай сжатия полосы сосредоточенной силой *P*, приложенной в точке x=0, z=h перпендикулярно верхнему основанию. Тогда $\tau_{rz}(z=h)=0$; $\sigma_{zz}(z=h) = -P\delta(x)$, где $\delta(x)$ – дельта функция. Умножим уравнение (11) на $e^{i\lambda x}dx$ и проинтегрируем по всей длине полосы. Используя основную формулу интегрального преобразования Фурье

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} du \right\} e^{i\lambda x} dx$$

и свойство дельта функции $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{i\lambda x} dx = 1$, получим для определения $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ систему уравнений при $z = h$.

$$\begin{cases} Ai\left[\left(\gamma-1\right)h\lambda\cdot ch(h\lambda)-sh(h\lambda)\right]+B\left[\gamma\cdot ch(h\lambda)+\left(\gamma-1\right)h\lambda\cdot sh(h\lambda)\right]=0 \\ A\left[\gamma\cdot ch(h\lambda)-\left(\gamma-1\right)h\lambda\cdot sh(h\lambda)\right]+Bi\left[sh(h\lambda)+\left(\gamma-1\right)h\lambda\cdot ch(h\lambda)\right]=-\dfrac{P}{\sqrt{2\pi}G} \end{cases}$$

Вычисляем определитель полученной системы

$$\Delta = sh^2(h\lambda) - \gamma^2 ch^2(h\lambda) - \left(\gamma-1\right)^2 h^2\lambda^2$$

и находим A и B

$$A = -\frac{\left[\gamma\cdot ch(h\lambda)+\left(\gamma-1\right)h\lambda\cdot sh(h\lambda)\right]P}{\sqrt{2\pi}G\Delta};$$

$$B = \frac{\left[\left(\gamma-1\right)h\lambda\cdot ch(h\lambda)-sh(h\lambda)\right]Pi}{\sqrt{2\pi}G\Delta}$$

Приведем расчетные формулы для напряжений в заделанном основании z=0:

$$\tau_{zx} = \frac{2\gamma P}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\left(\gamma-1\right)h\lambda\cdot ch(h\lambda)-\gamma sh(h\lambda)}{sh^2(h\lambda)-\gamma^2 ch^2(h\lambda)-\left(\gamma-1\right)^2 h^2\lambda^2}\sin(\lambda x)d\lambda\,;$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{2\gamma P}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\gamma ch(h\lambda)+\left(\gamma-1\right)h\lambda\cdot sh(h\lambda)}{sh^2(h\lambda)-\gamma^2 ch^2(h\lambda)-\left(\gamma-1\right)^2 h^2\lambda^2}\cos(\lambda x)d\lambda\ .$$

С учетом $\left(\dfrac{1}{\gamma-1}\right)^2 = (1-2\nu)^2$, $\left(\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\right)^2 = 4(1-\nu)^2$ определяем:

$$\Delta = sh^2(h\lambda) - \gamma^2 ch^2(h\lambda) - (\gamma-1)^2 h^2\lambda^2 = (\gamma-1)^2\left[(1/(\gamma-1))^2 sh^2(h\lambda) - (\gamma/(\gamma-1))^2 *\right.$$
$$\left. *ch^2(h\lambda) - h^2\lambda^2 = (\gamma-1)^2\left[(1-2\nu)^2 sh^2(h\lambda) - 4(1-\nu)^2(sh^2(h\lambda)+1) - h^2\lambda^2\right] = \right.$$
$$= -(\gamma-1)^2\left[(3-4\nu)sh^2(h\lambda) + h^2\lambda^2 + 4(1-\nu)^2\right].$$

Вынося в числителе выражений τ_{zx} и σ_{zz} за скобки (γ-1), после элементарных преобразований получим

$$\tau_{zx}\big|_{z=0} = \frac{2(1-\nu)P}{\pi h}\int_0^\infty \frac{\mu\cdot ch(\mu) - (1-2\nu)sh(\mu)}{(3-4\nu)sh^2(\mu) + \mu^2 + 4(1-\nu)^2}\sin\left(\frac{x}{h}\right)d\mu\,,$$
$$\sigma_{zz}\big|_{z=0} = -\frac{2(1-\nu)P}{\pi h}\int_0^\infty \frac{\mu\cdot sh(\mu) + 2(1-\nu)ch(\mu)}{(3-4\nu)sh^2(\mu) + \mu^2 + 4(1-\nu)^2}\cos\left(\frac{x}{h}\right)d\mu\,,$$

где принято $\mu = \lambda h$.

Полученный результат совпадает с [1, стр. 40-41].

Численные результаты здесь обычно получают с помощью теоремы о вычетах [1].

III класс.

Условию $\tau_{zx}\big|_{z=h} = 0$ можно удовлетворить, если в задаче A в качестве λ_n взять корни трансцендентного уравнения $th(h\lambda) = (\gamma-1)h\lambda$. Тогда в задаче B μ_n будут корнями трансцендентного уравнения $cth(h\mu) = -\dfrac{\gamma-1}{\gamma}h\mu$ и c_o=0. Не умоляя общности, а лишь для упрощения выкладок, считаем внешнюю нагрузку $F(x)$ симметричной, т.е.

$$F(x) = A_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\delta_k x\,,$$

где δ_k, A_o, A_k – известные величины.

Вводя новые переменные

$$X_k = G\left[\gamma ch(h\lambda_k) - (\gamma-1)h\lambda_k sh(h\lambda_k)\right]a_k = G\left[\gamma - (\gamma-1)^2 h^2\lambda_k^2\right]a_k ch(h\lambda_k)\,,$$
$$Y_k = G\left[\sin(h\mu_k) + (\gamma-1)z\mu_k ch(z\mu_k)\right]d_k = \frac{G}{\gamma}\left[\gamma - (\gamma-1)^2 h^2\mu_k^2\right]d_k sh(h\mu_k)\,,$$

запишем граничное условие $\sigma_{zz}(z=h) = F(x)$ в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos \lambda_n x - \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \cos \mu_n x + G\gamma a_0 = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \delta_k x \qquad (12)$$

Для нахождения коэффициентов разложения (12) будем использовать операторы

$$D_0(d_x) = \left[tg(hd_x) - (\gamma - 1)hd_x\right] \cdot \left[\gamma \cdot ctg(hd_x) + (\gamma - 1)hd_x\right] / d_x ,$$

$$D_1(d_x) = \frac{\lambda_n^2 d_x^2}{\lambda_n^2 + d_x^2} D_0(d_x) ; \qquad D_2(d_x) = \frac{\mu_n^2 d_x^2}{\mu_n^2 + d_x^2} D_0(d_x) , \text{ где } \quad d_x = \frac{d}{dx} .$$

Применяя метод, подробно изложенный в [2], находим

$$a_0 = \frac{1}{\gamma G}\left(A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k D(\delta_k) \right);$$

$$X_n = \frac{2\mu_n ch^2 h\lambda_n}{h\left[(\gamma - 1)ch^2 h\lambda_n - 1\right]} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{\delta_k^2 D(\delta_k)}{(\lambda_n^2 - \delta_k^2)(\lambda_n^2 - \mu_k^2)} ;$$

$$Y_n = \frac{2\lambda_n^2 sh^2 h\mu_n}{h\left[(\gamma - 1)sh^2 h\mu_n - 1\right]} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{\delta_k^2 D(\delta_k)}{(\lambda_n^2 - \delta_k^2)(\lambda_n^2 - \mu_k^2)} ;$$

где $D(\delta_k) = \left[th(h\delta_k) - (\gamma - 1)h\delta_k\right] \cdot \left[\gamma \cdot cth(h\delta_k) + (\gamma - 1)h\delta_k\right] / \delta_k$; $\lambda_n \neq \delta_n$; $\mu_n \neq \delta_n$.

После этого из (12) находим коэффициенты a_k, d_k и тем самым окончательно получаем решение поставленной задачи в виде неортоганальных рядов. Полагая в (6) и (7) $z = 0$, получим расчетные формулы для напряжений в заделанном основании.

На основании вышеизложенного можно сделать вывод, что предложенный метод является достаточно универсальным. Он позволяет с единых позиций получить как известные, так и новые аналитические решения, удобные для проведения инженерных расчетов. Использование общих операторно-символических решений в большинстве случаев требует в дальнейшем меньших вычислительных работ и выигрывает с точки зрения представления вида решения. За счет надлежащего выбора входящих в решение произвольных аналитических функций можно получить более полную и точную информацию о физической сущности решаемой задачи, а в ряде случаев дать оценку приближенным численным методам и той математической модели, которая положена в основу расчета.

Литература

1. Я.С. Уфлянд. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. // АН СССР, М. – Л., 1963г. – 367 с.
2. В.А. Акимов. Операторный метод решения задач теории упругости. Монография / Мн.:УП «Технопринт», 2003. – 101 с.

УДК 517.9

Определение вида кривой по заданному радиусу ее кривизны

Акимов В.А, Гончарова С.В.
Белорусский национальный технический университет

Автомобильные дороги являются одними из наиболее рентабельных сооружений. Проектирование автомобильных дорог должно быть направлено на достижение их высоких транспортно-эксплуатационных качеств. Правильно запроектированная дорога обеспечивает безопасность движения как одиночных автомобилей с расчетными скоростями, так и транспортных потоков с высокими уровнями удобств даже в самые напряженные периоды работы дорог. Авторы данной работы предлагают при проектировании закруглений, наряду с известными переходными кривыми использовать новые типы кривых, задаваемых посредством переменного радиуса кривизны.

Первоначально примем проекцию радиуса кривизны R на ось абсцисс равной постоянной величине $a=1$. Найдем уравнение кривой, если она проходит через начало координат и в этой точке ортогональной оси абсцисс.

Радиус кривизны $R=\dfrac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{y''}$. Направляющий косинус радиуса кривизны как направляющий косинус нормали $\cos\alpha=\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$.

По условию задачи $R\cos\alpha=a$, откуда дифференциальное уравнение искомого семейства кривых $y'(1+y'^2)=ay''$.

Решаем это уравнение типа $y''=f(y')$ и получаем его общий интеграл