

Расчёт и построение геодезических на поверхностях в системе Wolfram Mathematica 12.1

Хотомцева М.А.

Белорусский национальный технический университет

Рассматривается расчёт и построение семейства геодезических на параметризованных поверхностях с использованием системы Wolfram Mathematica 12.1 при изучении курса «Дифференциальная геометрия и основы теории поверхностей»

Одним из важных понятий курса дифференциальной геометрии и основ теории поверхностей является понятие геодезической линии. Линия ℓ на поверхности V называется геодезической, если в каждой ее точке геодезическая кривизна равна нулю. Если $V : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ параметризованная поверхность и кривая ℓ на V задана уравнениями

$$u = u(t), v = v(t),$$

то геодезические линии определяются дифференциальным уравнением второго порядка

$$u'v'' - v'u'' + Bu' - Av' = 0, \tag{1}$$

где $A = \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2$, $B = \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2$.

Функции Γ_{jk}^i выражаются через коэффициенты E, F, G первой квадратичной формы поверхности и называются символами Кристоффеля.

В окрестности регулярной точки на поверхности существует двухпараметрическое семейство геодезических линий, причем через каждую точку этой окрестности проходит пучок геодезических — одна в каждом направлении. Геодезические линии на плоскости — прямые, на сфере — большие круги, т. е. окружности, диаметр которых равен диаметру сферы; они высекаются плоскостями, проходящими через центр сферы.

Геодезические линии на поверхности, как и прямые на плоскости, являются кратчайшими путями. Справедлива следующая теорема

Теорема. Кратчайшим расстоянием на поверхности между близкими точками А и В является дуга геодезической, соединяющая эти точки.

Кратчайшие расстояния между точками на земной поверхности находят, принимая форму Земли за шар радиуса 6378 км и параметризуя поверхность как сферу. Затем отмечая широту θ и долготу φ точек, между которыми следует найти кратчайшее расстояние, соответственно индексами 0 и 1, получают косинус центрального угла α дуги геодезической, проходящей через рассматриваемые точки.

$$\cos \alpha = \sin \theta_0 \sin \theta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_0) + \cos \theta_0 \cos \theta_1$$

Подставляя значения координат, находят $\cos \alpha$. Кратчайшее расстояние равно длине дуги геодезической $s = 6378 \cdot \alpha$.

Если поверхность имеет более сложную форму, то аналитическое решение уравнения (1) затруднительно, требуется численное решение. Поэтому использование программы Wolfram Mathematica 12.1 позволяет сравнительно легко провести необходимые приближённые вычисления и построить геодезические на поверхностях. Это улучшает наглядность в преподавании курса дифференциальной геометрии. Разработчиками программы созданы специальные программные модули **unitnormal**, **metric**, **shape** для вычисления первой и второй квадратичных форм поверхности. Модули **gcurv** и **mcurv** используют для вычисления кривизн, модуль **christoffel2** позволяет вычислить символы Кристоффеля.

Применение программы позволило получить графическое представление о пучке геодезических линий, проходящих через заданную точку поверхности (Рис.1–6).

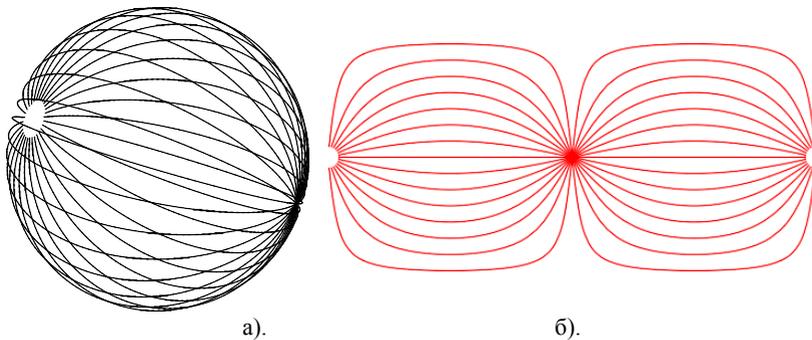


Рис.1. а) пучок геодезических на сфере; б) пучок на плоскости

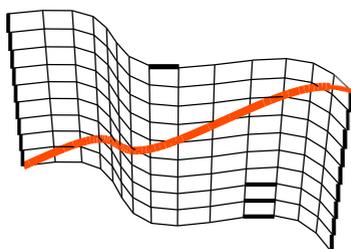


Рис. 2. Геодезическая на параболическом цилиндре

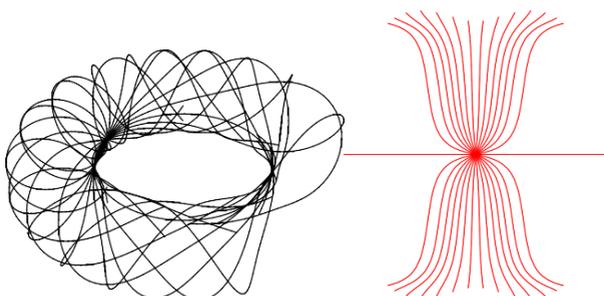


Рис. 3. а). пучок геодезических на торе; б). пучок на плоскости

Самая простая координатная сеть на плоскости — декартова, она состоит из двух ортогональных семейств геодезических (прямых). Самые простые координаты на сфере — географические, широта и долгота. Соответствующая координатная сеть состоит из семейства геодезических — меридианов и семейства ортогональных к ним линий — параллелей. По аналогии ортогональную сеть на произвольной поверхности V , одно семейство линий которой состоит из геодезических линий, называют **полугеодезической** сетью. Таким образом, декартова и полярная сети на плоскости, географическая сеть на сфере являются полугеодезическими сетями. Применение программы Wolfram Mathematica 12.1, позволяет построить полугеодезическую сеть в окрестности регулярной точки на любой гладкой поверхности и представить её наглядно.