

УДК 528.235

КОЭФФИЦИЕНТЫ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОЕКЦИИ РУССИЛЯ

д-р техн. наук, проф. В.П. ПОДШИВАЛОВ
 (Белорусский национальный технический университет, Минск);
 канд. техн. наук АКРЕШ МОХАММЕД САБРИ АЛИ
 (Ливия)

Приведены выражения для коэффициентов в обратном ряде проекции Руссилья до 12 степени. Это позволяет применять проекцию для изображения значительных по размерам территорий с точностью, достаточной для решения научных и практических задач геодезии. Произведена оценка точности вычисления коэффициентов для зоны с разностями долгот в 21° и широт 20° на примере территории Алжира с широтой главной точки проекции, равной 28° . Показано, что вся территория Алжира может быть изображена в одной координатной зоне с долготой осевого меридиана в $1,5^\circ\text{E}$. Исследованы некоторые численные характеристики проекции для пунктов, расположенных в разных местах, произведены контрольные вычисления путем прямого и обратного перехода (геодезические – плоские, плоские – геодезические координаты). Приводятся результаты вычислений.

Сущность проекции Руссилья

Проекция Руссилья, так же как и другие конформные проекции, используется в геодезии по гармоническим уравнениям для ГИС; в литературе известно до восьмой степени разложения в ряд [1; 3; 4].

При разложении до двенадцатой степени

$$X_R = x_G + \frac{x_G^3}{12R_0^2} + \frac{x_G^5}{120R_0^4} + \frac{17x_G^7}{20160R_0^6} + \frac{31x_G^9}{362880R_0^8} + \frac{691x_G^{11}}{79833600R_0^{10}} + \dots$$

$$X_R = x_G + \beta_3 x_G^3 + \beta_5 x_G^5 + \beta_7 x_G^7 + \beta_9 x_G^9 + \beta_{11} x_G^{11} + \dots$$

$$\beta_3 = \frac{1}{12R_0^2}; \quad \beta_5 = \frac{1}{120R_0^4}; \quad \beta_7 = \frac{17}{20160R_0^6}; \quad \beta_9 = \frac{31}{362880R_0^8}; \quad \beta_{11} = \frac{691}{79833600R_0^{10}}, \quad (1)$$

где X_R – прямоугольные координаты в проекции Руссилья; x_G – прямоугольные координаты в проекции Гаусса; R_0 – средний радиус кривизны Земли для средней точки проекции; β_j – численные коэффициенты.

Из уравнений (1) видно, что прямоугольные координаты проекции Руссилья можно выразить в функции прямоугольных координат проекции Гаусса через аналитические функции:

$$\left. \begin{aligned} (X_R + iY_R) &= f(x_G + iy_G); \\ (X_R + iY_R) &= f(q + il). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Для получения общих коэффициентов проекции Руссилья в виде гармонических уравнений используем выражения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta X &= X - X_0 = C_1 \Delta q - C_2 \Delta q^2 - C_3 \Delta q^3 + C_4 \Delta q^4 + C_5 \Delta q^5 - C_6 \Delta q^6 + \dots \\ X_m &= b_1 \Delta q + b_2 \Delta q^2 + b_3 \Delta q^3 + b_4 \Delta q^4 + b_5 \Delta q^5 + b_6 \Delta q^6 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\Delta X = C_1 \Delta q - C_2 \Delta q^2 - C_3 \Delta q^3 + C_4 \Delta q^4 + C_5 \Delta q^5 + \dots + C_{12} \Delta q^{12},$$

$$\Delta X^3 = (C_1 \Delta q - C_2 \Delta q^2 - C_3 \Delta q^3 + C_4 \Delta q^4 + C_5 \Delta q^5 + \dots + C_{12} \Delta q^{12})^3,$$

$$\Delta X^5 = (C_1 \Delta q - C_2 \Delta q^2 - C_3 \Delta q^3 + C_4 \Delta q^4 + C_5 \Delta q^5 + \dots + C_{12} \Delta q^{12})^5,$$

$$\Delta X^7 = (C_1 \Delta q - C_2 \Delta q^2 - C_3 \Delta q^3 + C_4 \Delta q^4 + C_5 \Delta q^5 + \dots + C_{12} \Delta q^{12})^7,$$

$$\Delta X^9 = (C_1 \Delta q - C_2 \Delta q^2 - C_3 \Delta q^3 + C_4 \Delta q^4 + C_5 \Delta q^5 + \dots + C_{12} \Delta q^{12})^9,$$

$$\Delta X^{11} = (C_1 \Delta q - C_2 \Delta q^2 - C_3 \Delta q^3 + C_4 \Delta q^4 + C_5 \Delta q^5 + \dots + C_{12} \Delta q^{12})^{11}.$$

Члены разложений выше 12-й степени не учитываются.

Из условия уравнения (2) получим основные прямые коэффициенты в проекции Руссилья:

$$b_1 \Delta q + b_2 \Delta q^2 + b_3 \Delta q^3 + b_4 \Delta q^4 + b_5 \Delta q^5 + \dots + b_{12} \Delta q^{12} = x_G + \beta_3 x_G^3 + \beta_5 x_G^5 + \beta_7 x_G^7 + \dots + \beta_{11} x_G^{11},$$

$$x_G = \Delta X.$$

После сравнения получим соотношения коэффициентов до двенадцатой степени:

$$b_1 = C_1,$$

$$b_2 = C_2,$$

$$b_3 = \beta_3 C_1^3 - C_3 b_3,$$

$$b_4 = C_4 - 3\beta_3 C_1^2 C_2,$$

$$b_5 = C_5 + 3\beta_3 (C_1 C_2^2 - C_1^2 C_3) + \beta_5 C_1^5,$$

$$b_6 = -C_6 + \beta_3 (3C_1^2 C_4 + 6C_1 C_2 C_3 - C_2^3) + 5\beta_5 C_1^4 C_2,$$

$$b_7 = -C_7 + \beta_3 (3C_1^2 C_5 - 6C_1 C_2 C_4 + C_2^3 C_3) + \beta_5 (10C_1^3 - 5C_1^4 C_3) + \beta_7 C_1^7,$$

$$b_8 = C_8 + \beta_3 (3C_2^2 C_4 - 3C_1^2 C_6 - 6C_1 C_2 C_5 - 6C_1 C_3 C_4 - 3C_2^2 C_3^2) + \beta_5 (10C_1^4 - 10C_1^2 C_2^3 + 20C_1^3 C_2 C_3) - 7\beta_7 C_1^6 C_2,$$

$$b_9 = C_9 + \beta_5 (6C_1 C_2 C_6 - 3C_1^2 C_7 - 6C_1 C_3 C_5 + 3C_1 C_4^2 + 3C_2^2 C_5 + 6C_2 C_3 C_4 + C_3^3) +$$

$$+ 5\beta_5 (C_1^4 C_5 - 4C_1^3 C_2 C_4 + 2C_1^3 C_3^2 - 6C_1^2 C_2^2 C_3 + C_1 C_4^2) + 7\beta_7 (3C_1^5 C_2^2 - C_1^6 C_3) + \beta_9 C_1^9,$$

$$b_{10} = -C_{10} + 3\beta_3 (C_1^2 C_8 + 2C_1 C_2 C_7 + 2C_1 C_3 C_6 + 2C_1 C_4 C_5 + 2C_2 C_3 C_5 - C_2^2 C_6 - C_2 C_4^2 + C_3^2 C_4) +$$

$$+ \beta_5 (30C_1^2 C_2^2 C_4 - 5C_1^4 C_6 - 20C_1^3 C_2 C_5 - 20C_1^3 C_3 C_4 - 30C_1^2 C_2 C_3^2 - C_2^5 - 20C_1 C_2^3 C_3 C) +$$

$$+ 7\beta_7 (C_1^6 C_4 - 5C_1^4 C_2^3 + 6C_1^5 C_2 C_3) - 9\beta_9 C_1^8 C_2,$$

$$b_{11} = -C_{11} + 3\beta_3 (C_1^2 C_9 - 2C_1 C_2 C_8 + 2C_1 C_3 C_7 - 2C_1 C_4 C_6 - 2C_2 C_3 C_6 - 2C_2 C_4 C_5 + C_1 C_5^2) -$$

$$- C_2^2 C_7 - C C_3^2 C_5 - C_3 C_4^2) + \beta_5 (20C_1^3 C_2 C_6 - 5C_1^4 C_7 - 20C_1^3 C_3 C_5 + 10C_1^3 C_4^2 C_4^2 +$$

$$+ 30C_1^2 C_2^2 C_5 + 60C_1^2 C_2 C_3 C_4 - 10C_1^2 C_3^3 - 20C_1 C_2^3 C_4 + 30C_1 C_2^2 C_3^2 - C_2^4 C_3) +$$

$$+ 7\beta_7 (C_1^6 C_5 - 6C_1^5 C_3 C_2 C_4 + 3C_1^5 C_3^2 - 15C_1^4 C_2^2 C_3 + 5C_1^3 C_2^4) + 9\beta_9 (4C_1^7 C_2^2 - C_1^8 C_3) + C_{11} C_1^{11},$$

$$b_{12} = C_{12} + \beta_3 (3C_2^2 C_8 - 6C_1 C_2 C_9 - 6C_1 C_3 C_8 - 6C_1 C_4 C_7 - 6C_1 C_5 C_6 - 6C_2 C_3 C_7 + 6C_2 C_4 C_6 - 6C_3 C_4 C_5 -$$

$$- 3C_1^2 C_{10} - 3C_2 C_5^2 - 3C_3^2 C_6 + C_4^3) + \beta_5 (20C_1^3 C_2 C_7 + 20C_1^3 C_3 C_6 + 20C_1^3 C_4 C_5 - 30C_1^2 C_2^2 C_6 +$$

$$+ 60C_1^2 C_2 C_3 C_5 - 60C_1 C_2^2 C_3 C_4 - 30C_1^2 C_2 C_4^2 + 30C_1^2 C_3^2 C_4 - 20C_1 C_2^3 C_5 + 20C_1 C_2 C_3^3 +$$

$$+ 5C_1^4 C_8 - 10C_2^3 C_3^2 + 5C_2^4 C_4) + 7\beta_7 (20C_1^3 C_3 C_3 - 6C_1^5 C_2 C_5 - 6C_1^5 C_3 C_4 + 15C_1^4 C_2^2 C_4 - 15C_1^4 C_2 C_3^2 -$$

$$- 3C_1^2 C_2^5 - C_1^6 C_6) + 9\beta_9 (C_1^8 C_4 - 7C_1^6 C_2^3 + 8C_1^7 C_2 C_3) - 11\beta_{11} C_1^{10} C_2.$$

(4)

где $b_{1,2,\dots}$ – коэффициенты проекции Руссилья; $C_{1,2,\dots}$ – прямые коэффициенты проекции Гаусса.

Коэффициенты для цилиндрической (Гаусса, УТМ) проекции до 12-й степени включительно нами даны в работе [1].

Приведем их выражения:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{m_0 \cdot c \cdot \cos B_0}{V}, \\
 C_2 &= -\frac{C_1 \cdot \sin B_0}{2}, \\
 C_3 &= \frac{C_1 \cdot \cos^2 B_0}{6} (\tan^2 B_0 - V^2), \\
 C_4 &= \frac{C_1}{24} \sin B_0 \cos^2 B_0 (5 - \tan^2 B_0 + 9\eta^2 + 4\eta^4), \\
 C_5 &= \frac{C_1}{120} \cos^4 B_0 \left(5 + 14\eta^2 - 18 \tan^2 B_0 - 58\eta^2 \tan^2 B_0 + 13\eta^4 - 73\eta^4 \tan^2 B_0 + \right. \\
 &\quad \left. + \tan^4 B_0 + 4\eta^6 - 28\eta^6 \tan^2 B_0 \right), \\
 C_6 &= \frac{C_1 \sin B_0 \cos^4 B_0}{720} \left(58 \tan^2 B_0 + 330\eta^2 \tan^2 B_0 + 743\eta^4 \tan^2 B_0 - 61 - \right. \\
 &\quad \left. - 270\eta^2 - \tan^4 B_0 - 463\eta^4 \right), \\
 C_7 &= \frac{C_1 \cos^6 B_0}{5040} \left(479 \tan^2 B_0 - 61 - 331\eta^2 + 3298\eta^2 \tan^2 B_0 - 179 \tan^4 B_0 + \right. \\
 &\quad \left. + 1771\eta^2 \tan^4 B_0 + \tan^6 B_0 - 733\eta^4 + 9006\eta^4 \tan^2 B_0 - 6521\eta^4 \tan^4 B_0 \right), \\
 C_8 &= \frac{C_1 \sin B_0 \cos^6 B_0}{40320} \left(1385 + 10899\eta^2 + 543 \tan^4 B_0 - 32802\eta^2 \tan^2 B_0 + \right. \\
 &\quad \left. + 9219\eta^2 \tan^4 B_0 - 3111 \tan^2 B_0 - \tan^6 B_0 + 35319\eta^4 - \right. \\
 &\quad \left. - 134010\eta^4 \tan^2 B_0 + 52731\eta^4 \tan^4 B_0 \right), \\
 C_9 &= \frac{C_1}{362880} \cos^8 B_0 \left(19028 \tan^2 B_0 - 1385 - 12284\eta^2 - \tan^8 B_0 + \right. \\
 &\quad \left. + 214140\eta^2 \tan^2 B_0 + 1636 \tan^6 B_0 + 47188\eta^2 \tan^6 B_0 - \right. \\
 &\quad \left. - 18270 \tan^4 B_0 - 290868\eta^2 \tan^4 B_0 \right), \\
 C_{10} &= \frac{C_1 \sin B_0 \cos^8 B_0}{3628800} \left(50521 + 612540\eta^2 - 3277980\eta^2 \tan^2 B_0 - 206276 \tan^2 B_0 + \right. \\
 &\quad \left. + 101166 \tan^4 B_0 + 2402100\eta^2 \tan^4 B_0 - 4916 \tan^8 B_0 - \right. \\
 &\quad \left. - 239220\eta^2 \tan^6 B_0 + \tan^8 B_0 \right), \\
 C_{11} &= \frac{C_1 \cos^{10} B_0}{39916800} \left(1073517 \tan^2 B_0 - 50521 - 1949762 \tan^4 B_0 + \tan^{10} B_0 - \right. \\
 &\quad \left. - 14757 \tan^8 B_0 + 540242 \tan^8 B_0 - 17594876 \tan^8 B_0 - \right. \\
 &\quad \left. - 43255806\eta^2 \tan^4 B_0 - 663061\eta^2 + 18928316\eta^2 \tan^8 B_0 \right. \\
 &\quad \left. - 1205941\eta^2 \tan^8 B_0 \right), \\
 C_{12} &= \frac{C_1 \sin B_0 \cos^{10} B_0}{479001600} \left(2702765 - 17460701 \tan^2 B_0 - 189410408\eta^2 \tan^2 B_0 - \right. \\
 &\quad \left. - \tan^{10} B_0 + 16889786 \tan^4 B_0 + 11272037\eta^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 517812174\eta^2 \tan^4 B_0 + 52828909 \tan^8 B_0 - \right. \\
 &\quad \left. - 143578274 \tan^6 B_0 + 41248981\eta^2 \tan^8 B_0 - \right. \\
 &\quad \left. - 285183772\eta^2 \tan^6 B_0 \right).
 \end{aligned} \tag{5}$$

В коэффициентах C_6 отброшен член с множителем η^6 , а в коэффициентах $C_7 - C_{12}$ с множителем η^4 . Заметим, что выражения для коэффициентов до восьмого включительно известны [1; 3; 4 и др.].

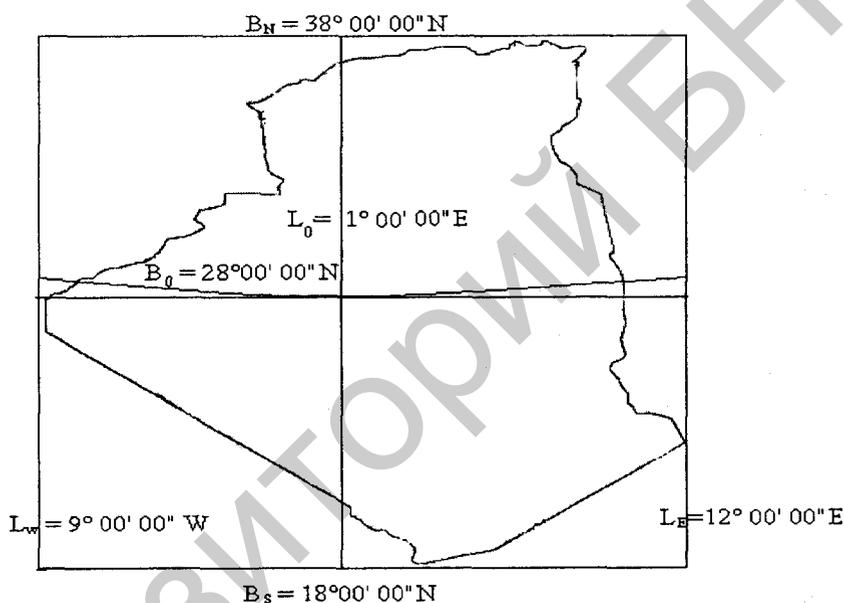
Применяя полученные значения коэффициентов в выражениях для вычисления координат, можно проектировать на плоскость в проекции Руссилья территории стран, размеры которых ограничены разностью изометрических широт и долгот до 20° . При этом обеспечивается точность вычисления координат до 1 мм. В качестве апробации работы предлагаемых формул возьмем территорию Алжира.

Алжирская Народная Демократическая Республика находится в Северной Африке, в западной части Средиземноморского бассейна. Алжир граничит с Марокко на западе, Мавританией и Мали – на юго-западе, Нигером – на юго-востоке, Ливией и Тунисом – на востоке. Алжир – второе по величине африканское государство ($2,381,740 \text{ км}^2$) и одиннадцатое в мире, большая часть площади которого лежит в пустыне Сахара; столица – город Алжир. Географические координаты для граничных точек границы Алжира имеют следующие значения:

$$B_S = 18^\circ 58' 08'' \text{ N}; \quad B_N = 36^\circ 56' 30'' \text{ N};$$

$$L_W = 8^\circ 39' 24'' \text{ W}; \quad L_E = 11^\circ 59' 54'' \text{ E}.$$

На рисунке показана территория Алжира и ее расположение в одной зоне с шириной 20° в направлении широты $B_S = 18^\circ 00' 00'' \text{ N}$, $B_N = 38^\circ 00' 00'' \text{ N}$ и 21° в направлении долготы $L_W = 9^\circ 00' 00'' \text{ W}$, $L_E = 12^\circ 00' 00'' \text{ E}$, с широтой главной точки проекции $B_0 = 28^\circ 00' 00.00'' \text{ N}$ и долготой центрального меридиана $L_0 = 1^\circ 30' 00'' \text{ E}$.



Алжир в одной зоне системы координат

В таблице показаны результаты вычисления координат в проекции Руссилья по геодезическим широтам и долготам и, наоборот, для проверки работы формул (обратные коэффициенты показаны в работе [1]).

Преобразование координат в проекции Руссилья

№	Геодезические координаты			
	1	2	3	4
B	$38^\circ 00' 00.0000'' \text{ N}$	$18^\circ 00' 00.0000'' \text{ N}$	$36^\circ 00' 00.0000'' \text{ N}$	$34^\circ 00' 00.0000'' \text{ N}$
L	$9^\circ 00' 00.0000'' \text{ E}$			
Преобразование в системе координат Руссилья $a = 6378137 \text{ м}$, $b = 6356752.314 \text{ м}$ $m_0 = 1.00000000$				
X м	4257002.2342	2028617.4367	4033433.4672	3810388.7832
Y м	929541.2511	1122169.4587	951738.1965	973245.0518
м'	1.01358651	1.01485432	1.01096076	1.00895444
γ	5.75125098	4.127688598	5.588747883	5.426551049
Преобразование координат Руссилья в геодезических координатах				
B	$38^\circ 00' 00.0000'' \text{ N}$	$18^\circ 00' 00.0000'' \text{ N}$	$36^\circ 00' 00.0000'' \text{ N}$	$34^\circ 00' 00.0000'' \text{ N}$
L	$9^\circ 00' 00.0000'' \text{ E}$			

Из таблицы видно, что миллиметровая точность вычислений при преобразовании координат проекции Руссилья обеспечена.

Заключение. В итоге проведенного исследования для конформной геодезической проекции Руссиля имеем следующие результаты:

- получены новые выражения коэффициентов разложения в ряды для проекции Руссиля;
- обеспечены высокие результаты вычислений при размерах координатной зоны 20×21 градусов, что проверено применительно к территории Алжирской Народной Демократической Республики;
- все коэффициенты уравнений разложений для вычислений в проекции Руссиля получаются по коэффициентам проекции Меркатора, что дает определенные преимущества в их практическом применении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акреш, М.С. Разработка научно-технических основ и технологии формирования систем координат для геоинформационных систем в условиях Ливии: дис. ... канд. техн. наук / Полоц. гос. ун-т; М.С. Акреш. – Новополоцк, 2010. – 131 с.
2. Акреш, М.С. Разработка закономерностей для обратных алгоритмов в проекциях Т. Меркатора и Руссиля / М.С. Акреш // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. Ф. Строительство. Прикладные науки. – 2009. – № 6. – С. 105 – 110.
3. Морозов, В.П. Курс сфероидической геодезии / В.П. Морозов. – М.: Недра, 1979. – 296 с.
4. Подшивалов, В.П. Теоретические основы формирования координатной среды для геоинформационных систем / В.П. Подшивалов. – Новополоцк: Изд. ПГУ, 1998. – 125 с.
5. Подшивалов, В.П. Общий алгоритм вычислений в геодезических проекциях / В.П. Подшивалов // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Прикладные науки. – 1995. – Т. 1. – С. 66 – 74.
6. Akresh, M.S. New method in map projection indirect coefficients / M.S. Akresh // Proceedings of 12th AGILE international conference on geographic information science and ISPRS Hannover workshop 2009 High-Resolution Earth imaging for geospatial information, 2nd – 5th June, 2009. – Hannover of Germany, 2009. – first paper in CD [Electronic resource]. – Mode of access: <http://www.agile-online.org>.
7. Padshyvalau, U. Principles of design of projections for geographical information technologies / U. Padshyvalau, A. Matkin, M. Rymasheuskaia // Proceedings of the 10th Scandinavian Research Conference on Geographical Information Science: Scan GIS 2005. – Stockholm, 2005. – P. 137 – 145.
8. Padshyvalau, U. Automated design of coordinate system for long linear objects. / U. Padshyvalau, Y. Huryeu // Proceedings of the 11th Scandinavian Research Conference on Geographical Information Science, 5th – 7th September Scan-GIS-2007, As, Norway, 2007. – P. 147 – 155.

Поступила 18.01.2012

COEFFICIENTS IN MATHEMATICS SERIES FOR PROJECTIONS RUSSELL

**U. PADSHYVALAU,
AKRESH MOHAMMED SABRI ALI**

This paper presenting an expression for the direct coefficients in mathematics series for projections Russell to edges 12 degrees. This allows for the projection of calculate of significant size areas with sufficient accuracy to solve scientific and practical work of surveying. The estimation accuracy of the coefficients for computing the zone with the differences in the longitudes of 21° and latitude 20° with the large territory for example Algeria with the stander latitude of the projection of 28° N. It is shown Algeria can be represented in one coordinate zone with the longitude meridian at 1.5° E. Studied some numerical characteristics of the projection for the stations located in different places, made reference calculations by direct and reverse transition (the Rectangular coordinates – geodetic coordinates). The results of the calculations.