

СТАНДАРТНЫЙ И СИНГУЛЯРНЫЙ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ

Романчак В.М., Гундина М.А.

*Белорусский национальный технический университет**Минск, Республика Беларусь*

Анализ сигнала производят путем разложение исходного сигнала на более простые составляющие. Так сигнал выражают в виде суммы синусоид. Каждая синусоида характеризуется частотой, фазой, амплитудой. Достоинством такого разложения является возможность придать физический и геометрический смысл полученным результатам. Например, нота в музыке является синусоидой с определённой частотой и амплитудой. Синусоиду можно изобразить графически.

В настоящее время популярной темой многих научных и инженерных исследований стали вейвлеты. Известно, что вейвлет – это класс особых функций, определенных с точностью до масштаба и сдвига. Одно из первых упоминание о вейвлетах появилось в литературе по цифровой обработке и анализу сейсмических сигналов в работах А. Гроссмана и Ж. Морле. Такие вейвлеты напоминают по форме затухающую синусоиду и в данной работе называются стандартными. Вейвлет-преобразование разбивает множество данных на составляющие с разными масштабами и сдвигами. При этом теряется возможность простой интерпретации полученных результатов.

Сингулярные вейвлеты впервые рассматривались в работах [1–3]. Сингулярные вейвлеты по форме напоминают дельта-образную функцию. С помощью сингулярных вейвлетов может быть решена задача сглаживания экспериментальных данных. Целью работы является изучение возможности фильтрации сигнала с помощью сингулярных вейвлетов. С физической точки зрения цифровая фильтрация – это выделение в определенном частотном диапазоне с помощью цифровых методов полезного сигнала на фоне мешающих помех. В работе сформулировано предположение, что при анализе стационарного сигнала применение классических вейвлетов может носить вспомогательный характер. Основным инструментом в прикладных исследованиях такого характера остается преобразование Фурье. В этом случае сохраняется возможность естественной интерпретации результатов исследования. Чтобы убрать из сигнала высокочастотный шум и непериодическую составляющую предлагается применять сингулярные вейвлеты.

Преобразование Фурье. Процесс преобразования сигналов называется фильтрацией. Фильтрацию можно осуществить с помощью ряда Фурье и вейвлет-преобразования. Математической основой спектрального анализа Фурье является преобразование Фурье и ряды Фурье.

Аппарат Фурье-преобразований дает достаточно простые для расчетов формулы и прозрачную интерпретацию результатов, но не лишен и некоторых недостатков. Чтобы применять спектральный анализ Фурье желательнее сигнал представить в виде суммы периодической, случайной и трендовой компоненты.

Вейвлет-преобразование. Традиционно считается, что вейвлет-преобразование является хорошей альтернативой преобразованию Фурье. С помощью вейвлет-преобразования можно найти низкочастотные и высокочастотные характеристики сигнала. Иногда вейвлет-анализ сравнивают с "математическим микроскопом", который позволяет проанализировать сложный сигнал. Вейвлеты широко используются в самых различных областях знаний. Но некоторые специалисты считают, что публикации по вейвлетах в прикладных исследованиях имеют низкую информационную ценность, в работах отсутствует статистическое обоснование результатов и выводов. И для определенного класса задач такое мнение можно считать верным. Возможное объяснение состоит в том, что фундаментальная теория вейвлет-анализа столкнулась с трудностями, которые, насколько нам известно, не нашли отражения в теоретических работах посвященных вейвлетах. Трудности обусловлены тем, что в прикладных исследованиях интерпретация результатов вейвлет-анализа, в отличие от анализа Фурье, является сложной проблемой. Поэтому в данной работе предлагается алгоритм обработки экспериментальных данных, результаты которого сводятся к анализу Фурье. Алгоритм состоит из двух частей. Вначале осуществляется предварительная фильтрация сигнала. Далее отфильтрованный сигнал анализируется с применением спектрального анализа Фурье. Для решения первой задачи применяются сингулярные вейвлеты, которые позволяют избежать амплитудных искажений сигнала. Теперь поясним почему сложно понять и почему ошибочна интерпретация вейвлет-преобразования как аналога и альтернативы для спектрального анализа методом преобразования Фурье.

Недостатки классических вейвлетов. Преобразование Фурье является проекцией функции $f(x)$ на комплексные экспоненты $\exp(i\lambda x)$, где λ – частота колебаний. Спектр Фурье допускает простую физическую интерпретацию. Чем модуль коэффициента Фурье больше, тем амплитуда колебаний больше. Аналогично коэффициент

вейвлет-преобразование $W(a,b)$ является проекцией сигнала на базисный вейвлет. Чем коэффициент больше, тем ближе сигнал напоминает по форме вейвлет. Таким образом вейвлет-преобразование и преобразование Фурье имеют общую математическую основу. Однако нельзя рассматривать вейвлет преобразование как аналог спектрального анализа. Это означает, что нельзя объяснять вейвлет-преобразование в терминах анализа Фурье. Например, выполним вейвлет-преобразование для сигнала $S(x) = \sin(x) + \sin(5x)$, используя вейвлет Морле. Из рисунка 1 «Графическое представление сигнала» следует, что вейвлет-преобразование позволяет правильно оценить наличие периодических составляющих в анализируемом сигнале. Но неспециалисту трудно понять, почему амплитуды сигналов на рисунке 1 «Графическое представление сигнала» значительно отличаются. Поэтому ошибочно считать, что «вейвлет-спектрограммы намного более информативны, чем обычные фурье-спектрограммы». Этот пример подтверждает, что существенным недостатком вейвлет-преобразования является сложная интерпретация получаемых численных значений. Кроме того, результаты использования вейвлетов различного масштаба и частоты плохо сопоставимы между собой из-за неконтролируемого изменения частотных и амплитудных характеристик сигнала. Чтобы уточнить результаты вейвлет-анализа в некоторых случаях можно дополнительно провести спектральный анализ сигнала. Для этого предлагается выполнить предварительную фильтрацию сигнала, используя сингулярные вейвлеты.

Сингулярные вейвлеты. Для классического вейвлета считается, что для базисного вейвлета должно выполняться условие допустимости: среднее значение вейвлета должно равняться нулю: $C_\psi = 0$. Для сингулярного вейвлета удобно считать, что среднее значение равно единице: $C_\psi = 1$. Например, в качестве базисного вейвлета $\psi(t)$ можно использовать дельта-образную функцию нормального распределения, с очень малыми и большими значениями масштаба. Для выделения периодической составляющей сигнала наряду с вейвлет-анализом предлагается проводить спектральный анализ. Для этого выполняется предварительная фильтрация с использованием сингулярных вейвлетов. Сингулярные вейвлеты по форме напоминают дельта-образную функцию. С их помощью решается задача выделения периодической компоненты из экспериментальных данных. С этой целью строится последовательность вейвлет-преобразований на конечном интервала.

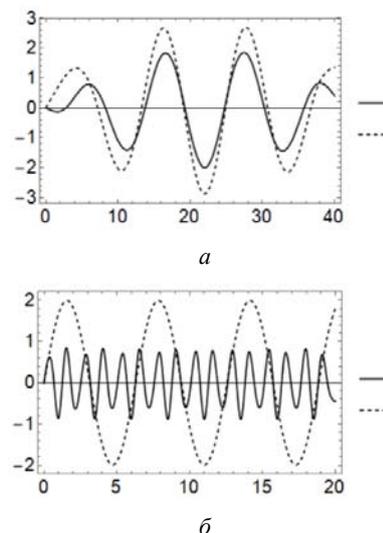


Рисунок 1 – Графическое представление сигнала:
 а – исходный и обработанный сигнал;
 б – $W(1, b)$, $W(5, b)$

Пример. В качестве примера проведен анализ солнечной активности, показателем которой служит среднегодовое число пятен на солнце.

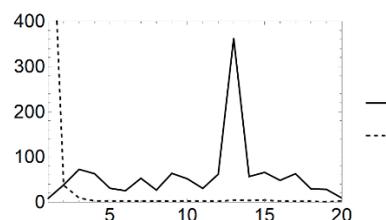


Рисунок 2 – Коэффициенты Фурье для обработанного сигнала и остаточного сигнала

На рисунке 2 «Коэффициенты Фурье для обработанного сигнала и остаточного сигнала», видны амплитуды гармоник, которые соответствуют периоду колебаний солнечной активности в 11 лет.

Выводы. В некоторых случаях для анализа сигнала можно применить предварительную фильтрацию сигнала, используя сингулярные вейвлеты. После предварительной фильтрации можно выполнить спектральный анализ сигнала. Такой подход удобно применять в сочетании с классическим вейвлет-анализом.

Литература

1. Романчук В.М. Аппроксимация сингулярными вейвлетами / В.М. Романчук // Системный анализ и прикладная информатика, 2018. – № 2. – С. 23–28.
2. Романчук В.М. Локальные преобразования с сингулярным вейвлетом / В.М. Романчук // Информатика, 2020. – Т. 17. – № 1. – С. 39–46.