

Медианный фильтр был реализован как фильтр третьего порядка. Подлежащие фильтрации данные помещались в трехэлементный буфер $float a = buf[0]; float b = buf[1]; float c = buf[2]$. Предложенная программная реализация медианного фильтра не требует вычислений, а только операций сравнения, благодаря чему его наличие не вносит дополнительных задержек при совместном использовании с фильтрами скользящего и экспоненциального среднего.

Пример результата, получаемого при совместном использовании описанных цифровых фильтров для сигнала, подверженного воздей-

ствию шумов и импульсных помех, показан на рисунке 4. Такое использование обеспечивает равно эффективное подавление как выбросов, так и шумовой составляющей сигнала.

Литература

1. Пантелеев, К.В. Цифровой измеритель контактной разности потенциалов / К.В. Пантелеев, А.И. Свистун, А.К. Тявловский, А.Л. Жарин // Приборы и методы измерений. 2016. – Т. 7, № 2. – С. 136–144.
2. Parker, M. Digital Signal Processing. 2nd Edition / M. Parker. – Elsevier Inc., 2017. – 432 p.

УДК 621.317.08

ТЕОРИЯ ДВУМЕРНОЙ ОБРАБОТКИ ФИНИТНЫХ СИГНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕННО-ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ В БАЗИСАХ ФУРЬЕ С ВАРЬИРУЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ Пономарев А.В.

*Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашиникова
Ижевск, Российская Федерация*

Теория, методы и алгоритмы компьютерной Фурье-обработки двумерных (2-D) сигналов являются основой решения многих проблем в приборостроении: в области систем управления, обработки информации, разработки новых и совершенствовании существующих методов анализа и обработки информации, управления сложными системами, повышения их эффективности. В цифровой Фурье – обработке двумерное дискретное преобразование Фурье (2-D ДПФ) определяется следующим соотношением:

$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_1}^{k_1 n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 n_2} \quad (1)$$

В теории цифровой Фурье – обработки одномерных (1-D) дискретных сигналов широкое применение находит дискретно-временное преобразование Фурье (ДВПФ). В одномерном случае ДВПФ – это z-преобразование, вычисленное в z-плоскости на единичной окружности.

Двумерное дискретно-пространственное преобразование Фурье (2-D ДППФ) – это двумерное z-преобразование, вычисленное в z-пространстве на единичной сфере:

$$X_{\text{ДППФ}}(f_1, f_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m, n) \cdot z_1^{-m} z_2^{-n} \Big|_{\substack{z_1 = \exp(+j2\pi f_1) \\ z_2 = \exp(+j2\pi f_2)}}; \quad (2)$$

где f_1 и f_2 – непрерывные пространственные частоты.

Отметим, что как в одномерном случае ДВПФ, так и в двумерном случае ДППФ, представляют собой непрерывные преобразования дискретных 1-D и 2-D последовательностей соответственно и являются чисто теоретическими

понятиями 1-D теории и 2-D теории цифровой Фурье – обработки.

ДППФ двумерного сигнала $x(m, n)$ с фундаментальным периодом размерностью $N_1 \times N_2$ может быть аппроксимировано путем вычисления 2-D ДПФ сигнала $x_1(m, n)$ с фундаментальным периодом размерностью $L_1 \times L_2$:

$$x_1(m, n) = \begin{cases} x(m, n); & m = \overline{0, N_1 - 1}; n = \overline{0, N_2 - 1} \\ 0; & m = \overline{L_1 - N_1, L_1 - 1}; n = \overline{L_2 - N_2, L_2 - 1} \end{cases} \quad (3)$$

Сравнивая соотношения (1) и (2) несложно видеть, что 2-D ДПФ двумерного сигнала $x(n_1, n_2)$ равно 2-D ДППФ вычисленному на единичной сфере в точках $\exp(-j2\pi k_1 / N_1)$ и $\exp(-j2\pi k_2 / N_2)$. Анализ теоретических основ дискретной двумерной обработки сигналов на базе преобразований Фурье и соотношений (1 – 3) позволяет сделать следующие важные выводы.

Во-первых, 2-D ДПФ следует понимать как двумерный дискретный ряд Фурье, из свойств которого во многом вытекают свойства двумерного ДПФ.

Во-вторых, свойства 2-D ДПФ (как и свойства одномерного ДПФ (1-D ДПФ)) являются математически точными, и не могут трактоваться как аппроксимация свойств непрерывного преобразования Фурье (НПФ). В то же время одномерное и двумерное ДПФ конечной последовательности могут рассматриваться как аппроксимации соответствующих НПФ.

В-третьих, теория двумерной обработки дискретных сигналов на основе двумерного дискретного преобразования Фурье является теори-

ей двумерной Фурье – обработки финитных двумерных дискретных сигналов.

Проведенный анализ теоретических основ данной теории позволил выявить (сформулировать) следующие взаимосвязанные ее аксиоматические положения (постулаты):

1. Определение двумерных дискретных сигналов на конечной опорной области – фундаментальном периоде, задаваемом вертикальным и горизонтальным периодами.

2. Определение сдвига двумерного дискретного сигнала в виде циклического сдвига путем циклической перестановки его отсчетов на конечной опорной области. Принцип двумерной циклической перестановки отсчетов сигнала на конечной опорной области заключается в следующем: справа или сверху отсчет вышел – соответственно слева или снизу отсчет зашел. Циклическая перестановка может быть также интерпретирована на единичной сфере.

3. Определение полной базисной системы преобразования в виде системы двумерных дискретных экспоненциальных функций.

Отметим, что конечность, периодичность и дискретность последовательностей во временной и частотной областях, а также в пространственной и пространственно-частотной областях приводит к появлению новых свойств 1-D ДПФ и 2-D ДПФ, которые отсутствуют в соответствующих непрерывных преобразованиях Фурье. При этом видоизменяются и некоторые понятия 1-D и 2-D Фурье – обработки непрерывных сигналов (изменяются, например, такие понятия как сдвиг, свертка и корреляция).

В силу того, что каждое целое число k можно представить в виде суммы $k = \text{entire}(k/m) + ((k))_{\text{mod } m}$, где *entire* (англ. *floor*) – символ взятия целой части числа k , m – положительное число, называемое модулем, $((k))_{\text{mod } m}$ – остаток, то циклический сдвиг дискретного сигнала $x(n_1, n_2)$ с прямоугольной опорной областью $SA_{N_1 \times N_2}$ при изменении переменных $n_1 \geq N_1$ и $n_2 \geq N_2$ определяется как:

$$x(n_1, n_2) = x(((n_1))_{\text{mod } N_1}, ((n_2))_{\text{mod } N_2});$$

$$(n_1, n_2) \in SA_{N_1 \times N_2}. \quad (4)$$

Циклическая свертка двух 2-D сигналов $x(n_1, n_2)$ и $y(n_1, n_2)$ в пространственной области, имеющих преобразования Фурье в пространственно-частотной области соответственно $S_{N_1, N_2}(k_1, k_2)$ и $Y_{N_1, N_2}(k_1, k_2)$, определяется следующим выражением

$$x(n_1, n_2) * y(n_1, n_2) \xrightarrow{F}$$

$$\xrightarrow{F} S_{N_1, N_2}(k_1, k_2) \cdot Y_{N_1, N_2}(k_1, k_2). \quad (5)$$

В то же время при Фурье – обработке 2-D сигналов, разработке и моделировании изопланатических систем, нам важна линейная 2-D свертка, при которой одна из двух конечных 2-D последовательностей линейно сдвигается без наложения относительно другой 2-D конечной последовательности.

Метод, позволяющий с помощью 2-D циклической свертки получить линейную 2-D свертку нам известен из одномерной Фурье обработки дискретных сигналов. Этот метод получил название метода дополнения исходного 1-D сигнала нулевыми отсчетами.

Аналогично, в случае 2-D Фурье-анализа наложение 2-D сигналов в пространственной области устраняется путем соответствующего дополнения сворачиваемых дискретных 2-D сигналов соответствующим числом нулевых отсчетов в их опорных областях.

Иллюстрирующий пример.

Пусть задан конечный единичный 2-D сигнал при $N_1 = N_2 = 4$:

$$x(n_1, n_2) = \begin{cases} 1; & \forall n_1 = \overline{0, N_1 - 1}; \forall n_2 = \overline{0, N_2 - 1}; \\ & 1; \forall n_1 \geq N_1; \forall n_2 \geq N_2 \end{cases}; \quad (6)$$

В графической форме циклическая 2-D корреляционная функция 2-D сигнала (6) приведена на рисунке 1.

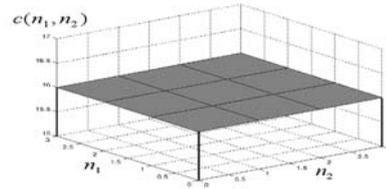


Рисунок 1 – Циклическая 2-D корреляционная функция 2-D сигнала (6)

Дополнив сигнал (6) нулевыми отсчетами:

$$x_0(n_1, n_2) = \begin{cases} 1; & \forall n_1 = \overline{0, N_1 - 1}; \forall n_2 = \overline{0, N_2 - 1} \\ 0; & \forall n_1 = \overline{N_1, 2N_1 - 1}; \forall n_2 = \overline{N_2, 2N_2 - 1} \end{cases} \quad (7)$$

получим в графической форме циклическую 2-D корреляционную функцию 2-D сигнала (7) (рисунок 2).

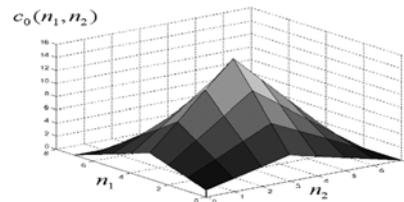


Рисунок 2 – Циклическая 2-D корреляционная функция 2-D сигнала (7)

Сравнение линейной и циклической корреляционных функций, как в матричной, так и в графической форме позволяет оценить необходимость устранения эффекта наложения 2-D корреляционных функций.

Отметим, что дополнение опорной области нулевыми отсчетами более чем в два раза позволяет более детально анализировать 2-D энергетический спектр дискретного сигнала, опираясь на двумерный вариант теоремы Винера-Хинчина. Возможно три варианта дополнения опорной области 2-D сигнала $SA_{N_1 \times N_2}$ нулевыми отсчетами: в горизонтальном, вертикальном и в обоих направлениях.

УДК 621.317.08

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОГИБАЮЩЕЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ФИНИТНОГО ДИСКРЕТНОГО СИГНАЛА

Пономарева О.В.¹, Пономарев А.В.¹, Смирнова Н.В.²

¹Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашиникова

Ижевск, Российская Федерация

²Севастопольский государственный университет

Севастополь, Российская Федерация

Цель работы – исследование теоретических и практических вопросов определения огибающих действительных, дискретных финитных сигналов; анализ их преимуществ и недостатков.

Определение огибающей непрерывного сигнала методом преобразования Гильберта на бесконечном интервале. Действительный сигнал $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, может быть представлен равноправными моделями во временной области:

$$x(t) = A(t) \cdot \cos[\phi(t)], \quad (1)$$

и в частотной области:

$$x(t) = \sum_k A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) \quad (2)$$

где $A(t)$ – мгновенная амплитуда (огибающая) сигнала; $\phi(t)$ – мгновенная фаза сигнала $x(t)$; A_k – амплитуда k гармонической компоненты; f_k – частота k гармонической компоненты; φ_k – начальная фаза k гармонической компоненты.

Если поставить в соответствие сигналу $x(t)$ (1) некоторый комплексный сигнал $y(t)$:

$$y(t) = x(t) + j \cdot v(t), \quad (3)$$

и представить сигнал $y(t)$ в виде:

$$y(t) = \left(\sqrt{x^2(t) + v^2(t)} \right) \cdot \exp \left\{ j \cdot \arctg \frac{v(t)}{x(t)} \right\} =$$

При этом каждый из трех вариантов порождает множество базисов, названных автором базисами Фурье с варьируемыми параметрами первого, второго и третьего рода.

В докладе подробно исследуются свойства этих новых базисов Фурье.

Литература

1. Alexey V. Ponomarev. Systems Analysis of Discrete Two-Dimensional Signal Processing in Fourier Basis // Advances in Signal Processing. Theories, Algorithms, and System Control. Editor: Margarita Favorskaya, Lakmi C. Jain. // Springer. – 2020. – P. 87–97.

$$= A(t) \cdot \exp\{j \cdot \phi(t)\}, \quad (4)$$

то мгновенные параметры (мгновенная фаза, огибающая и мгновенная частота) сигнала будут определены однозначно. Существующие различия в определениях мгновенных параметров сигнала $x(t)$, объясняется выбором оператора \mathfrak{R} . Отметим, что выбор оператора \mathfrak{R} должен обеспечивать «хорошие» (удобные и понятные с физической точки зрения) свойства мгновенных параметров сигнала $x(t)$. Кратко перечислим эти условия. Огибающая гармонического сигнала должна совпадать с привычным понятием его амплитуды, а мгновенная частота с обычным понятием его частоты. Малые среднеквадратичные отклонения исходного сигнала $x(t)$ должны приводить к малым среднеквадратичным отклонениям огибающей и мгновенной частоты. Мгновенная фаза и частота не должны зависеть от мощности сигнала.

Известно, что если выбирать оператор \mathfrak{R} с учетом выполнения этих вполне понятных требований, то единственным линейным (аддитивным) оператором, удовлетворяющим указанным выше условиям, является оператор Гильберта \mathfrak{I} :

$$v(t) = \mathfrak{I}[x(t)] = \text{VP} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau, \quad (5)$$

где VP – символ главного значения по Коши.

В том случае, когда сигнал $x(t)$ интегрируется в квадрате, то: