



There are given the examples of the tasks solutions about thermal stresses in ingots and slugs of simple form taking into account the effect of heightening and relaxation of stresses at elevated temperatures.

Ю. А. САМОЙЛОВИЧ, НПП «Платан» (г. Екатеринбург),
В. И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, БНТУ,
О. В. ДУБИНА, ДМК им. Дзержинского

УДК 621.746.5

УПРОЩЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАТВЕРДЕВАЮЩИХ ОТЛИВКАХ (ОБЗОР)

Проблема возникновения термических напряжений в затвердевающих средах хорошо известна в металлургии, геофизике и строительной механике. К ней относится ряд аналогичных задач, характерных для процесса роста кристаллов, промерзания грунта, кристаллизации сварных швов, затвердевания слитков и заготовок. Теоретическому обсуждению указанных задач посвящено достаточное число работ [1–17].

Развитие универсальных вычислительных методов в сочетании с компьютерной техникой позволяет решать подобные задачи с учетом многих сложных обстоятельств, в частности, с учетом сложной геометрии объектов, нелинейности дифференциальных уравнений и граничных условий. Наряду с применением компьютерных технологий представляет интерес получение решений нетривиальных задач о термических напряжениях в затвердевающих отливках в явной, аналитической форме для установления тенденций влияния различных факторов и проведения ускоренных расчетов при решении производственных задач, когда не требуется высокая точность, достигаемая при использовании компьютеров.

Ниже приведены примеры решения задач о термических напряжениях в слитках и заготовках простой формы, при неизменных заданных значениях теплофизических параметров отливок, но с учетом таких специфических эффектов процесса кристаллизации отливок, как “эффект наращивания” и учет релаксации напряжений при повышенных температурах.

Эффект наращивания

Математическое оформление эффекта наращивания при определении термических напряжений в затвердевающем слитке с достаточной строгостью представлено в работе В.А. Пальмова [2], где рассматривается непрерывная последовательность объемов твердой фазы $V(t)$, ограниченных поверхностями $S(t)$.

В.А. Пальмов считает, что переход изучаемой системы (затвердевающего расплава) от напряженного состояния в момент t к напряженному состоянию в момент $t + dt$ осуществляется в два этапа.

На первом этапе в объеме $V(t)$ твердой фазы температура изменяется от $T(x, y, z, t + dt)$, т.е. на величину dT . При этом напряжения изменяются на $d\tau$.

На втором этапе напряжения в твердой фазе не изменяются, но происходит “приклеивание” малого ненапряженного объема dV , нагретого до температуры $T(x, y, z, t + dt)$, к объему $V(t)$. В дальнейшем совокупный объем $V + dV$ деформируется. Таким образом, изменение напряжений при переходе от состояния $A_1(t)$ к состоянию $A_2(t)$ происходит только на первом этапе изложенного двухстадийного процесса.

Для случая линейной термоупругости (при неизменных упругих характеристиках материала) автор [2] формулирует задачу в приращениях следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla d\bar{\tau} = 0, \quad 3d\sigma = d\bar{\tau} E, \quad \bar{n} d\bar{\tau} = 0, \\ d\bar{\epsilon} = \frac{1}{2G} (d\bar{\tau} - \frac{\nu}{1+\nu} 3d\sigma \bar{E}) + \alpha \frac{\partial T}{\partial t} E, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\bar{\tau}$ и $\bar{\epsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций; \bar{E} – единичный тензор; \bar{n} – вектор нормали к поверхности твердой фазы $S(t)$. Разделив на dt приведенные выше уравнения, получим

$$\nabla \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} = 0, \quad \bar{n} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\nabla \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \left(\nabla \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) \right],$$

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} = \frac{1}{2G} \left(\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} - \frac{3\nu}{1+\nu} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \bar{E} \right) + \alpha \frac{\partial T}{\partial t} E, \quad (2)$$

где \bar{u} — вектор перемещения.

Если из уравнений [2] найдены скорости изменения перемещений и напряжений, то

$$\bar{u} = \int_{t_*}^t \frac{\partial \bar{u}}{\partial t'} dt', \quad \bar{\tau} = \int_{t_*}^t \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t'} dt'. \quad (3)$$

В частном случае одномерной задачи термоупругости можно ограничиться рассмотрением главных компонент деформаций и напряжений:

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \alpha \eta(x, t), \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \varphi(x, t), \quad (4)$$

где координата x направлена по нормали к поверхности оболочки;

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0.$$

Математическая формулировка задачи включает в себя уравнение равновесия

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_{xx}}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

условие совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial x^2} = 0 \quad (6)$$

и уравнение, описывающее поведение материала:

$$\dot{\varphi} = \frac{\alpha E}{1-\nu} (\dot{\eta} - \delta \dot{T}), \quad (7)$$

а также соответствующие краевые условия.

Интеграл условия совместности деформации имеет вид

$$\dot{\eta}(x, t) = xg(t) + f(t), \quad (8)$$

поэтому основное уравнение (7), описывающее поведение материала, можно записать как

$$\dot{\varphi} = \frac{\alpha E}{1-\nu} [xg(t) + f(t) - \delta \dot{T}]. \quad (9)$$

Функции $g(t)$ и $f(t)$ определим, исходя из предположения, что на торцах плоской оболочки результирующая сила и момент равны нулю:

$$g(t) = \frac{1}{\omega} \left(\frac{12}{\omega^2} \int_0^{\omega} x \delta \dot{T} dx - \frac{6}{\omega} \int_0^{\omega} \delta \dot{T} dx \right),$$

$$f(t) = \frac{4}{\omega} \int_0^{\omega} \delta \dot{T} dx - \frac{6}{\omega^2} \int_0^{\omega} x \delta \dot{T} dx.$$

Тогда выражение (9) принимает вид

$$\dot{\varphi} = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \delta \dot{T} dx - \delta \dot{T} + \frac{12x}{\omega^3} \int_0^{\omega} x^* \delta \dot{T} dx \right). \quad (10)$$

Интегрируя уравнение (10), находим главную компоненту тензора напряжений в твердой оболочке слитка:

$$\varphi(x, t) = \int_{t_*}^t \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \delta \dot{T} dx - \delta \dot{T} + \frac{12x^*}{\omega^3} \int_0^{\omega} x^* \delta \dot{T} dx \right) dt', \quad (11)$$

где t_* — момент достижения фронтом кристаллизации точки x , причем $\varphi(x, t_*) = 0$.

Предположим, что распределение температуры по сечению оболочки подчиняется линейному закону

$$T(x, t) = T_{кр} - (T_{кр} - T_{пов}) \left(1 - \frac{x}{\omega} \right), \quad (12)$$

температура на поверхности слитка не изменяется во времени, $g = 0$.

Тогда решение (11) примет вид

$$\varphi(x, \omega) = \frac{\alpha E}{1-\nu} \int_x^{\omega} \left(\frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \frac{\partial T}{\partial \omega} dx - \frac{\partial T}{\partial \omega} \right) d\omega, \quad (13)$$

где $\frac{\alpha E}{1-\nu} = \text{const}$.

Выразим производную $\frac{\partial T}{\partial \omega}$ из формулы (12)

и подставим в соотношение (13), тогда решение задачи будет

$$\varphi(x, \omega) = \frac{\alpha E (T_{кр} - T_{пов})}{2(1-\nu)} \left[2 \left(1 - \frac{x}{\omega} \right) - \ln \frac{\omega}{x} \right]. \quad (14)$$

На рис. 1 показано распределение безразмер-

ного комплекса $\Phi(x, \omega) = \frac{(1-\nu)\varphi(x, \omega)}{\alpha E (T_{кр} - T_{пов})}$ по сечению твердой корки плоского слитка в сравнении с функцией $\Phi_0(x)$, характеризующей решение соответствующей задачи термоупругости без учета эффекта наращивания (Φ_0).

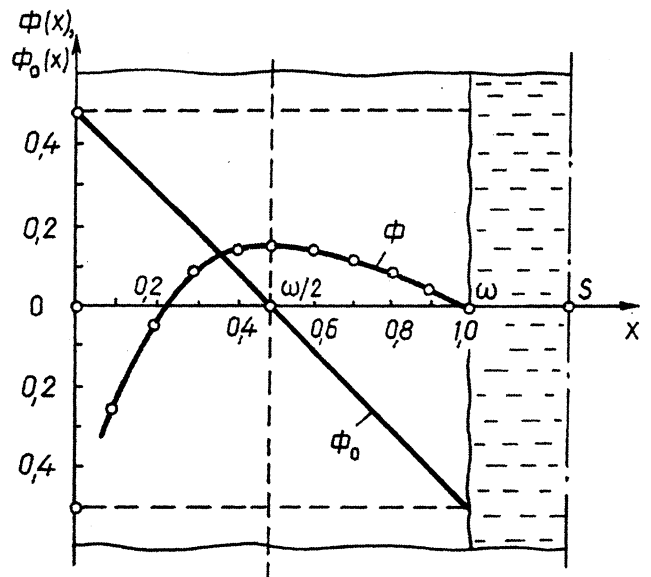


Рис. 1. Сопоставление безразмерных термических напряжений Φ и Φ_0 в сечении плоского слитка

Очевидно, что учет эффекта наращивания качественно изменяет характер распределения напряжений в сечении твердой корки слитка: для функции $\Phi(x)$ характерно наличие экстремума при $x = 0,5\omega$, равного $\Phi_{\max} = 0,1534$. Без учета эффекта наращивания максимум растягивающих напряжений достигается на охлаждаемой поверхности слитка, где $(\Phi_0)_{\max} = 0,5$.

Следует отметить, что публикации основной статьи В.А.Пальмова [2] предшествовал выход статей М.Я.Бровмана, Е.В.Сурина [1, 18], посвященных определению термических напряжений в затвердевающих слитках (заготовках) простой формы.

Меньшая (по сравнению с работой В.А.Пальмова) строгость выкладок в статьях М.Я.Бровмана и Е.В.Сурина [1, 18] не помешала тому, что эффект наращивания привлек внимание исследователей в области непрерывного литья стали. Для простейшей задачи о напряжениях в затвердевающем плоском слитке при линейном распределении температуры по сечению твердой корки решение Бровмана – Сурина (1) имеет вид

$$\sigma = 0,5E\alpha(T_{кр} - T_{пов}) \left[2 \left(1 - \frac{x}{\omega} \right) - \ln \frac{\omega}{x} \right]. \quad (15)$$

В работе [1] приводится выражение для термических напряжений в плоской заготовке для случая, когда температура охлаждаемой поверхности заготовки изменяется во времени по закону экспоненты:

$$\sigma = 0,5E\alpha(T_{кр} - T_{пов}) \times \left\{ 1 - \ln \frac{d}{x} + \exp[-m(t - t_1)] \left(1 - 2 \frac{x}{d} \right) \right\}, \quad (16)$$

где m – показатель экспоненты; d – толщина слитка.

Решения (15) и (16) в виде графиков приведены на рис. 2 и 3. Из рисунков видно, что в ходе процесса кристаллизации поверхностный слой отливки подвержен сжимающим термическим напряжениям, а наиболее опасные с точки зрения возможности разрушения материала растягивающие напряжения расположены в промежуточной плоскости отливки, близкой к границе раздела фаз.

Решение Бровмана – Сурина получило практическое применение в работах [19, 20] при определении оптимальных режимов вторичного охлаждения при непрерывном литье плоских стальных заготовок (слябов). Авторы статьи [20] предприняли попытку обобщения формулы (15) на случай, когда поверхность заготовки охлаждается по закону конвекции Ньютона и предложили следующую формулу для расчета напряжений:

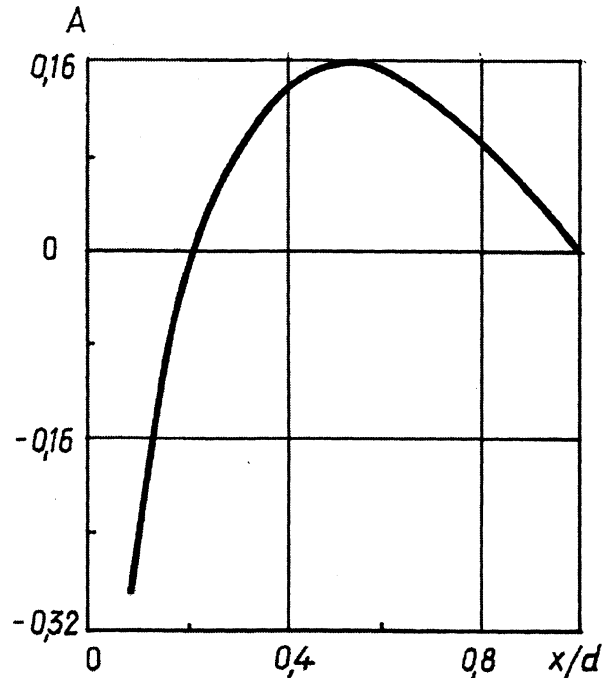


Рис. 2. Распределение напряжений в плоском слитке при кристаллизации

$$A = \frac{\sigma}{E\alpha(T_{кр} - T_{пов})} \quad [1, \text{с.108}]$$

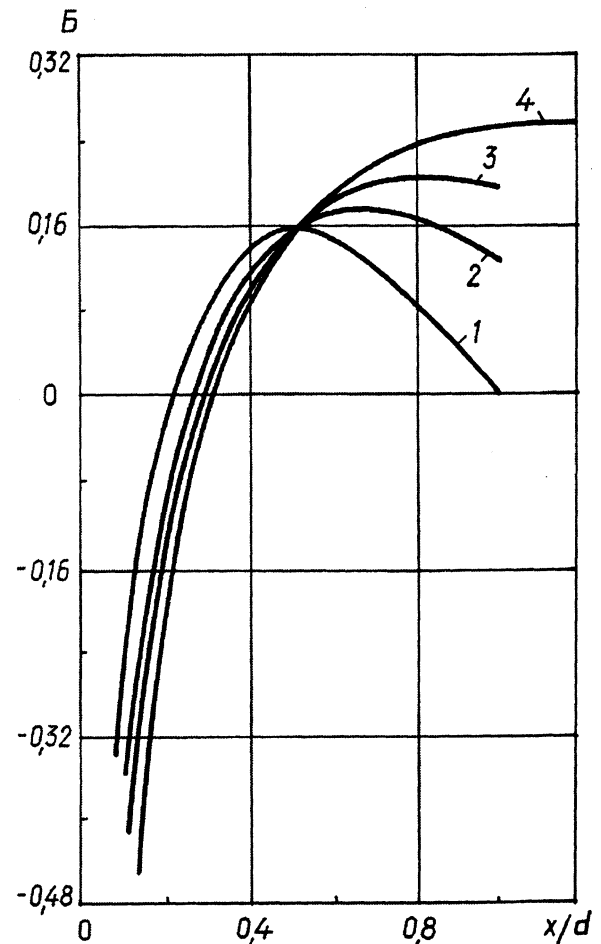


Рис. 3. Распределение напряжений в плоском слитке по окончании процесса кристаллизации: 1, 2, 3, 4 – при задании показателя экспоненты, равном 0, 0,3, 0,5, 0,7 соответственно [1, с. 111]

$$\sigma = 0,5E\alpha Bi \frac{T_{кр} - T_c}{1 + Bi} \left[1 - \ln \frac{R}{x} + e^{-Fo} \left(1 - 2 \frac{x}{R} \right) \right]. \quad (17)$$

На рис. 4 показано изменение термических напряжений в плоской заготовке при содержании углерода, равном 0,10 и 0,20%, для двух принятых в расчетах значений критерия Био (0,5 и 3,0). Кроме того, представлена область значений прочности стали, границы которой соответствуют различному содержанию серы в расплаве (0,025 и 0,05%).

В [19] решение Бровмана – Сурина используется при анализе вероятности возникновения горячих продольных трещин в непрерывнолитых стальных слябах, причем в отличие от работы [20] авторы [19] принимают во внимание зависимость модуля упругости стали от содержания углерода, а также учитывают (в весьма упрощенной форме) возможность протекания пластической деформации в твердой оболочке сляба.

Приведенные примеры дают основание сделать заключение о том, что полученные в работах [1, 2, 18] решения, несмотря на целый ряд упрощающих постановку задачи предположений, получили признание инженерной общественности и были использованы при изучении актуальной проблемы возникновения горячих трещин при непрерывном литье (например, [13, 15] и др.).

В работе [3] учет эффекта наращивания осуществляется путем использования при постановке задачи динамических переменных – скорости изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ и скорости изменения деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$. Для затвердевающего плоского слоя толщиной ϵ авторы [3] используют следующую систему уравнений теплопроводности и термоупругости:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{при } 0 \leq x \leq \epsilon, \quad (18)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q = \text{const} \quad \text{при } x = 0, \quad (19)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \rho L \frac{d\epsilon}{dt} \quad \text{при } x = \epsilon, \quad (20)$$

$$T = T_{кр} \quad \text{при } \epsilon \leq x \leq \infty, \quad (21)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x}, \quad (22)$$

$$\sigma(x,t) = \frac{E}{1-\nu} \int_0^t [\dot{\epsilon} - \alpha \dot{T}(x,t)] dt \quad \text{при } 0 \leq x \leq \epsilon, \quad (23)$$

$$\int \dot{\sigma}(x,t) dx = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq \epsilon, \quad (24)$$

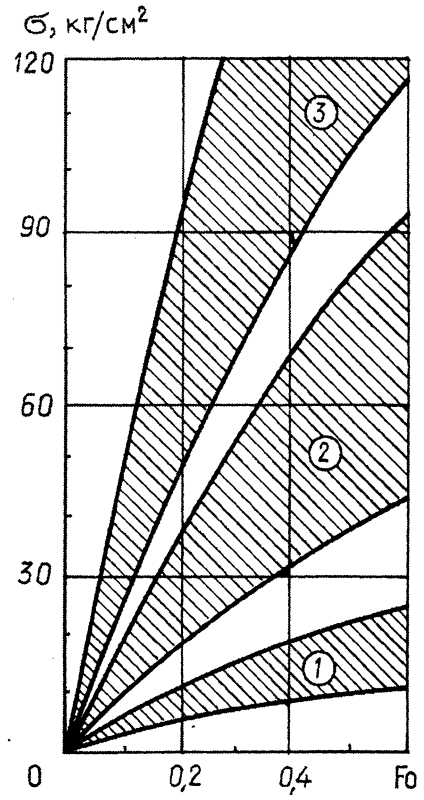


Рис. 4. Изменение напряжений в центре сляба в зависимости от критерия Фурье при различном содержании углерода в стали и разном значении критерия Био: 1 – область напряжений в стали с содержанием 0,10% С; 2 – то же при задании 0,20% С (верхние границы областей 1 и 2 соответствуют критерию $Bi = 3,0$, нижние границы – критерию $Bi = 0,5$); 3 – область значений прочности стали при задании содержания серы в расплаве, равном 0,025% (верхняя граница) и 0,05% (нижняя граница области 3), по данным [20, с. 527]

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma(x,t), \quad \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon(x,t), \quad (25)$$

где τ – момент присоединения точки жидкости к фазовой границе; L – удельная теплота фазового перехода.

Задача термоупругости решается в квазистатической постановке с использованием температурного поля, полученного при независимом решении задачи теплопроводности. В частности, при задании на охлаждаемой поверхности неизменной плотности теплового потока q авторы используют приближенное решение задачи теплопроводности, при котором закон движения границы раздела фаз определяется законом квадратного корня:

$$\epsilon(t) = \frac{4}{m} \left(\sqrt{1 + \frac{m^2 at}{2}} - 1 \right), \quad (26)$$

где $m = \frac{q}{\rho a L}$, а распределение температуры по сечению твердой корки имеет вид

$$T(x,\epsilon) = T_{кр} - \frac{L}{c} m \epsilon \left(1 - \frac{x}{\epsilon} - \frac{m \epsilon}{4 + m \epsilon} \frac{x^2}{\epsilon^2} + \frac{m \epsilon}{4 + m \epsilon} \frac{x^3}{\epsilon^2} \right). \quad (27)$$

При этом для главной компоненты тензора напряжений в работе [3] получено следующее аналитическое выражение:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma c(1-\nu)}{E\alpha L} = \frac{m\epsilon}{6} \left(1 - \frac{x}{\epsilon}\right) - \frac{1}{3} \ln \frac{4+m\epsilon}{4+mx} + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4+m\epsilon} - \frac{1}{4+mx} \right) - \frac{m^2\epsilon^2}{4+m\epsilon} \left(\frac{x^2}{\epsilon^2} - \frac{x^3}{\epsilon^3} \right),$$

причем соблюдается условие $m\epsilon \ll 4$.

На рис. 5 приведено распределение переменной $\bar{\sigma}$ вдоль относительной координаты x/ϵ для нескольких значений параметра $m\epsilon$. Из рисунка видно, что с увеличением $m\epsilon$ растут и растягивающие напряжения на охлаждаемой поверхности отливки. В отличие от граничного условия I рода ($T_{\text{пов}} = \text{const}$) в данном случае наиболее опасные растягивающие напряжения развиваются не вблизи от границы раздела фаз (см. рис. 1 – 3), а на охлаждаемой поверхности отливки. Этот пример иллюстрирует следующий результат анализа, подтверждаемый также в ходе численного решения задачи: характер распределения температур по сечению затвердевающего слоя главным образом зависит от распределения температур в слое, которое, в свою очередь, зависит от используемого в ходе решения задачи теплопроводности способа задания граничных условий.

Эффект релаксации напряжений

При оценке термических напряжений в твердой корке слитка по формулам, полученным на основе допущения о чисто упругом поведении материала, следует ожидать завышенных значений напряжений. Действительно, при повышенных температурах вследствие высокой подвижности атомов в кристаллической решетке металла наблюдается самопроизвольное снижение напряжений даже при искусственном поддержании неизменной деформации, т.е. релаксация напряжений.

В качестве примера на рис. 6 приведено снижение напряжений в образцах стали марки Ст3 (при содержании углерода $C = 0,2\%$) при повышенных температурах согласно данным специалистов предприятия “Уралмашзавод” [21, с. 198].

В простейшей схеме одноосного нагружения темп снижения приложенной к образцу нагрузки определяется величиной “времени релаксации” τ_p :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right)$$

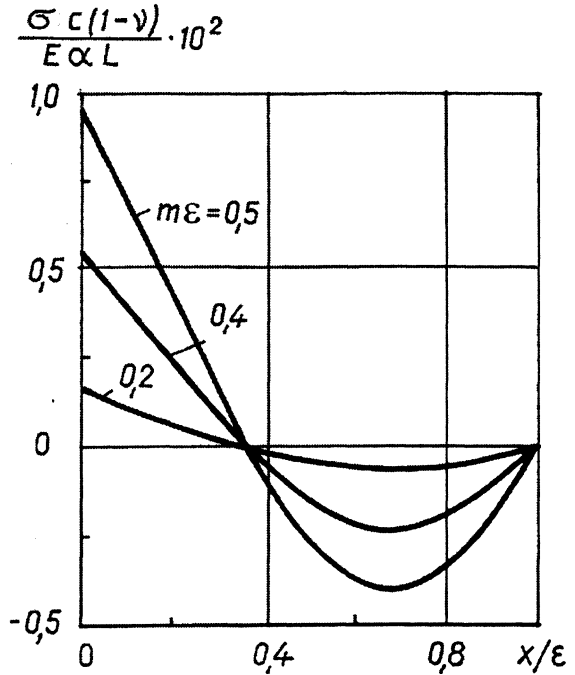


Рис. 5. Распределение безразмерных напряжений $\bar{\sigma} = \frac{\sigma c(1-\nu)}{E\alpha L} \cdot 10^2$ по сечению затвердевающего плоского слоя x/S [3, рис. 3]

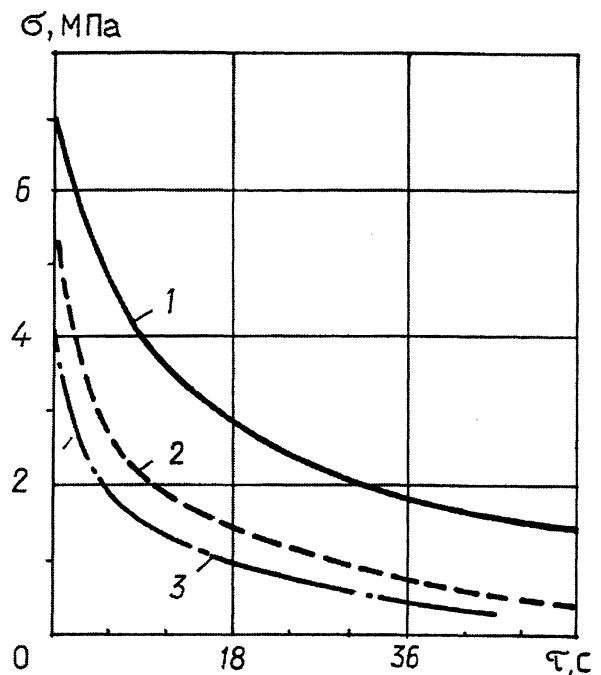


Рис. 6. Кривые релаксации напряжений для стали марки Ст3 при повышенных температурах [24, с. 198]: 1 – 1200°C; 2 – 1300; 3 – 1360°C

По опытным данным И.Д.Дергунова [22], время релаксации углеродистой стали при комнатной температуре составляет 170–175 с, а при повышении температуры до 800 – 1000 °С снижается до 4 – 5 с.

Учет эффекта релаксации напряжений приводит к необходимости решения системы уравнений термовязкоупругости при анализе термических напряжений в твердой корке, рост которой во времени протекает при повышенных температурах, близких к температуре кристаллизации изучаемого сплава [23, 24]. В данном случае поведение материала может быть описано уравнением Максвелла [26]:

$$2G\dot{e}_{ij} = \frac{1}{\tau_p} S_{ij} + \dot{S}_{ij}, \quad (28)$$

где $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon$; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$;

$$\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}; \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}; \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (29)$$

Помимо уравнений (28), формулировка задачи включает уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (30)$$

и соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (31)$$

Допустим, что первые инварианты тензоров напряжений и деформаций связаны между собой линейным соотношением

$$\sigma = \frac{E}{1-2\nu} (\varepsilon - \alpha \delta T), \quad (32)$$

где $E = 2G(1+\nu)$; $\delta T = T - T_{\text{нов}}$.

Кроме того, примем поверхность отливки свободной от внешних нагрузок, когда выполняется условие:

$$\dot{\sigma}_{ij} = 0. \quad (33)$$

Повторяя выкладки, относящиеся к случаю одномерной (плоской) задачи, получаем для изучаемого объекта – плоской отливки – уравнение поведения материала

$$\dot{\phi} + \frac{1+\nu}{3\tau_p(1-\nu)} \phi = \frac{\alpha E}{1-\nu} [xg(t) + f(t) - \delta \dot{T}], \quad (34)$$

где функции $g(t)$ и $f(t)$ определяются из условий задания результирующих значений силы и момента на торцах плиты.

При задании условия $g(t) = 0$ уравнение поведения материала принимает вид

$$\dot{\phi} + \frac{1+\nu}{3\tau_p(1-\nu)} \phi = \frac{\alpha E}{1-\nu} [f(t) - \delta \dot{T}]. \quad (35)$$

Запишем интеграл уравнения (35) в виде

$$\begin{aligned} \phi(x, t) = & \int_{t'}^t \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{1}{\omega} \int_0^\omega \delta \dot{T} dx - \delta \dot{T} \right) \times \\ & \times \exp \left[-\frac{1+\nu}{3\tau_p(1-\nu)} (t-t') \right] dt' \end{aligned} \quad (36)$$

при задании начального условия $\phi(0) = 0$.

Таким образом, в общем случае решение задачи термовязкоупругости для затвердевающей отливки следует выполнять с учетом зависимости времени релаксации (так же, как и других механических характеристик металла) от температуры, что вызывает необходимость привлечения численных методов решения.

В связи с использованием численного метода решения задачи термовязкоупругости естественно обобщить также постановку задачи теплопроводности для затвердевающей отливки и вместо предельно упрощенных выражений для распределения температуры по сечению затвердевающего слоя (см. выше) осуществляется решение задачи о квазиравновесной кристаллизации слитка в интервале температур $(T_{\text{лик}} - T_{\text{сол}})$, когда вместо гладкой границы раздела фаз учитывается представление о наличии двухфазной зоны.

Решение задачи теплопроводности для затвердевающего расплава проводится на основе гипотезы о квазиравновесном протекании процесса кристаллизации сплава [25]. При этом уравнение переноса теплоты для затвердевающей отливки дополняется источником теплоты, мощность которого прямо пропорциональна скорости выделения твердой фазы (кристаллов):

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \rho L \frac{\partial g}{\partial t}, \quad (37)$$

где g – относительная доля твердой фазы, выделившейся при температуре T внутри интервала кристаллизации. Согласно упомянутой квазиравновесной схеме, уравнение (37) заменяется следующим нелинейным уравнением:

$$\rho c_{\text{эф}}(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (38)$$

где эффективная удельная теплоемкость металла определяется формулой:

$$c_{\text{эф}} = \begin{cases} c_0 - L \frac{dg}{dT} & \text{при } T_{\text{сол}} \leq T \leq T_{\text{лик}}, \\ c_0 & \text{при } T > T_{\text{лик}}. \end{cases} \quad (39)$$

Уравнение (37) интегрируется при следующих краевых условиях:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=S} = \alpha_k (T_{\text{пов}} - T_c) + \sigma_c (T_{\text{пов}}^4 - T_c^4), \quad (40)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, \quad (41)$$

$$T = T_{\text{нач}} \text{ при } t = 0, \quad (42)$$

где α_k, σ_c — коэффициенты конвективного и радиационного теплообмена на внешней охлаждаемой поверхности отливки; $T_{\text{нач}}$ — функция начального распределения температуры. Система уравнений (37) — (42) интегрируется с помощью численного метода конечных разностей, что обеспечивает достаточную для практических целей точность решения задачи при задании начального поля температуры и интенсивности внешнего охлаждения путем использования определенных коэффициентов конвективного и радиационного теплообмена (α_k, σ_c). Значения параметра τ_p определяются в соответствии с локальными значениями температуры в отдельных точках сечения охлаждаемой отливки $T(x, t)$:

$$\tau_p = \tau_p(T) = A_1 \exp(-k_1 T), \quad (43)$$

где коэффициенты A_1 и k_1 приняты равными соответственно $\approx 2,5 \cdot 10^5$ и $\approx 0,014$ (1/К) на основе обработки эмпирических материалов по высокотемпературной ползучести углеродистой стали [4].

В качестве примера использования указанного способа расчета термических напряжений на рис. 7 показано изменение двух показателей процесса — температуры на охлаждаемой поверхности отливки ($T_{\text{пов}}$) и максимальных растягивающих напряжений ($\Phi = \sigma_{yy}$) для плоской стальной заготовки толщиной $2S = 0,175$ м при задании коэффициентов теплообмена $\alpha_k = 558$ Вт/(м² · К), $\sigma_c = 4,46 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м² · К⁴) и трех значений температуры охлаждающей среды (350, 500 и 650 К).

Анализ результатов численного решения задачи термовязкоупругости для затвердевающей отливки позволяет сделать следующие заключения:

1) использование обобщенных граничных условий задачи теплопроводности с учетом радиационного и конвективного теплообмена на охлаждаемой поверхности отливки не повлияло на характер распределения термических напряжений в сечении твердой корки, так же, как при допущении постоянства температуры поверхности отливки (см. решения Пальмова и Бровмана — Сурина), поверхность отливки подвержена сжимающим напряжениям, а растягивающие усилия

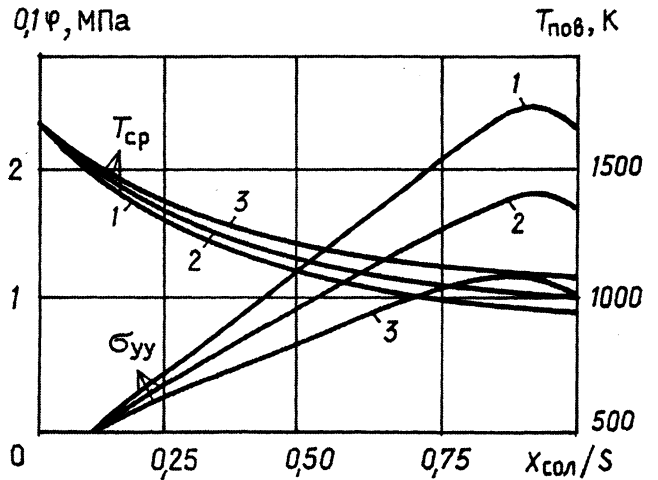


Рис. 7. Изменение максимальной величины растягивающих напряжений $\Phi = \sigma_{yy}$ и температуры на охлаждаемой поверхности отливки толщиной $2S = 0,175$ м при задании трех значений температуры охлаждающей среды: 1 — $T_c = 350$ К; 2 — 500; 3 — 650 К

действуют в слое твердой корки, примыкающем к условной границе раздела фаз;

2) детальный анализ распределения температуры в сечении затвердевающей отливки показал возможность использования стабилизированных распределений температуры:

для двухфазной зоны отливки ($x_{\text{сол}} < x \leq x_{\text{лик}}$)

$$T(x, x_{\text{сол}}) = T_{\text{сол}} + (T_{\text{лик}} - T_{\text{сол}}) \left[1 - \left(\frac{S-x}{S-x_{\text{сол}}} \right)^m \right]; \quad (44)$$

для твердой корки отливки ($0 \leq x \leq x_{\text{сол}}$)

$$T(x, x_{\text{сол}}) = T_{\text{сол}} - (T_{\text{сол}} - T_{\text{пов}}) \left(1 - \frac{x}{x_{\text{сол}}} \right)^n, \quad (45)$$

причем показатели изменяются в достаточно узких пределах $m = 2 - 3$; $n = 1,05 - 1,30$.

Очевидно, что изложенные результаты анализа температурного поля отливки обобщают предложенное А.И. Вейником распределение температуры по толщине затвердевшего слоя для более общей постановки задачи, учитывающей наличие двухфазной зоны (расплав плюс растущие кристаллы).

Следует отметить, что в данной работе приведен весьма краткий обзор упрощенных методов расчета термических напряжений в затвердевающих слитках и заготовках. Вместе с тем очевидно, что при решении задач определения напряженно-деформированного состояния металла в процессе его затвердевания необходимо учитывать такие специфические эффекты, как “эффект наращивания” и эффект релаксации напряжений при повышенных температурах.

Литература

1. Бровман М. Я., Сурин Е. В. Расчет термических напряжений в слитке при кристаллизации // Инж.-физ. журн. 1963. Т. 6, №5. С. 106–113.
2. Пальмов В. А. О напряжениях, возникающих при затвердевании материалов // Механика твердого тела. 1967. №4. С. 80–85.
3. Журавлев В. А., Генкин В. Я. Термические напряжения в среде с подвижной границей. Прикладная механика. Киев: Изд-во АН УССР. 1974. Т. 10. Вып. 4. С. 4–8.
4. Самойлович Ю. А., Ушакова Р. Г. Термические напряжения в стальном слитке, остывающем в изложнице // Сб. тр. ВНИИМТ. Теплофизика и теплотехника в металлургии. Свердловск, 1969. №19. С. 199–211.
5. Самойлович Ю. А., Кабаков З. К. Учет эффекта релаксации при определении термических напряжений в отливке, затвердевающей в интервале температур // Сб. тр. ВНИИМТ. Горение, теплообмен и нагрев металла. 1973. №24. С. 100–113.
6. Пальмерс А. и др. Расчет механических и термических напряжений в непрерывнолитой заготовке // Черные металлы: Пер. с нем. 1979. №19. С. 3–11.
7. Kinoshita K. et al., Thermal Elasto – Plastic Stress Analyses of Solidifying Shell in Continuous Casting Mould // Tetsu-To-Hagane: in Japanese. 1979. Vol. 65. P. 2022–2031.
8. Sorimachi K., Brimacombe J. K. Improvements in Mathematical Modeling of Stresses in Continuous Casting of Steel // Ironmaking and Steelmaking. 1977. Vol.4. P. 240–245.
9. Kristiansson J. O. Thermal Stresses in the Early Stage of Solidification of Steel // J. Therm. Stresses. 1982. Vol. 5. P. 315–330.
10. Samarasekera I. V. et. al. The Thermal Distortion of Continuous – Casting Billet Mould // Metall. Trans. 1982. Ser. B. Vol. 13. P. 209–104.
11. Kristiansson J. O. Thermomechanical Behavior of the Solidifying Shell within Continuous – Casting Billet Molds // A Numerical Approach. J. of Thermal Stresses. 1984. Vol. 7. P. 209–226.
12. Тимошпольский В. И., Севастьянов П. В., Бобров В. Н., Гурвич Э. А. Расчет затвердевания стального слитка в изложнице при конвективном теплообмене жидкого ядра и двухфазной зоны // Докл. АН БССР. 1989. Т. 33, №9.
13. Расчетно-теоретическое исследование температурных полей и термонапряжений заготовок в ходе непрерывного литья / В. И. Тимошпольский, И. А. Трусова, С. М. Козлов и др. // Изв. вузов и энергет. объедин. СНГ. Энергетика. 2001. №4. С. 54–60.
14. Бровман М. Я., Сурин Е. В. Энергосиловые параметры установок непрерывной разливки стали. М.: Металлургия, 1969.
15. Самойлович Ю. А. Микрокомпьютер в решении задач кристаллизации слитка. М.: Металлургия, 1988.
16. Цаплин А. И. Теплофизика внешних воздействий при кристаллизации стальных слитков на машинах непрерывного литья. Екатеринбург: Изд-во УРО РАН, 1995.
17. Промышленные теплотехнологии: моделирование нелинейных процессов: Учеб. / В. И. Тимошпольский, И. А. Трусова, А. П. Несенчук и др.; Под общ. ред. В. И. Тимошпольского, А. П. Несенчука. Мн.: Выш. шк., 2000. Т. 5.
18. Бровман М. Я., Сурин Е. В. Оптимальные режимы вторичного охлаждения на установках непрерывной разливки стали // Сталь. 1965. №1. С. 31–32.
19. Морозенский Л. И., Митенев О. А., Крутиков В. К. К вопросу о горячих продольных трещинах на непрерывных литых слябах // Сталь. 1965. №4. С. 312–317.
20. Мурасов Ф. М., Чижиков А. И. и др. К вопросу о режимах вторичного охлаждения широких слябов // Тр. 4-й конф. по слитку. М.: Металлургия, 1969. Т. 4. С. 524–528.
21. Нисковских В. М., Карлинский С. Е., Беренов А. Д. Машины непрерывного литья слябовых заготовок. М.: Металлургия, 1991.
22. Дергунов И. Д. Определение периода релаксации углеродистых сталей и цветных металлов // Журн. техн. физики. 1951. Т. 21. Вып. 12. С. 1526–1534.
23. Самойлович Ю. А., Тимошпольский В. И., Трусова И. А., Маточкин В. А. Теоретические основы расчета температур, термовязкоупругих напряжений и деформаций в корке непрерывнолитой заготовки // Изв. вузов и энергет. объедин. СНГ. Энергетика. 2002. №3. С. 48–56.
24. Самойлович Ю. А., Тимошпольский В. И., Трусова И. А., Маточкин В. А. Расчет температур, напряжений и деформаций при производстве непрерывнолитых заготовок. Сообщение I. Решение связанных задач нестационарной термовязкоупругости для затвердевающих заготовок в ходе непрерывного литья // Литье и металлургия. 2002. №3. С. 53–59.
25. Самойлович Ю. А. Формирование слитка. М.: Металлургия, 1977.
26. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964.