УДК 621.3.061

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕДАЧ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПНЫХ СХЕМ

Докт. техн. наук САФАРЯН В. С., инж. САФАРЯН Л. В.

ЗАО «Научно-исследовательский институт энергетики»
(Республика Армения)

Известно, что однородные электрические цепи с распределенными параметрами могут быть представлены каскадно соединенными одинаковыми симметричными четырехполюсниками – однородной цепной схемой. При исследовании и расчете таких схем представляет практический интерес нахождение передаточных функций (по напряжению, току) между различными ступенями цепной схемы [1].

Согласно алгебре структурных чисел [2] коэффициенты передачи по напряжению и току четырехполюсника определяются формулами:

$$K_U = \frac{U_b}{U_a} = \left(\frac{Ж_b - Ж_{ba}}{Ж_a}\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad (1)$$

$$K_I = \frac{I_b}{I_a} = \left(\frac{Ж_a - Ж_{ab}}{Ж_b}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (2)$$

где Z_a, Z_b – входные сопротивления четырехполюсника со стороны зажимов $a-a'$ и $b-b'$ при холостом ходе; Z_{ab}, Z_{ba} – входные сопротивления четырехполюсника со стороны зажимов $a-a'$ и $b-b'$ в режиме короткого замыкания (рис. 1). Отметим, что все величины в статье представлены в операторной форме.

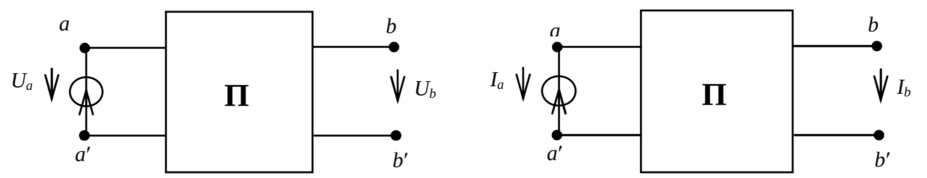

Рис. 1

Согласно свойству взаимности (обратимости) четырехполюсника [1] из рис. 2 имеем:

$$K_U^a = \frac{U}{JЖ_a}, \quad K_U^b = \frac{U}{JЖ_b}, \quad \frac{K_U^a}{K_U^b} = \frac{Ж_b}{Ж_a};$$

$$K_I^a = \frac{IЖ_{ab}}{E}, \quad K_I^b = \frac{IЖ_{ba}}{E}, \quad \frac{K_I^a}{K_I^b} = \frac{Ж_{ab}}{Ж_{ba}},$$

где верхний индекс коэффициента передачи относится к стороне питания четырехполюсника. Отсутствие верхнего индекса указывает на то, что питание осуществляется со стороны зажимов $a - a'$.

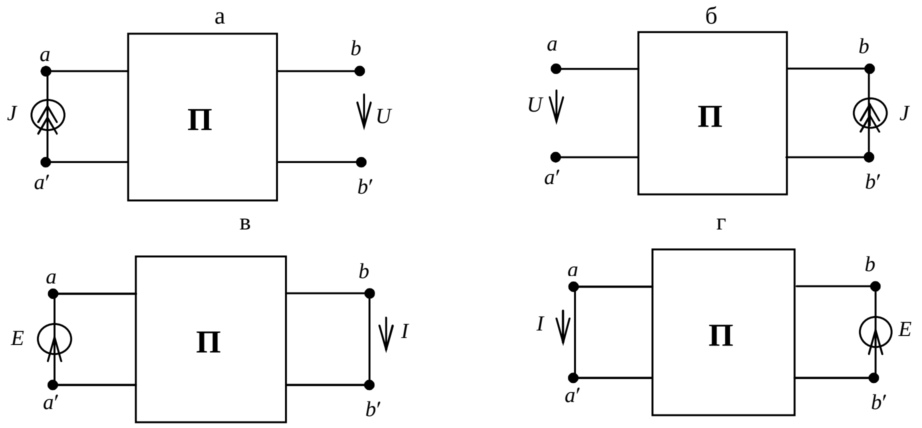

Рис. 2

По аналогии (1), (2) можно записать:

$$K_U^b = \left(\frac{Ж_a - Ж_{ab}}{Ж_b} \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$K_I^b = \left(\frac{Ж_b - Ж_{ba}}{Ж_a} \right)^{\frac{1}{2}},$$

т. е.

$$K_U^a = K_I^b; \quad K_U^b = K_I^a.$$

Выразим коэффициенты передачи четырехполюсника K'_U, K', загруженного на сопротивление $Ж_0$ (рис. 3), через коэффициенты передачи в режимах холостого хода K_U и короткого замыкания K_{I}.

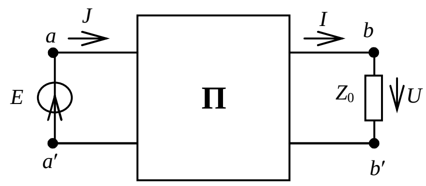

Рис. 3

Согласно методу эквивалентного генератора [1] имеем

$$I = \frac{K_U E}{Ж_0 + Ж_{ba}},$$

следовательно,

$$U = \frac{K_U Ж_0}{Ж_0 + Ж_{ba}} E;$$

$$K'_U = \frac{U}{E} = \frac{Ж_0}{Ж_0 + Ж_{ba}} K_U . \qquad (3)$$

Для коэффициента передачи по току аналогично приведенному выше получим:

$$U = \frac{K_I J}{Y_0 + Y_b} ;$$

$$I = \frac{K_I Y_0}{Y_0 + Y_b} J ;$$

$$K'_I = \frac{I}{J} = \frac{Y_0}{Y_0 + Y_b} K_I . \qquad (4)$$

Из (3) и (4) с учетом (1), (2) имеем

$$\frac{K'_I}{K'_U} = \frac{Z_b}{Z_b + Z_0} \sqrt{\frac{Z_a - Z_{ab}}{Z_b}} \, \frac{Z_0 + Z_{ba}}{Z_0} \sqrt{\frac{Z_a}{Z_b - Z_{ba}}} =$$

$$= \frac{Z_0 + Z_{ba}}{Z_0 (Z_b + Z_0)} \sqrt{\frac{Z_a Z_b (Z_a - Z_{ab})}{Z_b - Z_{ba}}} = \frac{Z_a (Z_0 + Z_{ba})}{Z_0 (Z_b + Z_0)} = \frac{Z_a^0}{Z_0} ,$$

где Z_a^0 представляет входное сопротивление четырехполюсника, загруженного на сопротивление Z_0 (рис. 3).

Таким образом, получаем

$$K'_I = \frac{Z_a^0}{Z_0} K'_U . \qquad (5)$$

С применением алгебры структурных чисел [2] получены рекуррентные соотношения определения входных сопротивлений цепной схемы, состоящей из одинаковых четырехполюсников (рис. 4):

$$Ж_{ia} = \frac{Ж_{ab} Ж_b + Ж_{(i-1)a} Ж_a}{Ж_b + Ж_{(i-1)a}} ; \qquad (6)$$

$$Ж_{ib} = \frac{Ж_{ba} Ж_a + Ж_{(i-1)b} Ж_b}{Ж_a + Ж_{(i-1)b}} ; \qquad (7)$$

$$Ж_{iab} = \frac{Ж_{ab} Ж_b + Ж_{(i-1)ab} Ж_a}{Ж_b + Ж_{(i-1)ab}} ; \qquad (8)$$

$$Ж_{iba} = \frac{Ж_{ba} Ж_a + Ж_{(i-1)ba} Ж_b}{Ж_a + Ж_{(i-1)ba}} , \qquad (9)$$

где $Ж_{ia} (Ж_{ib})$ – входное сопротивление цепной схемы со стороны зажимов $a - a'$ $(b - b')$ при холостом ходе; $Ж_{iab} (Ж_{iba})$ – входное сопротивление со стороны зажимов $a - a'$ $(b - b')$ при коротком замыкании. Отметим, что в обозначениях $\text{Ж}_{ia}, \text{Ж}_{ib}, \text{Ж}_{iab}, \text{Ж}_{iba}$ первым индексом отмечается число блоков (четырехполюсников) цепной схемы (рис. 4).

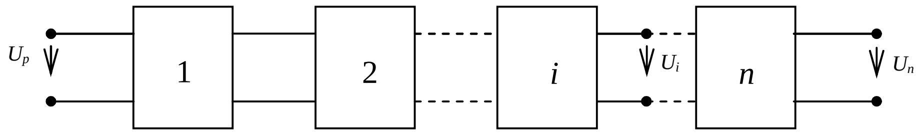

Рис. 4

Определим также входные сопротивления бесконечной цепной схемы [2]:

$$\text{Ж}_{\infty a} = \frac{1}{2}\left[\text{Ж}_a - \text{Ж}_b + \sqrt{\left(\text{Ж}_a - \text{Ж}_b\right)^2 + 4\text{Ж}_{ab}\text{Ж}_b}\right];$$

$$\text{Ж}_{\infty b} = \frac{1}{2}\left[\text{Ж}_b - \text{Ж}_a + \sqrt{\left(\text{Ж}_b - \text{Ж}_a\right)^2 + 4\text{Ж}_{ba}\text{Ж}_a}\right],$$

и характеристические сопротивления цепной схемы:

$$\text{Ж}_{ixa} = \sqrt{\text{Ж}_{iab}\text{Ж}_{ia}};$$

$$\text{Ж}_{ixb} = \sqrt{\text{Ж}_{iba}\text{Ж}_{ib}}.$$

Между четырьмя параметрами $\left(\text{Ж}_a, \text{Ж}_b, \text{Ж}_{ab}, \text{Ж}_{ba}\right)$ существует общеизвестное соотношение

$$\text{Ж}_{ab}\text{Ж}_b = \text{Ж}_{ba}\text{Ж}_a = K_0. \qquad (10)$$

Определим некоторые обобщенные параметры, которые инвариантны по отношению числа блоков цепной схемы.

Покажем, что

$$\text{Ж}_{ia} - \text{Ж}_{ib} = \text{Ж}_a - \text{Ж}_b = \text{ДЖ}. \qquad (11)$$

Доказываем методом математической индукции.

Для i = 2 имеем

$$\text{Ж}_{2a} - \text{Ж}_{2b} = \frac{\text{Ж}_{ab}\text{Ж}_b + \text{Ж}_a^2}{\text{Ж}_a + \text{Ж}_b} - \frac{\text{Ж}_{ba}\text{Ж}_a + \text{Ж}_b^2}{\text{Ж}_a + \text{Ж}_b} = \frac{\text{Ж}_a^2 - \text{Ж}_b^2}{\text{Ж}_a + \text{Ж}_b} = \text{Ж}_a - \text{Ж}_b.$$

Полагая, что (11) имеет место для i – 1, покажем, что оно имеет место и для i

$$\text{Ж}_{ia} - \text{Ж}_{ib} = \frac{K_0 + \text{Ж}_{(i-1)a}\text{Ж}_a}{\text{Ж}_b + \text{Ж}_{(i-1)a}} - \frac{K_0 + \text{Ж}_{(i-1)b}\text{Ж}_b}{\text{Ж}_a + \text{Ж}_{(i-1)b}} = \frac{K_0 + \text{Ж}_{(i-1)a}\text{Ж}_a}{\text{Ж}_a + \text{Ж}_{(i-1)b}} - \frac{K_0 + \text{Ж}_{(i-1)b}\text{Ж}_b}{\text{Ж}_a + \text{Ж}_{(i-1)b}} =$$

$$= \frac{\text{Ж}_{(i-1)a}\text{Ж}_a - \text{Ж}_{(i-1)b}\text{Ж}_b}{\text{Ж}_a + \text{Ж}_{(i-1)b}} = \frac{\left(\text{Ж}_{(i-1)a} - \text{Ж}_{(i-1)b} + \text{Ж}_{(i-1)b}\right)\text{Ж}_a - \text{Ж}_{(i-1)b}\text{Ж}_b}{\text{Ж}_a + \text{Ж}_{(i-1)b}} =$$

$$= \frac{ДЖЖ_a + Ж_{(i-1)b}ДЖ}{Ж_a + Ж_{(i-1)b}} = ДЖ$$

Покажем, что

$$Ж_{iab}Ж_{ib} = Ж_{ab}Ж_b = K_0. \qquad (12)$$

Доказываем методом математической индукции.

Для $i = 2$ имеем

$$Ж_{2ab}Ж_{2b} = \frac{Ж_{ab}Ж_b + Ж_{ab}Ж_a}{Ж_b + Ж_{ab}} \frac{Ж_{ba}Ж_a + Ж_b^2}{Ж_a + Ж_b} = \frac{Ж_{ab}}{Ж_b + Ж_{ab}}\left(Ж_{ab}Ж_b + Ж_b^2\right) = Ж_{ab}Ж_b .$$

Полагая, что (12) имеет место для i – 1, покажем, что оно имеет место и для i

$$Ж_{iab}Ж_{ib} = \frac{K_0 + Ж_{(i-1)ab}Ж_a}{Ж_b + Ж_{(i-1)ab}} \frac{K_0 + Ж_{(i-1)b}Ж_b}{Ж_a + Ж_{(i-1)b}} =$$

$$= \frac{K_0^2 + K_0\left(Ж_{(i-1)ab}Ж_a + Ж_{(i-1)b}Ж_b\right) + Ж_aЖ_bK_0}{Ж_aЖ_b + Ж_{(i-1)b}Ж_b + Ж_{(i-1)ab}Ж_a + K_0} = K_0.$$

Из (10) и (12) следует:

$$Ж_{iab}Ж_{ib} = Ж_{iba}Ж_{ia} = K_0. \qquad (13)$$

Воспользуясь соотношением (13), имеем

$$Ж_{ixa}Ж_{ixb} = K_0 .$$

Согласно (1), коэффициент передачи по напряжению цепной схемы примет вид

$$K_{iU}^2 = \frac{U_i^2}{U_0^2} = \frac{\dfrac{Ж_{ib}Ж_{(n-i)a}}{Ж_{ib} + Ж_{(n-i)a}} - \dfrac{Ж_{iba}Ж_{(n-i)a}}{Ж_{iba} + Ж_{(n-i)a}}}{Ж_{na}} = \frac{Ж_{(n-i)a}}{Ж_{na}}\left(\frac{Ж_{ib}}{Ж_{ib} + Ж_{(n-i)a}} - \frac{Ж_{iba}}{Ж_{iba} + Ж_{(n-i)a}}\right).$$

При $n \to \infty$ для K_{Ui}^2 имеем:

$$K_{iU}^2 = \frac{Ж_{ib}}{Ж_{ib} + Ж_{\infty a}} - \frac{Ж_{iba}}{Ж_{iba} + Ж_{\infty a}} ,$$

или же

$$K_{iU} = \sqrt{\frac{Ж_{\infty a}\left(Ж_{ib} - Ж_{iba}\right)}{\left(Ж_{ib} + Ж_{\infty a}\right)\left(Ж_{iba} + Ж_{\infty a}\right)}} .$$

При $i = 1$ имеем

$$K_U = K_{1U} = \sqrt{\frac{Ж_{\infty a}\left(Ж_b - Ж_{ba}\right)}{\left(Ж_b + Ж_{\infty a}\right)\left(Ж_{ba} + Ж_{\infty a}\right)}} . \qquad (14)$$

Исходя из физических соображений, при $n \to \infty$ можно показать, что

$$K_{iU} = K_U^i . \qquad (15)$$

Для определения K_U бесконечную цепную схему представим в следующем виде (рис. 5):

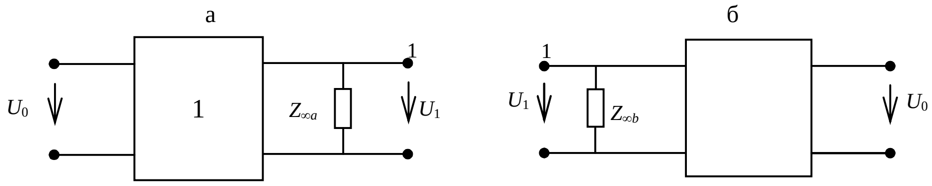

Рис. 5

Применяя формулу (3), для схемы рис. 5а получим результат (14).

Воспользуясь соотношением

$$\frac{Ж_{ab}Ж_b + Ж_{\infty a}Ж_a}{Ж_b + Ж_{\infty a}} = Ж_{\infty a},$$

перепишем (14) в виде

$$K_U = \frac{Ж_{\infty a}\sqrt{Ж_b - Ж_{ba}}}{\left(Ж_{\infty a} + Ж_{ba}\right)\sqrt{Ж_a}} = \frac{\sqrt{Ж_a\left(Ж_b - Ж_{ba}\right)}}{Ж_{\infty a} + Ж_b}.$$

Представим выражения (6)…(9) в нерекуррентных формах. Представим (14), (15) в виде:

$$\frac{Ж_{ib}}{Ж_{ib} + Ж_{\infty a}} - \frac{\dfrac{K_0}{Ж_{ia}}}{\dfrac{K_0}{Ж_{ia}} + Ж_{\infty a}} = C^i,$$

или же

$$\frac{Ж_{ib}}{Ж_{ib} + Ж_{\infty a}} - \frac{K_0}{K_0 + Ж_{ia}Ж_{\infty a}} = C^i, \qquad (16)$$

где $C = K_U^2$.

Совместным решением (11), (16) получаем:

$$Ж_{ia} = \frac{Ж_{\infty a}^2 + K_0 C^i}{(1 - C^i)Ж_{\infty a}}; \qquad (17)$$

$$Ж_{ib} = \frac{Ж_{\infty b}^2 + K_0 C^i}{(1 - C^i)Ж_{\infty b}}. \qquad (18)$$

Для $Ж_{iab}$ и $Ж_{iba}$ получаем:

$$Ж_{iab} = \frac{K_0}{Ж_{ib}} = \frac{K_0(1 - C^i)Ж_{\infty b}}{Ж_{\infty b}^2 + K_0 C^i}; \qquad (19)$$

$$Ж_{iba} = \frac{K_0}{Ж_{ia}} = \frac{K_0(1 - C^i)Ж_{\infty a}}{Ж_{\infty a}^2 + K_0 C^i}. \qquad (20)$$

Отметим также, что коэффициент передачи по току для схемы рис. 5а равен коэффициенту передачи по напряжению той же схемы. Это непосредственно следует из соотношения (5).

Нетрудно заметить, что коэффициент передачи по напряжению (току) четырехполюсника рис. 5а равен коэффициенту передачи по напряжению (току) четырехполюсника рис. 5б.

Для цепной схемы, состоящей из конечного числа одинаковых несимметричных четырехполюсников, загруженных на сопротивление $\dot{Z}_0$ (рис. 6), на основе формулы (3) получаем следующее рекуррентное соотношение для коэффициента передачи по напряжению:

$$K_{iU} = \frac{U_i}{U_0} = \frac{U_{i-1}}{U_0}\frac{U_i}{U_{i-1}} = K_{(i-1)U} K_U \frac{\dot{Z}^{\theta}_{(n-i)a}}{\dot{Z}^{\theta}_{(n-i)a} + \dot{Z}_{ba}},$$

где $\dot{Z}^{\theta}_{(n-i)a}$ – входное сопротивление цепной схемы из $n-i$ четырехполюсников, загруженный на сопротивление $\dot{Z}_0$. Сопротивление $\dot{Z}^{\theta}_{ia}$ выражается через сопротивление $\dot{Z}_{ia}$ формулой [2]

$$\dot{Z}^{\theta}_{ia} = \frac{\dot{Z}_{ab}\dot{Z}_b + \dot{Z}_0\dot{Z}_{ia}}{\dot{Z}_{ib} + \dot{Z}_0}.$$

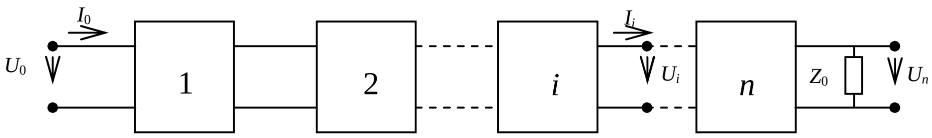

Рис. 6

Аналогично для коэффициента передачи по току получаем

$$K_{iI} = \frac{I_i}{I_0} = K_{(i-1)I} K_I \frac{\dot{Z}_b}{\dot{Z}_b + \dot{Z}^{\theta}_{a(n-i)}}.$$

Согласно формуле (5), имеем

$$\frac{K_{iI}}{K_{iU}} = \frac{\dot{Z}^{\theta}_{na}}{\dot{Z}^{\theta}_{a(n-i)}}.$$

Для цепной схемы, состоящей из одинаковых симметричных четырехполюсников, работающей в режиме холостого хода (рис. 4), формулы (16)…(19) примут вид:

$$\dot{Z}_{ia} = \dot{Z}_{ib} = \frac{1+C^i}{1-C^i}\dot{Z}_x;$$

$$\dot{Z}_{iba} = \dot{Z}_{iab} = \frac{1-C^i}{1+C^i}\dot{Z}_x,$$

а коэффициенты передачи по напряжению и току:

$$K_{iU}=\frac{1+C^{n-i}}{1+C^{n}}C^{i/2};$$

$$K_{iI}=\frac{1-C^{n-i}}{1-C^{n}}C^{i/2},$$

где

$$Ж_x=\sqrt{K_0}\,,\quad C=\frac{\sqrt{Ж_a}-\sqrt{Ж_{ab}}}{\sqrt{Ж_a}+\sqrt{Ж_{ab}}}.$$

Для цепной схемы, состоящей из одинаковых симметричных четырехполюсников, загруженных на сопротивление Z_0 (рис. 6), получим:

$$Ж_{ia}^{0}=\frac{1+бC^{i}}{1-бC^{i}}Ж_x;$$

$$K_{iU}=\frac{1+\alpha C^{n-i}}{1+\alpha C^{n}}C^{i/2};$$

$$K_{iI}=\frac{1-\alpha C^{n-i}}{1-\alpha C^{n}}C^{i/2};$$

где

$$\alpha=\frac{Ж_0-Ж_x}{Ж_0+Ж_x}.$$

ВЫВОД

В работе получены соотношения, определяющие входные сопротивления и коэффициенты передачи с любых *i*-х пар зажимов однородной цепной схемы, выраженные через параметры одного четырехполюсника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атабеков Г. И. Основы теории цепей. – М.: Энергия, 1972. – 424 с.
2. Беллерт С., Возняцки Г. Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел. – М.: Мир, 1972. – 330 с.

Представлена Ученым советом Поступила 18.12.2003